УДК 519.68(001.4)

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ РАЗМЕЩЕНИИ ОБЪЕКТОВ

Козина Г.Л., к.ф.-м.н., доцент, Семений Т.В., студент

Запорожский государственный университет

Одной из ключевых проблем, возникающих при решении различных задач, является поиск и выбор оптимальных в некотором смысле решений. Многообразие, а часто и противоречивость различных требований к проектируемой системе или оптимизируемому объекту, неполнота информации, неточность используемых моделей неизбежно приводят к тому, что реальные задачи оптимизации приходится решать в условиях неопределенности [1,3].

Рассмотрим проблему выбора оптимальных маршрутов при неопределенном размещении объектов. Такая проблема может возникнуть при проектировании, планировании строительства нескольких объектов (например, нескольких заводских зданий), между которыми существуют некоторые связи (например, газопроводные трубы). Причем территория, на которой может быть построен каждый из объектов, во много раз превосходит размер самого объекта. Следовательно, расстояния между объектами могут колебаться в некоторых пределах. Необходимо найти такой маршрут трубопровода между планируемыми объектами, который, не образовывая циклов, имел бы минимальную длину.

При описании математической постановки задачи рассмотрим граф, вершинами которого будут объекты строительства, а ребрами – расстояния между этими объектами. Ребрам графа припишем вес, имеющий вид интервала (т.к. расстояния между объектами точно не определены). Все возможные варианты маршрутов будут являться остовными деревьями данного графа. Оптимальным решением такой задачи будет остовное дерево (или несколько деревьев), имеющие наименьший вес.

При фиксированном расположении объектов имеет место вещественная постановка задачи об остовном дереве минимального веса. Для решения этой задачи существуют два алгоритма нахождения ее оптимального решения – алгоритмы Прима и Краскала.

При интервальной постановке задачи о минимальном остовном дереве существуют два подхода к определению наилучшего решения. Первый подход был предложен Перепелицей В.А. и Козиной Г.Л. [2,4] и заключается в определении паретовского множества на множестве всех допустимых решений задачи. Второй подход, предложенный турецкими учеными Hande Yaman, Oya Ekin Karasan, Mustafa G. Pinar в [5], вводит в рассмотрение постоянные и слабые решения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан обыкновенный неориентированный граф G со множеством вершин V и множеством ребер E $(G=(V,E))$. Пусть каждому ребру e графа G приписан интервальный вес $c(e)$, т.е. вес ребра колеблется в пределах некоторого интервала: $c(e)=[\underline{c(e)},\overline{c(e)}]$.

Допустимым решением рассматриваемой задачи является остовное дерево: $T=(V,E_T)$, где V – множество вершин исходного графа, E_T – множество ребер, относящихся к данному решению T. Множество допустимых решений обозначим через Г.

Вес допустимого решения T определяем следующим образом:

$$c_T=\sum_{e\in E_T}c(e)=\left[\sum_{e\in E_T}\underline{c(e)},\sum_{e\in E_T}\overline{c(e)}\right]=\left[\underline{c_T},\overline{c_T}\right].$$

Далее будем рассматривать задачи, оптимальным решением которых является допустимое решение, имеющее наименьший вес. Поскольку вес допустимого решения является интервалом, то для сравнения решений необходимо ввести порядок на множестве Γ.

ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим два паретовских множества P_1 и P_2, порождаемых порядками, введенными на множестве допустимых решений Γ.

Допустимое решение T' *"лучше"* допустимого решения T, если концы интервала $c_{T'}$ не превосходят соответствующих концов интервала c_T $\left(\underline{c}_T \le \underline{c}_{T'}, \overline{c_T} \le \overline{c_{T'}}\right)$ и хотя бы один конец интервала $c_{T'}$ строго меньше соответствующего конца интервала c_T. Допустимое решение $\widetilde{T}$ называется *паретовским оптимумом*, если для него не существует "лучшего" допустимого решения. Множество, состоящее из таких паретовских оптимумов, называют *паретовским множеством*, которое обозначим через P_1.

Этот порядок на множестве допустимых решений был рассмотрен Перепелицей В.А. и Козиной Г.Л. [2]. Рассмотрим также порядок, введенный на множестве допустимых решений, предложенный в [3].

Допустимое решение T' "строго лучше" допустимого решения T, если правый конец интервала $c_{T'}$ строго меньше левого конца интервала c_T, т.е.: $\overline{c_{T'}} < \underline{c_T}$. Допустимое решение $\widetilde{T}$ называется *паретовским оптимумом*, если для него не существует "строго лучшего" допустимого решения. Множество, состоящее из таких паретовских оптимумов, называют *паретовским множеством решений* P_2.

В качестве решения задачи можно принять как множество P_1, так и множество P_2

В роли решения интервальной задачи может выступать как паретовское множество, так и другие множества альтернатив, которые являются его подмножествами. Наиболее распространенными являются полное множество альтернатив и лексикографическое множество, рассмотренные в [4].

После выбора полного множества альтернатив, в нем можно выделить лексикографическое множество альтернатив. В полном множестве альтернатив всегда существует решение T^* с минимальным значением левого предела интервала веса и решение T^{**} с минимальным весом правого предела интервала веса.

Подмножество полного множества альтернатив, которое объединяет решения T^* и T^{**}, называется *лексикографическим множеством альтернатив.* Обозначим лексикографическое множество альтернатив через $\hat{\Gamma}_{lex}$. Отметим, что лексикографическое множество альтернатив может состоять либо из одного, либо из двух элементов. В [4] предложен алгоритм, позволяющий найти всех представителей лексикографического множества альтернатив.

Другим способом нахождения решения интервальной задачи о минимальном остовном дереве является введение в рассмотрение слабых и постоянных деревьев.

Остовное дерево является *постоянным*, если оно является минимальным остовным деревом при всех реализациях весов ребер.

Остовное дерево является *слабым деревом*, если оно является минимальным остовным деревом для некоторой реализации весов ребер графа.

Приведем ниже теоремы, характеризующие постоянные деревья.

Теорема 1 [5]. Остовное дерево является постоянным деревом тогда и только тогда, когда оно является минимальным остовным деревом, если веса всех ребер, принадлежащих этому дереву, находятся на их верхних пределах (границах), а веса всех остальных ребер находятся на их нижних пределах.

Теорема 2 [5]. Остовное дерево является слабым в том и только в том случае, если оно является минимальным остовным деревом, когда веса всех ребер этого дерева находятся на их нижних пределах, а веса остальных ребер – на их верхних пределах.

При данном подходе решением задачи может быть либо постоянное дерево, если оно существует, либо множество слабых решений, если постоянное дерево не существует.

СВЯЗЬ МНОЖЕСТВ ПАРЕТО СО МНОЖЕСТВОМ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Установим связь паретовских множеств решений P_1, P_2 со множеством слабых решений W с помощью следующих теорем.

Теорема 3. Паретовское множество решений P_1 является подмножеством множества слабых решений W.

Доказательство. Пусть T – паретовский оптимум, т.е. $T \in P_1$. Докажем, что $T \in W$.

Возьмем следующую реализацию весов *S*: ребрам, принадлежащим дереву *T*, припишем веса, соответствующие их нижним границам, а всем остальным ребрами графа – веса, соответствующие их верхним границам. Тогда $c_T^S = \underline{c_T}$. Покажем, что при этой реализации весов ребер графа выбранное паретовское решение $T \in P_1$ является минимальным и, следовательно, принадлежит множеству слабых решений *W*.

Предположим противное. Пусть существует решение $T' \in \Gamma$, имеющее меньший вес при выбранной реализации:

$$c_{T'}^S < c_T^S . \tag{1}$$

Для остовного дерева T' имеем:

$$c_{T'}^S = \sum_{e \in T'} c^S(e) = \sum_{e \in T \cap T'} c^S(e) + \sum_{e \in T' \setminus T} c^S(e) = \sum_{e \in T \cap T'} \underline{c(e)} + \sum_{e \in T' \setminus T} \overline{c(e)}$$

В силу (1) имеем

$$c_{T'}^S = \sum_{e \in T \cap T'} \underline{c(e)} + \sum_{e \in T' \setminus T} \overline{c(e)} < \sum_{e \in T \cap T'} \underline{c(e)} + \sum_{e \in T \setminus T'} \underline{c(e)} = \underline{c_T} \tag{2}$$

Так как при любой реализации *S*

$$\underline{c_{T'}} \le c_{T'}^S \le \overline{c_{T'}},$$

то, согласно (2),

$$\underline{c_{T'}} < \underline{c_T} \tag{3}$$

Из (2) также следует

$$\sum_{e \in T' \setminus T} \overline{c(e)} < \sum_{e \in T \setminus T'} \underline{c(e)} \le \sum_{e \in T \setminus T'} \overline{c(e)}$$

или

$$\sum_{e \in T' \setminus T} \overline{c(e)} < \sum_{e \in T \setminus T'} \overline{c(e)} \tag{4}$$

Добавив к обеим частям (4) слагаемое $\sum_{e \in T \cap T'} \overline{c(e)}$, получим

$$\overline{c_{T'}} < \overline{c_T} . \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует, что остовное дерево $T' \in \Gamma$ “лучше” паретовского оптимума *T*, что противоречит определению паретовского оптимума. Найденное противоречие доказывает теорему.

Теорема 4. Множество слабых решений *W* является подмножеством множества паретовских решений P_2.

Доказательство. Пусть *T* – слабое решение, т.е. $T \in W$, и предположим, что $T \notin P_2$. Следовательно, для него существует “строго лучшее” решение T', для которого выполняется неравенство $\overline{c_{T'}} < \underline{c_T}$. Так как решение $T \in W$, то для него существует такая реализация *S* весов ребер $c^S(e)$, $e \in E$, при которой это решение является минимальным и, значит, $c_T^S \le c_{T'}^S$. Цепочка неравенств $\underline{c_T} \le c_T^S \le c_{T'}^S \le \overline{c_{T'}} < \underline{c_T}$.

приводит к противоречию: $\underline{c_T} \le c_T^S < \underline{c_T}$.

Теорема доказана.

В теории принятия решений в качестве одного из критериев выбора наилучшего решения используют критерий “идеальной точки”.

Каждому допустимому решению T сопоставим его образ $c(T)=(\underline{c}_T, \overline{c_T})$ в двумерном пространстве R^2.

Если на оси Ox отложить значение нижних границ $\underline{c}_T$ весов всех допустимых решений $T\in P_1$, а на оси Oy – значения их верхних границ $\overline{c}_T$, то тогда *идеальной точкой* U назовем точку с координатами (u,v), где

$$u = \min_{T\in P_1} \underline{c}_T, \quad v = \min_{T\in P_1} \overline{c}_T.$$

Введем в понятие расстояния от образа $c(T)=(a,b)$ в R^2 допустимого решения T до идеальной точки U:

$$\rho(c(T),U) = \sqrt{(a-u)^2 + (b-v)^2}.$$

Сформулируем и докажем теорему о связи паретовского решения, слабого непаретовского решения и идеальной точки.

Теорема 5. Если T_0 – слабое непаретовское решение, то для него существует паретовское решение $T^*\in P_1$, "лучшее" его, и образ его находится ближе к идеальной точке U, т.е.

$$\rho(c(T^*),U) < \rho(c(T_0),U).$$

Доказательство. Сопоставим решениям T_0 и T^* их образы в пространстве R^2, имеющие координаты (a,b) и (c,d) соответственно. Пусть U - идеальная точка, имеющая координаты (u,v). Из условия теоремы следует, что $c \le a$ и $d \le b$, причем одно из этих неравенств - строгое. Следовательно,

$$(c-u)^2 + (d-v)^2 < (a-u)^2 + (b-v)^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. Если существует постоянное дерево, то оно принадлежит паретовскому множеству P_1.

Доказательство. Пусть T – постоянное дерево. Докажем, что $T\in P_1$.

Предположим, что $T\notin P_1$, т.е. существует допустимое решение T', "лучшее" T. Тогда выполняются неравенства

$$\underline{c}_{T'} \le \underline{c}_T, \quad \overline{c_{T'}} \le \overline{c_T},$$

и, по крайней мере, одно из них - строгое. Пусть для определенности

$$\underline{c}_{T'} < \underline{c}_T \qquad (6)$$

Так как T является постоянным деревом, то для него верно следующее неравенство, которое выполняется для любых реализаций S:

$$c_T^S \le c_{T'}^S.$$

Рассмотрим реализацию S', при которой веса всех ребер графа находятся на их нижних пределах. Для этой реализации справедливо неравенство

$$\underline{c}_T \le \underline{c}_{T'}.$$

Отсюда, учитывая (6), приходим к противоречию: $\underline{c}_T \le \underline{c}_{T'} < \underline{c}_T$.

Теорема доказана.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОСУЩЕСТВЛЕНИЮ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ РАЗМЕЩЕНИИ ОБЪЕКТОВ

Сформулировав и доказав теоремы, определяющие связь паретовских множеств со множеством слабых деревьев, мы получили следующие включения:

1) $P_1 \subseteq W \subseteq P_2$,

2) если T – постоянное дерево, то $T\in P_1$.

Для поставленной нами задачи о выборе оптимального маршрута при неопределенном размещении объектов наилучшим решением является постоянное дерево. Но если постоянного дерева не существует, то тогда в качестве решения задачи мы берем паретовское множество решений P_1.

Если множество Парето P_1 состоит из большого числа элементов (более двух), то в качестве решения задачи можно взять лексикографическое множество решений, которое является подмножеством паретовского множества P_1 : $\hat{\Gamma}_{lex} \subseteq P_1$. В этом случае оптимальными будут либо одно, либо два решения, что значительно облегчает выбор для лица, принимающего решения.

Множество слабых решений W является более широким, чем паретовское множество P_1. Паретовское множество P_2 может содержать решения, которые не будут оптимальны ни при каких реализациях весов ребер. Поэтому ни W, ни, следовательно, P_2 нецелесообразно рассматривать в качестве решения исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. Г.Е. Минца, А.Г. Яковлева / Под ред. Ю.В. Матиясевича. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
2. Kozina G.L., Perepelitsa V.A. Spanning Trees Problem: Solvability and Computational Complexite// Interval Computations, 1.- 1994. - P.42 – 50.
3. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – Изд-во МЭИ (СССР); «Техника» (НРБ), 1989. – 224 с.
4. Козіна Г.Л. Дослідження екстремальних задач на графах з інтервальними параметрами // Вісник Запорізького державного університету, 1999. - №1. – С. 63-68.
5. Yaman H. Karasan O.E. Mustafa O.P. Minimum Spanning The Problem with. Interval Data, Bilkent University, Department of Industrial Engineering, Techical Report 9909, July, 1999.