УДК 539.3

МЕТОД ЗБУРЕННЯ В ЗАДАЧАХ ПРО ПЕРЕДАЧУ НАВАНТАЖЕННЯ БАГАТОШАРОВІЙ ПЛАСТИНІ КІНЦЕВИХ РОЗМІРІВ

Кагадій Т.С., к.ф.-м.н., доцент

Національна гірнича академія України (м.Дніпропетровськ)

За допомогою метода збурень [1,2] одержаний розв'язок нової контактної задачі про передачу навантаження пружним стрингером пружній пластині, яка складається з двох з'єднаних між собою ортотропних прямокутників з різних матеріалів. Пластина закріплена по двох сторонах. Стрижень вміщено посередені вільних кромок, перпендикулярно до них. Підкріплюючий елемент неперервно скріплений з пластиною симетрично до її серединної площини. Приймається схема контакту по лінії.

Нехай пружна пластина, яка складається з двох прямокутників $0\le x\le h_1$, $h_1 \le x\le h_2$, $|y|\le b$, закріплена по гранях $y = \pm b$ та вздовж осі Ox посилена стрингером, який у граничній точці x=0 навантажений подовжньою силою P_0. Матеріали прямокутників ортотропні та різні, головні напрямки анізотропії збігаються з декартовими осями координат x,y. Необхідно визначити закон змінення зусилля в стрижні, а також розподіл контактних зусиль взаємодії між стрингером та пластиною.

Задача зведена до інтегрування рівнянь рівноваги для кожного з прямокутників

$$B_* u_{xx} + G u_{yy} + \left(\upsilon^* B_* + G\right) v_{xy} = 0,$$
$$B^* v_{yy} + G v_{xx} + \left(\upsilon_* B^* + G\right) u_{xy} = 0$$

при таких граничних умовах:

$$\sigma_{11} = B_*\left(u_x + \upsilon^* v_y\right) = 0, \sigma_{12} = G\left(u_y + v_x\right) = 0 (x = 0, x = h_1 + h_2);$$
$$u = u_c, v = 0 (y = 0); u = v = 0 (y = \pm b),$$

при $x=h_1$ переміщення прямокутників рівні, а зміщення стрингера задовольняють відношенням

$$EF u_{cxx} = 2q(x),$$
$$N = EF u_{cx} = P_0 (x = 0); N = 0 (x = h_1 + h_2).$$

Тут u,v – компоненти вектора переміщень відповідних прямокутників; B_*, B^* – жорсткості прямокутників на розтяг-стискання вздовж головних напрямків; G – жорсткість на зсув; EF – жорсткість на розтяг-стискання стрингера; σ_{11}, σ_{12} – нормальне та дотичне зусилля в пластині; ν_*, ν^* – коефіцієнти Пуассона матеріалів; q(x), N(x) – контактне зусилля взаємодії між стрингером і пластиною та зусилля в стрингері; індекси x, y позначають диференціювання по відповідних координатах. Оскільки при y= 0 v = 0 ($v_x = 0$), то контактне зусилля взаємодії між стрингером і пластиною визначається за формулою

$$q(x) = -\sigma_{12}\big|_{y=0} = -G u_y \big|_{y=0}.$$

При визначенні зусилля в стрингері та зусилля контактної взаємодії відповідно до розщеплення напружено-деформованого стану пластини [1, 2] сформульована вище крайова задача для кожного з прямокутників зводиться до такого:

$$B_i u_{ixx} + G_i u_{iyy} = 0, \tag{1}$$

$$u_{ix} = 0 (x = 0, x = h_1 + h_2), u_{ix} = f(y) (x = h_1),$$
$$u_i = u_c (y = 0), u_i = 0 (y = \pm b), \tag{2}$$

$$EF u_{cxx} = -2 G_i u_{iy} (y = 0), \tag{3}$$

$$u_{cx} = P_0 / EF(x=0), u_{cx} = 0(x = h_1 + h_2),$$
$$u_{cx} = f(0)(x = h_1)(i = 1,2), \tag{4}$$

де f(y) – невідома функція; B_i – відповідні значення B_* для кожного прямокутника; індекси i = 1, 2 відносяться до відповідних прямокутників.

Після застосування до рівнянь (1), (3) косинус-перетворення Фур'є з кінцевими межами по координаті x з урахуванням граничних умов (2), (4) одержимо

$$u^*_{iyy} - \omega_i^2 \alpha_i^2(n) u_i^*(n,y) = \delta_i \omega_i^2 (-1)^n f(y), \tag{5}$$

$$EF\alpha_i^2(n) u_i^*(n,0) = \delta_i \left[P_i - EFf(0)(-1)^n\right] + 2G_i u^*_{iy}\Big|_{y=0}, \tag{6}$$

$$\omega_i^2 = B_i / G_i, \alpha_i(n) = n\pi / h_i, \delta_1 = -1, \delta_2 = (-1)^n,$$
$$P_1 = P_0, P_2 = 0, \qquad u_i^*(n,y) = \int_0^{h_i} u_i(x,y)\cos\alpha_i(n) x_i dx_i$$
$$(0 \le x_1 \le h_1, 0 \le x_2 \le h_2; x_1 = x, x_2 = x - h_1).$$

Розв'язок рівнянь (5) одержано за допомогою синус-перетворення Фур'є з кінцевими межами по координаті y (0 ≤ y ≤ b). Повертаючись до оригіналу, знаходимо

$$u_i^*(n,y) = -\delta_i \frac{2b\omega_i^2}{\pi^2}(-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m)\sin(\beta(m)y)}{m^2 + \omega_i^{*2}(n)} +$$
$$+ u_i^*(n,0) \frac{sh\left[\omega_i \alpha_i(n)(b-y)\right]}{sh\left[\omega_i \alpha_i(n) b\right]}, \tag{7}$$
$$F(m) = \int_0^b f(y)\sin(\beta(m)y)dy, \omega_i^*(n) = \omega_i \frac{nb}{h_i}, \beta(m) = \frac{m\pi}{b}.$$

Після визначення $u^*_{iy}\Big|_{y=0}$ з (7) з урахуванням, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mF(m)}{m^2 + \omega_i^{*2}(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 + \omega_i^{*2}(n)} \int_0^b f(y)\sin(\beta(m)y)dy =$$
$$= \frac{\pi}{2} A_i(n), A_i(n) = \int_0^b f(y) \frac{sh\left[\omega_i \alpha_i(n)(b-y)\right]}{sh\left[\omega_i \alpha_i(n) b\right]} dy, \tag{8}$$

і підставляючи його значення в (6), одержимо

$$u_i^*(n,0) = \delta_i \frac{h_i^2}{\pi^2}\left[\frac{P_i}{EF} - \left(f(0) + \frac{\pi\omega_i}{h_i} g_i A_i(n)\right)(-1)^n\right] \times \frac{1}{n\left[n + g_i cth(\omega_i \alpha_i(n) b)\right]}, \tag{9}$$
$$g_i = 2G_i \omega_i h_i / (\pi EF)$$

Функції $u_i^*(n, y)$ визначаються з (7) з урахуванням (9), а переміщення $u_i(x, y)$ виражаються за допомогою ряду

$$u_i(x,y) = \frac{2}{h_i} \sum_{n=1}^{\infty} u_i^*(n,y)\cos\alpha_i(n) x_i. \tag{10}$$

Для оцінки інтегралів $A_i(n)$ з (8) застосуємо другу теорему про середнє значення в інтегральному численні, яка формулюється так [3]: нехай φ(x) монотонна і неперервно диференційована в інтервалі a≤ x ≤ b функція, f(x) – неперервна функція в цьому інтервалі, тоді знайдеться таке число ξ, a ≤ ξ ≤ b, що

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + \varphi(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

Припускаючи, що $A_i(n)$ є відношення гіперболічних синусів $\varphi(y) = \frac{sh\left[\omega_i \alpha_i(n)(b-y)\right]}{sh\left[\omega_i \alpha_i(n) b\right]}$, одержимо

$$A_i(n) = \int_0^{\eta_i} f(y)dy = A_i = const.$$

Тоді з (10) при y = 0 знаходимо

$$u_i(x,0) = \frac{2h_i}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{EF} - \left(f(0) + \frac{\pi\omega_i}{h_i}g_i A_i\right)(-1)^n\right]\frac{\cos\alpha_i(n)x_i}{n\left[n + g_i cth(\omega_i\alpha_i(n)b)\right]} \tag{11}$$

При $(\omega_i\alpha_i(n)b) > 1 cth(\omega_i\alpha_i(n)b) \approx 1, \left[n + g_i cth(\omega_i\alpha_i(n)b)\right]^{-1} \approx (n + g_i)^{-1}$

У цьому випадку, знаходячи $u_{ix}(x,0)$ з урахуванням [4], що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_i(n)x_i}{n+g_i} = g_i\pi\int_0^{\infty}\frac{sh(1-x_i/h_i)\rho}{sh\rho}\frac{d\rho}{(g_i\pi)^2+\rho^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\alpha_i(n)x_i}{n+g_i} = -g_i\pi\int_0^{\infty}\frac{sh(1-x_i/h_i)\rho}{sh\rho}\frac{d\rho}{(g_i\pi)^2+\rho^2} +$$

$$+\frac{g_i\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{sh(1-2x_i/h_i)\rho}{sh\rho}\frac{d\rho}{(g_i\pi/2)^2+\rho^2},$$

щоб задовольнити граничним умовам (4), припустимо, що в (11) $A_i = 0$. Тоді

$$u_i(x,0) = \frac{2h_i}{\pi^2}\sum_{n=1}^{2h_i}\delta_i\left[\frac{P_i}{EF} - (-1)^n f(0)\right]\frac{\cos\alpha_i(n)x_i}{n\left[n + g_i cth(\omega_i\alpha_i(n)b)\right]}, \tag{12}$$

$(i = 1,2).$

Невідоме значення f(0) визначається з умови, що при $x = h_1$, $u_1 = u_2$ Якщо дорівняти переміщення (12) при $x = h_1$, будемо мати

$$f(0) = \frac{P_0}{EF}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_1(n)x_1}{n\left[n + g_1 cth(\omega_1\alpha_1(n)b)\right]}\bigg|_{x=h_1}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_1(n)x_1}{n\left[n + g_1 cth(\omega_1\alpha_1(n)b)\right]}\bigg|_{x=h_1} + \frac{h_2}{h_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_2(n)x_2}{n\left[n + g_2 cth(\omega_2\alpha_2(n)b)\right]}\bigg|_{x_2=0}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Рівність переміщень (10) при $x = h_1$ дозволяє знайти невідому функцію f(y) і при довільних значеннях координати y.

Зусилля в стрингері N(x) і контактне зусилля взаємодії між стрингером і пластиною q(x) визначається з формул

$$N(x) = EFu_x(x,0), q(x) = -Gu_y\big|_{y=0}, \tag{14}$$

де функції $u_{ix}(x,0), u_{iy}\big|_{y=0}$ мають вигляд

$$u_{ix}(x,0) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{EF} - f(0)(-1)^n\right]\frac{\sin\alpha_i(n)x_i}{\left[n + g_i cth(\omega_i\alpha_i(n)b)\right]}, \tag{15}$$

$$u_{iy}\big|_{y=0} = -\frac{2\omega_i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{EF} - f(0)(-1)^n\right]\frac{cth(\omega_i\alpha_i(n)b)\cos\alpha_i(n)x_i}{\left[n + g_i cth(\omega_i\alpha_i(n)b)\right]}, \tag{16}$$

$(i = 1,2).$

Розглянемо деякі окремі випадки. При $b \to \infty$ і кінцевих значеннях h_1 і h_2 $cth(\omega_i\alpha_i(n)b) \to 1$. У цьому разі одержимо розв'язок задачі для двох, з'єднаних між собою ортотропних смуг, підкріплених вздовж осі Ox стрингером, який у точці x = 0 навантажений силою P_0, причому f(0) визначається з формули (13), якщо вважати $cth(\omega_i\alpha_i(n)b) = 1$.

При $h_2 \to \infty$ з (13) одержимо

$$f(0)=\frac{P_0}{EF}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_1(n)x_1}{n\left[n+g_1cth(\omega_1\alpha_1(n)b)\right]}\Bigg|_{x=h_1}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_1(n)x_1}{n\left[n+g_1cth(\omega_1\alpha_1(n)b)\right]}\Bigg|_{x=h_1}+\frac{\pi}{h_1}\int_0^{\infty}\frac{\cos x_2 s}{s\left[s+g_2^*cth(\omega_2 bs)\right]}ds\Bigg|_{x_2=0}\right)^{-1} \quad (17)$$

де $g_2^*=2G_2\omega_2/(EF)$.

Якщо в останньому випадку b → ∞, тоді cth(b) → 1. При цьому розв'язок (17) переходить у розв'язок задачі про передачу навантаження двошаровій пластині, одним з шарів якої є напівплощина.

При $h_1 \to \infty$ (b – const) f(0) → 0, одержимо розв'язок задачі про передачу навантаження від стрингера до ортотропної напівсмуги, закріпленої по боках. Тоді

$$u_1(x,0)=-\frac{2P_0}{\pi EF}\int_0^{\infty}\frac{\cos xs}{s\left[s+g_1^*cth(\omega_1 bs)\right]}ds,$$
$$u_{1x}(x,0)=\frac{2P_0}{\pi EF}\int_0^{\infty}\frac{\sin xs}{\left[s+g_1^*cth(\omega_1 bs)\right]}ds, \quad (18)$$
$$u_{1y}\Big|_{y=0}=\frac{2P_0\omega_1}{\pi EF}\int_0^{\infty}\frac{\cos xs}{s\qquad th(\omega_1 bs)+g_1^*}ds,$$
$$g_1^*=2G_1\omega_1/(EF).$$

Відношення (18) при b → ∞ переходять у розв'язок задачі про передачу навантаження від пружного стрингера до пружної ортотропної напівплощини [1].

Малим значенням параметра s відповідають великі значення координати x, і в цьому випадку з (18) одержимо

$$u_1(x,0)=-(P_0/\gamma_1 EF)e^{-\gamma_1 x},u_{1x}(x,0)=(P_0/EF)e^{-\gamma_1 x},$$
$$u_{1y}\Big|_{y=0}=(P_0/b\gamma_1 EF)e^{-\gamma_1 x},\gamma_1^2=2G_1/bEF. \quad (19)$$

Значення (19) відповідають розв'язку задачі про передачу навантаження пружним стрингером пластині, яка працює тільки на зсув.

Якщо у вихідній задачі для двох прямокутників припустити, що пластина працює тільки на зсув, тоді розв'язки для переміщень $u_i(x,0)$ мають вигляд

$$u_1(x,0)=-\frac{P_0}{EF}\frac{ch\gamma_1(h_1-x)+f(0)ch\gamma_1 x}{\gamma_1 sh\gamma_1 h_1},$$
$$u_2(x,0)=\frac{f(0)e^{\gamma_2 x}}{\gamma_2 e^{\gamma_2 h_1}}\frac{1+e^{2\gamma_2(h_2-x)}}{1-e^{2\gamma_2(h_2-h_1)}},\gamma_2^2=2G_2/bEF. \quad (20)$$

За умови, що при $x=h_1 u_1(x,0)=u_2(x,0)$

$$f(0)=-\frac{P_0}{EF}\frac{\gamma_2}{\gamma_1 sh\gamma_1 h_1}\left(\frac{e^{2\gamma_2 h_1}+e^{2\gamma_2 h_2}}{e^{2\gamma_2 h_1}-e^{2\gamma_2 h_2}}-\frac{\gamma_2 cth\gamma_1 h_1}{\gamma_1}\right)^{-1}. \quad (21)$$

З рівності (21) випливає, що при $h_1 \to \infty$ f(0)→ 0; при $h_1 \to 0$ f(0)→ P_0 /EF; при $h_2 \to 0$ ($\gamma_2 \to 0$) f(0) → 0; при $h_2 \to \infty$

$$f(0)=(P_0/EF)\left(ch\gamma_1 h_1+(\gamma_1/\gamma_2)sh\gamma_1 h_1\right)^{-1}. \quad (22)$$

Великим значенням s у відношеннях (18) відповідають малі значення координати x. У цьому випадку з (18), наприклад, одержимо

$$u_{1y}\Big|_{y=0}=-(2P_0\omega_1/\pi EF)(cix_*\cos x_*+six_*\sin x_*),x_*=g_1^*x. \quad (23)$$

Рівняння (23) відповідає розв'язку задачі про передачу навантаження від пружного стрингеру до ортотропної напівплощини [1], і в цьому випадку дійсне лише в деякому околі точки x = 0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И., Павленко А. В. Ассиметрический метод в микромеханике композиционных материалов. -К. : Вища школа, 1991.- 131 с.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела.-К.-Донецк:Вища школа,1982.153с.
3. Курант Р.Курс дифференциального и интегрального исчисления.-М.: Наука, 1967.-Т.1. -704 с.
4. Заездный Ф.М.Гармонический синтез в радиотехнке и электросвязи.- Л.: Энергия, 1972. -527 с.