УДК 539.3:517.926.4

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ WKB-ГАЛЬОРКІНА ПРИ АНАЛІЗІ СТОХАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ДЕМПФІРУВАННЯ*

Грищак В.З., д.т.н., професор, Лисенко В.В., аспірант

Запорізький державний університет

У цій роботі розглядається метод подвійного асимптотичного розвинення [1, 2, 3] для отримання кореляційної функції вихідного процесу механічної системи, що описується стохастичним нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку у вигляді (1.1) зі змінним коефіцієнтом при першій похідній та випадковою правою частиною [1]. Замість методу WKB (внутрішня асимптотика) пропонується застосовувати гібридний підхід на основі умови ортогональності Гальоркіна [4, 5], а саме метод WKB-Гальоркіна [5]. Наведено чисельні результати.

1. ЗОВНІШНЯ АСИМПТОТИКА

Досліджуються вимушені коливання механічних систем, коефіцієнт демпфірування яких залежить від часу, що описуються нелінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку вигляду:

$$mf''(t)+c(t)f'(t)+kf(t)+\mu f^3(t)=q(t), \tag{1.1}$$

або

$$f''(t)+2E(t)f'(t)+\omega_0^2 f(t)+\alpha f^3(t)=\gamma(t), \tag{1.2}$$

де m – маса; $c(t)$ – змінний коефіцієнт, який характеризує демпфірування; k – коефіцієнт, який характеризує силу, яку необхідно прикласти к механічній системі, щоб отримати одиничне переміщення; μ коефіцієнт, який характеризує нелінійність системи; $q(t)$ – змушуюча випадкова сила з відомими характеристиками; $2E(t)=c(t)/m$; $\omega_0^2=k/m$ – частота коливань механічної системи, причому ω_0>>1; $\alpha=\mu/m$ – малий параметр ($0\le\alpha\le1$); $\gamma(t)=q(t)/m$. Як і в [1] початкові умови для цього рівняння приймемо нульовими.

Для отримання розв'язку рівняння (1.2) застосуємо метод подвійного асимптотичного розкладу [1, 2, 3], згідно з яким на першому етапі у випадку, якщо параметр α – малий, розв'язок рівняння (1.2) можна записати у вигляді (зовнішня асимптотика):

$$f(t)=f_0(t)+\alpha f_1(t)+\alpha^2 f_2(t)+\dots, \tag{1.3}$$

де $$f_0(t)=\int_0^t h(t,\tau)\gamma(\tau)d\tau,\ f_1(t)=-\int_0^t h(t,\tau)f_0^3(\tau)d\tau,\dots \tag{1.4}$$

$h(t,\tau)$ – функція Гріна для лінійної частки оператора рівняння (1.2).

Кореляційна функція вихідного процесу визначаються осередненням ряду (1.3) за множиною реалізацій [1]:

$$\begin{aligned}K_f(t_1,t_2)=K_{f_0}(t_1,t_2)-3\alpha\int_0^{t_2}h(t_2,\tau_2)K_{f_0}(t_1,\tau_2)K_{f_0}(\tau_2,\tau_2)d\tau_2-\\-3\alpha\int_0^{t_1}h(t_1,\tau_1)K_{f_0}(t_2,\tau_1)K_{f_0}(\tau_1,\tau_1)d\tau_1+\dots,\end{aligned} \tag{1.5}$$

* Робота виконувалась згідно з держбюджетною темою №3/2000 Міністерства освіти і науки України в Запорізькому державному університеті

де $K_{f_0}(t_1,t_2)$ – кореляційна функція нульового наближення $f_0(t)$, тобто

$$K_{f_0}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1,\tau_1)h(t_2,\tau_2)K_\gamma(\tau_1,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\,, \tag{1.6}$$

$K_\gamma(\tau_1,\tau_2)$ – кореляційна функція зовнішнього навантаження $\gamma(t)=q(t)/m$.

2. ФУНКЦІЯ ГРІНА. ВНУТРІШНЯ АСИМПТОТИКА

Для обчислення кореляційної функції вихідного процесу по заданій кореляційній функції вхідного процесу необхідно побудувати функцію Гріна $h(t,\tau)$, що задовольняє рівнянню [6]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+2E(t)\frac{\partial h}{\partial t}+\omega_0^2 h=\delta(x) \tag{2.1}$$

при нульових початкових умовах, де $\delta(x)$ – дельта-функція, $x=t-\tau$. Для розв'язання цього рівняння застосуємо метод WKB-Гальоркіна (внутрішня асимптотика) [5]. Розв'язком цього рівняння за допомогою методу WKB у першому наближенні є [1, 7]

$$h(t,\tau)=\frac{1}{\omega_0\psi_0(\tau)}e^{-\int_\tau^t E(x)dx}\sin\int_\tau^t \omega_0\psi_0(x)dx\,, \tag{2.2}$$

де $$\psi_0(t)=\frac{\omega_\varepsilon(t)}{\omega_0},\ \omega_\varepsilon(t)=\sqrt{\omega_0^2-E^2(t)-E'(t)}\,. \tag{2.3}$$

Згідно з методом WKB-Гальоркіна [5] уточнений розв'язок рівняння (2.1) представимо у вигляді

$$h_H(t,\tau)=\frac{1}{\omega_0\psi_0(\tau)}e^{-\int_\tau^t E(x)dx}\sin\int_\tau^t \omega_0\delta_0\psi_0(x)dx\,, \tag{2.4}$$

де δ_0 – деяка невідома константа. Для її визначення використаємо умову ортогональності Гальоркіна та використаємо критерій ортогональності Гальоркіна у формі

$$\int_\tau^T R\cdot\psi_0(x)dx=0\,, \tag{2.5}$$

де $R=\frac{\partial^2 h_H}{\partial t^2}+2E(t)\frac{\partial h_H}{\partial t}+\omega_0^2 h_H(t,\tau)$ – нев'язка. Після розв'язання рівняння (2.5) отримаємо невідоме δ_0.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

Період коливань механічної системи, яка описується рівнянням (1.1) залежить від часу, тому розглянемо розв'язок задачі на інтервалі від нуля до трьох періодів коливань механічної системи, яка описується рівнянням (1.1) при $c(t)=0$, $\mu=0$ та $q(t)=0$, тобто лінійної системи без демпфірування та зовнішнього навантаження. Період коливань такої системи дорівнює $2\pi/\omega_0$.

При дії на механічну систему, яка описується рівнянням (1.1), випадкового навантаження, яке являє собою стаціонарний випадковий процес, вихідний процес також буде стаціонарним випадковим процесом, тобто його кореляційна функція $K_f(\tau)$ буде залежати тільки від однієї змінної $\tau=t_2-t_1$, де t_1, t_2 – параметри кореляційної функції у формулі (1.5) [1].

Нижче наведено порівняльний аналіз кореляційної функції вихідного процесу механічної системи, яка описується рівнянням (1.1), при використанні методів WKB та WKB-Гальоркіна. На систему діє випадкове навантаження типу білий шум з одиничною інтенсивністю. Для всіх випадків $\alpha=\mu/m=0{,}1$, $\tau\in[0;T=3\cdot 2\pi/\omega_0]$ (рис. 3.1-3.5).. Як видно з рисунків, розв'язки за допомогою

методів WKB та WKB-Гальоркіна практично співпадають якщо коефіцієнт демпфірування постійний, або параметр $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – "великий" (рис. 3.1-3.3). Якщо коефіцієнт демпфірування не постійний а параметр $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – не "великий", то ми бачимо, що WKB розв'язок відхиляється від уточненого розв'язку (рис. 3.4, 3.5).

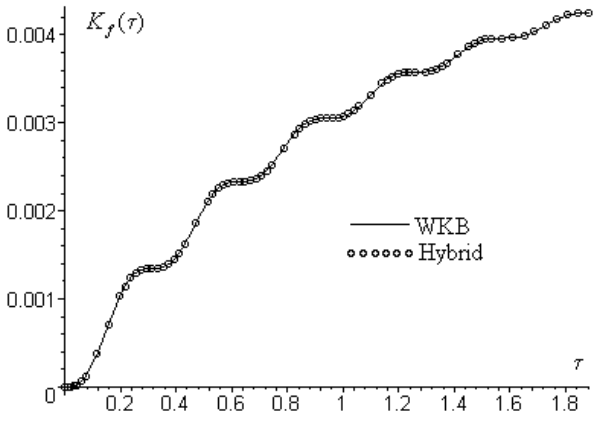


Рис. 3.1. Графіки кореляційної функції вихідного процесу, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10$, $2E = c/m = 1$.

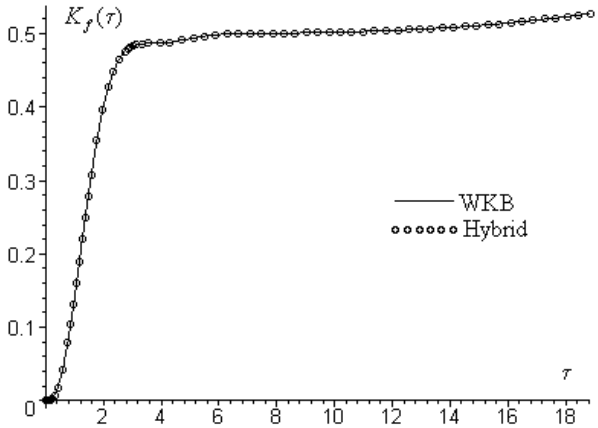


Рис. 3.2. Графіки кореляційної функції вихідного процесу, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1$, $2E = c/m = 1$.

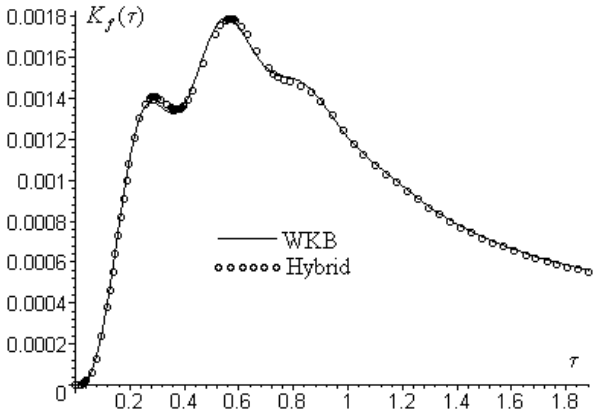


Рис. 3.3. Графіки кореляційної функції вихідного процесу,

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10, 2E = \frac{c}{m} = \frac{t}{T}\omega_0 = \frac{t}{3\cdot 2\pi}.$$

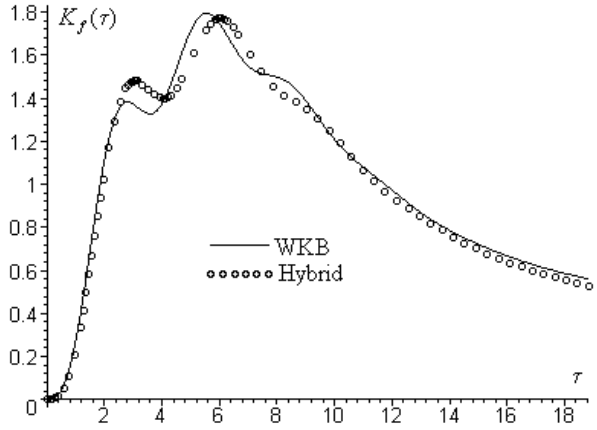


Рис. 3.4. Графіки кореляційної функції вихідного процесу,

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1, 2E = \frac{c}{m} = \frac{t}{T}\omega_0 = \frac{t}{3\cdot 2\pi}.$$

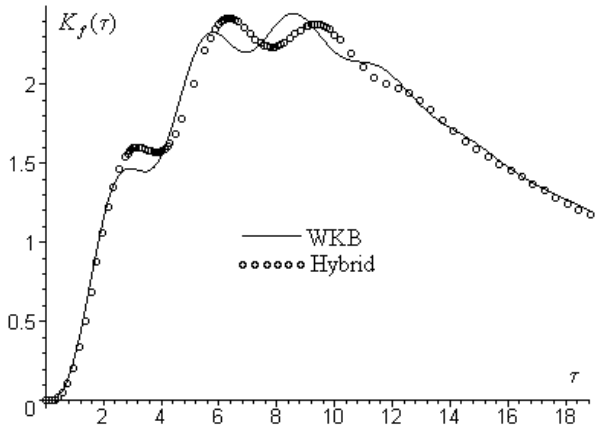


Рис. 3.5. Графіки кореляційної функції вихідного процесу, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1$,

$$2E = \frac{c}{m} = \frac{t}{2T}\omega_0 = \frac{t}{6 \cdot 2\pi}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Грищак В.З., Лисенко В.В. Метод подвійного асимптотичного розкладу при аналізі стохастичної поведінки нелінійних механічних систем з коефіцієнтом демпфірування, залежним від часу // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – №2. – С. 60-65.
2. Gristchak V.Z., Kabak V.N. Doudle Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technishe Mechanik. – 1996. – № 4. – P. 285-296.
3. Грищак В.З., Кабак В.М. Про один асимптотичний підхід до дослідження вимушених коливань механічних систем з демпфіруванням, параметри яких залежать від часу // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – № 1. – С. 28-30.
4. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid peturbation-Galerkin technique for differential equations containing a parameter // Applied Mechanics Reviews. – 1989. – №42(11). – P. S69-S77.
5. Gristchak, V.Z., Dmitrijeva, Ye.M. A hybrid WKB-Galerkin method and its application // Technishe Mechanik – 1995. – №3. – P. 281-294.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
7. Найфе А.Х. Методы возмущений: Пер. с англ. – М: Мир, 1976. – 456 с.