УДК 517.949.8

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ БАРИЦЕНТРИЧНОГО УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В КРУЗІ

Валько Н.В., викладач

Херсонський державний педагогічний університет

У роботі [1] були отримані достатні умови збіжності методу барицентричного усереднення при відшуканні наближеного розв'язку узагальненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в центрі круга. Однак при цих умовах збіжність методу в інших точках круга може порушуватись.

Для отримання умов, достатніх для збіжності методу барицентричного усереднення в довільній точці відкритого круга, використаємо метод конформного відображення.

Нехай точка $M_0(r\cos\theta; r\sin\theta)$ - довільна фіксована точка круга D ($0 \le r < R$). Функція $w(z) = R^2 e^{-i\theta}\dfrac{z - z_0}{R^2 - \bar{z}_0 z}$, де $z_0 = re^{i\theta}$, $z = \rho e^{i\varphi}$ ($0 \le \rho \le R$), конформно відображає круг D на самого себе так, що точка M_0 переходить у точку $O(0; 0)$, а промінь $\varphi = \theta$ - у дійсну додатну піввісь.

Рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ ,$$

як відомо [2, с. 376-378], є інваріантним відносно конформного відображення, і тому функція *u(z)*, гармонічна в крузі D, перейде в гармонічну в цьому ж крузі функцію площини *w*. Граничні значення $u(\zeta)$ функції *u(z)* перейдуть у граничні значення її образу на колі C, яке обмежує круг D.

Нехай на межі C: $w = R \cdot e^{it}$. При цьому будемо мати:

$$R \cdot e^{it} = R^2 \cdot e^{-i\theta}\frac{R \cdot e^{i\varphi} - r \cdot e^{i\theta}}{R^2 - r \cdot e^{-i\theta} R \cdot e^{i\varphi}};\ e^{it} = e^{-i\theta}\frac{R^2 \cdot e^{i\varphi} - rR \cdot e^{i\theta}}{R^2 - rR \cdot e^{i(\varphi-\theta)}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^2 e^{i(\varphi-\theta)} - \frac{R}{r}}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{R}{r}e^{i(\varphi-\theta)}} = \frac{\frac{R}{r}e^{i(\varphi-\theta)} - 1}{\frac{R}{r} - e^{i(\varphi-\theta)}}.$$

З цієї рівності знаходимо:

$$e^{it} - 1 = \frac{\frac{R}{r}e^{i(\varphi-\theta)} - 1}{\frac{R}{r} - e^{i(\varphi-\theta)}} - 1 = \frac{(\frac{R}{r} + 1)(e^{i(\varphi-\theta)} - 1)}{\frac{R}{r} - e^{i(\varphi-\theta)}},$$

$$e^{it} + 1 = \frac{\frac{R}{r}e^{i(\varphi-\theta)} - 1}{\frac{R}{r} - e^{i(\varphi-\theta)}} + 1 = \frac{(\frac{R}{r} - 1)(e^{i(\varphi-\theta)} + 1)}{\frac{R}{r} - e^{i(\varphi-\theta)}}.$$

Розділивши першу рівність на другу почленно, будемо мати:

$$\frac{e^{it}-1}{e^{it}+1}=\frac{e^{i(\varphi-\theta)}-1}{e^{i(\varphi-\theta)}+1}\cdot\frac{\frac{R}{r}+1}{\frac{R}{r}-1},$$

$$\frac{e^{i(\varphi-\theta)}-1}{e^{i(\varphi-\theta)}+1}=\frac{e^{it}-1}{e^{it}+1}\cdot\frac{R-r}{R+r} \qquad (1)$$

Далі матимемо:

$$\frac{e^{it}-1}{e^{it}+1}=\frac{\cos t+i\sin t-1}{\cos t+i\sin t+1}=\frac{(\cos t-1)+i\sin t}{(\cos t+1)+i\sin t}=\frac{((\cos t-1)+i\sin t)(\cos t+1)-i\sin t)}{(\cos t+1)^2+\sin^2 t}=$$

$$=\frac{\cos^2 t-1+\sin^2 t+i(\sin t\cdot\cos t+\sin t-\sin t\cdot\cos t+\sin t)}{\cos^2 t+2\cos t+\sin^2 t+1}=i\frac{2\sin t}{2(1+\cos t)}=$$

$$=i\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=i\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}\cdot$$

Аналогічно, $\frac{e^{i(\varphi-\theta)}-1}{e^{i(\varphi-\theta)}+1}=i\,\mathrm{tg}\frac{\varphi-\theta}{2}$.

Підставивши знайдені значення в рівність (1), отримаємо співвідношення між φ і t:

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi-\theta}{2}=\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{t}{2}\cdot$$

Звідси знаходимо:

$$\varphi=\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right).$$

Таким чином, граничні значення $u(R\cdot e^{i\varphi})$ перейдуть при такому конформному відображенні в граничні значення

$$U(t)=u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right))}\right). \qquad (2)$$

За умовою узагальненої задачі Діріхле, функція $u(R\cdot e^{i\varphi})$ може мати точки розриву лише першого роду; функція $\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)$ має в точці $t=\pi$ точку розриву першого роду. Отже функція $u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right))}\right)$ має точки розриву лише першого роду.

За теоремою Гаусса, інтеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right))}\right)dt$$

дорівнює значенню в центрі круга D гармонічної в цілому крузі функції $U(z)$, граничні значення якої збігаються з підінтегральною функцією. При цьому

$$u(z_0)=U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right))}\right)dt\cdot$$

Таким чином, задача відшукання наближеного значення розв'язку в точці z_0 рівняння Лапласа з граничною функцією $u(R\cdot e^{i\varphi})$ звелась до відшукання його наближеного розв'язку в центрі круга D з граничною функцією (2).

Взявши за вершини трикутника точки $N_1(R\cos\psi_1; R\sin\psi_1)$, $N_2(R\cos\psi_2; R\sin\psi_2)$, $N_3(R\cos\psi_3; R\sin\psi_3)$ і зробивши повороти трикутника на кути t_{nk}: $0 = t_{n0} < t_{n1} < t_{n2} < \ldots < t_{nn} = 2\pi$, отримаємо n трикутників з вершинами:

$$N_{lk}(R\cos(\psi_l + t_{nk}); R\sin(\psi_l + t_{nk})),\ (l = 1, 2, 3; 0 \le k \le n-1).$$

Позначимо через U_{lk} значення функції $U(t)$, відповідно, в точках N_{lk},

$$\Delta t_{nk} = t_{n,k+1} - t_{nk} \quad (k = 0, 1, 2, .., n-1), \qquad \lambda_n = \max_{0\le k\le n-1}\{\Delta t_{nk}\}.$$

За формулами (3) і (4) роботи [1] отримаємо вираз:

$$\bar{u}_n(z_0) = \overline{U}_n(0) = \frac{1}{2\pi(\sin(\psi_3-\psi_2)+\sin(\psi_1-\psi_3)+\sin(\psi_2-\psi_1))}\times$$

$$\times(\sin(\psi_3-\psi_2)\sum_{k=0}^{n-1}U_{1k}\Delta t_{nk} + \sin(\psi_1-\psi_3)\sum_{k=0}^{n-1}U_{2k}\Delta t_{nk} + \sin(\psi_2-\psi_1)\sum_{k=0}^{n-1}U_{3k}\Delta t_{nk}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\sin(\psi_3-\psi_2)+\sin(\psi_1-\psi_3)+\sin(\psi_2-\psi_1))}\times$$

$$\times(\sin(\psi_3-\psi_2)\sum_{k=0}^{n-1}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_1+t_{nk}}{2}\right))}\right)\Delta t_{nk} +$$

$$+\sin(\psi_1-\psi_3)\sum_{k=0}^{n-1}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_2+t_{nk}}{2}\right))}\right)\Delta t_{nk} +$$

$$+\sin(\psi_2-\psi_1)\sum_{k=0}^{n-1}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_3+t_{nk}}{2}\right))}\right)\Delta t_{nk}) \qquad (3)$$

Цей вираз будемо називати n-м наближенням схеми барицентричного усереднення, складеної для граничної функції $u\left(R\cdot e^{i\varphi}\right)$ рівняння Лапласа в крузі.

Означення. Схема барицентричного усереднення, складена для граничної функції $u\left(R\cdot e^{i\varphi}\right)$ ***рівняння Лапласа в крузі, називається збіжною в точці $z=z_0$, якщо виконується рівняння:***

$$\lim_{n\to\infty}\bar{u}_n(z_0) = u(z_0).$$

За теоремою 1 роботи [1] справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty}\overline{U}_n(0) = U(0) = u(z_0).$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема. Нехай функція $u(R\cdot e^{i\varphi})$ ***неперервна в кожній точці*** $\varphi\in[0;2\pi]$ ***крім, можливо, скінченного числа точок, у яких вона має розрив першого роду.***

Якщо виконується рівність $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, ***то схема барицентричного усереднення, складена для граничної функції*** $u(R\cdot e^{i\varphi})$ ***рівняння Лапласа в крузі D радіуса R, збігається в точці*** $z_0 = r\cdot e^{i\theta}$, $(r<R)$, ***тобто:***

$$\lim_{n\to\infty}\bar{u}_n(z_0)=\frac{1}{2\pi(\sin(\psi_3-\psi_2)+\sin(\psi_1-\psi_3)+\sin(\psi_2-\psi_1))}\times$$

$$\times\lim_{\lambda_n\to 0}(\sin(\psi_3-\psi_2)\sum_{k=0}^{n-1}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_1+t_{nk}}{2}\right))}\right)\Delta t_{nk}+$$

$$+\sin(\psi_1-\psi_3)\sum_{k=0}^{n-1}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_2+t_{nk}}{2}\right))}\right)\Delta t_{nk}+$$

$$+\sin(\psi_2-\psi_1)\sum_{k=0}^{n-1}u\left(R\cdot e^{i(\theta+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_3+t_{nk}}{2}\right))}\right)\Delta t_{nk})=u(z_0)$$

Якщо обертання трикутника зробити рівномірним, тобто покласти $t_{nk}=\frac{2\pi k}{n}$ $(k=0,1,2,...,n-1)$, то буде справедливий

Наслідок. Якщо функція $u(R\cdot e^{i\varphi})$ ***неперервна в кожній точці*** $\varphi\in[0;2\pi]$ ***крім, можливо, скінченного числа точок, у яких вона має розрив першого роду, то середні арифметичні n-их наближень схеми рівномірного барицентричного усереднення, складеної для граничної функції*** $u(R\cdot e^{i\varphi})$ ***рівняння Лапласа в крузі D радіуса R, збігаються в точці*** $z_0=re^{i\theta}$, $(r<R)$, ***тобто:***

$$\lim_{n\to\infty}\bar{u}_n(z_0)=\frac{1}{\sin(\psi_3-\psi_2)+\sin(\psi_1-\psi_3)+\sin(\psi_2-\psi_1)}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sin(\psi_3-\psi_2)\sum_{k=0}^{n-1}u(R\cdot e^{i(\theta+2arctg(\frac{R-r}{R+r}tg\frac{1}{2}(\psi_1+\frac{2\pi k}{n})))})+$$

$$+\sin(\psi_1-\psi_3)\sum_{k=0}^{n-1}u(R\cdot e^{i(\theta+2arctg(\frac{R-r}{R+r}tg\frac{1}{2}(\psi_2+\frac{2\pi k}{n})))})+$$

$$+\sin(\psi_2-\psi_1)\sum_{k=0}^{n-1}u(R\cdot e^{i(\theta+2arctg(\frac{R-r}{R+r}tg\frac{1}{2}(\psi_3+\frac{2\pi k}{n})))}))=u(z_0).$$

Якщо $z_0=0$, то $r=0$ і $\theta=0$. При цьому, середні (3) збігаються із середніми теореми 1, доведеної в роботі [1]. Отже теорема 1 і наслідок 1 роботи [1] є, відповідно, частинними випадками теореми і наслідку, отриманих у цій роботі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Валько Н.В., Хомченко А.Н. Збіжність методу барицентричного усереднення для рівняння Лапласа в центрі круга // Вісник Запорізького державного університету – 2000. - № 2. – С. 24-26.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.