УДК 539.3 : 534.1

ВПЛИВ ТРІЩИНИ БІЛЯ ОТВОРУ НА ЧАСТОТУ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ

Левицький І.А., к.ф.-м.н., доцент, Нагорний Ю.І., к.ф.-м.н., доцент

Запорізький державний технічний університет

У роботі пропонується методика розрахунку, яка дозволяє знаходити частоти форми коливань многозв'язних пластин. Розраховані частоти власних коливань квадратної пластини з круговим отвором та двома тріщинами , які примикають до нього. Розроблений метод може бути використаний для вибору схеми вібродіагностики тріщин в пластинчатих конструкціях.

1.Розглянемо пластину, що займає область S , має товщину h , модуль пружності й коефіцієнт Пуассона E та ν, густину ρ, коефіцієнт демпфірування γ. Рівняння руху пластини навантаженою поперечною силою $Q(x,y,t)$, може бути отримане, якщо використовувати рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial q}\right]-\frac{\partial(T-V)}{\partial q}+\frac{\partial R}{\partial q}=0 \qquad (1)$$

де T та V - кінетична та потенційна енергія пластини, R -дисипативна функція. Якщо $w(x,y,t)$ - прогин пластини, означені функції дорівнюють

$$T=\frac{1}{2}\iint_S \rho h(\dot{w})^2\,dS\ , \qquad R=\frac{1}{2}\iint_S \gamma h(\dot{w})^2\,dS \qquad (2)$$

$$V=\frac{1}{2}\iint_S \alpha\left[\left(\nabla^2 w\right)^2-2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]ds-\iint_S Q(x,y,t)\,w\,dS\ ,$$

$$\alpha=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Введемо матрицю ε і матрицю пружності D, які визначаються виразами

$$\varepsilon=P\cdot w$$

$$P=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\end{pmatrix}\ , \qquad D=\alpha\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{pmatrix} \qquad (3)$$

Тоді вираз для потенційної енергії прийме вигляд

$$V=\frac{1}{2}\iint_S \varepsilon_T\,D\,\varepsilon\,ds-\iint_S Q\,w\,ds \qquad (4)$$

Розіб'ємо область S на трикутні елементи з вузлами у вершинах цих елементів. У кожному вузлі будемо шукати величини

$$w,\quad -\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (5)$$

Глобальний вектор невідомих вузлових величин позначимо через δ, тоді прогин w та матриця ε запишуться так

$$w=N\,\delta,\quad \varepsilon=B\,\delta,\quad B=P\,N \qquad (6)$$

де N - глобальна матриця форми.

З урахуванням (5), (6) функції (2) приймуть вигляд

$$T = \frac{1}{2}\iint_S \rho h\, \dot{\delta}_T N_T N \dot{\delta}\, ds$$

$$R = \frac{1}{2}\iint_S \gamma h\, \dot{\delta}_T N_T N \dot{\delta}\, ds \qquad (7)$$

$$V = \frac{1}{2}\iint_S \delta_T\, B_T D\, B \delta\, ds - \iint_S Q\, N\, \delta\, ds$$

Оберемо за узагальнену координату вектор δ і підставимо вираз (6) в рівняння Лагранжа. Після диференціювання отримаємо систему диференціальних рівнянь руху

$$M\ddot{\delta} + K\delta + C\dot{\delta} = F \qquad (8)$$

де коефіцієнти M , K , C , - є глобальні матриці відповідно до мас, жорсткості та демпфірування, F - матриця правих частин. Ці матриці мають вигляд

$$M = \iint_S \rho h N_T\, N\, ds \qquad K = \iint_S B_T D B\, ds,$$

$$C = \iint_S \gamma h N_T N\, ds \qquad F = \iint_S Q N_T\, ds \qquad (9)$$

Автоматична побудова глобальних матриць (9) виконувалася шляхом побудови відповідних локальних матриць та наступного їхнього складання з накопиченням [2]. Для обчислення локальних матриць використовувались формули (9), але інтегрування проводилося по області одного елемента S_e.

Локальна матриця форми N_e запишеться так

$$N_e = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & N_9 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2$$

$$N_2 = b_3\left(L_1^2 L_2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) - b_2\left(L_3 L_1^2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) \qquad (10)$$

$$N_3 = c_3\left(L_1^2 L_2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) - c_2\left(L_3 L_1^2 + \tfrac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right)$$

Інші матриці ,що складають N_e можна отримати перестановкою індексів по колу.

У формулах (10) L_1, L_2, L_3 - координати, визначаються виразами

$$L_1 = \frac{1}{2\Delta}(a_1 + b_1 x + c_1 y), \qquad L_2 = \frac{1}{2\Delta}(a_2 + b_2 x + c_2 y)$$

$$L_3 = \frac{1}{2\Delta}(a_3 + b_3 x + c_3 y), \qquad L_1 + L_2 + L_3 = 1.$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2 \qquad (11)$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2, \quad c_3 = x_2 - x_1$$

Тут Δ - площа трикутного елемента.

2. Використаємо загальне динамічне рівняння (8) для розв'язку задачі на власні значення, для чого покладемо в ньому γ=0, Q=0

$$M\ddot{\delta} + K\delta = 0 \qquad (12)$$

Власні частоти та форми можуть бути знайдені з системи однорідних лінійних рівнянь

$$\left(K-\omega^2 M\right)\delta=0 \qquad (13)$$

По викладеній методиці була складена програма для обчислення частот та форм на мові Фортран. Були розраховані значення власних частот коливань квадратної пластини з отвором та двома тріщинами (рис. 1) залежно від довжини тріщини l (далі використовується безвимірний параметр довжини $L = l/a$). Геометричні та фізичні параметри пластини приймалися рівними: сторона квадрату $a = 0{,}6$ м, радіус центрального отвору $r = 0{,}15$ м, товщина $h = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ м,модуль пружності $E = 2{,}2\cdot 10^{11}$ н/м2, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$, густина $\rho = 7{,}5\cdot 10^{3}$ кг/м3. Розглядалися різні випадки закріплення пластини по зовнішньому контуру. На рис. 1 суцільні криві відповідають точковому закріпленню в кутах пластини, пунктирна - шарнірному по всьому зовнішньому контуру, штрих-пунктірна - жорсткому по всьому зовнішньому контуру. Суцільна крива 1 відноситься до точкового жорсткого закріплення, а крива 2 - до точкового опирання типу шарнір. Графіки показують, що найбільш суттєве відносне зниження частоти із збільшенням параметру має місце для точкового закріплення. Слід відзначити, що для випадку шарнірно обпертої пластини з отвором без тріщин ($L = 0$), значення частоти $\omega_* = 22{,}3$ задовільно збігається з результатами роботи [1] (розбіжність менш 1 %).

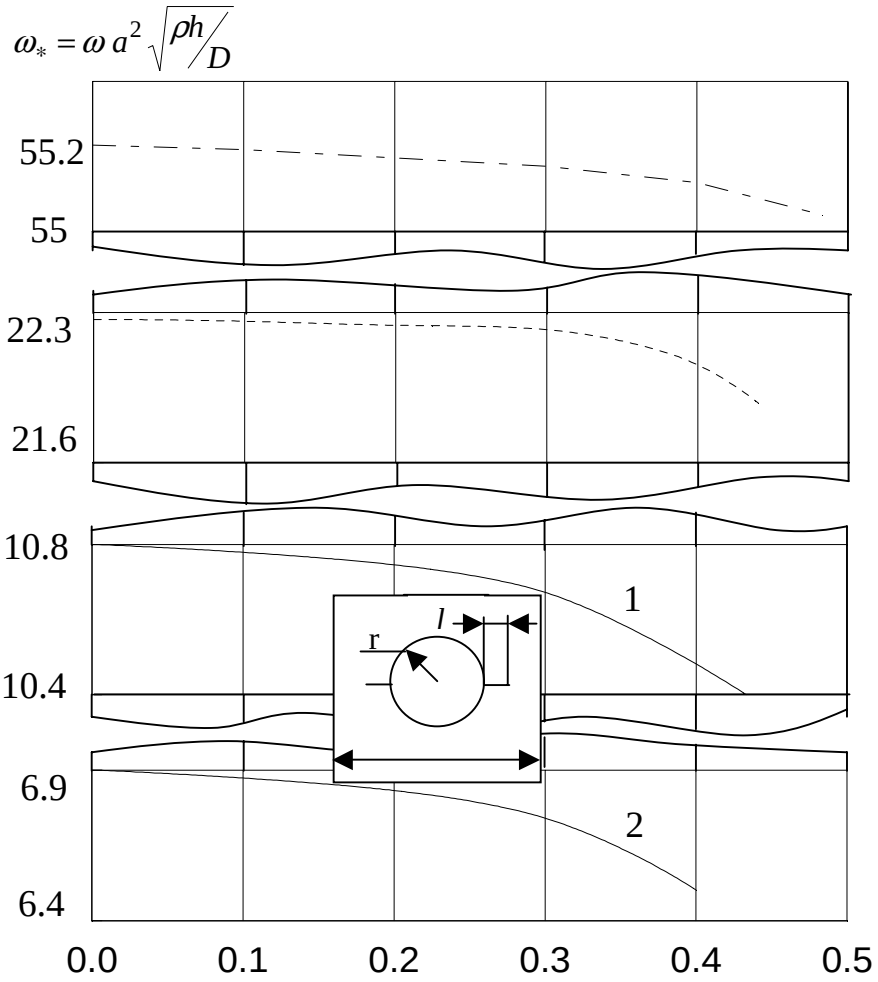


Рис.1 Залежність власної частоти від довжини тріщини

ЛІТЕРАТУРА

1. Hegarty R. , Ariman T. Elastodynamic analysis of restangular plates with circular holes. Int. J. Solids and structures, 1975.- V 11 .- P. 895-906.

2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.- М: Мир, 1975.- 542 с.