УДК 539.3

К ВОПРОСУ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА К ДВУСЛОЙНОМУ ОСНОВАНИЮ

Кагадий Т.С.*, к. ф.-м. н., доцент, Павленко А.В., д. ф-м. н., профессор

Национальная металлургическая академия Украины (г. Днепропетровск)

В строительном деле, в частности, в механике анкерных стержней и свайных фундаментов приходится решать сложные пространственные задачи, относящиеся к передаче нагрузки упругой накладкой или стержнем, вмещенным в трехмерную среду. Область плоских контактных задач для тел с упругими накладками (стрингерами малой толщины) в настоящее время достаточно хорошо разработана [1.3.4.6]. При решении пространственных задач встречаются значительные математические трудности, поэтому они изучены значительно меньше [2].

Настоящая работа посвящена изучению контактного взаимодействия упругого стержня при передаче им нагрузки двуслойному анизотропному основанию. Для решения используется асимптотический метод, разработанный авторами в [5].

1.Рассмотрим осесимметричную контактную задачу о передаче нагрузки стержнем кругового поперечного сечения упругому телу, состоящему из двух сцепленных между собой ортотропных слоев с цилиндрической анизотропией ($0\le z_1\le h_1$, $0\le z_2\le h_2$, $r\neq\infty$, $z_1=z$, $z_2=z-h_1$). Стержень помещен в тело перпендикулярно ограничивающим плоскостям, средняя линия его совпадает с осью z. Требуется определить закон распределения контактных напряжений между стержнем и телом, а также усилия в стержне при условии, что стержень в граничных точках нагружен продольными силами P_i (индексы i=1,2 относятся к соответствующим слоям; при конечных значениях h_1 ,h_2 из условия равновесия $P_2=P_1$). Поскольку в пространственных задачах для тел с включениями модель одномерного упругого включения в сочетании с моделью контакта по линии непосредственно неприменимо, здесь, как и в [2], предполагалось, что имеет место модель одномерного упругого стержня в сочетании с моделью контакта по цилиндрической поверхности для основания. Задача сводится к интегрированию уравнений равновесия для каждого из слоев

$$E_*\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+m\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}+E_*\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-E^*\frac{u}{r^2}=0,$$

$$G\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+E\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+G\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+m_1\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

при следующих граничных условиях

$$T=E\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\nu_{31}\frac{\partial u}{\partial r}+\nu_{32}\frac{u}{r}\right),S=G\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),(z=0,z=h_1+h_2),$$

$$w=w_c,u=0,(r=a).$$

При $z=h_1$ перемещения слоев и напряжения T, S в них равны, на бесконечности все функции обращаются в нуль. Перемещения стержня w_c удовлетворяют соотношениям

$$E_cFd^2w_c/dz^2=q(z),N=E_cFdw_c/dz=P(z=0,z=h_1+h_2).$$

Здесь u,w - компоненты вектора перемещений соответствующих слоев, E_* , E^* , E- модули упругости материалов слоев вдоль главных направлений r, θ, z, G - модуль сдвига, $m=G+\nu_{13}E_*$, $m_1=G+\nu_{23}E^*$, ν_{13} ,...,ν_{32} - коэффициенты Пуассона, T, S - нормальные и касательные напряжения в слоях, E_c F - жесткость стержня на растяжение-сжатие, q(z), N(z) - усилие контактного взаимодействия между стержнем и слоями и усилие в стержне, причем $q(z)=-2\pi aS(a,z)$, a - радиус стержня. Так как при r=a перемещениеu и производная ∂u/∂z равны нулю, то напряжение S(a,z) полностью определяется лишь функцией ∂w/∂r, поэтому $q(z)=-2\pi aG(\partial w/\partial r)$.

При определении усилия в стержне и усилия контактного взаимодействия в соответствии с расщеплением напряженно-деформированного состояния ортотропного тела [5] сформулированная краевая задача для каждого из слоев сводится к следующей:

$$E_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + G_i\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_i}{\partial r}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\partial w_i / \partial z = 0 (z = 0, z = h_1 + h_2),$$

$$\partial w_i / \partial z = f(r) / E_i (z = h_1), \tag{2}$$

$$w_i = w_c (\partial w_i / \partial z = dw_c / dz)(r = a),$$

$$E_c F d^2 w_c / dz^2 = -2\pi a G_i (\partial w_i / \partial r)\big|_{r=a}\ , \tag{3}$$

$$dw_c / dz = P_i / E_c F (z = 0, z = h_1 + h_2), \tag{4}$$

$$dw_c / dz = f(a) / E_i (z = h_1)(i = 1,2),$$

где E_i обозначает соответствующее значение E_3 для каждого из слоев, f(r) – неизвестная функция, подлежащая определению.

После применения к уравнениям (1), (3) косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по координате z с учетом граничных условий (2), (4), решения полученных уравнений при помощи преобразования Вебера по координате r, возвращению к оригиналам и оценки некоторых интегралов получим:

$$w_i(a,z) = \frac{2h_i}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{E_c F} - \frac{f(a)}{E_i}(-1)^n\right]\frac{\cos\alpha_i(n) z_i}{n(n + g_i M_i(n))}\ , \tag{5}$$

$$\alpha_i(n) = n\pi / h_i,\ g_i = 2\pi a G_i h_i / E_c F,\ \omega_i^2 = E_i / G_i,$$

$$M_i(n) = K_1(\omega_i \alpha_i(n) a) / K_0(\omega_i \alpha_i(n) a).$$

$K_0(x)$, $K_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя.

Неизвестное значение f(a) находится из условия, что $w_1 = w_2$ при $z = h_1$. Приравнивая перемещения из (5) при i=1 и i=2, получим:

$$f(a) = \left(\frac{P_1 E_1}{E_c F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_1(n) z_1}{n(n + g_1 M_1(n))}\bigg|_{z_1=h_1} + \right.$$

$$+\left.\frac{h_2 P_2 E_1}{h_1 E_c F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_2(n) z_2}{n(n + g_2 M_2(n))}\bigg|_{z_2=0}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_1(n) z_1}{n(n + g_1 M_1(n))}\bigg|_{z_1=h_1} + \right.$$

$$+\left.\frac{h_2 E_1}{h_1 E_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_2(n) z_2}{n(n + g_2 M_2(n))}\bigg|_{z_2=0}\right)^{-1}.$$

Усилие в стержне N(z) и усилие контактного взаимодействия определяются по формулам

$$N(z) = E_c F dw(a,z), q(z) = -2\pi a G(\partial w / \partial r)\big|_{r=a},$$

причем функции $dw_i(a,z)/dz$, $\partial w_i/\partial r$ (r=a) выражаются соотношениями

$$\frac{dw_i(a,z)}{dw} = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{E_c F} - \frac{f(a)}{E_i}(-1)^n\right]\frac{\sin\alpha_i(n) z_i}{n + g_i M_i(n)},$$

$$\left.\frac{\partial w_i}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{2\omega_i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{E_c F} - \frac{f(a)}{E_i}(-1)^n\right]\frac{\cos\alpha_i(n) z_i}{n M_i^{-1}(n) + g_i}, (i = 1,2).$$

Получаемые решения для усилия контактного взаимодействия на линии стыка стержня и тела на вободной границе имеют особенность, представляющую собой разложение точной особенности в ряд. При учете лишь первого приближения эта особенность имеет логарифмический характер и не совпадает с точной. При учете более высоких приближений получаем разложение в ряд точной степенной особенности. При решении сложных задач получение достаточного количества приближений

затруднительно. Зная точный характер особенности, который определяется из решения задачи в целом, удается “срастить” точное решение с полученным изложенным выше методом приближенным решением. Условиями “сращивания” может служить требование равенства точного и приближенного решений и их производных в некоторой точке области контакта. При этом определяется неизвестный коэффициент особого решения и зоны в которых можно использовать лишь точное решение, либо справедливо приближенное. Оказывается, что полученные выше решения несправедливы лишь в очень малой окрестности особой линии.

2. Аналогичным образом решается плоская задача. Учитывая, что ось подкрепляющего элемента направлена вдоль оси x после применения преобразований Фурье, возвращения к оригиналам и оценки некоторых интегралов, получим для компонент перемещения

$$u_i(x,0)=\frac{2h_i}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{E_cF_c}-\frac{f(0)}{E_i}(-1)^n\right]\frac{\cos\alpha_i(n)x_i}{n(n+g_i)}(i=1,2) \qquad (6)$$

Неизвестное значение f(0) находится из условия, что при $x=h_1$, $u_1 = u_2$.

Приравнивая перемещение (6) при $x=h_1$, получим

$$f(0)=\frac{P_1E_1}{E_cF_c}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_1(n)x_1}{n(n+g)}-\Big|_{x_1=h_1}+\frac{h_2}{h_1}\frac{P_2}{P_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_2(n)x_2}{n(n+g_2)}\Big|_{x_2=0}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_1(n)x_1}{n(n+g_1)}\Big|_{x=h_1}+\frac{h_2}{h_1}\frac{E_1}{E_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_2(n)x_2}{n(n+g_2)}\Big|_{x_2=0}\right]^{-1}$$

Зная, что при произвольных значениях координат x, y компоненты перемещения выражаются при помощи ряда

$$u_i(x,y)=\frac{2}{h_i}\sum_{n=1}^{\infty}u_i^*(n,y)\cos\alpha_i(n)x_i,$$

$$u_i^*(n,y)=\int_0^{h_i}u_i(x,y)\cos\alpha_i(n)x_i\,dx_i$$

можно найти неизвестную функцию f(y) при произвольных значениях y, приравнивая $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ при $x=h_1$.

Усилие в стрингере N(x) и усилие контактного взаимодействия между стрингером и пластиной q(x) определяется по формулам

$$N(x)=E_cF_c\frac{\partial u(x,0)}{\partial x},q(x)=-G\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0},$$

где функции $\partial u_i(x,0)/\partial x,\ \partial u_i(x,0)/\partial y$ выражаются соотношениями

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big|_{y=0}=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{E_cF_c}-\frac{f(0)}{E_i}(-1)^n\right]\frac{\sin\alpha_i(n)x_i}{n+g_i},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big|_{y=0}=-\frac{2\omega_i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_i\left[\frac{P_i}{E_cF_c}-\frac{f(0)}{E_i}(-1)^n\right]\frac{\cos\alpha_i(n)x_i}{n+g_i}$$

Отметим, что решения пространственной и плоской задач получены в виде достаточно удобных для расчетов формул. Таким образом, зная упругие характеристики материалов стержня и основания легко получить искомые величины усилий в стрингере, перемещений, а также усилия контактного взаимодействия между стрингером и пластиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 487 с.

2. Кагадий Т.С., Павленко А.В. Осесимметричная задача о передаче нагрузки упругим стержнем вязкоупругому ортотропному телу // Прикладная математика и механика.- 1989. Т.53, вып.5.- С.787-790.

3. Кривой А.Ф., Попов Г.Я., Радиолло М.В. Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной полуплоскости // Прикладная математика и механика.- 1986.- Т. 50, вып. 4.- С. 622-632.

4. Маневич Л.И., Павленко А.В. Передача продольной динамической нагрузки, действующей на ребра жесткости, к упругой ортотропной пластине // Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела.- 1975.- № 2.- С. 117-124.

5. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела.- К.- Донецк : Вища школа, 1982.- 153 с.

6. Развитие теории контактных задач в СССР /Под редакцией Л.А. Галина.- М.: Наука, 1976.- 493 с.