УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗАННЯ РЕКУРЕНТНОЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ НЕПЛОСКОГО ШТАМПУ З ДВОЗВ'ЯЗНОЮ ОБЛАСТЮ КОНТАКТА

Шишканова Г.А.

Для розв'язання просторової задачі про вдавлювання неплоского штампа з двозв'язною площадкою контакта автором розроблений метод, що базується на запропонованому в [1], [5].

За певних умов розв'язання двовимірного інтегрального рівняння з невідомою двозв'язною областю інтегрування зводиться до розв'язання рекурентної системи аналогічних рівнянь для області у формі кругового кільця.

Розглядається випадок, коли первісний дотик штампа до пружного півпростору відбувається по еліпсу, а саме, коли поверхня штампа утворена переміщенням параболи вздовж еліпса, тобто рівняння поверхні штампа є

$$Z = A \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2}} - \rho_* \right)^2 .$$

При наближенному розв'язанні контактної проблеми можна обмежитися системою двох перших рівнянь, що має вигляд:

$$\iint\limits_D \frac{p_0(\rho)}{r}\,\mathrm{d}s = C_{00}^{(0)} + C_{01}^{(0)}\,\frac{\rho_0}{b} + C_{02}^{(0)}\,\frac{\rho_0^2}{b^2}; \tag{1}$$

$$\iint\limits_D \frac{p_1(\rho)}{r}\,\mathrm{d}s = L_{10}(p_0) + L_{12}(p_0\cos 2\theta_0); \tag{2}$$

Тут

$$\begin{aligned} L_{10}(p_0) &= C_{00}^{(1)} + C_{01}^{(1)}\,\frac{\rho_0}{b} + C_{02}^{(1)}\,\frac{\rho_0^2}{b^2} + \\ &+ \left(1 - \rho_0\,\frac{\partial}{\partial\rho_0}\right)\cdot \iint\limits_D \frac{p_0(\rho)}{r}\cdot a_{00}^{(1)}\,\mathrm{d}s - \rho_0\,\frac{\partial}{\partial\rho_0}\iint\limits_D \frac{p_0(\rho)}{\rho r}\cdot b_{00}^{(1)}\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} L_{12}(p_0) &= \left(C_{21}^{(1)}\,\frac{\rho_0}{b} + C_{22}^{(1)}\,\frac{\rho_0^2}{b^2}\right)\cos 2\theta_0 + \\ &+ \left(1 - \rho_0\,\frac{\partial}{\partial\rho_0}\right)\cdot \iint\limits_D \frac{p_0(\rho)}{r}\cdot a_{20}^{(1)}\cos 2\theta\,\mathrm{d}s - \rho_0\,\frac{\partial}{\partial\rho_0}\iint\limits_D \frac{p_0(\rho)}{\rho r}\cdot b_{20}^{(1)}\cos 2\theta\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4}$$

D - кругове кільце $a \le \rho \le b$, $\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$,

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0), \qquad (\rho_0, \theta_0) \in D. \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (1) одержаний в [3] і описується такою залежністю:

$$p_0(\rho) = \sum_{k,p=0}^{\infty}\left[\alpha_{pk}^{(0)}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{2k} + \beta_{pk}^{(0)}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2k+3}\right]\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{p} + \frac{C_{01}^{(0)}}{2\pi b}\ln\frac{\rho}{b}, \tag{6}$$

де $$\alpha_{pk}^{(0)} = \frac{C_{00}^{(0)}}{2\pi b}\alpha_{pk}^{(0,0)} + \frac{C_{01}^{(0)}}{2\pi b}\alpha_{pk}^{(0,1)} + \frac{C_{02}^{(0)}}{2\pi b}\alpha_{pk}^{(0,2)}, \tag{7}$$

$$\beta_{pk}^{(0)} = \frac{C_{00}^{(0)}}{2\pi b}\beta_{pk}^{(0,0)} + \frac{C_{01}^{(0)}}{2\pi b}\beta_{pk}^{(0,1)} + \frac{C_{02}^{(0)}}{2\pi b}\beta_{pk}^{(0,2)}. \tag{8}$$

$$\alpha_{pk}^{(0,1)} = \overline{\alpha}_{pk}^{(0,1)} + \overline{\alpha}_{pk}^{(0,1)} \ln\frac{a}{b}; \qquad \beta_{pk}^{(0,1)} = \overline{\beta}_{pk}^{(0,1)} + \overline{\beta}_{pk}^{(0,1)} \ln\frac{a}{b}. \tag{9}$$

Сталі коефіцієнти α_{pk}, β_{pk} визначаються рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}_{pk}^{(i,m)} = \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-3}{2}\right)} \frac{\overline{\beta}_{p-2q-3,q}^{(i,m)}}{2q+2k+3}; \qquad \overline{\beta}_{pk}^{(i,m)} = \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right)} \frac{\overline{\alpha}_{p-2q,q}^{(i,m)}}{2q+2k+3}; \\ &k = 0,1,2,... \qquad\qquad k = 0,1,2,... \\ &p = 3,4,... \qquad\qquad p = 1,2,3,... \end{aligned} \tag{10}$$

де $$\overline{\alpha}_{pk}^{(i,m)} = \frac{2k!!}{(2k+1)!!}\alpha_{pk}^{(i,m)}; \quad \overline{\beta}_{pk}^{(i,m)} = \frac{2k!!}{(2k+1)!!}\beta_{pk}^{(i,m)} \tag{11}$$

Початковими даними в рекурентних співвідношеннях (10) є такі значення

$$\begin{aligned} &\alpha_{0k}^{(0,0)} = \frac{2}{\pi}\frac{(2k-1)!!}{2k!!}; \alpha_{0k}^{(0,2)} = \frac{4}{\pi}\frac{(2k+1)!!}{2k!!}\frac{1}{2k-1}; \alpha_{1k}^{(i,m)} = 0; \overline{\alpha}_{0k}^{(0,1)} = 0; \\ &\overline{\alpha}_{0k}^{(0,1)} = \frac{(2k+1)!!}{2k!!}\frac{1}{2k}, k \ge 1; \ \alpha_{00}^{(0,1)} = 1 - \ln 2, k = 0; \ \alpha_{2k}^{(i,m)} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\beta_{0k}^{(0,0)} = \frac{2}{\pi}\alpha_{00}^{(0,0)}\frac{(2k+1)!!}{2k!!}\frac{1}{2k+3}; \ \beta_{0k}^{(0,2)} = \frac{2}{\pi}\alpha_{00}^{(0,2)}\frac{(2k+1)!!}{2k!!}\frac{1}{2k+3}; \\ &\overline{\beta}_{0k}^{(0,1)} = -\frac{2}{\pi}\frac{(2k+1)!!}{2k!!}\frac{1}{(2k+3)^2}; \overline{\beta}_{0k}^{(0,1)} = \frac{2}{\pi}\frac{(2k+1)!!}{2k!!}\frac{1}{2k+3}; \beta_{1k}^{(i,m)} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Розв'язок (6) рівняння (1) після часткового підсумовування [4] можна перетворити до виразу з відокремленими особливостями при ρ=*a*, ρ=*b*

$$p_0(\rho) = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2/b^2}}\beta^{(0)} + \frac{a/\rho}{\sqrt{1-a^2/\rho^2}}\alpha^{(0)} + \varphi_0(\rho)\right\} \tag{14}$$

Тут $\varphi_0(\rho)$ - неперервна при $a \le \rho \le b$ функція,

$$\begin{aligned} &\beta^{(0)} = \frac{1}{2\pi b}(C_{00}^{(0)} + \frac{\pi}{2}C_{01}^{(0)} - 2C_{02}^{(0)}) + \sum_{k,p=0}^{\infty}\frac{2k!!}{(2k+1)!!}\beta_{pk}^{(0)}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+p+3}, \\ &\alpha^{(0)} = \frac{C_{01}^{(0)}}{2\pi b}(\ln 2 - 1 + \ln\frac{a}{b}) + \sum_{k,p=0}^{\infty}\frac{2k!!}{(2k+1)!!}\alpha_{pk}^{(0)}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+p}. \end{aligned} \tag{15}$$

$\alpha_{pk}^{(0)}$, $\beta_{pk}^{(0)}$ - визначаються співвідношеннями (7), (8).

Виходячи з вигляду рівняння (2), його розв'язок подамо у вигляді

$$p_1(\rho,\theta) = p_{10}(\rho) + p_{12}(\rho)\cos 2\theta, \tag{16}$$

де $p_{10}(\rho)$, $p_{12}(\rho)$ є розв'язки відповідно таких рівнянь

$$\iint\limits_D \frac{p_{10}(\rho)}{r}\,\mathrm{d}s = L_{10}(p_0), \tag{17}$$

$$\iint\limits_D \frac{p_{12}(\rho)\cos 2\theta}{r}\,\mathrm{d}s = L_{12}(p_0\cos 2\theta), \tag{18}$$

Легко довести, враховуючи властивості інтегралів з слабкою особливістю [2], що мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned}
&\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\iint\limits_D \frac{p_0(\rho)}{\rho r}\,\mathrm{d}s = \iint\limits_D \frac{p_0'(\rho)}{r}\,\mathrm{d}s \\
&\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\iint\limits_D \frac{p_0(\rho)\cos 2\theta}{\rho r}\,\mathrm{d}s = \iint\limits_D \frac{p_0'(\rho)\cos 2\theta}{r}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{19}$$

Використовуючи першу з цих рівностей, визначаємо розв'язок рівняння (17):

$$p_{10}(\rho) = \sum_{k,p=0}^{\infty}\left[\alpha_{pk}^{(1)}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{2k} + \beta_{pk}^{(1)}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2k+3}\right]\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{p} + \frac{C_{01}^{(1)}}{2\pi b}\ln\frac{\rho}{b} - b_{00}^{(1)}p_0'(\rho). \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{pk}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi b}\left[C_{10}^{(1)}\alpha_{pk}^{(0,0)} + C_{11}^{(1)}\alpha_{pk}^{(0,1)} + C_{12}^{(1)}\alpha_{pk}^{(0,2)}\right], \\
\beta_{pk}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi b}\left[C_{10}^{(1)}\beta_{pk}^{(0,0)} + C_{11}^{(1)}\beta_{pk}^{(0,1)} + C_{12}^{(1)}\beta_{pk}^{(0,2)}\right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Тут сталі коефіцієнти $C_{1j}^{(1)}$, $j = 0, 1, 2$ залежать від сталих з правої частини (17) і мають такий вигляд:

$$C_{10}^{(1)} = C_{00}^{(1)} - C_{00}^{(0)}a_{00}^{(1)};\quad C_{11}^{(1)} = C_{01}^{(0)};\quad C_{12}^{(1)} = C_{02}^{(1)} + C_{02}^{(0)}a_{00}^{(1)}.$$

Використовуючи залежності (10), виконаємо у виразі (20) для розв'язку рівняння (17) часткове підсумування рядів, щоб відокремити у виразі для $p_{10}(\rho)$ особливості при $\rho=a$ і $\rho=b$. Одержимо, що розв'язок (20) рівняння (17) перетворюється до форми:

$$\begin{aligned}
p_{10}(\rho) = \frac{2}{\pi}\Bigg[&\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2/b^2}}\left(\beta^{(1)} - \frac{1}{\rho}b_{00}^{(1)}\beta'\right) + \\
&+ \frac{a}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1-a^2/\rho^2}}\left(\alpha^{(1)} - \frac{1}{\rho}b_{00}^{(1)}\alpha'\right) + \varphi_1(\rho)\Bigg],
\end{aligned} \tag{22}$$

де $\varphi_1(\rho)$ - неперервна при $a \le \rho \le b$ функція,

$$\begin{aligned}
\beta^{(1)} &= \frac{1}{2\pi b}\left[C_{10}^{(1)} + \frac{\pi}{2}C_{11}^{(1)} - 2C_{12}^{(1)}\right] + \sum_{k,p=0}^{\infty}\frac{2k!!}{(2k+1)!!}\beta_{pk}^{(1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+p+3}, \\
\alpha^{(1)} &= \frac{1}{2\pi b}C_{11}^{(1)}\left(\ln 2 - 1 + \ln\frac{a}{b}\right) + \sum_{k,p=0}^{\infty}\frac{2k!!}{(2k+1)!!}\alpha_{pk}^{(1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+p},
\end{aligned} \tag{23}$$

$\alpha_{pk}^{(1)}$ і $\beta_{pk}^{(1)}$ визначаються співвідношеннями (21),

$$\begin{aligned}
\beta' &= \frac{1}{2\pi b}\left[\frac{\pi}{2}C_{01}^{(0)} + 4C_{02}^{(0)}\right] - \sum_{k,p=0}^{\infty}\frac{2k!!}{(2k+1)!!}(2k+2)\beta_{pk}^{(0)}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+p+3}, \\
\alpha' &= \frac{C_{01}^{(0)}}{2\pi b}\left(2\ln 2 - 1 + 2\ln\frac{a}{b}\right) + \sum_{k,p=0}^{\infty}\frac{2k!!}{(2k+1)!!}(2k+2)\alpha_{pk}^{(0)}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+p}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Використовуючи другу з рівностей (19), визначаємо, що розв'язок рівняння (18) має вигляд:

$$p_{12}(\rho)=\sum_{k,p=0}^{\infty}\left[\alpha_{pk}^{(2)}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{2k}+\beta_{pk}^{(2)}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2k+3}\right]\left(\frac{a}{b}\right)^{p}-b_{20}^{(1)}p_0'(\rho), \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{pk}^{(2)}&=\frac{1}{2\pi b}\left[C_{20}^{(2)}\alpha_{pk}^{(0,0)}+C_{22}^{(2)}\alpha_{pk}^{(0,2)}+C_{23}^{(2)}\alpha_{pk}^{(0,3)}\right],\\ \beta_{pk}^{(2)}&=\frac{1}{2\pi b}\left[C_{20}^{(2)}\beta_{pk}^{(0,0)}+C_{22}^{(2)}\beta_{pk}^{(0,2)}+C_{23}^{(2)}\beta_{pk}^{(0,3)}\right],\end{aligned} \tag{26}$$

Початкові дані для $\alpha_{pk}^{(0,3)}$ та $\beta_{pk}^{(0,3)}$ мають такі значення

$$\alpha_{0k}^{(0,3)}=\alpha_{1k}^{(0,3)}=\alpha_{2k}^{(0,3)}=0;\qquad \beta_{0k}^{(0,3)}=\frac{(2k-1)!!}{2k!!}\frac{2}{\pi}. \tag{27}$$

Підставляючи (25) до рівняння (18), одержуємо рівність

$$\begin{aligned}&2\pi\frac{\rho_0}{b}\frac{2}{3}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{p0}^{(2)}\left(\frac{a}{b}\right)^{p}b+2\pi\left(\frac{a}{\rho_0}\right)^{2}\frac{2}{3}\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p0}^{(2)}\left(\frac{a}{b}\right)^{p}a+C_{22}^{(2)}\frac{3}{2}\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^{2}=\\ &=C_{22}^{(1)}\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^{2}+C_{21}^{(1)}\left(\frac{\rho_0}{b}\right)-b_{20}^{(1)}\cdot\left[4\pi\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p0}^{(0)}\left(\frac{a}{b}\right)^{p}a\left(\frac{a}{\rho_0}\right)^{2}-C_{02}^{(0)}\frac{3}{2}\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^{2}-\frac{2}{3}C_{21}^{(0)}\left(\frac{\rho_0}{b}\right)\right],\end{aligned} \tag{28}$$

з якої, враховуючи співвідношення (26), здобуваємо три рівняння для визначення трьох невідомих сталих $C_{20}^{(2)}, C_{22}^{(2)}, C_{23}^{(2)}$.

Розв'язок (25) перетворимо до вигляду з відокремленими особливостями

$$p_{12}(\rho)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2/b^2}}\left(\beta^{(2)}-\frac{1}{\rho}b_{20}^{(1)}\beta'\right)+\frac{a}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1-a^2/\rho^2}}\left(\alpha^{(2)}-\frac{1}{\rho}b_{20}^{(1)}\alpha'\right)+\varphi_2(\rho)\right], \tag{29}$$

де $\varphi_2(\rho)$ - неперервна при $a \le \rho \le b$ функція, $\beta^{(2)}, \alpha^{(2)}$ такі самі, як і $\beta^{(1)}, \alpha^{(1)}$, до складу яких входять $C_{20}^{(2)}, C_{22}^{(2)}, C_{23}^{(2)}$ замість $C_{10}^{(1)}, C_{11}^{(1)}, C_{12}^{(1)}$.

Таким чином отримано, що розв'язок системи двох двовимірних інтегральних рівнянь з слабкою особливістю складається з двох функцій $p_0(\rho)$ (6) та $p_1(\rho,\theta)$ (16), причому доданки в останній функції визначаються залежностями (20), (25).

ЛІТЕРАТУРА

1. Зайцева Т.А. Пожуев В.И. О решении пространственных контактных задач для некругового штампа//Механика твердого тела.- №4.- 1994.- с.62-70.
2. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.-М:ГИФМЛ,-1962. - 253 с.
3. Ройтман А.Б., Шишканова С.Ф. Вдавливание неплоского кольцевого штампа в упругое полупространство//Прикладная механика. - 1980. - Т.16. -№4. - С.35-41.
4. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. -М.-Л. : ГИТТЛ.-1948.-400 с.
5. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой//Прикладная механика.-1990. - Т.26. - №5. -С.9-15.