УДК 539.3

НОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Чумаченко Я.В.

У даній роботі викладено єдиний алгоритм розв'язання внутрішніх та зовнішніх крайових задач для рівняння Пуассона у двовимірних областях. Метод грунтується на зображенні області визначення шуканої функції у вигляді спільної частини деяких базових областей, в яких рівняння має розв'язки методом відокремлення змінних. Ефективність методу підтверджена розв'язанням модельних задач, порівнянням з даними інших авторів.

При розв'язанні крайових задач для рівняння Пуассона майже неможливо (крім найпростіших випадків) побудувати замкнені аналітичні розв'язки. Єдиним засобом для одержання результату в такому випадку залишаються чисельні методи, з яких скінченно-різницевий методи [1], а в останні роки методи скінченних та граничних элементів [2,3,4] є найбільш поширеними. Не порівнюючи їх ефективності, відмітимо, що при наявності кутів, вхідних в область визначення шуканої функції, а також у випадку нескінченних областей при застосуванні цих методів можуть виникнути деякі складності. Їх ефективність при цьому помітно знижується.

Мета цієї роботи - дослідження можливостей застосування для чисельного розв'язку двовимірних внутрішніх та зовнішніх крайових задач для рівняння Пуассона альтернативного підходу[5].

Розглянемо деяку область, обмежену зсередини (рис.1) або зовні багатокутним контуром.

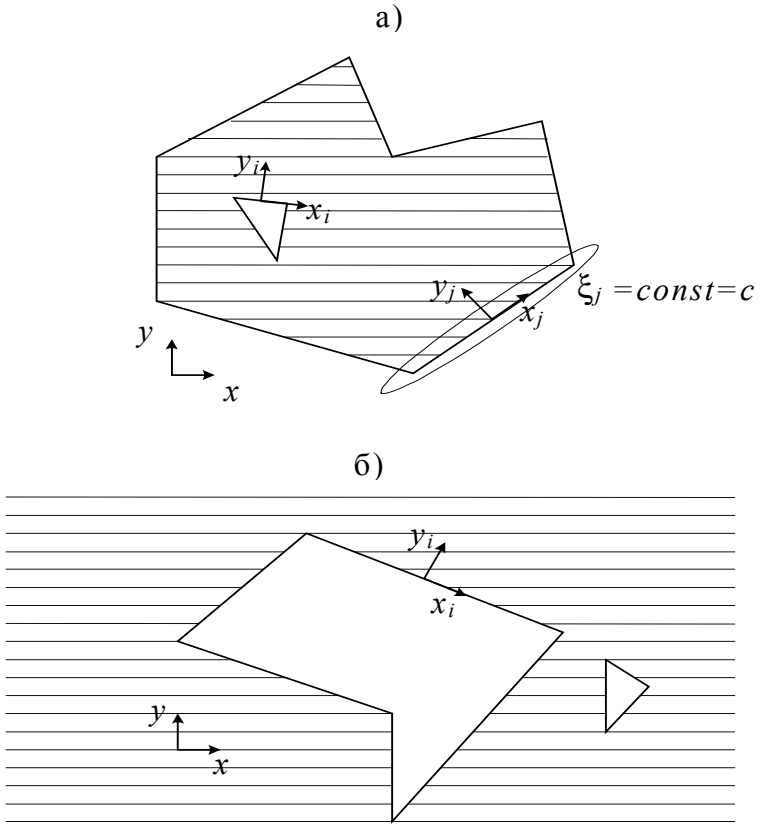

Рис. 1 Геометрія межі: а) – внутрішня задача, б) зовнішня задача.

Нехай (x, y) основна система Декартових координат, (x_i, y_i) - локальна система координат i - тої ланки з початком відліку в його центрі та вибрана так, що сторона ланки $y_i = +0$ обернена до області. Потрібно побудувати розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta V = -f(\vec{r}), \tag{1}$$

який задовольняє граничним умовам

$$V = \beta_i(x_i), y_i = +0, |x_i| < f_i, i \in I_D, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = \beta_i(x_i), y_i = +0, |x_i| = f_i, i \in I_N, \tag{3}$$

а також умові обмеження на нескінченності (у випадку зовнішньої задачі). Де f, β_i - задані функції, f_i - половина довжини ланки; I_D, I_N - множина номерів ланок граничного контура, на яких задані граничні умови Діріхлє і Неймана. Представимо шукану функцію у вигляді:

$$V = U + U^*, \tag{4}$$

де U^* - деякий частинний розв'язок рівняння (1), а U задовольняє рівнянню Лапласа та граничним умовам типу (2), (3) з заміною $V \to U$, причому

$$\psi_i = \beta_i - U^* \ (i \in I_D), \psi_i = \beta_i - \frac{\partial U^*}{\partial y_i} \ (i \in I_D). \tag{5}$$

Позначимо $I = I_D \cup I_N$, введемо локальні системи еліптичних координат (ξ_i, η_i):

$$x_i = f_i \mathrm{ch}(\xi_i)\cos(\eta_i), y_i = f_i \mathrm{sh}(\xi_i)\sin(\eta_i), i \in I \tag{6}$$

і будемо у подальшому розглядати ланки багатокутника як вироджені еліпси $\xi_i = 0$. Тоді область визначення шуканої функції можливо вважати спільною частиною простих базових областей, кожна з яких є всією площиною зовні такого еліпса. Функцію U будемо шукати у вигляді

$$U = \sum_{i \in I} U_i, \tag{7}$$

де U_i є розв'язками рівняння Лапласа у введених допоміжних областях. Формула (7) продовжує функцію U на всю площину, виключаючи граничний контур. Це значить, що для однозначного її визначення в усіх випадках необхідно залучати умову на нескінченності та довизначити її на стороні граничного контура $y_i = -0, i \in I$. Ми візьмемо $U\big|_{y_i=-0} = U\big|_{y_i=+0}$. Легко бачити, що це еквівалентно умові

$$U_i(0;-\eta_i) = U_i(0;\eta_i), \eta_i \in (-\pi, \pi). \tag{8}$$

Розв'язавши рівняння Лапласа у базових областях у координатах (ξ_i, η_i) методом відокремлення змінних, відкинувши швидко зростаючі при $\xi_i \to \infty$ доданки та враховуючи умову (8), ми дістали для U наступне зображення

$$U = \sum_{i \in I} (D_0^i \xi_i + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \, e^{-n\xi_i} \cos(n\eta_i)) + C, \tag{9}$$

де C, D_n^i - коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Припускаючи хоч би обмеженість послідовностей $\{D_n^i\}$ з (9), як неважко впевнитись, виходить, що при $r = |\vec{r}| \to \infty$, $U = \left(\sum_{i \in I} D_0^i \right) \ln r + O(1)$. Це означає, що при $r \to \infty$ U обмежене тільки за умови

$$\sum_{i \in I} D_0^i = 0. \tag{10}$$

Зазначимо, що якщо не вдається підібрати простого частинного розв'зку U^*, для його знаходження може бути використано зображення у вигляді логарифмічного потенціалу

$$U^* = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_f} \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} f(\vec{r}')d\tau', \tag{11}$$

де D_f -область визначення функції f. У цьому випадку умова обмеженості розв'язку V при $r \to \infty$ (що необхідно при розв'язанні зовнішніх задач) буде виглядати як

$$\sum_{i \in I} D_0^i = C_f, \tag{12}$$

де
$$C_f = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathrm{D}} f(\vec{r}')d\tau'. \tag{13}$$

Підпорядкувавши (4),(9) граничним умовам (2), (3) та проектуючи отримані рівності на ортогональні базіси $\{1, \cos n\eta_i\}_{n=1}^{\infty}, \eta_i \in (0,\pi), i \in I$, дістанемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду (СЛАР) відносно невідомих коефіцієнтів розвинень

$$\left.\begin{aligned}
&2C + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n}^{ij}\, \mathrm{D}_n^j = C_0^i,\ i \in I_D, j \in I \\
&D_m^i + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{ij}\, \mathrm{D}_n^j = C_m^i,\ i \in I_D, j \in I, m = 1, \infty \\
&2D_0^i + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n}^{ij}\, \mathrm{D}_n^j = C_0^i,\ i \in I_N, j \in I \\
&D_m^i + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{ij}\, \mathrm{D}_n^j = C_m^i,\ i \in I_N, j \in I, m = 1, \infty
\end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

де

$$\left.\begin{aligned}
a_{m0}^{ij} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \xi_j\Big|_{y_i=0} \cos(m\eta_i)d\eta_i,\ i \in I_D, \\
a_{mn}^{ij} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[e^{-n\xi_j} \cos n\eta_j \right]\Big|_{y_i=0} \cos(m\eta_i)d\eta_i,\ i \in I_D, n = 1, \infty, \\
C_m^i &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_i \cos(m\eta_i)d\eta_i,\ i \in I_D, \\
a_{m_0}^{ij} &= \frac{2}{\pi\, m^*} \int_{-f_i}^{f_i} \frac{\partial\, \xi_j}{\partial\, y_i}\Big|_{y_i=0} \cos(m\eta_i)dx_i,\ i \in I_N, \\
a_{mn}^{ij} &= \frac{2}{\pi\, \mathrm{m}^*} \int_{-f_i}^{f_i} \frac{\partial}{\partial\, y_i} \left[e^{-n\xi_j} \cos n\eta_j \right]\Big|_{y_i=0} \cos(m\eta_i)dx_i,\ i \in I_N, n = 1, \infty, \\
C_m^i &= \frac{2}{\pi\, m^*} \int_{-f_i}^{f_i} \psi_i \cos(m\eta_i)dx_i,\ i \in I_N, \\
m^* &= \begin{cases} 1, m = 0 \\ -m, m \geq 1 \end{cases}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

СЛАР замикається рівнянням (10) або (12). Якщо $I_D = \varnothing$, рівняння (14) самі утворюють замкнену систему. Значення C при цьому довільне. Розв'язок СЛАР знаходиться методом редукції. Описаний алгоритм був реалізований у вигляді програми для ЭОМ, тестований на ряді модельних задач та показав високу ефективність.

Як приклад наведемо дані, отримані при розв'язанні задачі про скрут стрижня, перерізом якого є сектор кола (рис.2). Тут функція напруги V задовольняє рівнянню $\Delta V = -2$ та дорівнює нулю на межі області.

Як частинний розв'язок була обрана функція $U^* = -x^2$. Переріз стрижня апроксимовано 12 ланками. Були розраховані значення V у точках 1-8 (таблиця 1).

Таблиця 1

Точки	V	Точне значення V [7]
1	0.2512	0.2485
2	0.9661	0.9652
3	2.0339	2.0324
4	3.2619	3.2556
5	4.3697	4.3629
6	5.0139	5.0008
7	4.7798	4.7412
8	3.2232	3.0743

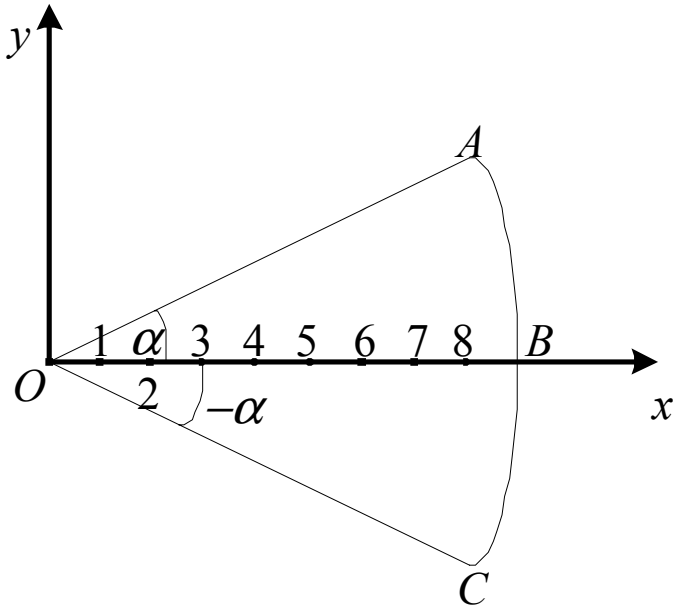

Рис. 2. Геометрія пробної задачі: O(0;0), A(9.24;3.83), B(10;0), C(9.24;-3.83), 1(1.103;0), 2(2.217;0), 3(3.33;0), 4(4.443;0), 5(5.557;0), 6(6.67;0), 7(7.783;0), 8(8.897;0), $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

У другому стовпці наведені розраховані нами значення V у цих точках. В останньому стовпці надані точні значення величин, взяті з [7]. Як видно з таблиці, навіть при такій невеликій апроксимації сектора, отримуємо гарну точність значень шуканої функції.

Перевагою методу є єдина техніка розв'язання як у внутрішніх, так і у зовнішніх областях. Підхід реалізовано у вигляді обчислювального алгоритму, який є універсальним у розглянутому класі задач. Його ефективність підтверджено розв'язанням тестових прикладів та порівнянням з відомими даними інших авторів. Сферу застосування методу можливо розширити на змішані крайові задачі. Іншою групою об'єктів можливого застосування методу є складові області.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. - М.: Наука, 1971.- 552с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках -М.: Мир, 1984.-494 с.
3. Бребия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. -М.: Мир, 1982.-248 с.

4. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. - М.: Мир, 1986.-229 с.
5. Чумаченко Я.В. Возможное решение уравнения Пуассона в многоугольных областях//Вісник Дніпропетровського університету.- Фізика, Радіоелектроніка.- 1998.- Вып. 4.- С. 88-92.
6. P.C. M. Lau and C.A. Brebbia. The cell collocation method in continuum mechanics.// International journal of the Mechanic Science -1978.- V.20, №2, p.83-97.
7. Годфри Д.Е.Р. Теория упругости и пластичности. К: Изд-во «Будивельник», 1969.- 312.