УДК 681.3:771.537.442

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАЗА ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Толок. А.В.

Моделирование операций дифференцирования функции является одной из актуальных задач математики. Его применение актуально при различных исследованиях в разнообразных областях науки.

Проблема получения образов дифференцирования функции двух аргументов частично решена созданием прикладных математических систем, таких как Mathematica, MathCAD и им подобных [1]. Правда, при этом точность полученных результатов зависит от опыта самого исследователя.

Проблемой также является создание средств визуализации максимально наглядно отображающих поставленную задачу с визуальной активизацией интересующих параметров.

Метод итерационного уточнения, изложенный в работе [2], позволяет подойти к поставленной задаче получения образов дифференцирования с учётом вышеизложенных проблем.

Определимся в понятии частной производной [3]. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

этого отношения при $\Delta x\to 0$, то мы можем рассматривать его как локальную скорость изменения функции $u=f(x,y)$ относительно переменной x в точке $P(x,y)$. Эту величину называют частной производной функции $u=f(x,y)$ по переменной x и обозначают через $\frac{\partial u}{\partial x}$ или $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

Разумеется, совершенно аналогично величина

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y},$$

называемая частной производной функции $u=f(x,y)$ по переменной y, выражает собой локальную скорость изменения этой функции относительно переменной y. Речь идёт о скорости изменения величины u при смещении точки $P(x,y)$ в направлении оси OY.

Геометрически, уравнение $u=f(x,y)$ выражает собой в трёхмерном пространстве некоторую поверхность, давая y какое-либо закреплённое значение, например $y=b$. При этом фиксируется внимание на сечении этой поверхности плоскостью $y=b$.

Принцип итерационного уточнения участка исследуемой поверхности позволяет на любом шаге выделить три точки $(x1,y1,z1),(x2,y2,z2),(x3,y3,z3)$, условно определяющих плоскость общего уклона участка. Постоянное стремление этих точек к одной рассматриваемой точке позволяет предположить стремление плоскости общего уклона к касательной плоскости в этой точке.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой, имеет вид [4]:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x1 & y1 & z1 & 1\\ x2 & y2 & z2 & 1\\ x3 & y3 & z3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Определим коэффициенты плоскости общего уклона, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} y1 & z1 & 1 \\ y2 & z2 & 1 \\ y3 & z3 & 1 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} z1 & x1 & 1 \\ z2 & x2 & 1 \\ z3 & x3 & 1 \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку коэффициент D не влияет на наклон касательной плоскости, то его можно исключить из рассмотрения при определении значения частной производной в рассматриваемых точках.

Отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ определяет значение $tg\alpha$, где α - угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс.

Такое же значение тангенса можно получить через коэффициенты касательной плоскости в рассматриваемой точке:

$$tg\alpha = \frac{A}{C}.$$

Таким образом, для определения значения частных производных по выбранной оси используем следующие отношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{C}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{B}{C},$$

где A, B, C - коэффициенты касательной плоскости в рассматриваемой точке поверхности,

а $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ - частные производные в этой точке.

Прежде чем говорить о получении образа частной производной предлагаемым алгоритмом, представленным в работе [2] и основанном на принципе итерационного уточнения, следует отметить, что традиционные методы закраски в данном случае не совсем удобны для применения. Эти методы требуют предварительного определения максимального и минимального значений исследуемой функции для дальнейшего распределения градации тона.

В качестве альтернативы предлагается способ отображения поверхности на основе реконструкции реалистичного образа, изложенный в работах [5,6]. Этот способ основан на полутоновой градации отклонения вектора нормали рассматриваемой точки от источника света. Таким образом, возможность управления наклоном источника света обеспечивает выявление необходимого уклона поверхности. Например, для выделения белым цветом вертикального положения нормали необходимо и достаточно определить источник света вертикально по отношению к рассматриваемой поверхности.

Поскольку коэффициенты касательной плоскости в рассматриваемой точке A, B, C являются направляющими нормального вектора этой плоскости, то их нормирование обеспечивает более точную привязку к полутоновой градации. Причём нормирование, предлагаемое в работе [3], не приводит к искомому результату, поскольку предполагает рассматриваемую точку в начале системы координат, поэтому нормирование осуществляется следующим образом:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{B^2 + 2}},$$

где A, B - коэффициенты касательной плоскости в рассматриваемой точке, а 2 - сумма остальных единичных измерений рассматриваемого пространства.

Для сравнения получаемого образа частной производной воспользуемся полутоновой градацией, традиционно используемой в различных системах визуализации результатов расчёта. Белый цвет определит максимальное значение частной производной, а чёрный цвет - минимальное. Сравним

результирующий образ, полученный предложенным методом, с традиционным образом частной производной, формально описанной на системе MathCAD.

На рисунке 1 приводится вид поверхности исследования, описанной функцией

$$u = x \cdot sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) + y^2 \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a}),$$

где $a = 1$ для области определения $[0,1]$ по обеим осям.

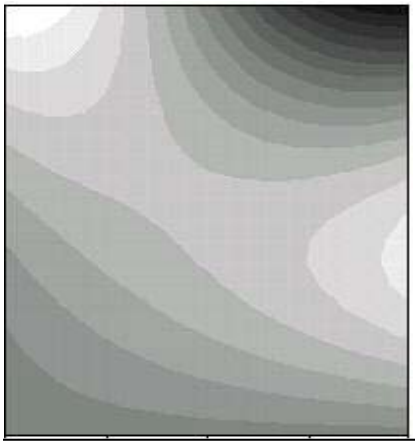

Рис.1. Пример поверхности, заданной функцией

$$u = x \cdot sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) + y^2 \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$$

Первая колонка таблицы 1 отображает результат частного дифференцирования функции по осям, выполненный традиционными методами в системе MathCAD. Вторая колонка соответственно отображает результат получения образа предлагаемым подходом. Поскольку для этого примера световой луч направлен вертикально к поверхности, то белым цветом выделяется нулевое значение частной производной, т.е. вектор нормали в этом месте будет расположен вертикально. А степень градации тона определяет отклонение от нулевого значения. Чёрный цвет предполагает максимальное значение частной производной в одном из направлений осей.

В качестве проверки рассматривается поверхность второй производной как результат обработки поверхности первой производной и сравнивается с аналитическим результатом (рис 1.5.-1.8).

В отличие от традиционной визуализации, предложенный способ усложняет восприятие высотного отношения рассматриваемой поверхности, но позволяет активизировать образ по двум критериям оценки: во-первых, выделяется освещением интересующий на данном этапе исследования наклон поверхности, во-вторых, более наглядна интенсивность рельефа рассматриваемой поверхности. Второй критерий оценки трудно уловим в традиционном образе. Это связано с тем, что традиционные методы закраски, граничащие максимальным и минимальным значением, приводят к визуальному нормированию образа в целом.

Таким образом, ошибочно утверждать, что полученный образ полностью информационно заменяет традиционный. Он лишь является дополнительным средством для исследователя.

Пример активизации первого параметра приведён на рис.2-5. В отличие от предыдущих образов, где свет падает вертикально, выделяя при этом вертикальную нормаль, предлагаемые образы акцентируют внимание на нормалях с отклонением от оси Oz вокруг оси Oy на углы $\pi / 8$ и $\pi / 4$ для образов частных производных $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$ соответственно.

Таблица 1

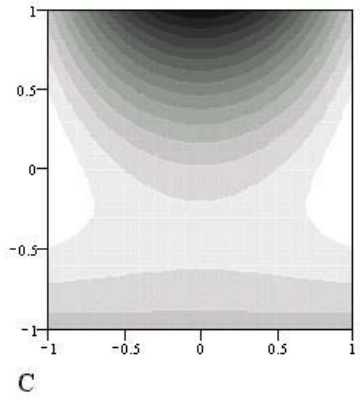

Рис.1.1. Пример поверхности, полученной в системе MathCAD, описанной как частная производная рассматриваемого примера

$$\frac{\partial u}{\partial x} = sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) - y^2 \cdot \frac{\pi}{a} \cdot sin(\pi \cdot \frac{x}{a})$$

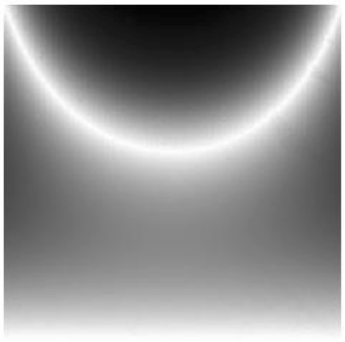

Рис.1.2. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как

$$u = x \cdot \sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) + y^2 \cdot \cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$$

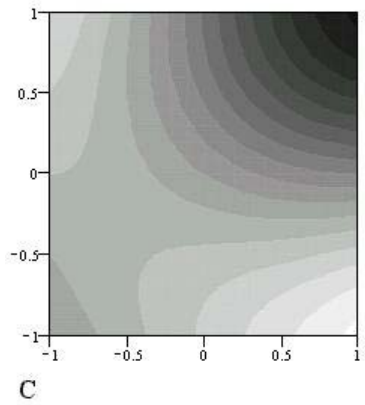

Рис.1.3. Пример поверхности, полученной в системе MathCAD, описанной как частная производная рассматриваемого примера $\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\pi}{a} \cdot cos(\pi \cdot \frac{y}{a}) + 2 \cdot y \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$



Рис.1.4. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как $u = x \cdot sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) + y^2 \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$

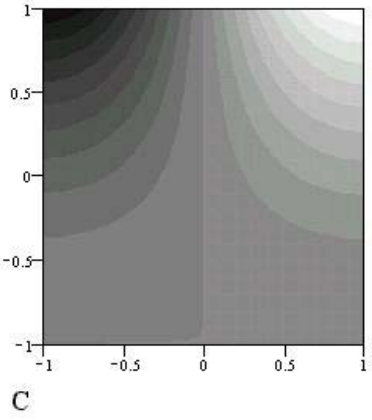

Рис.1.5. Пример поверхности, полученной в системе MathCAD, описанной как вторая производная рассматриваемого примера $\frac{\partial u}{\partial x^2} = -y^2 \cdot (\frac{\pi}{a})^2 \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$

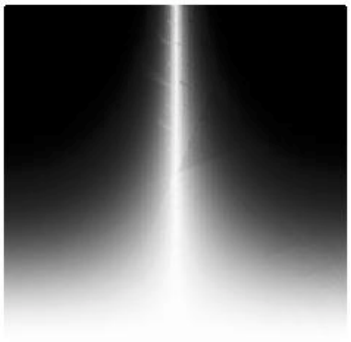

Рис.1.6. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как $\frac{\partial u}{\partial x} = sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) - y^2 \cdot \frac{\pi}{a} \cdot sin(\pi \cdot \frac{x}{a})$

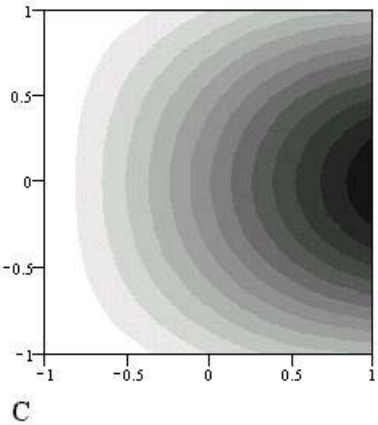

Рис.1.7. Пример поверхности, полученной в системе MathCAD, описанной как вторая производная рассматриваемого примера $\frac{\partial u}{\partial y^2} = -x \cdot (\frac{\pi}{a})^2 \cdot sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) + 2 \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$

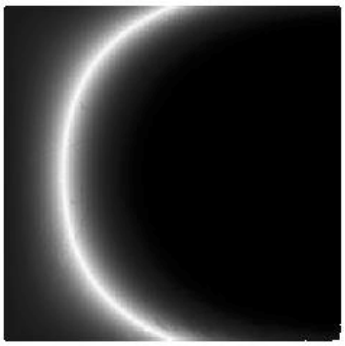

Рис.1.8. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как $\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\pi}{a} \cdot cos(\pi \cdot \frac{y}{a}) + 2 \cdot y \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$



Рис.2. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как $\frac{\partial u}{\partial x} = sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) - y^2 \cdot \frac{\pi}{a} \cdot sin(\pi \cdot \frac{x}{a})$ при активизации параметра наклона поверхности под углом $\pi / 8$.



Рис.3. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как $\frac{\partial u}{\partial x} = sin(\pi \cdot \frac{y}{a}) - y^2 \cdot \frac{\pi}{a} \cdot sin(\pi \cdot \frac{x}{a})$ при активизации параметра наклона поверхности под углом $\pi / 4$.



Рис.4. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как $\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\pi}{a} \cdot cos(\pi \cdot \frac{y}{a}) + 2 \cdot y \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$ при активизации параметра наклона поверхности под углом $\pi / 8$.



Рис.5. Пример образа поверхности, полученного предложенным способом на основе функции, описанной как $\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\pi}{a} \cdot cos(\pi \cdot \frac{y}{a}) + 2 \cdot y \cdot cos(\pi \cdot \frac{x}{a})$ при активизации параметра наклона поверхности под углом $\pi / 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчёты в среде Windows 95.: Пер. с англ. - М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", 1996. - 712 с.
2. Толок А.В., Мухин В.В. Алгоритм итерационного уточнения области исследования поверхности // Вісник Запорізького державного університету. - 1998. - N2. - С.90-97.
3. Хинчин А.Я. Краткий курс математического анализа. Издание третье, стереотипное. М:. "Государственное издательство технико-теоретической литературы", 1957 - 628 с.
4. Аммерал Л.. Принципы программирования в машинной графике: Пер. с англ. В.А. Львова. - М:. 1992. - 203 с.
5. Толок А.В. Принципи візуальної підтримки властивостей поверхні на основі реконструкції реалістичного образу // Вісник Запорізького державного університету. - 1998. - N1. - С.76-79.