УДК 534.1+539.3

СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН З ВКЛЮЧЕННЯМИ

Тамуров М.Г., Швидка С.П.

Досліджуються стаціонарні випадкові коливання шарнірно опертої ізотропної прямокутної пластини з k включеннями однакової форми та жорсткості D_i під дією просторово-часового білого шуму q(x,y,t) інтенсивності s. Дослідження здійснюється у лінійній постановці за допомогою імпульсивних функцій. Для функції прогину обирають співвідношення

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t)W_{mn}(x,y)\,, \tag{1}$$

де $W_{mn}(x,y)=\sin\alpha_m x\sin\beta_n y$, $\alpha_m=m\pi/a;\ \beta_n=n\pi/b$; a,b - сторони пластини; $f_{mn}(t)$ - випадкові функції часу.

Як результат інтегрування з урахуванням (1) методом Бубнова-Гальоркіна стохастичного диференціального рівняння з неоднорідною жорсткістю [1,2] отримують:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2}+2\varepsilon_{mn}\frac{df_{mn}}{dt}+\omega_{mn}^2 f_{mn}=Q_{mn}(t)\qquad m,n=\overline{1,\infty}\,. \tag{2}$$

Тут

$$\omega_{mn}^2=\frac{D_0 g}{\rho_0 h}\frac{c(S-\psi S_1)-\psi\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{c}{4\alpha_m\beta_n}\left(2\rho+m_{1ij}m_{2ij}\right)-2(1-\mu)\alpha_m\beta_n\rho\right]\right\}}{S-\psi S_1-\frac{\psi}{4\alpha_m\beta_n}\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r}(2\rho+m_{1ij}m_{2ij})\right\}}, \tag{3}$$

ε_{mn} - коефіцієнти затухання, $Q_{mn}(t)$ - узагальнені сили,

$$Q_{mn}(t)=\frac{1}{A_{mn}}\int_0^a\int_0^b q(x,y,t)W_{mn}(x,y)dxdy\,, \tag{4}$$

де

$$A_{mn}=\frac{\rho_0 h}{4g}\left[S-\psi S_1-\frac{\psi}{4\alpha_m\beta_n}\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r}(2\rho+m_{1ij}m_{2ij})\right\}\right]. \tag{5}$$

Тут прийнято такі позначення

$$c=(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2;\quad S=ab;\quad \mathrm{S}_1=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}a_{ij}^{*}b_{ij}^{*};\quad a_{ij}^{*}=x_{2ij}-x_{1ij};\quad \mathrm{b}_{\mathrm{ij}}^{*}=y_{2ij}-y_{1ij};$$

$$m_{1ij}=\sin 2\alpha_m x_{1ij}-\sin 2\alpha_m x_{2ij};\qquad m_{2ij}=\sin 2\beta_n y_{1ij}-\sin 2\beta_n y_{2ij};$$

$$\rho = m_{1ij} b_{ij}^{*} \beta_n + m_{2ij} a_{ij}^{*} \alpha_m; \quad \psi = (D_0 - D_i)/D_0, \tag{6}$$

де ρ_0, D_0 - щільність та циліндрична жорсткість основного матеріалу пластини, μ - коефіцієнт Пуассона, h- товщина пластини, g – прискорення вільного падіння.

Система стохастичних диференціальних рівнянь (2) дозволяє досліджувати випадкові коливання пластин з включеннями квадратної, круглої та напівкруглої форми. Форма включення впливає лише на співвідношення, за допомогою яких знаходять координати вершин прямокутників x_{1ij}, x_{2ij}, y_{1ij}, y_{2ij}, що зображають реальне включення. Якщо включення прямокутні, то сума по r зникає. Кожне кругове включення радіуса R_i з центром (x_i, y_i) заміняють при дослідженні r прямокутниками, число яких для спрощення підбирають однаковим незалежно від радіуса. Координати вершин прямокутників обчислюють за формулами [1]:

$$y_{1ij} = y_i - R_i + \Delta y_i (j-1); \qquad y_{2ij} = y_{1ij} + \Delta y_i; \qquad \Delta y_i = \frac{2R_i}{r};$$

$$x_{1ij;\,2ij} = x_i \mp \sqrt{R_i^2 - \left(\frac{y_{2ij} + y_{1ij}}{2} - y_i\right)^2}; \qquad j = 1,2,...r. \tag{7}$$

Якщо пластина має включення тільки у формі напівкруга, то координати вершин прямокутників обчислюють за формулами [1] у такому вигляді:

$$y_{1ij} = y_i - R_i + \Delta y_i (j-1); \qquad y_{2ij} = y_{1ij} + \Delta y_i; \qquad \Delta y_i = \frac{2R_i}{r};$$

$$x_{1ij} = x_i - \sqrt{R_i^2 - \left(\frac{y_{2ij} + y_{1ij}}{2} - y_i\right)^2}; \qquad \mathrm{x_{2ij}} = x_i; \qquad j = 1,2,..r. \tag{8}$$

Число r підбирають таким, щоб послідуючий розрахунок відрізнявся від попереднього з наперед заданим ступенем точності.

Ймовірнісне описання вхідних та вихідних процесів звичайно робиться шляхом завдання моментних функцій молодших порядків або функцій, що легко висловлюються через них (кореляційних функцій, спектральних щільностей тощо). Саме на цей спосіб ймовірнісного описання розрахований метод диференціальних рівнянь відносно моментних функцій [3], який використовують для дослідження рівняння (2). Як результат маємо математичне сподівання

$$m_{f_{mn}} = 0; \tag{9}$$

кореляційну функцію

$$K_{f_{mn}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sab}{8\pi A_{mn}^2} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon_{mn}^2 \omega^2}; \tag{10}$$

дисперсію

$$\sigma_{f_{mn}}^2 = K_{f_{mn}}(0). \tag{11}$$

Формули (9)-(11) дозволяють обчислювати відповідні функції для нормального переміщення w(x,y,t). З формальної точки зору треба опосередкувати ряд (1) а також ряди, що отримують перемноженням цього ряду при різних значеннях x, y, t. Як результат маємо математичне сподівання

$$m_w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{f_{mn}} W_{mn}(x,y); \tag{12}$$

кореляційну функцію

$$K_w(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} K_{f_{mn}}(\tau) W_{mn}(x_1, y_1) W_{mn}(x_2, y_2)\,; \tag{13}$$

дисперсію

$$\sigma_w^2 = K_w(0)\,. \tag{14}$$

Зважаючи на стаціонарність зовнішнього навантаження та лінійність системи (2), застосовують до співвідношення (13) перетворення Фур'є:

$$S_w(i\omega) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} S_{f_{mn}}(i\omega) W_{mn}(x_1, y_1) W_{mn}(x_2, y_2)\,. \tag{15}$$

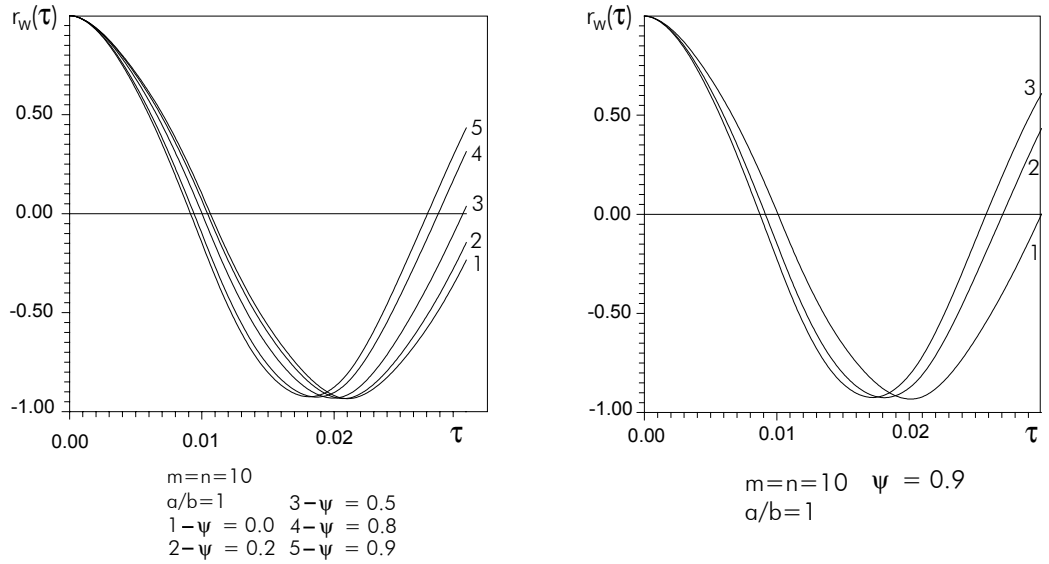
Для розрахунків використовують нормовану кореляційну функцію

$$r_w(\tau) = K_w(\tau) / \sigma_w^2 \tag{16}$$

та спектральну щільність

$$\overline{S_w} = \frac{\omega_0^4}{10^4 s} S_w(i\omega)\,, \quad \text{де } \omega_0 = \frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D_0 g}{\rho_0 h}}\,. \tag{17}$$

Деякі обчислення за формулами (13)-(16) для пластини з параметрами [4] ілюструються графіками (рис.1-3). Величини параметру дисперсії прогину $K_{\sigma_W^2}$ дорівнюють відношенню дисперсії прогину пластини з включенням до дисперсії суцільної пластини.



а) б)

Рис. 1. Нормовані кореляційні функції прогину пластини з центральним включенням у вигляді

а) круга радіуса $0.25a$;

б) 1– напівкруга радіуса $0.25a$; 2 – круга радіуса $0.25a$; 3 – квадрата із стороною $0.5a$

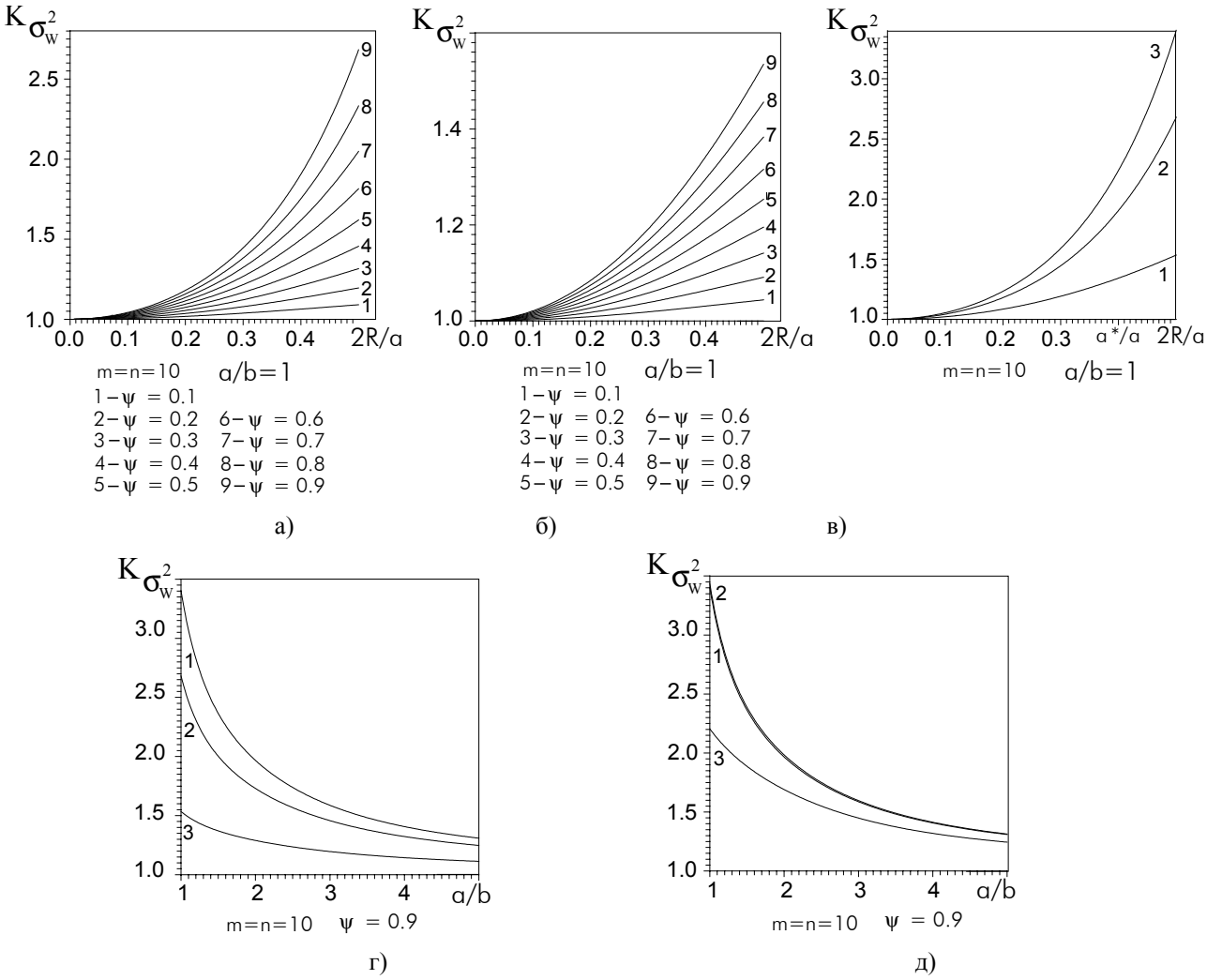


Рис. 2. Дисперсія прогину пластини з центральним включенням у вигляді

а) круга;

б) напівкруга;

в) 1– напівкруга; 2 – круга; 3 – квадрата;

г) 1 – квадрата із стороною $0.5b$; 2 – круга радіуса *R=b/4*; 3 – напівкруга радіуса *R=b/4*;

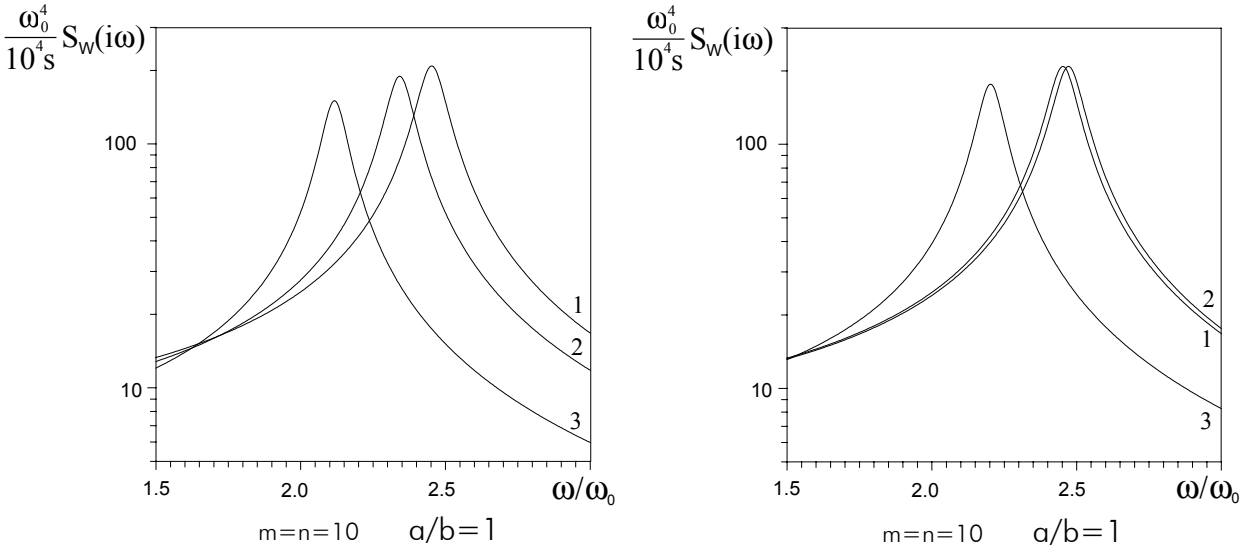
д) 1– квадрата із стороною $0.5b$; 2 – круга; 3 – напівкруга; площа включень однакова

Для дослідження законів розподілу характеристик вихідного процесу використовують методи теорії марковських процесів. Багато реальних процесів можливо приблизно трактувати як марковські або в усякому разі можливо розглядати як компоненти деяких багатомірних марковських процесів [3]. Якщо розглядати деформацію шарнірно опертої по зовнішньому контуру пластини з включеннями при m=n=1 як двовимірний марковський процес зміни узагальненої координати $f_1 = f_{11}(t)$ і швидкості $f_2 = \dot{f}_{11}(t)$, отримують систему стохастичних диференціальних рівнянь типу [3]:

$$\dot{f}_1 = f_2; \qquad \dot{f}_2 = -2\varepsilon_{11} f_2 - \omega_{11}^2 f_1 + Q_{11}(t). \tag{18}$$

Інтенсивності двовимірного марковського процесу мають вигляд:

$$\kappa_1 = f_2; \quad \kappa_2 = -2\varepsilon_{11} f_2 - \omega_{11}^2 f_1; \quad \kappa_{11} = \kappa_{12} = \kappa_{21} = 0; \quad \kappa_{22} = sab/(4A_{11}^2). \tag{19}$$



а) б)

Рис. 3. Спектральна щільність прогину пластини з центральним включенням у вигляді

а) 1– квадрата із стороною $0.5a$; 2 – круга радіуса $0.25a$; 3 – напівкруга радіуса $0.25a$;

б) 1– квадрата із стороною $0.5a$; 2 – круга; 3 – напівкруга; площа включень однакова

Коефіцієнти (19) враховують наявність включень у пластині. Рівняння Колмогорова має вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial f_1}(f_2 p) - \frac{\partial}{\partial f_2}\left(\left(-2\varepsilon_{11} f_2 - \omega_{11}^2 f_1\right)p\right) + \frac{sab}{8A_{11}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial f_2^2}. \qquad (20)$$

Для більшості практичних задач достатньо розв’язати стаціонарне рівняння Колмогорова. Як результат маємо закон розподілу узагальненої координати:

$$p_1(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{f_1}} exp\left(-\frac{f_1^2}{2\sigma_{f_1}^2}\right), \qquad \text{де} \qquad \sigma_{f_1}^2 = \frac{sab}{16A_{11}^2\varepsilon_{11}\omega_{11}^2}. \qquad (21)$$

Як видно, він є нормальним. У випадку суцільної пластини формула (21) збігається з результатом, що отримано в [3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Преображенский И.Н., Цурпал И.А. Вырезы в несущих конструкциях. М.: Машиностроение. -1984.- 112 с.

2. Швидка С. П. Коливання прямокутних пластин з включеннями як відгук на дію поверхневого випадкового навантаження // Вісник Запорізького держ. університету. - ЗДУ, 1998.- №1 – С. 81-83.

3. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М. Стройиздат. 1982.- 352с.

4. Диментберг М.Ф. Вынужденные колебания пластин при нагрузке, представляющей собой пространственно-временной случайный процесс // Инжен. журнал.- 1961.- т.1.- вып.2.