УДК 17.958:534.1

РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН У СТОХАСТИЧНОМУ ПОЛІ

Тамуров Ю.М., Тамурова Н.М.

Коливання пластинки з урахуванням деформацій повзучості, які виникають від дії дотичних напружень, за лінійним законом Больцмана-Вольтерра математично моделюються рівнянням [1]

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\left(D_1 + D_{xy}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - 2B\int_0^t \widetilde{A}_{66}(t-\theta)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\,d\theta + D_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_c \frac{\partial w}{\partial t} = q. \qquad (1)$$

Якщо прийняти, що

$$w(x,y,t) = \xi(t)\cdot \sin\frac{\pi x}{a}\cdot \sin\frac{\pi y}{b}$$

$$q(x,y,t) = q(t)\cdot \sin\frac{\pi x}{a}\cdot \sin\frac{\pi y}{b}, \quad \widetilde{A}_{66}(t-\theta) = \frac{1}{n}A_{66}^{*} e^{-\frac{t-\theta}{n}},$$

тоді (1) зводиться до вигляду

$$D_m \frac{d^2\xi}{dt^2} + D_c \frac{d\xi}{dt} + D\cdot\xi(t) - \widetilde{D}A_{66}^{*}\frac{1}{n}\int_0^t e^{-\frac{t-\theta}{n}}\xi(\theta)d\theta = q(t), \qquad (2)$$

$$D = D_x\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 + D_y\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + 2\left(D_1 + D_{xy}\right)\frac{\pi^4}{a^2 b^2};$$

$$\widetilde{D} = 2B\frac{\pi^4}{a^2 b^2}; \quad B = \frac{h^3}{12}; \quad D_1 = \frac{h^3}{12}A_{12}; \quad D_x = \frac{h^3}{12}A_{11};$$

$$D_y = \frac{h^3}{12}A_{22}; \quad D_{xy} = \frac{h^3}{12}A_{66},$$

де $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}$ - коефіцієнти в співвідношеннях закону Гука для ортотропних матеріалів; $q(t), \xi(t)$ - випадкові амплітуди навантаження і прогину пластинки.

Виключаючи інтеграл після диференціювання (2), одержано:

$$nD_m \frac{d^3\xi}{dt^3} + \left(nD_c + D_m\right)\frac{d^2\xi}{dt^2} + \left(nD + D_c\right)\frac{d\xi}{dt} + \left(D - \widetilde{D}A_{66}^{*}\right)\xi(t) = q(t). \qquad (3)$$

Коефіцієнт релаксації $n,\ A_{66}^{*}$ визначаються експериментом.

Стохастичне рівняння (3) після використання методу диференціальних рівнянь [2] наводиться через кореляційні функції в такому вигляді:

$$L_{t_1} L_{t_2} < \xi(t_1)\xi(t_2) >=< q(t_1)q(t_2) > . \tag{4}$$

Якщо $K_\xi(\tau) =< \xi(t_1) \cdot \xi(t_1 + \tau) >$

$K_q(\tau) =< q(t_1) \cdot q(t_1 + \tau) >$

$t_2 - t_1 = \tau,$

тоді рівняння (4) можливо подати у вигляді

$$c_1 \frac{d^6}{d\tau^6} K_\xi + c_2 \frac{d^4}{d\tau^4} K_\xi + c_3 \frac{d^2}{d\tau^2} K_\xi + c_4 K_\xi(\tau) = K_q(\tau),$$

$$c_1 = -n^2 D_m^2; \quad c_2 = (nD_c + D_m)^2 - 2nD_m(nD + D_c);$$

$$c_3 = 2\left(D - \widetilde{D}A_{66}^*\right)(nD_c + D_m) - (nD + D_c)^2; \quad c_4 = \left(D - \widetilde{D}A_{66}^*\right)^2.$$

У залежності від способу опису випадкових полів невідомими функціями також можуть бути функції розподілу вірогідностей для вихідних параметрів. У цьому випадку потрібно сформулювати задачу, яка буде описана рівнянням Колмогорова.

Рівняння (3) перетворюється в систему трьох рівнянь першого порядку: приймаючи $\xi(t) = u_1(t)$, можливо записати:

$$\frac{du_1}{dt} = u_2;$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_3;$$

$$\frac{du_3}{dt} = a_{13}u_3 + a_{12}u_2 + a_{11}u_1 + \frac{1}{nD_m} q(t).$$

Після визначення коефіцієнтів зсуву та дифузії для рівняння Колмогорова одержано рівняння (5) відносно щільності розподілу вірогідності $p(u_1, \dot{u}_1, \ddot{u}_1)$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\dot{u}_1 \frac{\partial p}{\partial u_1} - a_{13}\left(p + \ddot{u}_1 \frac{\partial p}{\partial \ddot{u}_1}\right) - \ddot{u}_1 \frac{\partial p}{\partial \dot{u}_1} -$$

$$- (a_{11}u_1 + a_{12}\dot{u}_1)\frac{\partial p}{\partial \ddot{u}_1} + \frac{1}{2} S_0^* \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \ddot{u}_1^2}, \tag{5}$$

де $S_0^* = \frac{1}{n^2 D_m^2} \cdot S_0$, $\quad S_0$ - інтенсивність “білого шуму”.

ЛІТЕРАТУРА

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
2. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 350 с.