УДК 517.544.73+517.552

БІСИНГУЛЯРНИЙ ІНТЕГРАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР З ЯДРОМ КОШІ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

Сніжко Н.В., Тихоненко М.Я.

Нехай $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$ - довільний замкнений кістяк Ляпунова, який обмежує однозв'язну біциліндричну область; $\omega(\delta_1, \delta_2)$ - деякий модуль неперервності, а $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ - відповідні йому прості модулі неперервності, що задовольняють умовам Зігмунда - Барі - Стєчкіна (ЗБС) [1,2]. Позначимо $H_\omega \equiv H_\omega(\gamma)$ - простір неперервних на γ функцій $x(t,\tau)$, $t \in \gamma_1$, $\tau \in \gamma_2$, які задовольняють умовам:

$$H(x;\omega) = \sup_{\delta_1^2+\delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega(\delta_1,\delta_2;x)}{\omega(\delta_1,\delta_2)} \le c_1, \qquad \text{(A)}$$

$$H^{t\tau}(x;\omega) = \sup_{\delta_1^2+\delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega_{1,1}(\delta_1,\delta_2;x)}{\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2)} \le c_2, \qquad \text{(B)}$$

де c_1 і c_2 - деякі сталі (тут $\omega(\delta_1,\delta_2;x) = \sup_{\substack{|t_1-t_2|\le\delta_1 \\ |\tau_1-\tau_2|\le\delta_2}} |x(t_1,\tau_1)-x(t_2,\tau_2)|$ - модуль неперервності функції $x(t,\tau)$, а $\omega_{1,1}(\delta_1,\delta_2;x) = \sup_{\substack{|t_1-t_2|\le\delta_1 \\ |\tau_1-\tau_2|\le\delta_2}} |x(t_1,\tau_1)-x(t_1,\tau_2)-x(t_2,\tau_1)+x(t_2,\tau_2)|$ - змішаний модуль неперервності другого порядку [3]). При цьому норму в просторі H_ω введемо таким чином:

$$\|x(t,\tau)\|_{H_\omega} = \|x(t,\tau)\|_C + H(x;\omega) + H^{t\tau}(x;\omega).$$

Розглянемо сингулярні інтеграли

$$(S_1\varphi)(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(t_0,\tau)}{t_0-t}dt_0, \qquad (S_2\varphi)(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{\varphi(t,\tau_0)}{\tau_0-\tau}d\tau_0,$$

$$(S_{12}\varphi)(t,\tau) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{\varphi(t_0,\tau_0)}{(t_0-t)(\tau_0-\tau)}dt_0 d\tau_0,$$

які будемо розуміти в сенсі головного значення за Коші.

Як відомо [1, 2], в одновимірному випадку сингулярний інтеграл (оператор) Коші є обмеженим у просторі H_ω, якщо характеристика простору $\omega(\delta)$ задовольняє умовам ЗБС:

$$\int_0^h \frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi < \infty, \qquad \int_0^\delta \frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi + \delta\int_\delta^h \frac{\omega(\xi)}{\xi^2}d\xi = O(\omega(\delta)).$$

У двовимірному випадку недостатньо того, щоб прості модулі неперервності $\Omega_1(\delta)$ і $\Omega_2(\delta)$ задовольняли б умовам ЗБС. Зокрема, якщо розглядати класичні простори Гельдера $H_{\alpha\beta}$, $0 < \alpha, \beta < 1$, де функції $x(t,\tau)$ задовольняють тільки умові (А) ($\Omega_1(\delta) = \delta^\alpha, \Omega_2(\delta) = \delta^\beta$), то в роботі [4] встановлена оцінка:

$$|(S_{12}\varphi)(t_1,\tau_1) - (S_{12}\varphi)(t_2,\tau_2)| = O\left(|t_1-t_2|^\alpha \ln\frac{\pi}{|t_1-t_2|} + |\tau_1-\tau_2|^\beta \ln\frac{\pi}{|\tau_1-\tau_2|}\right).$$

У цій же роботі наводиться конкретний приклад, на якому ця оцінка досягається, тобто вона непокращувана. Таким чином, маємо: $S_{12}: H_{\alpha\beta} \to H_{\alpha-\varepsilon,\beta-\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$ - як завгодно мале число. А це означає, що бісингулярний інтеграл у просторі $H_{\alpha\beta}$ необмежений. Нижче покажемо, що аналог теореми І.І. Привалова все ж таки наявний і в двовимірному випадку, якщо для функцій $x(t,\tau)$ виконана умова (В).

В подальшому під простором H_ω будемо мати на увазі простір функцій $x(t,\tau)$, які задовольняють умовам (А) і (В), а прості модулі неперервності $\Omega_1(\delta)$ і $\Omega_2(\delta)$ при цьому задовольняють умовам ZБС.

Теорема. *Оператори S_1, S_2, S_{12} обмежені в просторі H_ω.*

Доведення. Спочатку покажемо, що оператор $S_1: H_\omega \to H_\omega$ обмежений. Легко бачити, що

$$(S_1\varphi)(t,\tau) = (I\varphi)(t,\tau) + \varphi(t,\tau),$$

де

$$(I\varphi)(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t,\tau)}{t_0 - t}\,dt_0 .$$

Тепер для обмеженості в просторі H_ω оператора S_1 досить показати, що $I: H_\omega \to H_\omega$ обмежений. Для цього оцінимо різницю

$$(I\varphi)(t_2,\tau) - (I\varphi)(t_1,\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t_2,\tau)}{t_0 - t_2}\,dt_0 - \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t_1,\tau)}{t_0 - t_1}\,dt_0$$

для двох довільних досить близьких точок $t_1, t_2 \in \gamma_1$ і для будь-яких $\tau \in \gamma_2$. Із точки t_1 опишемо коло радіуса $\delta > 0$ так, щоб воно перетиналось з γ_1 лише у двох точках : a і b. Частину контура γ_1, яка лежить всередині цього кола, позначимо l_1. Нехай t_2 - довільна точка дуги l_1, відмінна від точок a і b. Покладемо $\delta = k|t_1 - t_2|$. Ясно, що $k > 1$. Оскільки контур γ_1 ляпуновський, то для будь-яких точок $t_1, t_2 \in \gamma_1$ $s(t_1,t_2) \le m|t_1 - t_2|$, $m > 0$, де $s(t_1,t_2)$ - довжина дуги між точками t_1 і t_2. Тоді:

$$(I\varphi)(t_2,\tau) - (I\varphi)(t_1,\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_{l_1} \frac{\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t_2,\tau)}{t_0 - t_2}\,dt_0 - \frac{1}{\pi i}\int_{l_1} \frac{\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t_1,\tau)}{t_0 - t_1}\,dt_0 +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1\setminus l_1} \frac{\varphi(t_1,\tau) - \varphi(t_2,\tau)}{t_0 - t_1}\,dt_0 + \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1\setminus l_1} \frac{[\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t_2,\tau)](t_2 - t_1)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)}\,dt_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .$$

Оцінимо тепер кожний інтеграл окремо. Позначимо $|t_0 - t_1| = r$. Тоді $0 \le r \le \delta$; $|dt_0| \le m\,dr$, оскільки контур γ_1 ляпуновський, а $|\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t,\tau)| \le C_1\Omega_1(|t_0 - t_1|) = C_1\Omega_1(r)$. Тому

$$|I_2| \le \frac{1}{\pi}\int_{l_1} \frac{|\varphi(t_0,\tau) - \varphi(t_1,\tau)|}{|t_0 - t_1|}\,|dt_0| \le \frac{2mC_1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\Omega_1(r)}{r}\,dr . \qquad (1)$$

Аналогічним чином отримуємо оцінку:

$$|I_1| \le \frac{2mC_2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\Omega_1(r)}{r}\,dr . \qquad (2)$$

Інтеграл I_3 оцінимо таким чином:

$$|I_3| \le \frac{|\varphi(t_1,\tau) - \varphi(t_2,\tau)|}{\pi}\left|\int_{\gamma_1\setminus l_1} \frac{dt_0}{t_0 - t_1}\right| .$$

Оскільки $t_1 \in l_1$, то останній інтеграл є обмеженим:

$$\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{dt_0}{t_0 - t_1} = ln \frac{a - t_1}{b - t_1},$$

а тому справедлива оцінка:

$$|I_3| \le C_3 \Omega_1(|t_1 - t_2|). \tag{3}$$

Позначимо $h = diam\, \gamma_1$. Оскільки $|t_0 - t_1| \ge \delta = k|t_1 - t_2|$, то $k|t_0 - t_1| \ge k[|t_0 - t_2| - |t_2 - t_1|] \ge$ $\ge (k-1)|t_0 - t_2|$. А тому

$$\left|\frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_1}\right| \le \frac{k}{k-1}.$$

Оскільки $|t_2 - t_1| \le \delta$, то:

$$|I_4| \le \frac{|t_2 - t_1|}{\pi} \int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{|\varphi(t_0, \tau) - \varphi(t_2, \tau)|}{|t_0 - t_2|^2} \left|\frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_1}\right| |dt_0| \le \frac{kC_4}{\pi(k-1)} \delta \int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{\Omega_1(|t_0 - t_2|)}{|t_0 - t_2|^2} |dt_0|.$$

Позначимо $|t_0 - t_2| = r$, $\delta \le r \le h$; $|dt_0| \le m\, dr$. Тоді:

$$|I_4| \le \frac{2kmC_4}{\pi(k-1)} \delta \int_{\delta}^{h} \frac{\Omega_1(r)}{r^2} dr. \tag{4}$$

Враховуючи оцінки (1) - (4), отримуємо:

$$|(I\varphi)(t_2, \tau) - (I\varphi)(t_1, \tau)| \le \frac{2m(C_1 + C_2)}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\Omega_1(r)}{r} dr + C_3 \Omega_1(\delta) + \frac{2kmC_4}{\pi(k-1)} \delta \int_{\delta}^{h} \frac{\Omega_1(r)}{r^2} dr$$

Оскільки $\Omega_1(\xi)$ задовольняє умовам ZБС, то отримаємо:

$$|(I\varphi)(t_2, \tau) - (I\varphi)(t_1, \tau)| = O(\Omega_1(\delta)).$$

З цієї оцінки випливає, що інтеграл $(I\varphi)(t, \tau)$ зберігає клас гельдеровості за змінною t. Покажемо тепер, що він зберігає клас гельдеровості і за змінною τ. Дійсно:

$$|(I\varphi)(t, \tau_1) - (I\varphi)(t, \tau_2)| = \left| \frac{1}{\pi\, i} \int_{\gamma_1} \frac{\varphi(t_0, \tau_1) - \varphi(t, \tau_1) - \varphi(t_0, \tau_2) + \varphi(t, \tau_2)}{t_0 - t} dt_0 \right| \le$$

$$\le \frac{H^{t\tau}(\varphi; \omega)}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\Omega_1(|t - t_0|)}{|t_0 - t|} \Omega_2(|\tau_1 - \tau_2|) |dt_0|.$$

Позначимо $|t_0 - t| = r$, $0 \le r \le h$, $|dt_0| \le m\, dr$. Тоді

$$|(I\varphi)(t, \tau_1) - (I\varphi)(t, \tau_2)| \le \frac{2mH^{t\tau}(\varphi; \omega)}{\pi} C_5 \Omega_2(|\tau_1 - \tau_2|) \int_0^{h} \frac{\Omega_1(r)}{r} dr.$$

Оскільки $\Omega_1(r)$ задовольняє умовам ZБС, то з цієї оцінки випливає, що

$$|(I\varphi)(t, \tau_1) - (I\varphi)(t, \tau_2)| = O(\Omega_2(|\tau_2 - \tau_1|)).$$

Остання оцінка означає, що інтеграл $(I\varphi)(t, \tau)$ зберігає клас гельдеровості і за змінною τ. Таким чином, із наведених міркувань випливає, що інтеграл $(I\varphi)(t, \tau)$ задовольняє умові (A).

Покажемо тепер, що $(I\varphi)(t,\tau)$ задовольняє і умові (B). Візьмемо довільні досить близькі точки $t_1,t_2 \in \gamma_1$, $\tau_1,\tau_2 \in \gamma_2$. На контурі γ_1 виконаємо ті ж самі побудови, що і при виведенні оцінок (1) - (4). Розглянемо вираз

$$(I\varphi)(t_1,\tau_1) - (I\varphi)(t_1,\tau_2) - (I\varphi)(t_2,\tau_1) + (I\varphi)(t_2,\tau_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(t_0,\tau_1) - \varphi(t_1,\tau_1) - \varphi(t_0,\tau_2) + \varphi(t_1,\tau_2)}{t_0 - t_1} dt_0 -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(t_0,\tau_1) - \varphi(t_2,\tau_1) - \varphi(t_0,\tau_2) + \varphi(t_2,\tau_2)}{t_0 - t_2} dt_0 +$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{\varphi(t_2,\tau_1) - \varphi(t_1,\tau_1) - \varphi(t_2,\tau_2) + \varphi(t_1,\tau_2)}{t_0 - t_1} dt_0 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{\left[\varphi(t_0,\tau_2) - \varphi(t_0,\tau_1) - \varphi(t_2,\tau_2) + \varphi(t_2,\tau_1)\right](t_2 - t_1)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} dt_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .$$

Оцінимо тепер кожний інтеграл окремо. Використовуючи вже відомі позначення, отримаємо, що $|dt_0| \le m\,dr$, а $|\varphi(t_0,\tau_1) - \varphi(t_1,\tau_1) - \varphi(t_0,\tau_2) + \varphi(t_1,\tau_2)| \le C_6 \Omega_1(|t_0 - t_1|)\Omega_2(|\tau_2 - \tau_1|)$. Тому

$$|I_1| \le \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1} \frac{|\varphi(t_0,\tau_1) - \varphi(t_1,\tau_1) - \varphi(t_0,\tau_2) + \varphi(t_1,\tau_2)|}{|t_0 - t_1|}|dt_0| \le \frac{2mC_6}{\pi}\Omega_2(|\tau_2 - \tau_1|)\int_0^{\delta} \frac{\Omega_1(r)}{r} dr .$$

Оскільки $\Omega_1(\xi)$ задовольняє умовам ZБС, то з цієї оцінки отримаємо таку:

$$|I_1| \le \frac{2mC_7}{\pi}\Omega_2(|\tau_1 - \tau_2|)\Omega_1(\delta) . \tag{5}$$

Аналогічним чином отримуємо, що

$$|I_2| \le \frac{2mC_8}{\pi}\Omega_2(|\tau_1 - \tau_2|)\Omega_1(\delta) . \tag{6}$$

Інтеграл I_3 оцінимо таким чином:

$$|I_3| \le \frac{|\varphi(t_2,\tau_1) - \varphi(t_1,\tau_1) - \varphi(t_2,\tau_2) + \varphi(t_1,\tau_2)|}{\pi}\left|\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{dt_0}{t_0 - t_1}\right| .$$

Звідси отримуємо оцінку:

$$|I_3| \le \frac{C_9}{\pi}\Omega_1(|t_1 - t_2|)\Omega_2(|\tau_1 - \tau_2|) . \tag{7}$$

Скористаємось оцінкою $\left|\frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_1}\right| \le \frac{k}{k-1}$. Оскільки $|t_2 - t_1| < \delta$, то

$$|I_4| \le \frac{|t_2 - t_1|}{\pi}\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{|\varphi(t_0,\tau_2) - \varphi(t_0,\tau_1) - \varphi(t_2,\tau_2) + \varphi(t_2,\tau_1)|}{|t_0 - t_2|^2}\left|\frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_1}\right| |dt_0| \le$$

$$\le \frac{kC_{10}}{\pi(k-1)}\delta\Omega_2(|\tau_1 - \tau_2|)\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \frac{\Omega_1(|t_0 - t_2|)}{|t_0 - t_2|^2}|dt_0| .$$

Оскільки $|t_0 - t_2| = r$, $\delta \le r \le h$; $|dt_0| \le m\,dr$, то:

$$|I_4| \le \frac{2kmC_{10}}{\pi(k-1)}\Omega_2(|\tau_1 - \tau_2|)\Omega_1(\delta) . \tag{8}$$

Тепер на основі оцінок (5) - (8) маємо оцінку:

$$\left| (I\varphi)(t_1,\tau_1) - (I\varphi)(t_1,\tau_2) - (I\varphi)(t_2,\tau_1) + (I\varphi)(t_2,\tau_2) \right| = O\left(\Omega_1\left(|t_1 - t_2|\right)\Omega_2\left(|\tau_1 - \tau_2|\right)\right),$$

з якої випливає, що інтеграл $(I\varphi)(t,\tau)$ задовольняє умові (В).

Із цього випливає, що оператор S_1 є обмеженим у просторі H_ω. Аналогічним чином встановлюється обмеженість оператора S_2 у просторі H_ω. Оскільки $S_{12} = S_1 \otimes S_2$ [5], то оператор S_{12} є обмеженим у просторі H_ω як композиція обмежених операторів.

Наслідок. Якщо простір $H_{\omega^{(1)}}$ вкладений у простір $H_{\omega^{(2)}}$, то оператори $S_1, S_2, S_{12} : H_{\omega^{(1)}} \to H_{\omega^{(2)}}$ обмежені.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. - М.:Наука, 1980. - 416 с.
2. Салаев В.В. Сингулярные операторы в пространствах непрерывных функций: Дисс. ... д.ф.-м.н.: 01.01.01. - Баку, 1975. - 287 с.
3. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. - М.: ГИФМЛ, 1965. - 624с.
4. Какичев В.А. Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных//Ученые записки Шахтинского педин-та - 1959. - Т. 2, №6. - С. 25 - 90.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.