УДК 514

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ ПРИ НАЯВНОСТІ ТРІЩИНИ

Саликіна Н.В., Толок В.О.

Розглянемо таку задачу для пластини скінченних розмірів: на. пластину шириною w=1.0 см і довжиною S=4.0 см із крайовою тріщиною діє зосереджена сила P=5000.0Кн/м (P – сила, що доводиться на одиницю товщини пластини) і протилежно їй спрямовані зосереджені сили P_1=2500.0Кн/м і P_2=2500.0Кн/м (рис.1). Механічні властивості матеріалу описуються коефіцієнтом Пуассона ν=0.3 і модулем Юнга $E=0.2\times10^7$.

Розподіл напружень і зміщень описується в лінійній механіці руйнування через параметр K_1, коефіцієнт інтенсивності напружень, що визначається [1] у такий спосіб :

$$K_1 = \frac{Y S P \sqrt{a}}{w^{3/2}}, \tag{1}$$

де Y – поліном обліку скінченності розмірів від a/w, P – прикладене до пластини навантаження, а a – довжина тріщини. Функція Y записується для розглянутої задачі [1] як

$$Y = \left[2.9\left(\frac{a}{w}\right)^{1/2} - 4.6\left(\frac{a}{w}\right)^{3/2} + 21.8\left(\frac{a}{w}\right)^{5/2} -- 37.6\left(\frac{a}{w}\right)^{7/2} + 38.7\left(\frac{a}{w}\right)^{9/2}. \right] \tag{2}$$

Аналітичний розв’язок в околиці вершини тріщини подано формулами для поля напружень [2]

$$\sigma_x \equiv \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\sigma,$$

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

і для переміщень точок пластини

$$u = 2(1+\nu)\frac{K_1}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$v = 2(1+\nu)\frac{K_1}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{4}$$

Тут r – відстань від вершини тріщини до деякої точки тіла, θ – кут між вектором r і віссю абсцис. Потрібно знайти наближений розв’язок, узгоджений з аналітичним поблизу вершини тріщини.

Розіб'ємо тіло на 2 області (рис.2), границею контакту яких є передбачувана лінія поширення тріщини. Для розглянутого прикладу границею контакту є вісь ординат, що випливає з граничних умов

навантаження і формул (3) (відповідно до цих формул кут поширення тріщини $\theta=0$). Розподіл контактних напружень і зміщень на лінії продовження тріщини обчислимо із використанням методу крайових елементів [3]. Запишемо основне рівняння методу [4].

$$\frac{1}{2}u_j(\xi)+\int_\Gamma \sigma^*_{ij}(\xi,x)\,u_j(x)\,d\Gamma(x)=\int_\Gamma u^*_{ij}(\xi,x)\sigma_j(x)\,d\Gamma(x)\quad ; \tag{5}$$

де $u^*_{ij}(\xi,x)$ – функція фундаментальних переміщень,

$\sigma^*_{ij}(\xi,x)$ – функція фундаментальних напружень.

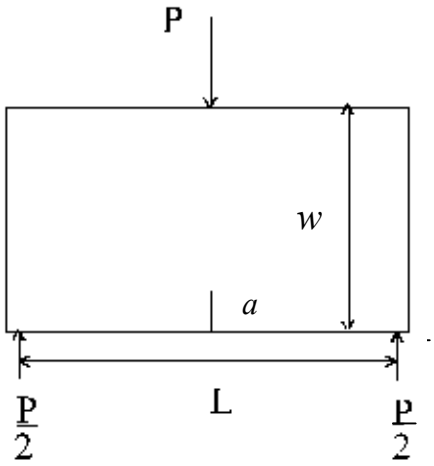

Рис.1. Задача о тріщині для пластини

Контур Г апроксимується для кожної з областей за допомогою N прямолінійних відрізків, що примикають один до одного. Рівняння (4) перетвориться до дискретного виду для кожної точки ξ і обчислюються інтеграли по кожному крайовому елементові. У результаті утворюється система N лінійних алгебраїчних рівнянь щодо N напружень і N переміщень. Для зведення системи N лінійних алгебраїчних рівнянь до системи з N невідомими накладаються граничні умови. Для того щоб зосередити увагу на головних моментах даного процесу, опишемо граничні умови на лінії Γ_1.

Нехай n_1 – кількість елементів розбивки границі Γ_1 і n_1-й крайовий елемент містить точку розриву. При відриві цієї точки утворяться два протилежних береги тріщини.

1-ша ітерація: Для 1-ої області думаємо зміщення на Γ_1, рівні нулю. Береги тріщини вільні від напружень, тому в n_1-ому крайовому елементі σ_i рівні нулю.

Т.б.
$$u^{(1)}_{i(l)}=0.0, l=1,n_1-1;$$
$$\sigma^{(k)}_{i(l)}=0.0;$$

Тут k – номер ітерації. На кожному кроці ітерації буде виконуватися рівність нулю напружень для n_1-го крайового елемента. Розвя'зуючи систему N рівнянь стандартними методами, знаходимо $\sigma^{(1)}_{i(l)}$, а також переміщення $u^{(1)}_{i(n_1)}$ для n_1-го елемента. На границі контакту для 2-ої області задаємо відповідно до напруження $\sigma^{(1)}_{i(l)}$, де $l\in[1,n_1-1]$. Аналогічно одержуючи систему N рівнянь щодо N невідомих, знаходимо переміщення $u^{(2)}_{i(l)}$ на лінії продовження тріщини, а також $u^{(2)}_{i(n_1)}$, що є зміщеннями для берега тріщини. Переміщення $u^{(2)}_{i(l)}$ будуть відомими граничними умовами на Γ_1 для 1-ої області на другій ітерації. Отже, загальне ітераційне граничне рівняння виглядає так:

k -а ітерація для 1-ої області:

$$\frac{1}{2}u_j(\xi)+\int_{\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u^{(k)}_i(x)d\Gamma(x)+\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u_i(x)d\Gamma(x)=\int_{\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma^{(k)}_i(x)d\Gamma(x)+$$
$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma_i(x)d\Gamma(x); \tag{6}$$

де $u^{(k)}_i$ – відомі величини у вузлових точках границі Γ_1.

k -а ітерація для 2-ої області:

$$\frac{1}{2}u_j(\xi)+\int_{\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u^{(k+1)}_i(x)d\Gamma(x)+\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u_i(x)d\Gamma(x)=\int_{\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma^{(k)}_i(x)d\Gamma(x)+$$
$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma_i(x)d\Gamma(x); \tag{7}$$

де $\sigma_i^{(k)}$ – відомі величини у вузлових точках границі Γ_1. Довжина тріщини покладається рівній довжині n_1-го елемента. Тріщину можна також апроксимувати декількома крайовими елементами, тоді розв'язок знаходиться при рівності нулю напружень одночасно у n_1-ому, (n_1 -1)-ому і т.д. елементах.

Приведемо аналіз результатів розрахунку, виконаного при кількості елементів розбивки N=72. Збіжність

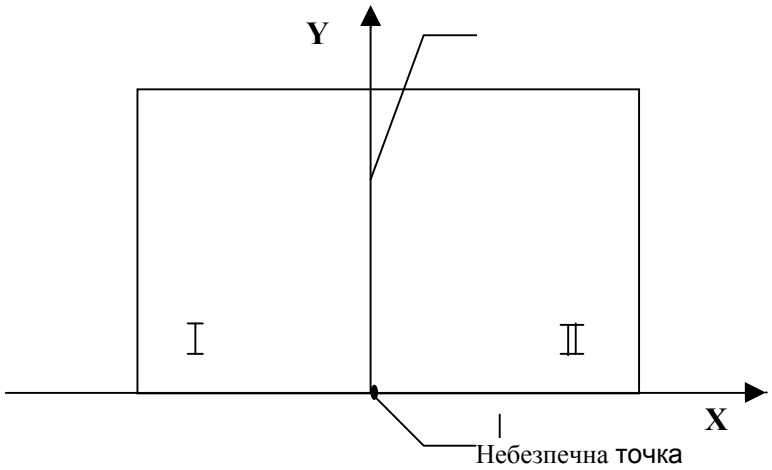

Рис.2. Розбивка тіла на дві області

методу досягається за 5 циклів. Прикладена сила P є стискальної у районі точці її прикладення і розтягуючої поблизу вершини. У залежності від знака напружень у тілі формуються дві зони: зона стиску і зона розтягання (рис.3). Як видно з рис.3, негативні нормальні напруження, що виникають поблизу точці прикладення сили, утворять область стиску, а додатні нормальні напруження утворять область розтягання. На рис.4 приведені шість графіків (позначених номерами n=1,2,...,6) наближеного розподілу нормальних напружень, що відповідають довжині тріщини, рівної a,2a,…,6a. На рисунках уведені такі позначення: a – довжина крайового елемента, w – ширина розглянутої пластини. По отриманих графіках видно, що ріст тріщини тягне за собою ріст нормальних напружень. При поширенні тріщини область стиску зменшується.

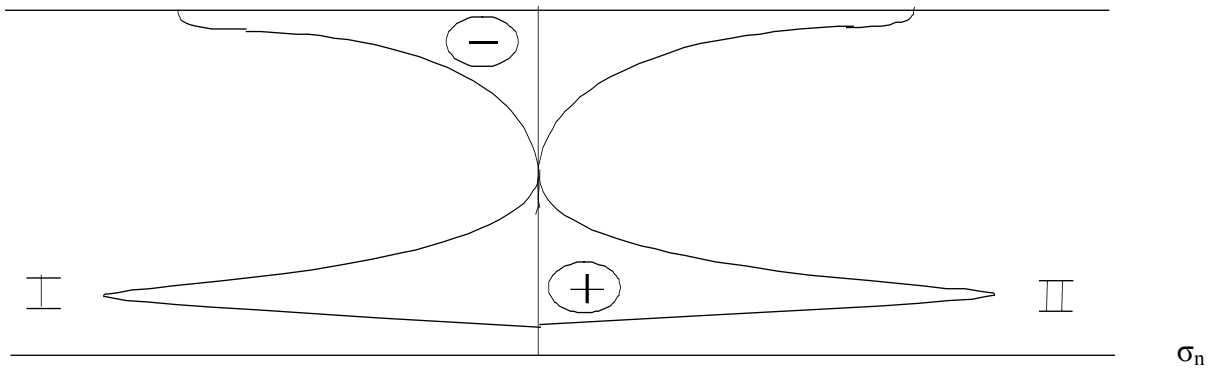

Рис.3. Зони стиску і розтягання, що формуються в результаті дії зосередженої сили

Порівняння отриманого розв'язку з аналітичним показують узгодженість тільки поблизу вершини тріщини і при *r*, досить малому в порівнянні з довжиною тріщини. На рис.5 приведене узагальнене представлення чисельного й аналітичного розподілу нормальних напружень у пластині при наявності тріщини.

На рис.6. приведені результати чисельного визначення нормальних зміщень уздовж границі контакту для однієї з областей (через симетрію задачі розподіл зміщень для іншої області є аналогічним).при різних довжинах тріщини. Графіки розподілу нормальних зміщень показують, що в результаті відриву небезпечної точці відбувається розкриття тріщини. З рис.6 видно, що при збільшенні довжини тріщини зростають і нормальні зміщення. Розрахунок дотичних зміщень, поданий у виді послідовності графіків на рис.7.,також характеризує явище розкриття тріщини. Збільшення довжини тріщини теж приводить до

росту дотичних зміщень по величині і до рівномірного розподілу по лінії продовження тріщини. Результати порівняння чисельного розрахунку дотичних зміщень з аналітичним показують узгодженість в околиці вершини тріщини радіуса *r=a/2*. Подальша розбивка границі приведе до уточнення розв'язку і до кращої узгодженості з аналітичним розв'язком.

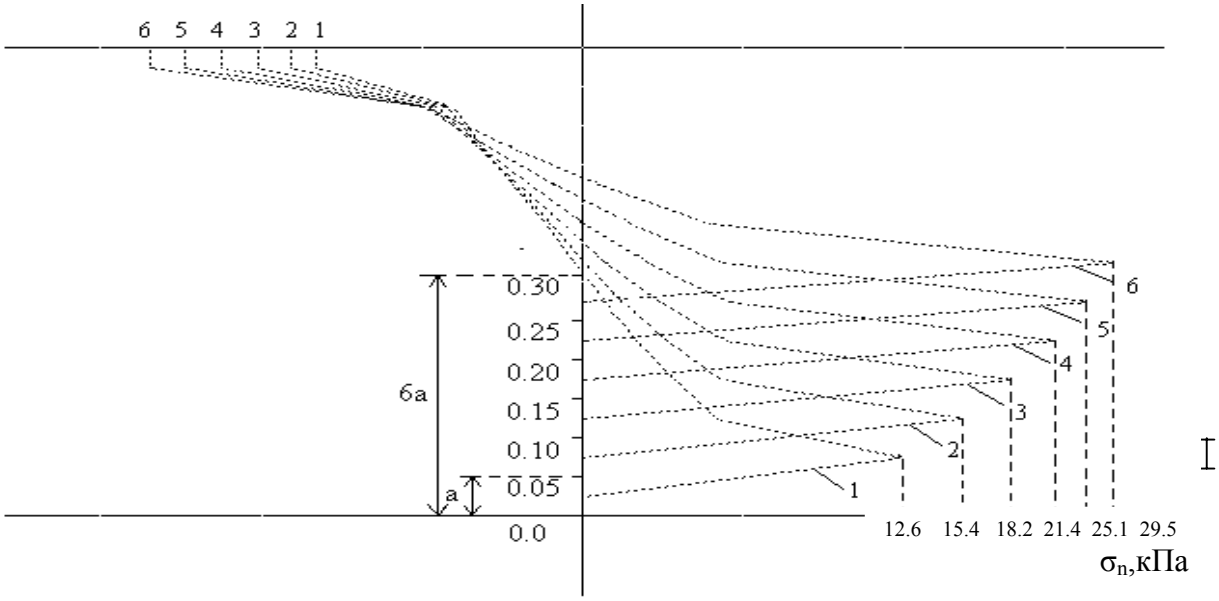

Рис.4. Розподіл нормальних напружень σ_n на лінії продовження тріщини у залежності від довжини тріщини

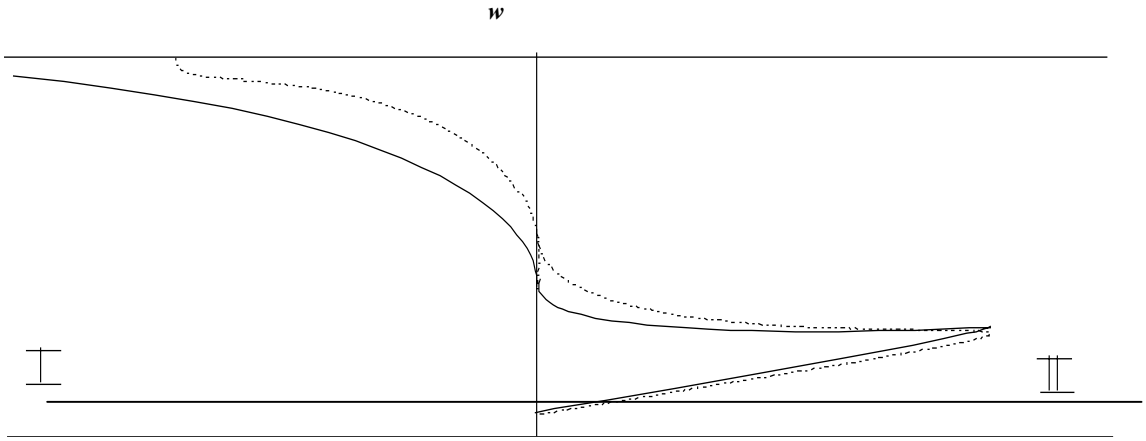

Рис.5.Розподіл нормальних напружень σ_n на лінії продовження тріщини відповідно до σ_n ічного (суцільна крива) і чисельного (точкова крива) розв'язків

Форму тріщини, що поширюється, також можна визначити відповідно до зміщень $u_{i(n_1)}$ $u_{i(n_1-1)},\ldots,u_{i(n_1-5)}$ для берега тріщини, що належить першої області і $u_{i(n_1)}$, $u_{i(n_1-1)},\ldots,u_{i(n_1-5)}$ для берега тріщини, що належить другої області розбивки пластини. На рис.8 зображено фрагмент тіла, що деформується, із тріщиною

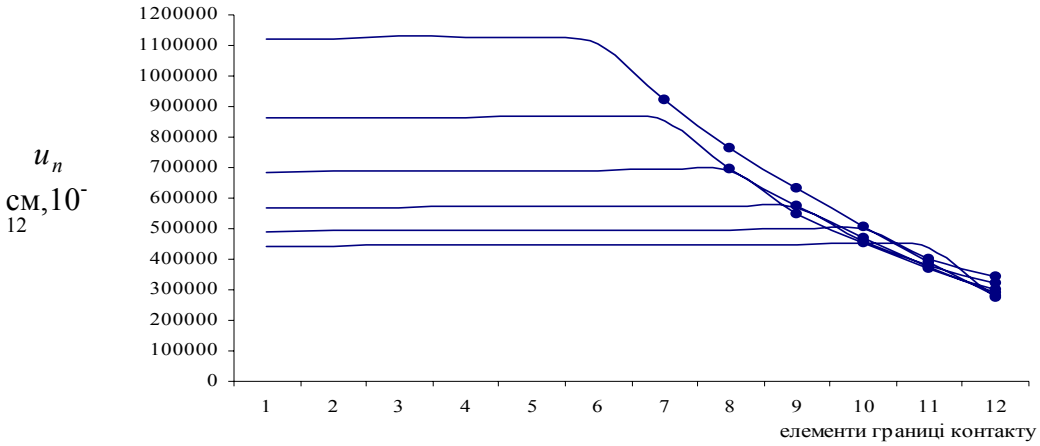

Рис.6.Розподіл нормальних зміщень по границі контакту для першої області у залежності від довжини тріщини

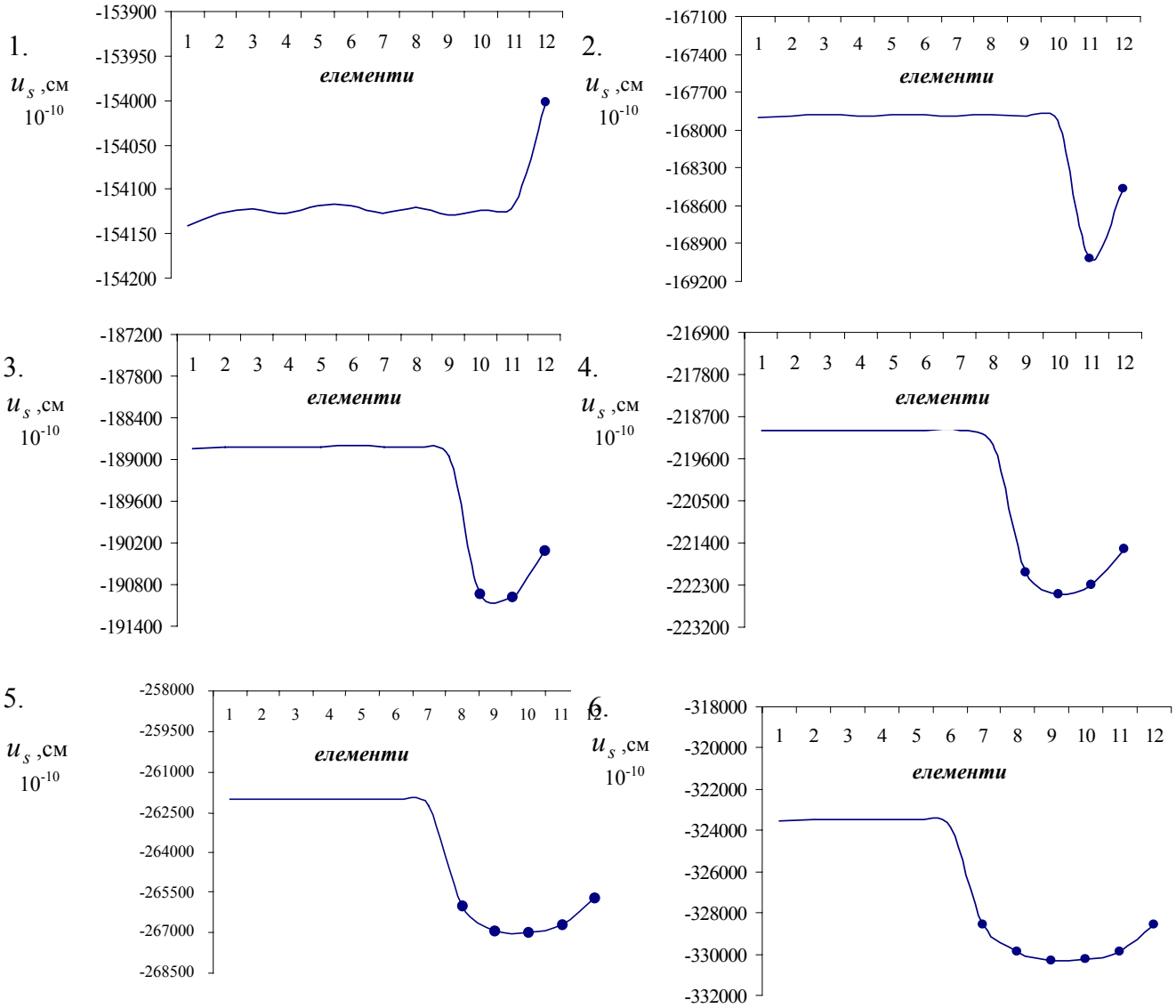

Рис.7.Діаграми розподілу дотичних зміщень по границі контакту для першої області у залежності від довжини тріщини

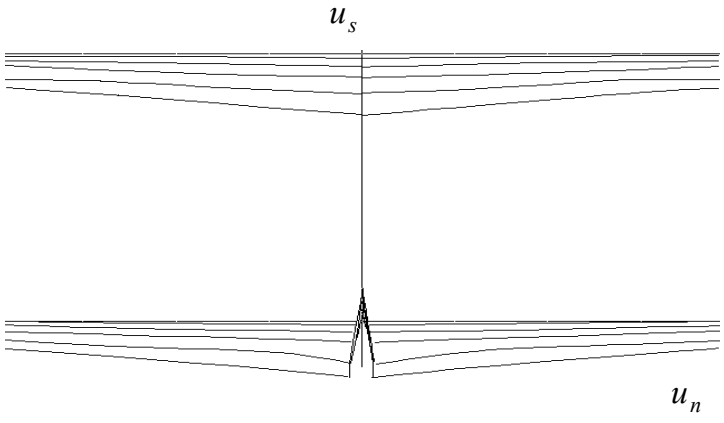

Рис.8. Поширення крайової тріщини по вісі ординат

Запропонований ітераційний алгоритм вирішення розглянутої задачі про тріщину розкриває особливості пружної поведінки пластини, що знаходиться під дією зосередженої сили. У порівнянні з класичним підходом до вирішення задач лінійної механіки руйнування даний обчислювальний метод приводить до визначення напружено-деформованого стану не тільки в околиці вершини тріщини, але і на великій відстані від неї.

ЛІТЕРАТУРА

1. Броек Д. Основы механики разрушения – М.:Высшая школа, 1980. –368 с.
2. Красовский А.Я. Хрупкость металлов при низких температурах – К.:Наукова думка,1980.–336 с.
3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела – М.: Мир, 1987. – 328 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов – М.: Мир, 1987. – 524 с.