УДК 517.946

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ ШАРНІРНО-ОБПЕРТОГО СТЕРЖНЯ З ПОПЕРЕЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

Ройтман А. Б., Кружнова С. Ю.

Розглядаються поперечні коливання шарнірно-обпертого стержня, що має односторонню тріщину в середині стержня. Таке завдання виникає, наприклад, при експериментальній оцінці втомлесного термомеханічного радіаційного ресурсу корпусів водоводяних реакторів [1].

Тріщина періодично розкривається і закривається при коливаннях. Коли тріщина розкрита, то первісна жорсткість у зоні тріщини зменшується, а коли тріщина закрита, стержень має жорсткість суцільного стержня.

1. Розглянемо вільні поперечні коливання однорідного стержня в декартовій системі координат і в площині однієї з головних осей інерції X0Z (рис. 1).

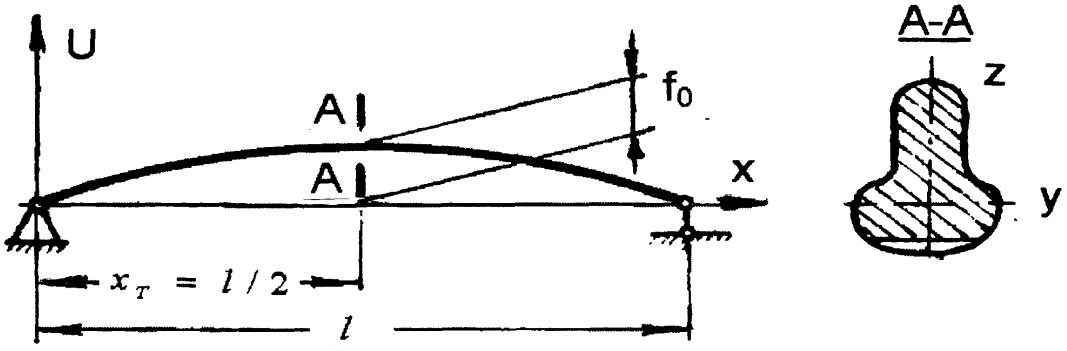


Рис. 1 Розрахункова схема балки.

Позначимо E-модуль пружності матеріалу,ρ - щільність, S – площа поперечного перетину, I – момент інерції перетину відносно осі Y.

Якщо розглядати малі коливання, то можна записати таке рівняння в частинних похідних даної крайової задачі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0, 0 \le x \le l, 0 < t < \infty , \tag{1}$$

де $$a^2 = E\,I / \rho S , \tag{2}$$

$U(x,t)$ – прогин у площині згину стержня при коливаннях з початковими умовами:

$$U(x,0) = \varphi(x); U_t(x,0) = \varphi_1(x), 0 \le x \le l \tag{3}$$

Граничні умови:

$$U(0,t) = U(l,t) = U_{xx}(0,t) = U_{xx}(l,t) = 0, 0 < t < \infty \tag{4}$$

Рішення рівняння (1) буде таким [2]

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin(\tfrac{i\pi x}{l})(A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t), \qquad (5)$$

де $p_i = a(i\pi / l)^2$.

Для початкових умов (3) маємо з (5)

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\pi x / l); U_t(x,0) = \varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i B_i \sin(i\pi x / l), \qquad (6)$$

Домножуючи ліву і праву частину рівнянь (6) на $\sin(i\pi x / l)$ і інтегруючи по довжині стержня, отримаємо

$$A_i = (2/l)\int_0^l \varphi(x)\sin(i\pi x / l)dx; B_i = (2/p_i l)\int_0^l \varphi_1(x)\sin(i\pi x / l)dx \qquad (7)$$

Розглянемо випадок, коли $\varphi_1(x) = 0$, а $\varphi(x) = f_0 \sin(\pi x / l)$. Тоді A1=$f_0$, A2=A3…=0; Bi=0 (i=1, 2…)

Отже,

$$U(x,t) = f_0 \sin(\pi x / l)\cos p_1 t,\ p_1 = \pi^2 a / l^2 \qquad (8)$$

У загальному випадку довільних граничних умов, місця розташування тріщини (координата $x_т$) і характеру навантаження, розкриття і закриття тріщини визначається знаком згинального моменту $M_{изг} = EI(\partial^2 U / \partial x^2)$ при x=$x_т$. Будемо вважати, якщо $U_{xx}(x_T, t) > 0$, то тріщина відкрита і $a = a_1 = EI_1 / \rho S$, якщо $U_{xx}(x_T, t) < 0$, то тріщина закрита і $a = a_0 = EI_0 / \rho S.$ Для прямокутного перетину стержня $I_0 = bh^3 / 12,$ де b-ширина і h-висота перетину. Визначення величини I_1 буде розглянуте нижче. Надалі будемо використовувати такі формули для частот (8):

$$\omega_0 = \pi^2 a_0 / l^2; \omega_1 = \pi^2 a_1 / l^2 \qquad (9)$$

2. У розглядуваному випадку мають місце такі залежності :

$$U_{xx}(x,t) = \begin{cases} -f_0(\pi/l)^2 \sin(\pi x/l)\cos\omega_0 t, & U_{xx}(x_T,t) \le 0 \\ -f_1(\pi/l)^2 \sin(\pi x/l)\cos\omega_1 t, & U_{xx}(x_T,t) \ge 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Порівнюючи рішення (8) і (10) помічаємо, що вони відрізняються тільки знаком і амлітудою. Отже, рішення (8), з урахуванням тріщини, можна записати у вигляді

$$U(x,t) = \begin{cases} f_0 \sin(\pi x / l)\cos\omega_0 t, & U \le 0 \\ f_1 \sin(\pi x / l)\cos\omega_1 t, & U \ge 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Амлітуду f_1 знаходимо з умови рівності сум потенційної і кінетичної енергії деформації в кожному напівперіоді.

Для визначення прогину f_1 (рис.2) у випадку відкриття тріщини скористуємось умовою сталості енергії коливного стержня W= П+К= const, де

$$П = \tfrac{1}{2}\int_0^l EI(\partial^2 U/\partial x^2)dx,\ K = \tfrac{1}{2}\int_0^l \rho S(\partial U/\partial t)^2 dx$$

Враховуючи, що в точках $u(x_T,0) = f_0$ і $u(x_T,\pi/2\omega_0 + \pi/2\omega_1) = f_1$ похідна $\partial U / \partial t = 0$, тобто К=0, отримаємо $П_1=П_0$, або

$$\tfrac{1}{2}\int_0^l EI_1(\partial^2 U_1/\partial x^2)dx = \tfrac{1}{2}\int_0^l EI_0(\partial^2 U_0/\partial x^2)dx$$

Похідні відрізняються тільки прогином, отже

$$I_1 f_1^2 = I_0 f_0^2, \quad \text{або } f_1 = f_0\sqrt{I_0/I_1} = f_0 a_0/a_1 \tag{12}$$

Рішення (11) представлене на рис. 2. Для зручності інтегрування координата **t** зсунута ліворуч на величину $\pi/2\omega_0$

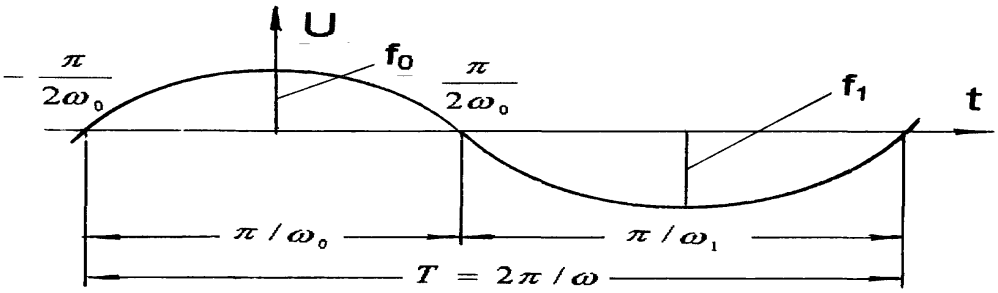


Рис. 2 Графік змінності амлітуди та частоти коливання

Період коливання з урахуванням впливу тріщини рівний $T= 2\pi/\omega=\pi/\omega_0+\pi/\omega_1$,

А усереднена частота дорівнює

$$\omega = 2\omega_0\omega_1/(\omega_0 + \omega_1) \tag{13}$$

3. Розглянемо стержень (рис. 3) довжиною – l і висотою перетину h.

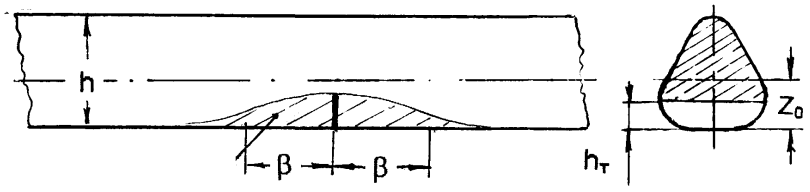


Рис. 3 Неробоча зона біля тріщини

Тут x_T-координата тріщини, h_T-глибина тріщини ($h_T << z_0$).

У випадку розкриття тріщини зменшується жорсткість стержня на певній довжині β з обох її сторін.

При цьому момент інерції перетину балки, у випадку відкритої тріщини, буде

$$I(x) = \begin{cases} I_0, & 0 \le x \le x_T - \beta \\ I', & x_T - \beta \le x \le x_T + \beta \\ I_0, & x_T + \beta \le x \le l \end{cases}, \tag{14}$$

де – I' момент інерції в зоні тріщини.

Для прямокутного перетину можна записати

$$I' = I_0 (1 - h_T / h)^3 \qquad (15)$$

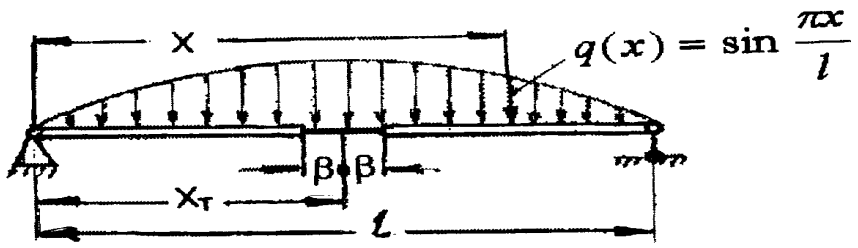
Таким чином, при коливаннях жорсткість стержня міняється за часом і вздовж осі стержня. Для спрощення задачі було прийнято, що при закритій тріщині момент інерції рівний I_0, а при відкритій-I_1.

Визначимо I_1 з умови рівності потенційних енергій деформацій $П_1$=$П_т$=$П_0$, де

$$2\,П_1 = \int_0^l (M_y^2 / EI_1)dx \quad 2\,П_T = \int_0^l (M_y^2 / EI(x))dx, \quad 2\,П_0 = \int_0^l (M_y^2 / EI_0)dx \qquad (16)$$

Розглянемо статично завантажену балку (рис.4), де розподілена навантаженість $q(x) = \sin(\pi x / l),$ відповідає динамічним силам, діючим на стержень при коливаннях.

Рис. 4 Епюра зовнішніх зусиль



Згинальний момент відносно осі **y** буде рівний

$$M_y = \sin(\pi x / l) / k^2, \text{ де } k = \pi / l \qquad (17)$$

Інтегруючи (16) і використовуючи рівності потенційних енергій деформацій, отримаємо

$$I_1/I_0 = П_0/П_T \qquad (18)$$

Розрахунки, виконані за цією формулою, наводяться в таблиці 1.

Таблиця 1 - Залежність I_1/I_0 від h_T/h і l/h при $\beta=4h_T$

h_T/h у%	I'/I_0	I_1/I_0							
	l/h =	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	5.0	10.0	20.0
1.0	. 9703	. 9951	. 9968	. 9976	. 9980	. 9984	. 9990	. 9995	. 9998
2.0	. 9412	. 9808	. 9870	. 9902	. 9921	. 9934	. 9960	. 9980	. 9990
3.0	. 9127	. 9580	. 9709	. 9778	. 9821	. 9850	. 9909	. 9954	. 9977
4.0	. 8847	. 9288	. 9492	. 9608	. 9681	. 9732	. 9837	. 9917	. 9958
5.0	. 8574	. 8953	. 9228	. 9395	. 9505	. 9581	. 9742	. 9869	. 9934
6.0	. 8306	. 8601	. 8928	. 9146	. 9294	. 9399	. 9626	. 9808	. 9903
8.0	. 7787	. 7913	. 8269	. 8567	. 8788	. 8954	. 9330	. 9650	. 9822
10.0	. 7290	. 7316	. 7599	. 7929	. 8204	. 8424	. 8957	. 9441	. 9711

З таблиці видно, що I_1/I_0 залежить від відношень h_T/h і l/h. Чим довший стержень і менша його висота, тим менший вплив має тріщина на зміну жорсткості стержня, тобто на частоту коливань. Хоча, якщо тріщина має розміри порядку 10% перетину (наприклад, h=20 мм, h_T=2 мм), то вплив її значний.

На рис.5 наведені графіки відносної зміни частот залежно від глибини тріщини і відношення l/h, виконаних за формулою $1-\omega'/\omega_1 = 1-\sqrt{I'/I_1}$.

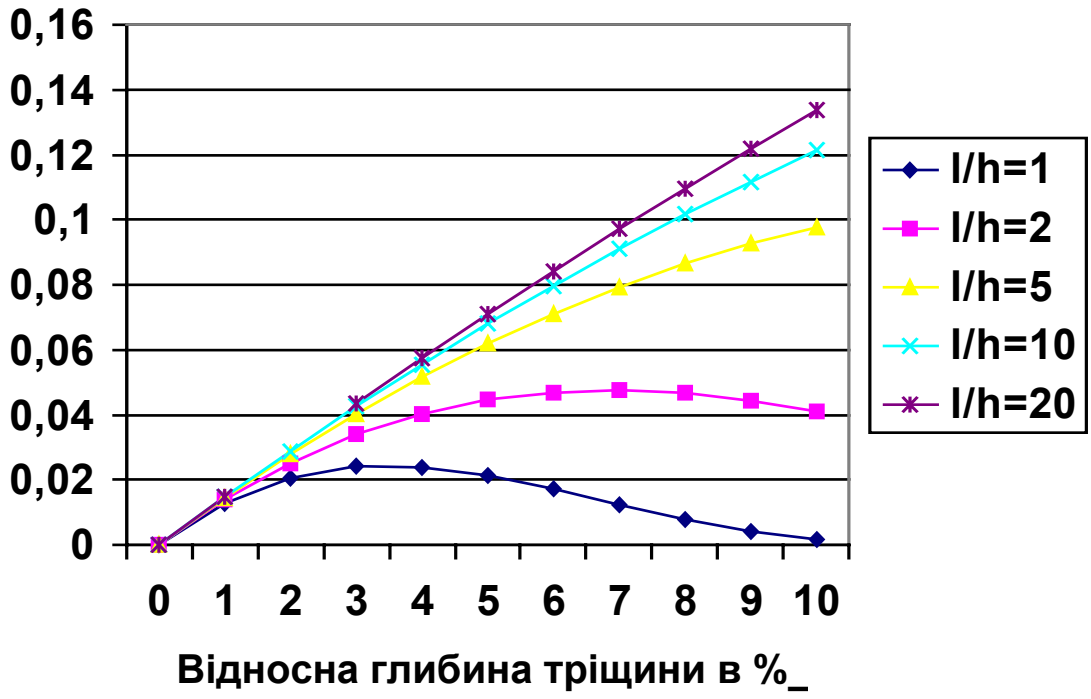


Рис. 5 Графіки відносної зміни частот 1 -ω′/ω$_1$

4. Розкладемо рішення (11) у ряд Фур'є

$$\overline{U}(x,t) = C_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(C_k \cos k\omega t + D_k \sin k\omega t), \qquad (19)$$

де

$$C_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}+\frac{\pi}{\omega_1}} U(x,t)\cos k\omega t dt \quad , (k=0.1, 2\ldots) \qquad (20)$$

$$D_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}+\frac{\pi}{\omega_1}} U(x,t)\sin k\omega t dt \quad , (k=1, 2, \ldots) \qquad (21)$$

Для розкладу в ряд Фур'є наводимо формулу (11) у такому виді (рис. 2)

$$U(x,t)=\begin{cases} f_0 \sin(\pi x/l)\cos\omega_0 t, & -\pi/2\omega_0 \le t \le \pi/2\omega_0 \\ -f_1 \sin(\pi x/l)\sin\omega_1(t-\pi/2\omega_0), & \pi/2\omega_0 \le t \le \pi/2\omega_0 + \pi/\omega_1 \end{cases} \qquad (22)$$

Таким чином, на другій ділянці (U < 0) замінюємо напівхвилю косинуса напівхвилею синуса зі зрушенням по фазі, що дозволяє уникнути розривів функції cosωt у точках $\pi/2\omega_0$ і $\pi/2\omega_0+\pi/2\omega_1$ при визначенні C_k і D_k по формулах (20) і (21).

Після перетворень будемо мати

$$C_0 = \frac{2f_0}{T}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\int_{\frac{-\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\cos\omega_0 t dt - \frac{f_1}{f_0}\int_{\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}+\frac{\pi}{\omega_1}}\sin\left(\omega_1\left(t_1-\frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right)dt\right)$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\frac{C_0}{2} = \frac{2f_0}{T}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{f_1}{f_0}\cdot\frac{1}{\omega_1}\right). \qquad (23)$$

Аналогічно

$$C_k = \frac{2f_0}{T}\sin\frac{\pi x}{l}\left(J_c(k,0) - \frac{f_1}{f_0}J_c(k,1)\right), D_k = \frac{2f_0}{T}\sin\frac{\pi x}{l}\left(J_d(k,0) - \frac{f_1}{f_0}J_d(k,1)\right), \qquad (24)$$

$$\text{де}, J_c(k,0) = \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \cos\omega_0 t\cos k\omega t dt = \frac{\sin(\omega_0 - k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\omega_0 - k\omega} + \frac{\sin(\omega_0 + k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\omega_0 + k\omega}$$

$$J_c(k,1) = \int_{\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}+\frac{\pi}{\omega_1}} -\sin(\omega_1(t - \frac{\pi}{2\omega_0}))\cos k\omega t dt; J_d(k,0) = 0$$

$$J_d(k,1) = \int_{\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}+\frac{\pi}{\omega_1}} -\sin(\omega_1(t - \frac{\pi}{2\omega_0}))\sin k\omega t dt$$

5. Отримані результати можна використати для вібраційної діагностики тріщин. У літературі [3-8] розглядаються різноманітні підходи до цього питання.

Розглянемо вібродіагностичні функції в такому вигляді

$$Z_1 = 100*(1-\omega_1/\omega_0)$$
$$Z_2 = 1000*\sqrt{(C_2^2 + D_2^2)/(C_1^2 + D_1^2)} \qquad (25)$$
$$Z_3 = 100*[1-(\omega_1/\omega_0)^2]$$

Параметр Zi (i=1, 2.3) вказує на наявність тріщини, а також на її величину при відомих розмірах стержня.

На рис.6 наведені графіки Zi (25), що залежать від відношення глибини тріщини до висоти прямокутного перетину в%, для відношення l/h=10.

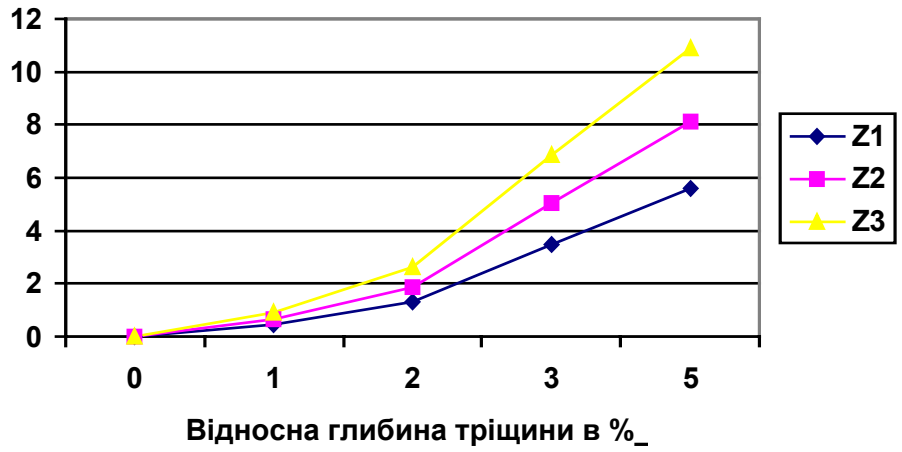


Рис.6 Графіки вібродіагностичних функцій.

Як видно з рис.6, найбільш інформативними виявилися функції Z2 і Z3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Покровский В.В., Каплуненко В.Г.,Федоров В.Г., Драгунов Ю.Г.,Билей Д.В.,Седнев В.А. Предварительное термомеханическое нагружение (тепловая опрессовка) – перспективный метод увеличения радиационного ресурса корпусов водоводяных реакторов, работающих под давлением // Проблемы прочности –1998.-N2.- С. 38-55.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.- М.: Гос.издат. физ.-мат. лит., 1959. – 439 с.
3. Плахтиенко Н. П., Ясинский С.А. О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // Проблемы прочности - 1995.- N 3.- С. 56-63.
4. Солодов И.Ю., Чин Ан Ву. “Хлопающая” нелинейность и хаос при колебаниях контактной границы твердых тел // Акустический журнал – 1993.- 39, N 5.- С. 904-910.
5. Lindner Douglas K., Kirby George. Location and estimation of damage in a beam using identification algorithms // AIAA/ASME Adapt. Struct. Forum. Hilton Head, S. C., Apr. 21-22, 1994: Collect. Techn. Pap. – Washington, 1994.-p.192-198.
6. Shen M.-H. H., Pierre C. Free vibrations of beams with a single-edge crack // J. Sound and Vibr.- 1994.- 170, N 2.- p. 237-259.
7. Farghaly S. H. Comments and further results on “Analysis of the effects of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam” // J. Sound and Vibr.- 1994.- 169, N 5.- p. 704-708.
8. Robin Pierre Y., Jansen Ben H., Man Xiu Ting C., Wang Zhijing, Finch Robert D. Vibration monitoring of steel beams by evaluation of resonance frequency decay rates // J. Acoust. Soc. Amer.- 1994.- 96, N 2, Pt 1.- p. 867-873.