УДК 620.178

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З ПОПЕРЕЧНОЮ КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ

Ройтман А.Б., Герасімов Т.С., Биченко Т.А.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.

Дослідити поперечні пружні коливання круглої пластини (плити) радіуса a з защипленим краєм у випадку, коли їх спричинив ударний імпульс P, прикладений у початкову мить до центру плити, а близько від защипування існує кругова тріщина (розріз) глибиною h_1.

Треба визначити розв'язок рівняння поперечних коливань плити [1,2]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right]\right\} + \frac{1}{b^4}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Початкові умови:

$U(r,0) = 0,$

$$U_t(r,0) = \begin{cases} V_0 = \dfrac{P}{\pi\varepsilon^2\rho h}, & 0 < r \le \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < r \le a \end{cases}$$

Умови на межі:

$$U(a,t) = 0,$$

$$U_r(a,t) = 0$$

ε - безмірно мала величина,

$h >> h_1$ – товщина плити,

ρ - густина матеріалу,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$$ - циліндрична жосткість,

E – модуль Юнга,

υ - коефіцієнт Пуассона,

$$b^2 = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

2. Розв'язок задачі можна уявити виразом [1,2]:

$$U(r,t)=\frac{Pb^2}{2\pi D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[I_0(\gamma_n)-J_0(\gamma_n)]R_{\gamma_n}(r)}{\gamma_n{}^2 I_0{}^2(\gamma_n)J_0{}^2(\gamma_n)}\sin\frac{\gamma_n{}^2 b^2}{a^2}t, \quad (1)$$

яке описує вісесиметричні коливання, що проходять з круговою частотою

$$\omega = \frac{\gamma_n^2 b^2}{a^2}, \quad (2)$$

та періодом

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi a^2}{\gamma_n^2 b^2}. \quad (3)$$

$J_0(\gamma_n)$ - функція Бесселя нульового порядку дійсного аргументу,

$I_0(\gamma_n)$ - функція Бесселя нульового порядку уявного аргументу[3].

$R_{\gamma_n}(r)=I_0(\gamma_n)J_0(\gamma_n\frac{r}{a})-J_0(\gamma_n)I_0(\gamma_n\frac{r}{a})$ - лінійна комбінація циліндричних функцій Бесселя, γ_n – послідовні додатні корені рівняння

$$R'_{\gamma_n}(a)=0$$

Зважаючи на те, що близько від защипування існує круговий розріз і пластина здійснює малі поперечні коливання, (1) визначено для частини періоду

$$\frac{-\pi a^2}{\gamma_n^2 b^2}\le t\le 0. \quad (4)$$

Друга частина періоду коливання буде проходити з круговою частотою

$$\omega_1=\frac{\gamma_n^2 b_1^2}{a^2}, \quad (5)$$

де

$$b_1^2=\sqrt{\frac{D_1}{\rho(h-h_1)}},$$

$$D_1=\frac{E(h-h_1)^3}{12(1-\upsilon^2)},$$

та періодом

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi a^2}{\gamma_n^2 b_1^2} \tag{6}$$

з часом

$$0 \le t \le \frac{\pi a^2}{\gamma_n^2 b_1^2} \quad . \tag{7}$$

Відповідні коливання будуть мати вигляд:

$$\widetilde{U}(r,t) = \frac{P b_1^2}{2\pi D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[I_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n)] R_{\gamma_n}(r)}{\gamma_n^2 I_0^2(\gamma_n) J_0^2(\gamma_n)} \sin \frac{\gamma_n^2 b_1^2}{a^2} t \quad . \tag{8}$$

Розкладемо вирази (1) і (8) у ряд Фур'є для періода коливань:

$$T^* = \frac{\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega\omega_1}(\omega + \omega_1) = \frac{\pi a^2}{\gamma_n^2}\left(\frac{b_1^2 + b^2}{b_1^2 b^2}\right), \tag{9/}$$

і частотою

$$\omega^* = \frac{2\pi}{T^*} = \frac{2\gamma_n^2}{a^2}\left(\frac{b_1^2 b^2}{b_1^2 + b^2}\right), \tag{9//}$$

з якими проходить повний цикл "стискання-розтягнення" крайових волокон круглої пластини.

Шуканий ряд Фур'є запишеться у вигляді:

$$\overline{U}(r,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega^* t + b_k \sin k\omega^* t\right), \tag{10}$$

де

$$a_k = \frac{2}{T^*} \int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega_1}} U(r,t) \cos k\omega^* t dt \quad , \tag{11}$$

$$b_k = \frac{2}{T^*} \int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega_1}} U(r,t) \sin k\omega^* t dt \quad .$$

У рядах (1) і (8) утримаємо члени n=1.Така форма коливань круглої пластини відповідає місцю розташування тріщини, оговореному в постаноці задачі.

$$U_1(r,t) = \frac{Pb^2}{2\pi D}\frac{[I_0(\gamma_1) - J_0(\gamma_1)]R_{\gamma_1}(r)}{\gamma_1{}^2 I_0{}^2(\gamma_1) J_0{}^2(\gamma_1)} \sin\frac{\gamma_1{}^2 b^2}{a^2} t\,, \tag{12}$$

$$\widetilde{U}_1(r,t) = \frac{Pb_1{}^2}{2\pi D_1}\frac{[I_0(\gamma_1) - J_0(\gamma_1)]R_{\gamma_1}(r)}{\gamma_1{}^2 I_0{}^2(\gamma_1) J_0{}^2(\gamma_1)} \sin\frac{\gamma_1{}^2 b_1^2}{a^2} t\,, \tag{13}$$

або, що те ж саме:

$$U_1(r,t) = \frac{Pb^2}{2\pi D} K \sin\frac{\gamma_1{}^2 b^2}{a^2} t\,, \tag{14}$$

$$\widetilde{U}_1(r,t) = \frac{Pb_1{}^2}{2\pi D_1} K \sin\frac{\gamma_1{}^2 b_1^2}{a^2} t\,, \tag{15}$$

де

$$K = \frac{[I_0(\gamma_1) - J_0(\gamma_1)]R_{\gamma_1}(r)}{\gamma_1{}^2 I_0{}^2(\gamma_1) J_0{}^2(\gamma_1)}\,.$$

Межі інтегрування визначаються виразами (4) і (7). Вирази (14) і (15) підставимо в (11):

$$a_k = \frac{1}{T^*}\frac{Pb^2}{\pi D} K\left[\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{0} \sin\omega t \cos\omega^* k t dt\right] +$$

$$+ \frac{1}{T^*}\frac{Pb_1{}^2}{\pi D_1} K\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{\omega_1}} \sin\omega_1 t \cos\omega^* k t dt\right], \tag{16}$$

$$b_k = \frac{1}{T^*}\frac{Pb^2}{\pi D} K\left[\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{0} \sin\omega t \sin\omega^* k t dt\right] +$$

$$+\frac{1}{T^*}\frac{Pb_1{}^2}{\pi D_1}K\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}}\sin\omega_1 t\sin\omega^* k t dt\right]. \qquad (17)$$

Обчислимо інтеграли, які входять до виразів (16), (17):

$$a_k=\frac{-1}{T^*}\frac{Pb^2}{\pi D}K(1+\cos\frac{k\pi\omega^*}{\omega})\frac{\omega}{\omega^2-k^2\omega^{*2}}+$$

$$+\frac{1}{T^*}\frac{Pb_1{}^2}{\pi D_1}K(1+\cos\frac{k\pi\omega^*}{\omega_1})\frac{\omega_1}{\omega_1{}^2-k^2\omega^{*2}}, \qquad (18)$$

$$a_0=\frac{2PK}{T^*\pi}(-\frac{b^2}{D\omega}+\frac{b_1{}^2}{D_1\omega_1}), \qquad (19)$$

$$b_k=\frac{1}{T^*}\frac{Pb^2}{\pi D}K\sin\frac{k\pi\omega^*}{\omega}\frac{\omega}{\omega^2-k^2\omega^{*2}}+$$

$$+\frac{1}{T^*}\frac{Pb_1{}^2}{\pi D_1}K\sin\frac{k\pi\omega^*}{\omega_1}\frac{\omega_1}{\omega_1{}^2-k^2\omega^{*2}}. \qquad (20)$$

3. Покладемо $\gamma_n=\gamma_1=\gamma$. Тоді необхідно розв'язати рівняння

$$R'_\gamma(a)=0$$

$$R_\gamma(r)=I_0(\gamma)J_0(\gamma\frac{r}{a})-J_0(\gamma)I_0(\gamma\frac{r}{a}),$$

$$R'_\gamma(r)=I_0(\gamma)J'_0(\gamma\frac{r}{a})-J_0(\gamma)I'_0(\gamma\frac{r}{a}),$$

Ураховуючи те, що $J'_0(z)=-J_1(z)$, $I'_0(z)=I_1(z)$ [3], задача зводиться до розв'язку рівняння:

$$\frac{J_1(\gamma)}{J_0(\gamma)}+\frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)}=0, \qquad (21)$$

де

$J_1(\gamma)$ - функція Бесселя першого порядку дійсного аргументу,

$I_1(\gamma)$ - функція Бесселя першого порядку уявного аргументу[3].

Розв'язком рівняння (21) [2] у випадку одного вузлового кола буде число γ = 6,3064.

4. Переходячи до безрозмірних величин, можна перетворити коефіцієнти a_k, b_k, a_0, визначені формулами (18),(19),(20), до вигляду:

$$a_k = \frac{P}{\pi^2 A h^2 \rho} K \left[-\frac{(1-\frac{h_1}{h})(2-\frac{h_1}{h})}{(2-\frac{h_1}{h})^2 - 4k^2(1-\frac{h_1}{h})^2}(1+\cos\frac{2(1-\frac{h_1}{h})}{2-\frac{h_1}{h}}k\pi) + \right.$$

$$\left. + \frac{2-\frac{h_1}{h}}{((2-\frac{h_1}{h})^2 - 4k^2)(1-\frac{h_1}{h})^2}(1+\cos\frac{2}{2-\frac{h_1}{h}}k\pi) \right], \qquad (22)$$

$$b_k = \frac{P}{\pi^2 A h^2 \rho} K \left[\frac{(1-\frac{h_1}{h})(2-\frac{h_1}{h})}{(2-\frac{h_1}{h})^2 - 4k^2(1-\frac{h_1}{h})^2}\sin\frac{2(1-\frac{h_1}{h})}{2-\frac{h_1}{h}}k\pi + \right.$$

$$\left. + \frac{2-\frac{h_1}{h}}{((2-\frac{h_1}{h})^2 - 4k^2)(1-\frac{h_1}{h})^2}\sin\frac{2}{2-\frac{h_1}{h}}k\pi \right], \qquad (23)$$

$$a_0 = \frac{2P}{\pi^2 A h^2 \rho} K \frac{1-(1-\frac{h_1}{h})^3}{(2-\frac{h_1}{h})(1-\frac{h_1}{h})^2}, \qquad (24)$$

де

$$A = \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\upsilon^2)}},$$

$$K = \frac{[I_0(\gamma) - J_0(\gamma)]R_\gamma\ (r)}{\gamma^2 {I_0}^2(\gamma){J_0}^2(\gamma)},$$

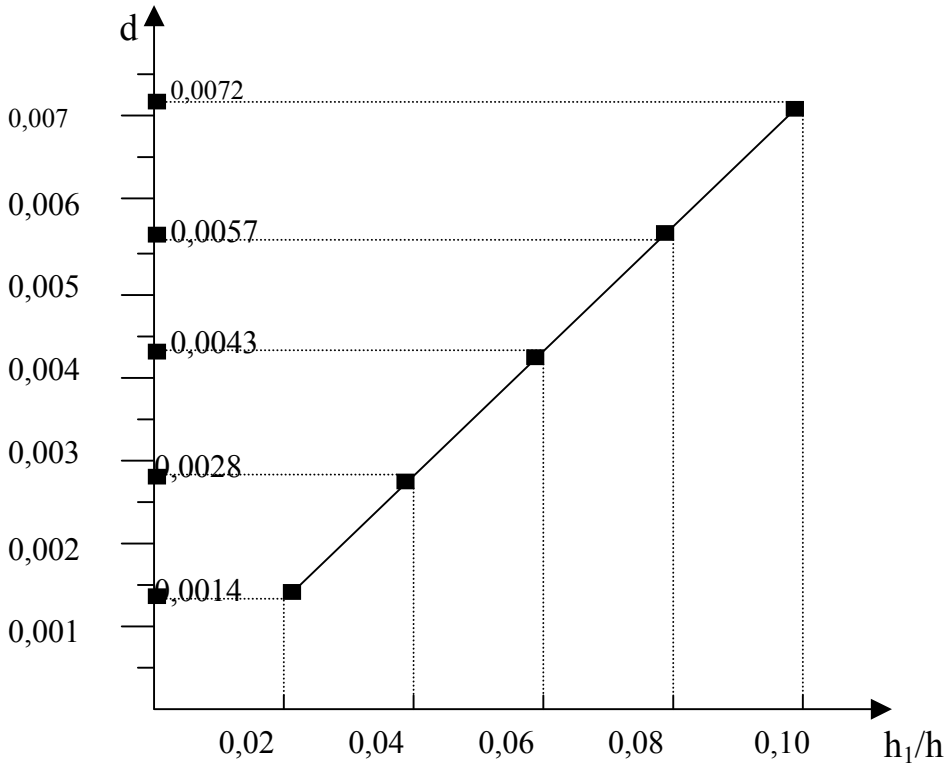
$$R_\gamma(r) = I_0(\gamma)J_0(\gamma\frac{r}{a}) - J_0(\gamma)I_0(\gamma\frac{r}{a}).$$

5. Побудуємо характерну для таких задач діагностичну функцію

$$d = f(\frac{h_1}{h}) = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{a_1^2 + b_1^2}}.$$

Для будування d необхідно отримати вирази для a_1, a_2, b_1, b_2 з формул (22),(23). Залежність діагностичної функції від відношення $\frac{h_1}{h}$ показана у рисунке.

З розглянутого рисунка видно, що побудована залежність у дослідженому діапазоні відносних размірів кругової тріщини близька до лінійної.



ЛІТЕРАТУРА

1. Carrington H. The frequencies of vibration of flat circular plates fixed at the circumference. – Phil. Mag. – 1925. – v. 50. – N.6. – P. 1261.
2. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек // Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1964. – 266 с.
3. Ватсон Т.Н. Теория бесселевых функций. – М.:Наука, – 1949. – 27 с.