УДК 336.763: 51-7

ПОБУДОВА МНОЖИНИ ОПТИМАЛЬНИХ ПОРТФЕЛІВ ЦІННИХ ПАПЕРІВ ШЛЯХОМ ЛІНІЙНОЇ ЗГОРТКИ КРИТЕРІЇВ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРИБУТКОВОСТІ І МІНІМАЛЬНОГО РИЗИКУ

Приварнікова А.О.

При формуванні структури портфеля ризикових цінних паперів (ЦП) ведеться пошук компромісу між двома протилежними критеріями: максимальної прибутковості і мінімального ризику.

Портфель ЦП є вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який задовольняє умовам:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \tag{1}$$

де x_i - частка $i-$го виду ЦП у портфелі.

Середня очікувана прибутковість портфеля:

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma_i} x_i = M(x), \tag{2}$$

де $\overline{\gamma_i}$ - середня очікувана прибутковість $i-$го виду ЦП.

Ризиком портфеля вважаємо величину, яка пропорціональна дисперсії і має розмірність прибутковості:

$$F_2 = \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j = \frac{\sigma^2(x)}{\sigma_0}; \quad \sigma_{\min} \leq \sigma_0 \leq \sigma_{\max}, \tag{3}$$

де $K = (K_{ij})$ - коваріаційна матриця випадкових величин γ_i, γ_j.

Класична портфельна теорія [1, 2] грунтується на принципі головного критерію. Приймаючи головним критерієм ризик, шукаємо $\min F_2$ при заданому F_1 і обмеженнях (1). Змінюючи F_1, одержимо множину оптимальних портфелів. Аналогічну множину можна побудувати, якщо знаходимо $\max F_1$ при фіксованих значеннях F_2 і обмеженнях (1). При знятті обмеження $x_i \geq 0$ задача зводиться до пошуку екстремальної точки функції Лагранжа. Основні труднощі пов'язані з пошуком розв'язку, при якому умова $x_i \geq 0$ виконується.

У цій роботі побудова множини оптимальних портфелів ЦП здійснюється за допомогою лінійної згортки критеріїв F_1, F_2:

$$F = \mu F_1 - (1-\mu) F_2; \quad 0 < \mu < 1, \tag{4}$$

де μ - ваговий коефіцієнт, який задає ранг кожному критерію.

Пошук $\max F$ при умові $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ проводимо за допомогою функції Лагранжа:

$$L = \mu \sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma_i} x_i - \frac{1-\mu}{\sigma_0} \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right). \tag{5}$$

З необхідних умов існування екстремуму маємо систему рівнянь:

$$\mu\overline{\gamma_i} - \frac{2(1-\mu)}{\sigma_0}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}x_j + \lambda = 0;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1;\ i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Запишемо систему (6) у матричному вигляді:

$$Kx = \varsigma\overline{\gamma} + \psi\lambda I_n;\ I_n^T x = 1;\ \varsigma = \frac{\mu\sigma_0}{2(1-\mu)};\ \psi = \frac{\varsigma}{\mu}, \tag{7}$$

де K - коваріаційна матриця $n \times n$, $x, \overline{\gamma}$ - вектори-стовбці розмірності n, I_n - вектор-стовбець з одиничними координатами розмірності n.

Визначаючи x з першого рівняння (7) і підставляючи в друге, одержимо λ:

$$\lambda = \frac{1-\varsigma a_1}{\psi a_2};\ a_1 = I_n^T K^{-1}\overline{\gamma};\ a_2 = I_n^T K^{-1} I_n;\ K^{-1} = (b_{ij}), \tag{8}$$

де b_{ij} - елементи матриці, оберненої до коваріаційної.

Відповідно розв'язок системи має вигляд:

$$x = \varsigma K^{-1}\overline{\gamma} + \frac{(1-\varsigma a_1)}{a_2} K^{-1} I_n; \tag{9}$$

У координатній формі одержимо:

$$x_i = \varsigma c_i + \frac{(1-\varsigma a_1)}{a_2} b_i;\quad b_i = \sum_{j=i}^{n} b_{ij};\quad c_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\overline{\gamma_j};$$

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i;\quad a_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i;\quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

У процесі розрахунку ми можемо отримати від'ємні координати вектора x, тоді, приймаючи їх нульовими, повторюємо процедуру з тими ЦП, що залишилися.

Основним показником ризику портфеля є середнє квадратичне відхилення від середньої очікуваної прибутковості:

$$F_3 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}x_i x_j}\ . \tag{11}$$

Функція Лагранжа для пошуку максимуму лінійної згортки критеріїв F_1 і F_3 має вигляд:

$$L = \mu\sum_{i=1}^{n}\overline{\gamma_i}x_i - (1-\mu)\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}x_i x_j} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right). \tag{12}$$

Визначення оптимального вектора x зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\mu\overline{\gamma_i} - (1-\mu)\left(\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}x_i x_j\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}x_j + \lambda = 0;\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\quad i = \overline{1,n} \tag{13}$$

Введемо нові змінні:

$$r = \left(\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}x_i x_j\right)^{-\frac{1}{2}};\quad y_i = r x_i. \tag{14}$$

За їх допомогою система (13) приводиться до вигляду, аналогічного (6):

$$\mu\overline{\gamma_i} - (1-\mu)\sum_{j=1}^{n} K_{ij}y_j + \lambda = 0;\quad \sum_{i=1}^{n} y_i = r. \tag{15}$$

Відповідно розв'язок системи (13) можна представити у вигляді ітераційної формули:

$$x_i = \frac{1}{r}\left(\varsigma_1 c_i + \frac{r-\varsigma_1 a_1}{a_2} b_i\right); \quad \varsigma_1 = \frac{\mu}{1-\mu}; \quad r_0 = r_{\min} = \frac{1}{\sigma_{\max}}. \tag{16}$$

Якщо в процесі ітерацій з'являється координата $x_k < 0$, то приймаючи її з нульовим значенням, повторюємо розрахунки з рештою ЦП.

Для побудови множини оптимальних портфелів необхідно знати перші та другі (коваріаційні) моменти системи випадкових величин γ_i, які можна оцінити за допомогою обробки статистичної інформації відносно динаміки прибутковості ЦП за попередній період. Під час формування ринку ЦП, що відбувається на Україні, така інформація практично відсутня. У цьому випадку прибутковості від різних видів ЦП можна вважати некорельованими, нормально розподіленими, а оцінки γ_i, σ_i одержати експертним методом за оптимістичним $\gamma_i^{\max}$ та песимістичним $\gamma_i^{\min}$ прогнозами [3]:

$$\overline{\gamma_i} = \frac{\gamma_i^{\min} + \gamma_i^{\max}}{2}; \; \sigma_i = \frac{\gamma_i^{\max} - \gamma_i^{\min}}{6}. \tag{17}$$

При некорельованих прибутковостях ЦП розрахунки значно спрощуються:

$$b_i = \frac{1}{\sigma_i^2}; \quad c_i = \frac{\overline{\gamma_i}}{\sigma_i^2}; \quad a_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\gamma_i}}{\sigma_i^2}; \quad a_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}. \tag{18}$$

З формули (10) можна одержати умову, при якій всі $x_i \geq 0$:

$$\varsigma^{-1} \geq a_1 - \overline{\gamma_{\min}} a_2. \tag{19}$$

Якщо умова (19) не виконується, то координата, якій відповідає $\overline{\gamma_{\min}}$, приймається нульовою, і процедура повторюється з рештою ЦП.

Аналогічна умова, що забезпечує $x_i \geq 0$, витікає з ітераційної формули (16): $r \geq \varsigma_1(a_1 - \overline{\gamma_{\min}} a_2)$.

При виконанні умови (19) для $r < r_{\min}$ всі $x_i > 0$, тобто оптимальний портфель включає всі види ЦП. В іншому випадку в процесі ітерацій з'являється координата $x_k < 0$, якій відповідає $\overline{\gamma_{\min}}$. Приймаючи $x_k = 0$, повторюємо процедуру з рештою ЦП.

За допомогою одержаних алгоритмів проведені розрахунки оптимальних портфелів при різних μ для випадку некорельованих прибутковостей від ЦП з параметрами $\overline{\gamma_i}$, σ_i, вказаними в таблиці 1, що дозволяє побудувати залежність $M = f(\sigma)$, яка співвідносить ризик з прибутковістю.

Таблиця 1

ЦП	1	2	3	4	5
$\overline{\gamma_i}$	0,15	0,21	0,26	0,07	0,28
σ_i	0,04	0,11	0,15	0,02	0,18

У таблиці 2 вказана структура оптимальних портфелів, отриманих згідно з (10) при $\sigma_0 = \sigma_{\min}$ (перший рядок) та $\sigma_0 = \sigma_{\max}$ (другий рядок), і по ітераційній формулі (17) (третій рядок).

На рисунку показано графік функції $M = f(\sigma)$, аналіз якого показує:

Формула (10) при $\sigma_0 = \sigma_{\max}$ дає праву частину кривої $M = f(\sigma)$, а при $\sigma_0 = \sigma_{\min}$ - ліву частину (ряд 1, ряд 2)

Ітераційна формула (16) дає результати, близькі до одержаних за формулою (10) (ряд 3).

Для випадку некорельованих прибутковостей ЦП за допомогою (10), (18) можна представити залежність $M = f(\sigma)$ у параметричному вигляді:

$$M = \varsigma\left(a_3 - \frac{a_1^2}{a_2}\right) + \frac{a_1}{a_2}; \quad \sigma = \sqrt{\varsigma^2\left(a_3 - \frac{a_1^2}{a_2}\right) + \frac{1}{a_2}}; \quad a_3 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\gamma_i}{\sigma_i}\right)^2. \tag{20}$$

Параметр ς повинен задовольняти умові (19), відповідна крива $M = f(\sigma)$ складається з ділянок, на яких оптимальні портфелі мають однаковий набір координат.

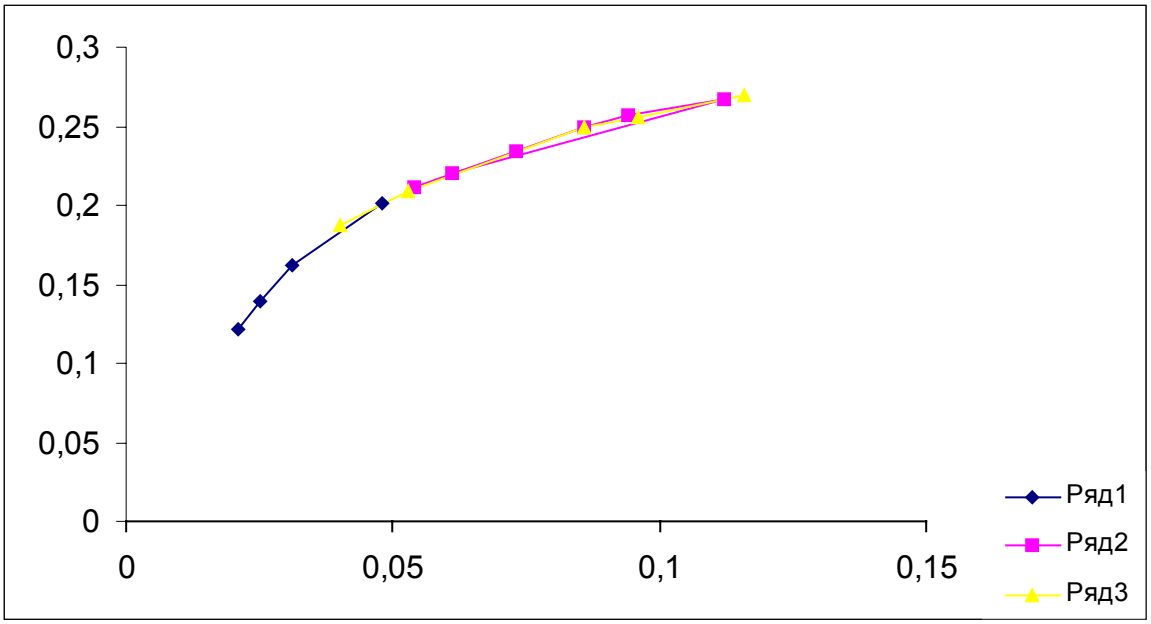
Виключаючи параметр ς, залежність можна представити в явному вигляді:

$$M = \sqrt{\left(a_3 - \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(\sigma^2 - \frac{1}{a_2}\right)} + \frac{a_1}{a_2}. \tag{21}$$

Таблиця 2.

μ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$M(x)$	$\sigma(x)$
0,7	0,282	0,269	0,248	0	0,201	0,220	0,061
	0	0,041	0,490	0	0,469	0,267	0,112
	0	0	0,486	0	0,514	0,270	0,116
0,6	0,466	0,211	0,180	0	0,143	0,201	0,048
	0	0,214	0,415	0	0,371	0,257	0,094
	0	0,199	0,421	0	0,380	0,256	0,096
0,5	0,545	0,122	0,088	0,179	0,067	0,162	0,031
	0	0,317	0,371	0	0,312	0,250	0,086
	0	0,328	0,366	0	0,306	0,250	0,086
0,4	0,427	0,089	0,063	0,373	0,048	0,139	0,025
	0,134	0,316	0,303	0	0,247	0,234	0,073
	0,390	0,235	0,208	0	0,167	0,209	0,053
0,3	0,342	0,067	0,045	0,512	0,034	0,122	0,021
	0,371	0,241	0,215	0	0,173	0,211	0,054
	0,605	0,167	0,128	0	0,100	0,187	0,040

Крива $M = f(\sigma)$ є опуклою, оскільки складається з відрізків гіпербол.



ЛІТЕРАТУРА

1. О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами (FAST). - Дело ЛТД, 1995.- 208с.
2. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. – 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Финансы и статистика, 1998.- 512с.
3. Приварнікова А.О. Чисельний метод побудови оптимальної структури портфеля цінних паперів при некорельованих прибутках // Вісник Державного ун-ту "Львівська політехніка". Прикл. математика.- 1998.-№337.-С.380-383.