УДК 336.714

ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ЗІ СПОСТЕРІГАЧЕМ ВЕКТОРА НЕВИЗНАЧЕННОСТІ

Потапенко Є.М.,Савранська А.В.

Узагальнимо результати роботи [1], які були одержані для лінійної автономної системи на випадок нелінійної неавтономної системи і проведемо доведення робастної стійкості, яке відсутнє в [1].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо абстрактну систему:

$$\dot{x}_1 = \vartheta(x_1, x_2, t), \tag{1.1}$$

$$\dot{x}_2 = \varphi(x_1, x_2, x_3, t) + \Phi(x_1, x_2, x_3, t)u, \tag{1.2}$$

$$\varepsilon\dot{x}_3 = \psi(x_1, x_2, t) + \Psi(x_1, x_2, t)x_3 + R(x_1, x_2, t)u, \tag{1.3}$$

де $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ - підвектори повільних та підвектор швідких составляючих вектора стану розмірностей відповідно n_1, n_2, n_3.

Задамо початкові умови

$$\mathrm{x}_1(0,\varepsilon) = \mathrm{x}_1^0, \mathrm{x}_2(0,\varepsilon) = \mathrm{x}_2^0, \mathrm{x}_3(0,\varepsilon) = \mathrm{x}_3^0, \tag{1.4}$$

ε - малий додатній скаляр;

ϑ, φ, ψ і Φ, Ψ - неперервні вектори та матриці, які мають неперервні обмежені похідні за всіма аргументами, із яких тільки ϑ - детермінований вектор, причому $\varphi(0,0,0,t) \neq 0$ тотожно, а матриця Ψ невироджена;

u - вектор управління;

Рівняння $(1.1), (1.2)$ при $x_3 \equiv 0$ складають основну частину системи (основну динаміку), а рівняння (1.3) описують паразитну динамику.

Нехай $\varphi_0(x_1, x_2, t)$ і $\Phi_0(t)$ - відомі оцінки відповідно φ і Φ, причому $\varphi_0(0,0,t) \neq 0$ тотожньо, а Φ_0 - невироджена матриця. Тоді рівняння (1.2) можна записати у вигляді

$$\dot{x}_2 = \varphi_0(x_1, x_2, t) + \Phi_0(t)u + Gf(x_1, x_2, x_3, u, t), \tag{1.5}$$

де f - неперервний обмежений вектор невизначеності розмірності k, куди входять власне невизначеності, нелінійності та зовнішні збудження, внаслідок чого $f(0,0,0,0,t) \neq 0$ тотожно; G - відома матриця розподілу елементів вектора f, причому

$$G = \Phi_0(t) \cdot Q(x_1, x_2, t), \tag{1.6}$$

де Q - деяка відома матриця. Умова (1.6) називається умовою узгодженості. Його виконання дозволяє здійснювати компенсацію вектора невизначеності складовою вектора управління u.

З рівнянь $(1.5), (1.6)$ можна записати

$$y_f := Qf = \Phi_0^{-1}(\dot{x}_2 - \varphi_0 - \Phi_0 u). \tag{1.7}$$

Таким чином, при вимірюванні вектора $[x_1^T, x_2^T, \dot{x}_2^T, u^T]$ можливо обчислити вплив вектора невизначеності f на детерміновану частину системи. Тоді для системи (1.1)-(1.3) можна сформувати вектор управління у вигляді

$$u = k(x_1, x_2, t) - y_f, \tag{1.8}$$

де k - вектор, який задається. У цьому випадку система $(1.1),(1.2),(1.5)-(1.8)$ зводиться до повністю детермінованої системи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \vartheta(x_1, x_2, t), \\ \dot{x}_2 &= \varphi_0(x_1, x_2, t) + \Phi_0(t) \cdot k(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{1.9}$$

та рівнянню

$$\varepsilon \dot{x}_3 = \psi(x_1, x_2, t) + \Psi(x_1, x_2, t) x_3 + R(x_1, x_2, t) u, \tag{1.10}$$

причому система (1.9) незалежна від рівняння (1.10) і задача зводиться до надання необхідних динамічних характеристик системі (1.9) шляхом призначення вектора k і перевіркою на стійкість незбудженого розв'язку рівняння (1.10). Недоліком закону управління $(1.7),(1.8)$ є необхідність вимірювання похідної $\dot{\mathbf{X}}_2$, що пов'язано зі складною технічною реалізацією вимірювання.

Для усунення необхідності вимірювання $\dot{\mathbf{X}}_2$ в [1] було запропановано використовувати спостерігач вектора невизначеності. Параметри спостерігача обираються такими, що за час переходного процесу f буде мало змінюватися, тобто $f = const$ або $\dot{f} = 0$. Тоді, вважаючи, що існує вектор вимірювання y_f, для системи $\dot{f} = 0$, $y_f = Qf$ при умові її повної спостережуваності можна записати рівняння спостерігача.

$$\dot{\hat{f}} = L(Q\hat{f} - y_f), \qquad \hat{f}(x_1, x_2, x_3, u, 0) = 0, \tag{1.11}$$

де L - матриця коефіцієнтів підсилення спостерігача, $\hat{f}$ - оцінка вектора f. Матриця L обирається із умови асимптотичної стійкості системи $\dot{\tilde{f}} = LQ\tilde{f} - \dot{f}$, яка отримується з (1.11) і (1.7), де $\tilde{f} = \hat{f} - f$. (У тому випадку, коли система $\dot{f} = 0$, $y_f = Qf$, не буде повністю спостережуваною або $\dim Qf < \dim f$, необхідно спостерігати не f, а Qf). На основі $(1.7),(1.11)$ можна записати

$$f = L\left[Qf - \Phi_0^{-1}(\dot{x}_2 - \varphi_0 - \Phi_0 u)\right]. \tag{1.12}$$

Для усунення необхідності вимірювання $\dot{\mathbf{X}}_2$ або диференціювання вектора $\mathbf{X}_2$ вводиться позначення

$$z := \hat{f} + L\Phi_0^{-1} x_2, \tag{1.13}$$

з урахуванням якого рівняння (12) має вигляд

$$\dot{z} = L\left[Q(z - L\Phi_0^{-1} x_2) + \Phi_0^{-1}\varphi_0 + u\right]. \tag{1.14}$$

У рівнянні (1.14) відсутнє $\dot{\mathbf{X}}_2$. Після інтегрування (1.14) оцінка вектора f знаходиться через залежність

$$\hat{f} = z - L\Phi_0^{-1} x_2. \tag{1.15}$$

Відомо, що зі збільшенням норми матриці L точність спостерігача (без урахування шумів) підвищується. Тому можна вважати $L = \varepsilon^{-1}\bar{L}$. Тоді рівняння (1.12) набуває вигляду

$$\varepsilon\dot{\hat{f}} = \bar{L}\left[Q\hat{f} - \Phi_0^{-1}(\dot{x}_2 - \varphi_0 - \Phi_0 u)\right]. \tag{1.16}$$

Із (1.16), з урахуванням (1.7), при $\varepsilon \to 0$ випливає $\lim Q\hat{f} = Qf$. У цьому випадку закон управління слід прийняти у вигляді

$$u = K(x_1, x_2, t) - Q\hat{f}. \tag{1.17}$$

Тоді система $(1.1),(1.3)-(1.7),(1.16),(1.17)$ зводиться до сингулярно збудженої системи

$$\dot{x}_1 = \vartheta(x_1, x_2, t), \tag{1.18}$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_0(x_1, x_2, t) + \Phi_0(t)K(x_1, x_2, t) + G(\hat{f} - f), \tag{1.19}$$

$$\varepsilon\dot{x}_3 = \psi(x_1, x_2, t) + \Psi(x_1, x_2, t)x_3 + RK(x_1, x_2, t) - RQ\hat{f}\,, \tag{1.20}$$

$$\varepsilon\dot{\hat{f}} = \bar{L}\left[Q\hat{f} - \Phi_0^{-1}(\dot{x}_2 - \varphi_0(x_1, x_2, t)) + u\right] = \bar{L}Q(\hat{f} - f). \tag{1.21}$$

За допомогою позначення $\tilde{f} := \hat{f} - f$ рівняння (1.21) зводиться до вигляду

$$\varepsilon\dot{\tilde{f}} = \bar{L}Q\tilde{f} - \varepsilon\dot{f}\,, \tag{1.22}$$

звідки випливає, що частинний розв'язок $\tilde{f} = \hat{f} - f$ пропорційний ε, а при гурвицевості матриці $\bar{L}Q$ та обмеженості $\dot{f}$ загальний розв'язок $\hat{f} - f$ збігається до нуля при $\varepsilon \to 0$. На основі (1.19), (1.22) можна твердити, що запропонований алгоритм містить астатизм першого порядку по відношенню до вектора невизначеності (у результаті диференціювання у векторі $\dot{f}$ відсутні сталі складові вектора f). При $\varepsilon \to 0$ система (1.18), (1.19) переходить до системи (1.9), за якою необхідно синтезувати закон управління (1.17). Оскільки на практиці точної рівності $\hat{f} = f$ досягнути неможливо, то виникає задача робастної стійкості сингулярно збудженої системи (1.17)-(1.21).

2. ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОСТІ

Дослідимо розв'язок $(x_1(t,\varepsilon); x_2(t,\varepsilon); x_3(t,\varepsilon), \hat{f})$ задачі (1.18)-(1.21) на рівномірну робастну стійкість у цілому або великову на сегменті $0 \le t \le T$, використовуючи результати [2],[3].

Вироджена система для цієї системи при $\varepsilon = 0$ має вигляд

$$\dot{x}_{1s} = \vartheta(x_{1s}, x_{2s}, t), \tag{2.1}$$

$$\dot{x}_{2s} = \varphi_0(x_{1s}, x_{2s}, t) + \Phi_0(t)K(x_{1s}, x_{2s}, t) + G(\hat{f}_s - f_s), \tag{2.2}$$

$$0 = \psi(x_{1s}, x_{2s}, t) + \Psi(x_{1s}, x_{2s}, t)x_3 + RK(x_1, x_2, t) - RQf \tag{2.3}$$

$$0 = \bar{L}Q(\hat{f}_s - f_s) \tag{2.4}$$

Порядок системи (2.1)-(2.4) буде нижчий від порядку вихідної системи, т.к. $n_3 + k$ диференціальних рівнянь вироджуються в алгебраїчні рівняння, тобто порядок дорівнюватиме $n_1 + n_2$.

Для системи (2.1)-(2.4) задається менше число початкових умов

$$x_1(0,\varepsilon) = x_1^0, x_2(0,\varepsilon) = x_2^0. \tag{2.5}$$

З $(2.3),(2.4)$, з урахуванням того, что матриця $\bar{L}Q$ оборотна, оскільки вона гурвицева

$$x_{3s} = -\Psi^{-1}(\psi + RK) \tag{2.6}$$

$$\hat{f}_s(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, u, t) = f_s(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, u, t). \tag{2.7}$$

Підстановка (2.7) в (2.2) дозволяє записати

$$\dot{x}_{1s} = \vartheta(x_{1s}, x_{2s}, t), \qquad x_{1s}(0) = x_1^0, \tag{2.8}$$

$$\dot{x}_{2s} = \varphi_0(x_{1s}, x_{2s}, t) + \Phi_0(t)K(x_{1s}, x_{2s}, t), \qquad x_{2s}(0) = x_2^0, \tag{2.9}$$

$x_{3s} = -\Psi^{-1}(\psi + RK)$ не буде, взагалі кажучи, задовольняти початковій умові (1.4) для $\mathrm{x}_{3\mathrm{s}}$, тобто $\mathrm{x}_{3\mathrm{s}}(\mathrm{t}) \neq \mathrm{x}_3^0$, , і тому, принаймні, в деякому околі початкової точки $\mathrm{t} = 0$ вироджений розв'язок $\mathrm{x}_{3\mathrm{s}}(t)$ не буде близький до розв'язку $\mathrm{x}_3(t, \varepsilon)$ (1.18)-(1.21).

Перевіримо виконання умов теорем з роботи $[2]$.

I) функції $\vartheta, \psi, \Psi, RQf$ неперервні та задовольняють умові Ліпшиця по $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ в деякій відкритій області H простору змінних $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, x_3, t)$, відповідно $(1.14), (1.15)$ при неперервності функції u. Нехай φ_0, Φ_0, K також неперервні та задовольняють умові Ліпшиця в області H.

II) розв'язки $(2.6), (2.7)$ рівнянь $(2.3), (2.4)$ - неперервні функції в $\overline{\mathrm{D}}$ ($\overline{\mathrm{D}}$ - деяка обмежена замкнена область простору змінних $(\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}, \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}, t)$, точки $(\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}, \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}, x_{3s}, t) \in \mathrm{H}$ при $(\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}, \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}, t) \in \overline{D}$, корені $x_{3s} = -\Psi^{-1}(\psi + RK)$, $\hat{f}_s = f_s$ - ізольовані в $\overline{\mathrm{D}}$.

III) нехай система (2.8)-(2.9) має єдиний розв'язок $(\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}(\mathrm{t}), \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}(t))$ на сегменті $0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}$, причому точки $(\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}, \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}, t) \in D$ при $\mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]$, де D - множина внутрішніх точок області $\overline{\mathrm{D}}$.

Приєднана система одержується з рівнянь (2.3)-(2.4) у вигляді

$$\frac{dx_{3p}(\tau)}{d\tau} = \psi(x_{1s}, x_{2s}, t) + \Psi(x_{1s}, x_{2s}, t)x_{3p}(\tau) + R(x_{1s}, x_{2s}, t)K(x_{1s}, x_{2s}, t)\Big|_{t=\tau\varepsilon} - \tag{2.10}$$

$$- RQf_p$$

$$\frac{df_p}{d\tau} = LQ\left(f_p(x_{1s}, x_{2s}, x_{3p}(\tau), u, t) - f_p(x_{1s}, x_{2s}, x_{3p}(\tau), u, t)\right)\Big|_{t=\tau\varepsilon} \tag{2.11}$$

Тут $\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}, \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}, t$ розглядаються як параметри, а незалежна змінна визначена залежністю $\tau = \varepsilon^{-1}\mathrm{t}$. Через умову II) і з урахуванням того, що f на коротких інтервалах часу мало змінюється, $(\mathrm{x}_{3\mathrm{p}}, \hat{\mathrm{f}}_{\mathrm{p}})$ є ізольованою точкою спокою системи $(2.10), (2.11)$ при $(\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}, \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}, t) \in \overline{D}$.

IV) точка спокою (x_{3p}, f_p) ($x_{3p} = -\Psi^{-1}(\psi + RK)$, $\hat{f}_p = f_s$) системи $(2.10), (2.11)$ асимптотично стійка за Ляпуновим рівномірно відносно $(\mathrm{x}_{1\mathrm{s}}, \mathrm{x}_{2\mathrm{s}}, t) \in \overline{D}$, якщо матриці Ψ та $\overline{L}Q$ - гурвицеві.

Розглянемо приєднану систему $(2.10), (2.11)$ при $\mathrm{x}_{1\mathrm{S}} = \mathrm{x}_1^0$, $\mathrm{x}_{2\mathrm{S}} = \mathrm{x}_1^0$, $t = 0$:

$$\frac{dx_{3p}(\tau)}{d\tau} = \psi(x_1^0, x_2^0, 0) + \Psi(x_1^0, x_2^0, 0)x_{3p} + R(x_1^0, x_2^0, 0)K(x_1^0, x_2^0, 0) - RQf_p, \tag{2.12}$$

$$\frac{d\hat{f}_p}{d\tau} = \overline{L}Q(\hat{f}_p - f_p) \tag{2.13}$$

з початковою умовою

$$\mathrm{x}_{3\mathrm{p}} = \mathrm{x}_3^0, \tag{2.14}$$

V) розв'язок (x_{3p}, f_p) системи $(2.12), (2.13)$, при умові гурвицевості матриць Ψ, $\overline{L}Q$, задовольняє умовам

$$x_{3p}(\tau) \to -\Psi^{-1}(x_1^0, x_2^0, 0)(\psi(x_1^0, x_2^0, 0) + RK) - RQf_p,$$

$\hat{f}_p \to f_s$, при $\tau \to \infty$,

2) точки $\left(x_1^0, x_2^0, \tilde{x}_3(\tau), 0\right) \in H$, при $\tau \geq 0$.

Примітка. Функції $G\left(\hat{f} - f\right)$ и $\bar{L}Q\left(\hat{f} - f\right)$ збігаються до нуля при $\varepsilon \to 0$.

Таким чином, виконуються всі умови теореми з роботи [2].

Відповідно до цієї теореми, знайдеться стала $\varepsilon_0 > 0$ така, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок $\left(x_1(t,\varepsilon); x_2(t,\varepsilon); x_3(t,\varepsilon), \hat{f}\right)$ задачі (1.18)-(1.21) існує на сегменті $0 \leq t \leq T$, єдиний і задовольняє граничним рівностям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{x}_1(\mathrm{t},\varepsilon) = \mathrm{x}_{1S}(\mathrm{t}), \quad \text{при} \quad 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}, \tag{2.15}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{x}_2(\mathrm{t},\varepsilon) = \mathrm{x}_{2S}(\mathrm{t}), \quad \text{при} \quad 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}, \tag{2.16}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{x}_3(\mathrm{t},\varepsilon) = \mathrm{x}_{3S}(\mathrm{t}) = -\Psi^{-1}(\psi + RK), \quad \text{при} \quad 0 < \mathrm{t} \leq \mathrm{T}, \tag{2.17}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f = \hat{f}, \quad \text{при} \quad 0 < \mathrm{t} \leq \mathrm{T}, \tag{2.18}$$

Таким чином, розв'язок системи (1.18)-(1.21) за достатньо малий проміжок часу увійде в малий окіл виродженого розв'язку.

Розглянемо цю систему при початкових умовах

$$\mathrm{x}_1(\mathrm{T},\varepsilon) = \mathrm{x}_1^{0*}, \mathrm{x}_2(\mathrm{T},\varepsilon) = \mathrm{x}_2^{0*}, \mathrm{x}_3(\mathrm{T},\varepsilon) = \mathrm{x}_3^{0*},$$

Нехай функції $\vartheta, \varphi_0 + \Phi_0 K, \psi + \Psi x_3 + RK - QRf$ мають неперервні частинні похідні по $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ в області H. Матриця $\dfrac{\mathrm{d}(\psi + \Psi x_3 + RK - QRf)}{dx_3} = \Psi$ - оборотна.

Розглянемо

$$\frac{dx_{3p}(\tau)}{d\tau} = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta) + \Psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta) x_{3p} + R(\alpha_1, \alpha_2, \beta) K(\alpha_1, \alpha_2, \beta) - QRf, \tag{2.19}$$

$$\frac{d\hat{f}_p}{d\tau} = \bar{L}Q\left(\hat{f}_p - f_p\right). \tag{2.20}$$

Якщо матриці $\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ та $\bar{L}Q$ - гурвицеві, і з урахуванням того, що параметри спостерігача обираються такими, що за час перехідного процесу f буде мало змінюватися при кожному фіксованому значенні $\alpha_1, \alpha_2, \beta$; то система (2.19), (2.20) - рівномірно асимптотично стійка.

Матрицю K будемо обирати з умови, щоб лінійне наближення системи (2.8), (2.9) було рівномірно асимптотично стійким.

Таким чином, для системи (1.18)-(1.21) виконуються всі умови теореми 1 з роботи [3]. Значить, існує стала $\varepsilon_0 > 0$ така, що для усіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок $\left(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon), x_3(t,\varepsilon), \hat{f}\right)$ системи (1.18)-(1.21) з початковими умовами $\mathrm{x}_1(\mathrm{T},\varepsilon) = \mathrm{x}_1^{0*}, \mathrm{x}_2(\mathrm{T},\varepsilon) = \mathrm{x}_2^{0*}, \mathrm{x}_3(\mathrm{T},\varepsilon) = \mathrm{x}_3^{0*}$, рівномірно асимптотично стійкий відносно малих відхилень $\mathrm{x}_1^{0*}, \mathrm{x}_2^{0*}$ та будь-яких відхилень x_3^{0*}.

Матрицю K обираємо з умови, щоб розв'язок виродженої системи був рівномірно асимптотично стійкий у цілому з початковими умовами з області H. Тоді виконуються всі умови теореми 2 роботи [3] і розв'язок системи (1.18)-(1.21) рівномірно асимптотично стійкий у цілому.

У випадку, коли H - увесь фазовий простір, буде стійкість у цілому.

Твердження. **Нехай даний об'єкт управління** $(1.1)-(1.3)$**, в якому рівняння** (1.2) **зведено до вигляду** $(1.5)-(1.6)$ **і виконуються умови:**

- система $\dot{f}=0$, $y_f=Qf$, є повністю спостережуваною, де f - неперервний вектор невизначеності, до якого включені невизначеності, нелінійності та зовнішні збудження,

- функції $\varphi_0(x_1,x_2,t)$ і $\Phi_0(t)$ такі, що $\varphi_0(0,0,t)\neq 0$ тотожньо, а Φ_0 - невироджена матриця;

- система $(1.1)-(1.3)$ - повністю керована при $\varepsilon=0$;

- ϑ,φ,ψ и Φ,Ψ - неперервні, мають неперервні обмежені похідні по усіх аргументах, вектори та матриці, з яких тільки ϑ - детермінований вектор, причому $\varphi(0,0,0,t)\neq 0$ тотожно, а матриця Ψ оборотна; u - вектор управління, матриця Ψ - гурвицева;

Тоді для спостерігача (1.11) і регулятора (1.17) завжди можна підібрати матриці коефіцієнтів L,K такі, що повна система управління $(1.1)-(1.3),(1.11),(1.17)$ буде робастно стійка у великому з початковими умовами з області H.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бичай В.Г., Потапенко Е.М. Об общности альтернативных робастных систем управления. // Проблемы управления и информатики. – 1998.- N5. – С. 27-30.
2. Потапенко Е.М., Савранская А. В. Обобщение теоремы Тихонова для сингулярно - возмущенной системы. - Праці П'ятої Української конференції з автоматичного управління «Автоматика - 98»: 13-16 травня 1998 р. - ч.1 - К.,- 1998. - С. 111-121.
3. Потапенко Е.М., Савранская А. В. Равномерная асимптотическая устойчивость сингулярно - возмущенной системы при постоянно действующих возмущениях. - Праці П'ятої Української конференції з автоматичного управління «Автоматика - 98»: 13-16 травня 1998 р. - ч.1 - К.,- 1998. - С. 334-340.