УДК 593.3

РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ ХВИЛЬ В ОБОЛОНЦІ, ОБЛЯМОВАНІЙ СПРЯМОВАНО -АРМОВАНИМ КОМПОЗИТОМ

Пожуєва І.С.

Механічні хвилі викликаються вимушеним рухом деякої ділянки деформованого середовища. При деформації елементів середовища збудження передається від однієї точки до іншої та у середовищі починає розповсюджуватися хвиля. У цьому процесі необхідно перебороти опір середовища деформуванню, який обумовлений взаємним зв'язком часток, а також опір середовища руху, обумовлений інерцією. Механічні хвилі характеризуються переносом енергії за рахунок руху часток навколо їх положення рівноваги. Швидкість розповсюдження механічних збуджень пропорційна квадратному кореню з відношення параметра, що характеризує опір середовища деформуванню, до параметра, який характеризує його інерціонність. Під час розгляду гармонічних хвиль для будь-якого моменту часу переміщення є функцією, яка характеризується довжиною хвилі та хвильовим числом. Проте для гармонічних хвиль система є недиспергуючою, тобто фазова швидкість не залежить від хвильового числа. Для існуючих матеріалів, які не є чисто пружними, існує дисипація енергії, фазова швидкість залежить від довжини хвилі та система є диспергуючою. Дисперсія викликає зміни у формі імпульсу під час його руху в диспергуючому середовищі. Під час дослідження процесу розповсюдження гармонічних хвиль знаходиться частотне рівняння, яке зв'язує частоту з відповідною довжиною хвилі [1].

У запропонованій статті вивчається розповсюдження вільних хвиль у нескінченній циліндричній оболонці радіуса **a**, вмурованій в армований композит, який по зовнішньому краю граничить з абсолютно жорстким простором. Товщина оболонки дорівнює **h**, а композит являє собою кінцеве число шарів високомодульних матриць та низькомодульних армуваннь товщиною $\mathbf{h_1}$ та $\mathbf{h_2}$ відповідно, що чергуються між собою. Необхідно визначити резонансні швидкості руху, які знаходяться шляхом аналізу дисперсійних кривих як відповідні мінімуми цих кривих [3].

Рух оболонки описується рівняннями типу Тимошенка з урахуванням поперечного зсуву та інерції обертання [2], при цьому зовнішнє навантаження відсутнє. Рух кожного шару композиту підпорядковується динамічним рівнянням теорії пружності [4], які у векторній формі мають вигляд:

$$(\lambda_k + 2\mu_k)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{\omega}_k + \mu_k\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\overline{\omega}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \overline{\omega}_k}{\partial t^2} \quad , \qquad (1)$$

де

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} k_R + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} k_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x} k_x ; \quad \mathrm{div}\,\overline{\omega} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial (r U_R)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_x}{\partial x},$$

$$\mathrm{rot}\,\overline{\omega} = \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_x}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial x}\right)\cdot k_R + \left(\frac{\partial U_R}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial r}\right)\cdot k_\theta + \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial (r U_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_R}{\partial \theta}\right)\cdot k_x,$$

$$\lambda_k = \frac{2\nu_k G_k}{1-2\nu_k}, \qquad \mu_k = G_k,$$

$\overline{\omega}_k(U_x, U_\theta, U_R)$ - вектор переміщення точок шару матриці чи армування,

k = 1 відповідає шару матриці, k = 2 – шару армування,

λ_k, μ_k - параметри Ламе,

ρ_k, ν_k, G_k - щільність, коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву.

Граничні умови для жорсткого контакту на границі розподілу оболонки з композитом мають вигляд:

$$U_{R1} = W, \quad U_{x1} = U + \chi_x \beta\eta/2, \quad U_{\theta l} = V + \chi_\theta \beta\eta/2, \tag{2}$$

$$\sigma_{RR1} = -q_R, \quad \sigma_{R\theta l} = -q_\theta, \quad \sigma_{Rx1} = -q_x$$

Тут

$$\eta = \xi h/\beta, \quad \beta = h/a,$$

(U, V, W), $(U_{x1}, U_{R1}, U_{\theta l})$ - складові переміщення оболонки та матриці,

(q_x, q_R, q_θ), $(\sigma_{Rx}, \sigma_{RR}, \sigma_{R\theta})$ - складові напруги оболонки та матриці,

χ_x, χ_θ - кути обертання серединної поверхні оболонки.

На границі розподілу шара матриці та армування виконуються умови рівності напруг та переміщень:

$$U_{R1} = U_{R2} \quad U_{x1} = U_{x2} \quad U_{\theta l} = U_{\theta 2} \tag{3}$$

$$\sigma_{RR1} = \sigma_{RR2} \quad \sigma_{Rx1} = \sigma_{Rx2} \quad \sigma_{R\theta l} = \sigma_{R\theta 2}$$

На границі розподілу композиту з простором переміщення композиту приймаються нульовими:

$$U_{R1} = 0 \qquad U_{x1} = 0 \qquad U_{\theta l} = 0 \tag{4}$$

Для інтегрування рівнянь руху композиту запроваджуються потенційні функції за такими формулами:

$$U_R = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \tag{5}$$

$$U_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\theta} - \frac{\partial\chi}{\partial r}$$

$$U_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

Розглядаючи розповсюдження синусоїдних хвиль, розв'язки системи рівнянь Тимошенка та руху композиту будемо шукати у вигляді:

$$\{U, W, \chi_x, q_x, q_R\} = \{U, W, \chi_x, q_x, q_R\} * \mathbf{cos}(m\theta) e^{i(\xi x - pt)} \tag{6}$$

$$\{V, \chi_\theta, q_\theta\} = \{V, \chi_\theta, q_\theta\} * \mathbf{sin}(m\theta) e^{i(\xi x - pt)}$$

$$\{\varphi, \psi\} = \{\varphi, \psi\} * \mathbf{cos}(m\theta) e^{i(\xi x - pt)} \qquad \{\chi\} = \{\chi\} * \mathbf{sin}(m\theta) e^{i(\xi x - pt)}, \tag{7}$$

де $\xi = 2\pi/\lambda_f$, $p = c_f\xi$, λ_f, c_f - довжина та фазова швидкість хвиль.

Підставимо вирази (6) у рівняння руху оболонки, унаслідок отримаємо:

$$-\xi^2\left(1 - \frac{1-\nu}{2\gamma}\rho^*\mu_{S1}^2 + \frac{(1-\nu)m^2}{2\eta^2}\right)U + \frac{1+\nu}{2\eta}m\xi^2 iV + \frac{\nu}{\eta}\xi^2 iW = -\frac{(1-\nu)\xi}{2\gamma\eta\beta}\cdot\frac{q_x}{G_1} \tag{8}$$

$$-\frac{1+\nu}{2\eta}m\xi^2 iU - \xi^2\left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{m^2}{\eta^2} - \frac{1-\nu}{2\gamma}\rho^*\mu_{S1}^2\right)V - \frac{m\xi^2}{\eta^2}\cdot\left(1 + \frac{(1-\nu)k^2}{2}\right)W +$$

$$+\frac{1-\nu}{2\eta}k^2\xi\chi_\theta = -\frac{(1-\nu)\xi}{2\gamma\eta\beta}\cdot\frac{q_\theta}{G_1}$$

$$\frac{\xi^2\nu i}{\eta}U + \frac{m\xi^2}{\eta^2}V + \xi^2\left(\frac{1-\nu}{2}k^2\left(1 + \frac{m^2}{\eta^2}\right) + \frac{1}{\eta^2} - \frac{1-\nu}{2\gamma}\rho^*\mu_{S1}^2\right)W - i\xi k^2\frac{1-\nu}{2}\chi_x -$$

$$-k^2 m\xi\frac{1-\nu}{2\eta}\chi_\theta = -\frac{(1-\nu)\xi}{2\gamma\eta\beta}\cdot\frac{q_R}{G_1}$$

$$6mk^2\xi^3\frac{1-\nu}{\beta^2\eta^3}W-\frac{1+\nu}{2\eta}i\xi^2 m\chi_x-\xi^2\frac{1-\nu}{2}\cdot\left(1+\frac{2m^2}{\eta^2(1-\nu)}+\frac{12k^2}{\eta^2\beta^2}-\frac{\rho^*\mu_{S1}^2}{\gamma}\right)\chi_\theta=-\frac{3(1-\nu)\xi^2}{\gamma\beta^2\eta^2}\cdot\frac{q_\theta}{G_1}$$

Потім у рівняннях (8) виразимо усі невідомі функції через складові тензора переміщення для подальшого виконання граничних умов. Після підстановки виразів (7) у рівняння руху композиту останні набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}-m_{Ri}^2\xi^2\right)\varphi_i=0\\&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}-m_{Si}^2\xi^2\right)\{\psi_i,\chi_i\}=0\quad,\end{aligned}\tag{9}$$

де $m_{Ri}=\sqrt{1-\mu_{pi}^2}$, $m_{Si}=\sqrt{1-\mu_{Si}^2}$, $\mu_{pi}=\frac{c_f}{c_{pi}}$, $c_{pi}^2=\frac{2G_i(1-\nu_i)}{\rho_1(1-2\nu_i)}$.

Загальні розв'язки отриманих звичайних диференціальних рівнянь для потенційних функцій (9) можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned}&\varphi_{mi}(r)=D_{mi}K_m(m_{Ri}r\xi)+E_{mi}I_m(m_{Ri}r\xi)\\&\psi_{mi}(r)=L_{mi}K_m(m_{Si}r\xi)+N_{mi}I_m(m_{Si}r\xi)\\&\chi_{mi}(r)=S_{mi}K_m(m_{Si}r\xi)+P_{mi}I_m(m_{Si}r\xi)\quad,\end{aligned}\tag{10}$$

тут $\mathbf{K_m}$ та $\mathbf{I_m}$ – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду.

Підставимо отримані залежності (8) у вираз для тензора переміщення композиту (5), тензор напруги отримуємо за допомогою закону Гука. Потім, задовольняючи умовам на границі розподілу оболонки та композиту (2), матриці та армування (3), композиту з абсолютно жорстким простором (4), отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних коефіцієнтів $\mathbf{D_{mi}}$, $\mathbf{E_{mi}}$, $\mathbf{L_{mi}}$, $\mathbf{N_{mi}}$, $\mathbf{S_{mi}}$, $\mathbf{P_{mi}}$, яка має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто Det(A)=0, A – матриця системи.

З цієї умови отримаємо відношення між безрозмірною частотою для матриці μ_{S1} та хвильовим числом η, яке є частотним рівнянням. Задаючись конкретним значенням хвильового числа, методом поділу навпіл знаходимо корені частотного рівняння, тобто визначаємо відповідне значення частоти.

Було розглянуто випадки конструкцій, які складаються або з двох матриць та одного армування, або з трьох матриць та двох армуваннь. У першому випадку розмір матриці A складає (13,13), а у другому випадку – (19,19). Визначник знаходився за допомогою прикладної програми на ЕОМ, яка використовує метод з вибіром ведучого елемента.

На рис.1 побудовані нижні моди руху для різних значень **m**, крива 1 відповідає **m**=0, 2 – **m**=3, 3 – **m**=6. На рис. 2 досліджено вплив на нижчу моду руху відносної жорсткості оболонки, крива 1 відповідає γ = 125, 2 - γ = 250, 3 - γ = 500.

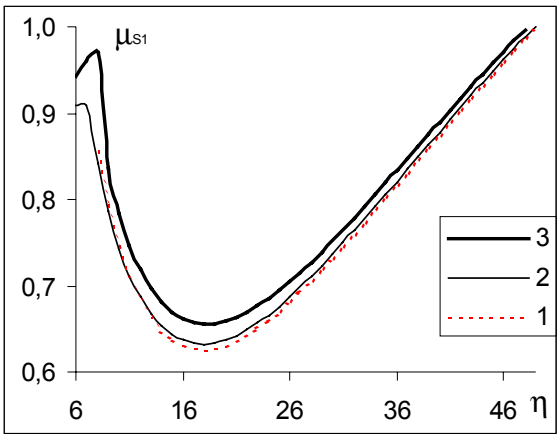

Рис.1

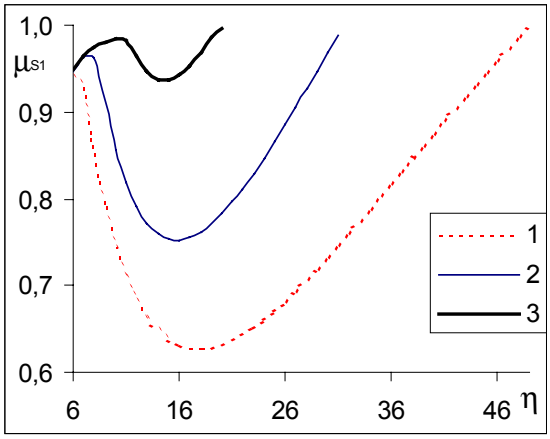

Рис.2

Далі було проведено дослідження нормальної напруги σ_{RR1} та переміщення U_{R1} першого шару матриці під час вільних коливань у товщі шару. Для цього за рахунок однорідності системи алгебраїчних рівнянь було відкинуте останнє рівняння системи та α_0 вважалося рівним одиниці. Розв'язуючи отриману систему неоднорідних лінійних рівнянь методом Гаусса, визначаємо коефіцієнти C_{ij}, D_{ij}. Безрозмірні компоненти переміщення та напруги знаходились шляхом підстановки знайдених коефіцієнтів у відповідні вирази.

ЛІТЕРАТУРА

1. Айнола Л., Нигул У. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭстССР. Серия физ.-мат. и техн. н. –1965. –14. –№1. –С.3-62.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Глухов Ю.П. К определению критических скоростей движения нагрузки по пластине, лежащей на несжимаемом предварительно деформированном полупространстве // Прикл. мех. –1986. –22. – №10. –С.57-62.
4. Горшков А.Г., Пожуев В.И. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1992. – 223с.