УДК 539. 3

# ДІЯ РУХЛИВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПЛАСТИНУ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ДВОХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПРОШАРКІВ

Пожуєв В.І., Бойченко М.В.

Розглядається двошарова пластина (*Рис. 1)* у загальному випадку несиметричного по товщині спорудження, у котрої товщини і механічні характеристики несучих прошарків різноманітні. Товщина пластини і складових її прошарків постійна, а матеріали прошарків мають властивості в'язкопружності. Припускається прослизання прошарків пластини по поверхні контакту, але передбачається, що вони не відстають друг від друга при деформуванні. Пластина є необмеженої і підлягає дії нормального навантаження $p(x, t)$, що не залежить від координати $z$ і рухається з постійною швидкістю $c$ у позитивному напрямку осі $x$. Таке навантаження викликає в пластині плоский деформований стан, при котрому $u_z = 0$, а інші переміщення і напруги є функціями тільки $x$, $y$ і $t$ [1].

Для розв'зку задачі скористаємося принципом Вольтерра відповідності пружної і в'язкопружної задач [2], тобто розв'зок даної задачі одержимо з розв'зку аналогічної задачі теорії пружності, замінюючи пружні постійні $\mu$ і $\lambda$ відповідними комплексними виразами.

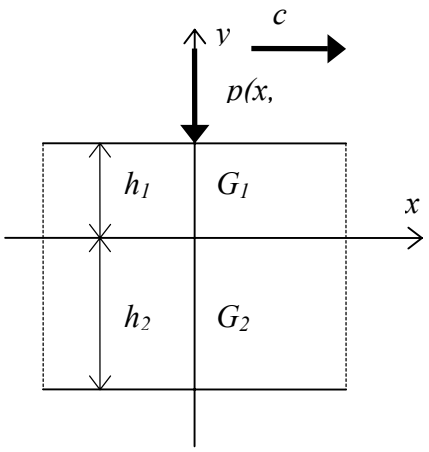



Рис. 1 Двошарова пластина

У випадку ковзного контакту прошарків пластини граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} &y = h_1: \quad \sigma_{yy}^{(1)} = -p(x,t), \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 0; \\ &y = 0: \quad \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \upsilon_1 = \upsilon_2, \\ &\qquad \sigma_{xy}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(2)} = 0; \\ &y = -h_2: \quad u_2 = 0, \quad \upsilon_2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння руху кожного з прошарків пластини запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} = \rho_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \frac{\partial \sigma_{yy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial x} = \rho_k \frac{\partial^2 \upsilon_k}{\partial t^2}, k = 1,2, \tag{2}$$

де $k$ - індекс, що відповідає прошаркам пластини; $u_k$, $\upsilon_k$ - переміщення пластини в напрямках осей $x$ і $y$ відповідно; $\rho_k$ - щільність прошарків пластини.

Залежність між компонентами тензорів напружень і деформацій запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &\sigma_{ii}^{(k)} = \overline{\lambda}_k \varepsilon^{(k)} + 2\overline{G}_k \varepsilon_{ii}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)} = 2\overline{G}_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ &\overline{G}_k = G_k + \gamma_k \frac{\partial}{\partial t}, \overline{\lambda}_k = \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} \overline{G}_k, i,j = x,y; k = 1,2, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\overline{\lambda}_k$, $\overline{G}_k$ - диференціальні оператори в'язкопружності, $\nu_k$ - коефіцієнт Пуассона, $G_k$ - модуль зсуву, $\gamma_k$ - коефіцієнт грузькості.

Для інтегрування рівнянь руху пластини уведемо хвильові потенціали $\varphi(x, y, t)$ і $\psi(x, y, t)$ по формулах

$$u_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \upsilon_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, k = 1, 2. \tag{4}$$

Застосовуючи (4), приходимо до хвильових рівнянь

$$\frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k}\left(G_k+\gamma_k\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\varphi_k=\rho_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t^2},\quad \left(G_k+\gamma_k\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\psi_k=\rho_k\frac{\partial^2\psi_k}{\partial t^2},\quad k=1,2\,. \quad (5)$$

Перейдемо в (1) - (5) до рухливої системи координат $\eta=\dfrac{(x-ct)}{H},\quad y'=\dfrac{y}{H}.$

Тоді з перетворених хвильових рівнянь (5) отримаємо

$$c_{pk}^2\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y'^2}+(c_{pk}^2-c^2)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\eta^2}=0,\quad c_{sk}^2\frac{\partial^2\psi_k}{\partial y'^2}+(c_{sk}^2-c^2)\frac{\partial^2\psi_k}{\partial\eta^2}=0,\quad k=1,2 \qquad (6)$$

де $c_{pk}$ , $c_{sk}$ - швидкості поширення хвиль розтягу-стиску і зсуву в кожному з прошарків пластини

$$c_{pk}^2=\frac{2G_k(1-\nu_k)}{\rho_k(1-2\nu_k)},\quad c_{sk}^2=\frac{G_k}{\rho_k},\quad k=1,2.$$

Застосовуючи до (6) комплексне інтегральне перетворення Фур'є за змінною $\eta$ [3], дістаємо видозмінені хвильові рівняння

$$\frac{\partial^2\varphi_k^0}{\partial y'^2}-\xi^2\left(1-\frac{c^2}{c_{pk}^2}\right)\varphi_k^0=0,\quad \frac{\partial^2\psi_k^0}{\partial y'^2}-\xi^2\left(1-\frac{c^2}{c_{sk}^2}\right)\psi_k^0=0,\quad k=1,2\,. \qquad (7)$$

Розв’зок системи (7) однорідних диференціальних рівнянь із комплексними коефіцієнтами будемо шукати у вигляді

$$\varphi_k^0=A_ke^{m_{pk}\xi y'}+B_ke^{-m_{pk}\xi y'},\quad \psi_k^0=C_ke^{m_{sk}\xi y'}+D_ke^{-m_{sk}\xi y'},\quad k=1,2, \qquad (8)$$

де $$m_{pk}=\sqrt{1-M_{pk}^2}\,,\ m_{sk}=\sqrt{1-M_{sk}^2}\,,\ M_{pk}^2=\frac{c^2}{c_{pk}^2},\ M_{sk}^2=\frac{c^2}{c_{sk}^2},\quad k=1,2.$$

Застосовуючи перетворення Фур'є, одержимо вирази компонент переміщення

$$\begin{aligned}u_k^0&=i\xi\left(A_ke^{m_{pk}\xi y'}+B_ke^{-m_{pk}\xi y'}\right)-m_{sk}\xi\left(C_ke^{m_{sk}\xi y'}-D_ke^{-m_{sk}\xi y'}\right),\\ \upsilon_k^0&=m_{pk}\xi\left(A_ke^{m_{pk}\xi y'}-B_ke^{-m_{pk}\xi y'}\right)+i\xi\left(C_ke^{m_{sk}\xi y'}+D_ke^{-m_{sk}\xi y'}\right),\quad k=1,2\,.\end{aligned} \qquad (9)$$

Компоненти напруження при цьому виражаються за допомогою (3) очевидним образом.

Підставляючи вирази компонент переміщення, напруження в перетворені граничні умови (1), одержуємо систему алгебраїчних рівнянь із комплексними коефіцієнтами для визначення постійних $A_k$ , $B_k$ , $C_k$ , $D_k$ , $k=1,2$ , розв’зок якої можна записати у вигляді

$$\{A_k,B_k,C_k,D_k\}=-\frac{p^0(\xi)}{\det\|a_{ij}\|}\{\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4,-i\Delta_5,-i\Delta_6,-i\Delta_7,-i\Delta_8\},\quad k=1,2, \qquad (10)$$

де $\Delta_l$ - визначники, що утворюються з $\det\|a_{ij}\|$ при заміні *l*- го стовпчика стовпчиком з елементами *{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}*.

Як приклад розглянутий випадок, коли в початковий момент часу до пластини прикладається зосереджене лінійне навантаження, що переміщається потім у позитивному напрямку осі *x* із постійною швидкістю *c*. Для такого навантаження $p(x, t) = p_0\delta(x - ct)$. Переходячи до рухливої системи координат і застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є, одержуємо $p^0(\xi) = p_0$. Розрахунки проведені для таких значень безрозмірних параметрів $\chi = 0.10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma^* = 0.001$, $\rho^* = \rho_1 / \rho_2 = 1.44$, $G^* = G_1 / G_2 = 10.0 + i$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $c_{s1} = 1$, $p_0 = 1$, $c = 0.5$. Знайдені за допомогою комп'ютера коефіцієнти $A_k$ , $B_k$ , $C_k$ , $D_k$ , $k=1,2$ підставляємо у вирази компонент переміщення і напружень. Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, остаточний розв’зок одержуємо у вигляді невласних інтегралів із комплексними підінтегральними виразами. Інтеграли обертання не є особливими і їх значіння знаходяться чисельно.

Побудовано картини розподілу безрозмірних прогинів $u_1^*, \upsilon_1^*$ верхнього несучого прошарку *(Рис. 2, Рис. 3).* Для кривої ***1*** *- y' = 0.99;* ***2*** *- y' = 0.85;* ***3*** *- y' = 0.3. Рис. 4* ілюструє розподіл напружень $\sigma_{yy}^{1}$* (зміст індексів ***1 - 3*** той самий, що і на *Рис. 2, Рис. 3)*. На *Рис. 5* побудовані переміщення $\upsilon_1$* верхнього несучого прошарку при фіксованих $\eta$. Для кривої ***1*** *-* $\eta = 0.0$*;* ***2*** *-* $\eta = 0.3$*;* ***3*** *-* $\eta = 0.5$.

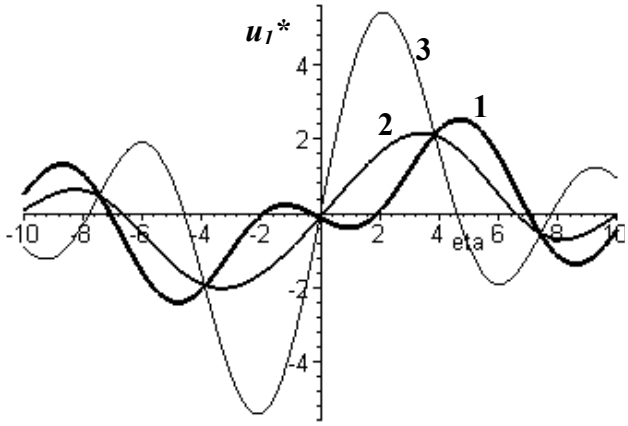



Рис. 2 Графік u1*(η)

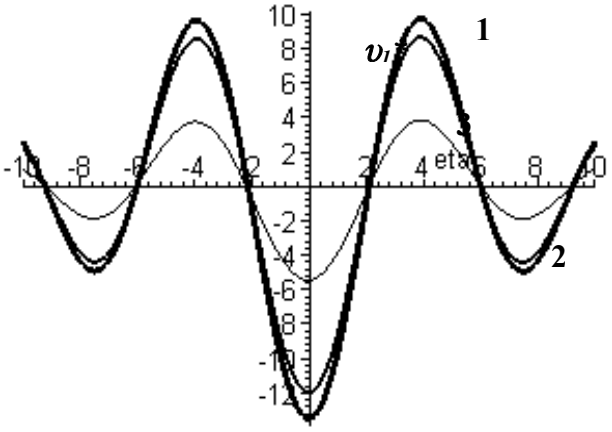



Рис. 3 Графік υ1*(η)

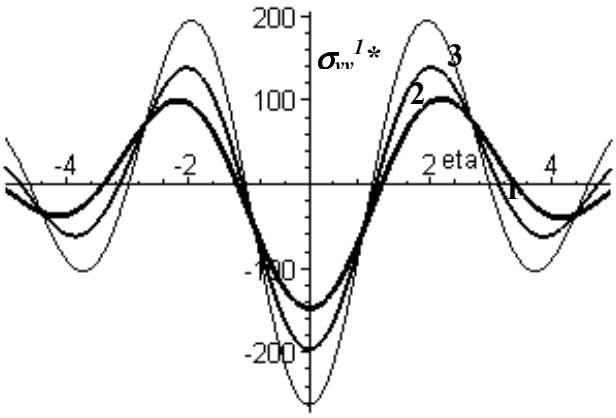



Рис. 4 Графік$\sigma_{yy}^{1}$*(η)

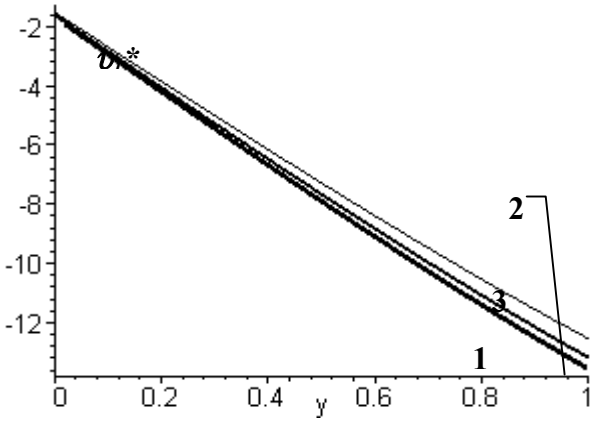



Рис. 5 Графік $\upsilon_1$*(y)

## ЛІТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Пожуєв В. І. Стаціонарні задачі динаміки багатошарових конструкцій.- М.: Машинобудування, 92.- 224 с.
2. Савін Г. Н., Рушицький Я. Я. Елементи механіки спадкових середовищ.- К.: Вища школа, 76.- 252 с.
3. Пожуєв В. І. Стаціонарна реакція системи циліндрична оболонка - в'язкопружний заповнювач на дію рухливого навантаження.// Прикладна механіка №5. 86.- С. 27 - 34