УДК 539.3

ДИНАМІКА РЕБРИСТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ ЗОВНІШНІМ АМОРТИЗУЮЧИМ ШАРОМ

Пожуєв А.В.

Розглянемо нескінченно довгу циліндричну оболонку, підкріплену з внутрішньої поверхні кінцевим числом кільцевих ребер жорсткості. Із зовнішнього боку оболонки розташований пружний інерційний шар скінченної товщини, який по зовнішній межі приймається вільним від напруг. Задача розглядається в нестаціонарній постановці, початкові умови приймаються нульовими. У початковий момент часу до всіх ребер або до частини з них прикладені нормальні самоврівноважені навантаження, поза ребрами навантаження відсутні (рис.1). Враховується дискретність розташування ребер шляхом запису для них рівнянь руху балок з послідуючим задоволенням умовам зістикування. Контакт на межі розподілу шару та оболонки, а також оболонки та ребер, приймається ковзкий.

Рух оболонки підпорядковується рівнянням типу Тимошенка [1], рух амортизатора описується динамічними рівняннями теорії пружності. Для опису руху кожного ребра використовується пара рівнянь вигляду [4]:

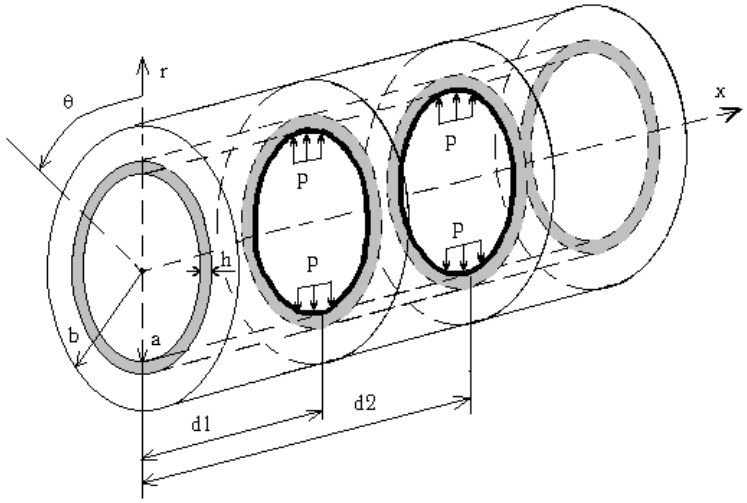


Рис.1

$$\begin{aligned}
&\frac{E_{\delta k}F_k}{r}\cdot\left(\frac{\partial^2 V_{\delta k}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial W_{\delta k}}{\partial\theta}\right)+\frac{E_{\delta k}I_k}{r^3}\cdot\left(\frac{\partial^2 V_{\delta k}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^3 W_{\delta k}}{\partial\theta^3}\right)-r\rho_{\delta k}F_k\cdot\frac{\partial^2 V_{\delta k}}{\partial t^2}=0\\
&\frac{E_{\delta k}F_k}{r}\cdot\left(\frac{\partial V_{\delta k}}{\partial\theta}+W_{\delta k}\right)-\frac{E_{\delta k}I_k}{r^3}\cdot\left(\frac{\partial^3 V_{\delta k}}{\partial\theta^3}-\frac{\partial^4 W_{\delta k}}{\partial\theta^4}\right)+r\rho_{\delta k}F_k\cdot\frac{\partial^2 W_{\delta k}}{\partial t^2}=q_{0k}-p_{\delta k}
\end{aligned}\qquad (1)$$

Умови на межі розподілу ребер та оболонки мають вигляд:

а) у місцях контакту ($\mathbf{x} = \mathbf{d_k}$) нормальне переміщення ребра дорівнює переміщенню оболонки:

$$W(x=d_k)=W_{\delta k}\qquad (k=1,...,L)\qquad (2)$$

б) зовнішнє навантаження на оболонку дорівнює добутку тисків, що передаються через кожне ребро:

$$P(x,\theta,t)=\sum_{k=1}^{L}q_{0k}(\theta,t)\cdot\delta(x-d_k)\qquad (3)$$

Після переходу до безрозмірних змінних застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом, комплексне перетворення Фур'є за довжиною та розкладемо усі функції в ряди Фур'є за кутом. Остаточно в просторі зображень рівняння руху оболонки приймуть вигляд:

$$\left(\xi^2+m^2\cdot\frac{1-\nu}{2}+\rho^*p^2\cdot\frac{1-\nu}{2\gamma}\right)\cdot U_m+i\xi m\cdot\frac{1+\nu}{2}\cdot V_m+i\xi\nu W_m=0 \qquad (4)$$

$$i\xi m\cdot\frac{1+\nu}{2}\cdot U_m-\left(\xi^2\cdot\frac{1-\nu}{2}+m^2+\rho^*p^2\cdot\frac{1-\nu}{2\gamma}\right)\cdot V_m-m\cdot\left(1+k^2\cdot\frac{(1-\nu)}{2}\right)\cdot W_m+k^2\cdot\frac{1-\nu}{2}\cdot\chi_{\theta m}=0$$

$$i\xi\nu U^*-mV^*-\left(\frac{1-\nu}{2}\cdot\left(k^2\left(\xi^2+m^2\right)+\frac{\rho^*p^2}{\gamma}\right)+1\right)\cdot W_m-\frac{1-\nu}{2}k^2\cdot\left(i\xi\chi_{xm}-m\chi_{\theta m}\right)=\frac{1-\nu}{2\gamma\beta_1}\cdot\frac{q_{rm}-P_m}{G_c}$$

$$6i\xi k^2\cdot\frac{1-\nu}{\beta_1^2}\cdot W_m-i\xi m\cdot\frac{1+\nu}{2}\cdot\chi_{\theta m}-\left(\xi^2+\frac{1-\nu}{2}\cdot\left(m^2+\frac{12k^2}{\beta_1^2}+\frac{\rho^*p^2}{\gamma}\right)\right)\cdot\chi_{xm}=0$$

$$6mk^2\cdot\frac{1-\nu}{\beta_1^2}\cdot W_m+i\xi m\cdot\frac{1+\nu}{2}\cdot\chi_{xm}-\left(\frac{1-\nu}{2}\cdot\left(\xi^2+\frac{12k^2}{\beta_1^2}+\frac{\rho_*p^2}{\gamma}\right)+m^2\right)\cdot\chi_{\theta m}=0$$

Для інтегрування рівнянь руху шару вводяться потенційні функції. Переміщення шару, виражені через потенційні функції, набудуть такого вигляду:

$$W_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial X}{\partial\theta}\qquad W_\theta=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial\theta}-\frac{\partial X}{\partial r}$$
$$W_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$

Напруги у шарі через потенційні функції знаходяться за допомогою закона Гука. Застосуємо до динамічних рівнянь руху шару перетворення, аналогічні оболонці. Унаслідок отримаємо хвильові рівняння, розв'язки яких мають вигляд:

$$\Phi_m=A_mK_m\left(m_Rr^*\right)+B_mI_m\left(m_Rr^*\right),\qquad \Psi_m=C_mK_m\left(m_Sr^*\right)+D_mI_m\left(m_Sr^*\right),$$
$$X_m=E_mK_m\left(m_Sr^*\right)+S_mI_m\left(m_Sr^*\right),\qquad m_R=\sqrt{\xi^2+\lambda^2p^2},\qquad m_S=\sqrt{\xi^2+p^2}, \qquad (6)$$

де $I_m(x)$, $K_m(x)$ - функції Бесселя від уявного аргументу першого та другого роду [2].

Підставляємо отримані розв'язки (6) до компонент переміщення через потенційні функції (5) та компонент напруги. Задовольняючи потім граничним умовам, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, у праву частину якої входить невідома реакція з боку ребер. Для знаходження розв'язку системи методом Гауса застосовуємо заміну невідомих, виключаючи невідому реакцію. Підставляючи знайдені коефіцієнти у вирази для компонент тензора переміщення та напруги, визначаємо напружено-деформований стан системи в просторі зображень, який залежить від невідомого тиску, що передається на оболонку від балок. Вирази для нормального переміщення та напруги набудуть такого вигляду:

$$W_{rm}=T_1\cdot\frac{P_m}{G_c}\qquad\qquad \sigma_{rrm}=T_2\cdot P_m\quad, \qquad (7)$$

де $$T_1=\left[\frac{m}{r^*}s_{13}-m_R\xi s_{14}\right]\cdot A_m^*+\left[\frac{m}{r^*}s_{15}+m_R\xi s_{16}\right]\cdot B_m^*+\xi\cdot\left[\frac{m}{r^*}s_{17}-m_S\xi s_{18}\right]\cdot C_m^*+$$
$$+\xi\cdot\left[\frac{m}{r^*}s_{19}+m_S\xi s_{20}\right]\cdot D_m^*+\frac{m}{r^*}\cdot s_{17}\cdot E_m^*+\frac{m}{r^*}\cdot s_{19}\cdot S_m^*$$

$$T_2=\left[\left(\frac{2m\cdot(m-1)}{(r^*)^2}+\xi^2\cdot\left(1+m_S^2\right)\right)\cdot s_{13}+\frac{2m_R\xi}{r^*}\cdot s_{14}\right]\cdot A_m^*+$$

$$+\left[\left(\frac{2m\cdot(m-1)}{(r^*)^2}+\xi^2\cdot\left(1+m_S^2\right)\right)\cdot s_{15}-\frac{2m_R\xi}{r^*}\cdot s_{16}\right]\cdot B_m^*+$$

$$+2\xi\cdot\left[\left(\frac{m\cdot(m-1)}{(r^*)^2}+\xi^2 m_S^2\right)\cdot s_{17}+\frac{m_S\xi}{r^*}\cdot s_{18}\right]\cdot C_m^*+2\xi\cdot\left[\left(\frac{m\cdot(m-1)}{(r^*)^2}+\xi^2 m_S^2\right)\cdot s_{19}-\frac{m_S\xi}{r^*}\cdot s_{20}\right]\cdot D_m^*+$$

$$+\frac{2m}{r^*}\cdot\left[\frac{m-1}{r^*}\cdot s_{17}-m_S\xi s_{18}\right]\cdot E_m+\frac{2m}{r^*}\cdot\left[\frac{m-1}{r^*}\cdot s_{19}+m_S\xi s_{20}\right]\cdot S_m$$

$$s_{13}=\frac{K_m(m_R r^*)}{K_{m+1}(m_R\beta_2)} \qquad s_{14}=\frac{K_{m+1}(m_R r^*)}{K_{m+1}(m_R\beta_2)} \qquad s_{15}=\frac{I_m(m_R r^*)}{I_m(m_R)} \qquad s_{16}=\frac{I_{m+1}(m_R r^*)}{I_m(m_R)}$$

Для знаходження остаточного розв'язку необхідно визначити навантаження, що передається з боку ребер на оболонку. Перейдемо в рівняннях руху ребер (1) та граничних умовах (2) – (3) до безрозмірних змінних, застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом та розкладемо усі змінні в ряд Фур'є за кутовою координатою. Потім підставимо до виразу для нормального переміщення з формул (7) другу граничну умову для балок (3). До отриманого виразу застосуємо зворотне перетворення Фур'є. Унаслідок отримаємо такий вираз:

$$W_m=\frac{q_{01m}}{G_c}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}T_1 b_n^1\sin(\phi x^*)+\ldots+\frac{q_{0km}}{G_c}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}T_1 b_n^k\sin(\phi x^*)\ , \qquad (8)$$

де b_n^k - коефіцієнти розкладу функції Дірака до ряду Фур'є.

З перетвореної системи (1) знаходимо компоненти нормального переміщення балок. Задовольняючи потім першій умові стикування балок та оболонки (2), отримуємо систему L рівнянь, з яких знаходяться компоненти напруги, які передаються з ребер на оболонку, виражені через зовнішні навантаження на кожне ребро. Як приклад розглянуто випадок чотирьох однакових ребер жорсткості, до частини з яких прикладені рівномірно розподілені по смузі симетричні навантаження. Аналітичний вигляд таких навантажень наведено нижче:

$$p_{\delta k}(x,\theta,t)=p_0\delta(x-x_k)H(t)h(\theta), \qquad (9)$$

де $\delta(x-x_k)$ - дельта-функція Дірака, **H(t)** – функція Хевісайда, $\mathbf{x_k}$ – відстань до k-го ребра,

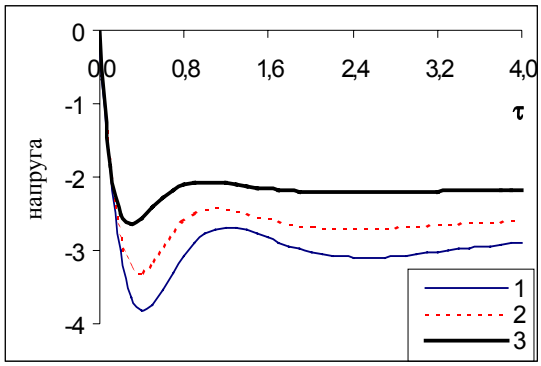
$$h(\theta)=\begin{cases}1, & |\theta|\le\varphi_k \quad \text{чи} \quad |\theta-\pi|\le\varphi_k\\ 0, & \text{у інших випадках}\end{cases}, \qquad \varphi_k \text{ - ширина навантаження по } \theta .$$

Після знаходження компонент напруги, підставимо їх до граничної умови (3), а потім і до виразів (7). Для знаходження остаточного вигляду виразів для компонент тензорів переміщення та напруги необхідно знайти добуток рядів Фур'є та застосувати зворотне перетворення Фур'є. Формула для нормального переміщення набуде вигляду:

$$W_r^L=\sum_{m=0}^{\infty}p_\delta\left(\frac{q_{\delta 1}^*}{G_c}\int_0^{+\infty}\frac{T_1}{\pi}\cos\xi\left(x^*+\frac{3d^*}{2}\right)d\xi+\ldots+\frac{q_{\delta 4}^*}{G_c}\int_0^{+\infty}\frac{T_1}{\pi}\cos\xi\left(x^*-\frac{3d^*}{2}\right)d\xi\right)\cos(m\theta) \qquad (10)$$

Для переходу до простору оригіналів також необхідно було виконати зворотне перетворення Лапласа за змінною **p**. Запропоновано чисельний алгоритм із застосуванням методу Файлона для знаходження інтегралів зворотного перетворення Фур'є та зміщених многочленів Лежандра для обернення перетворення Лапласа [3].

Під час чисельних експериментів досягнута відносна точність 3 % для всіх невідомих, а також визначена необхідна кількість членів ряду Фур'є, крок та верхня межа для знаходження нескінченних інтегралів. На рис.2 побудована картина установлення процесу для різних значень відносної жорсткості в точці під центром навантаження на границі оболонки та шару. При цьому крива 1 відповідає випадку $\gamma=62.5$, 2 – $\gamma=125$, 3 – $\gamma=250$. На рис. 3 показано розподілення напруг за осьовою координатою для різного числа навантажених ребер ($\gamma=125$).



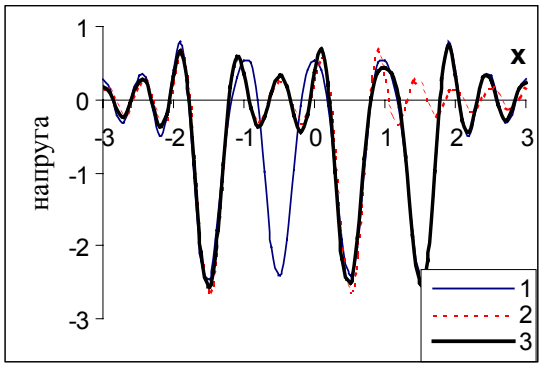


Рис.

Рис.3

ЛІТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. –М.: Наука, 1972. –432с.
2. Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и математике: Пер. с англ. –М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1953. –371с.
3. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. –М.: Наука, 1974. –223с.
4. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. –Л.: Судостроение, 1972. –374с.