УДК 519.1 : 513.19

РОЛЬ ІНДУКТИВНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНОГО ГРАФУ В ОЦІНЦІ ЙОГО ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Перепелиця В.О., Сергєєва Л.Н., Позднякова А.Ю.

При моделюванні нелінійних систем, у тому числі економічних, виникає необхідність адекватного опису їхньої складної структури. Якщо досліджувана система складається з великого числа складних взаємодіючих між собою частин, і поведінка системи істотно залежить від структури зв'язків між цими частинами, то необхідно враховувати цю взаємодію при побудові моделі. Таким моделям (об'єктам) властивий особливий вид хаосу, зв'язаний із неможливістю (або складністю) точного опису всіх існуючих зв'язків у кожний момент часу. Такий хаос ми будемо називати **структурним**.

Як засіб моделювання структурного хаосу пропонується використовувати **фрактальний граф** [1,2].

1. ІНДУКТИВНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНОГО ГРАФУ

Фрактальний граф, як і усі фрактали, є асимптотичним геометричним об'єктом, тобто виконавши скінченне число кроків побудови, ми одержуємо передфрактальний граф, а при збіганні числа кроків до нескінченності одержуємо власне фрактальний граф. Побудову передфрактального графу можна визначати дедуктивно та індуктивно. Введемо індуктивне визначення передфрактального і фрактального графів.

Нехай $G=(V,E)$ - граф (скінченний або нескінченний), де V - множина вершин графу, а E - множина його ребер. Терміном "ініціатор" будемо називати зв'язний n-вершинний граф $H=(W,Q)$, вершини якого в разі потреби можуть бути пофарбовані.

Як утворююче правило введемо операцію “заміщення вершини ініціатором” (ЗВІ). Суть цієї операції полягає в тому, що:

1. У даному графі $G=(V,E)$ виберемо вершину $v_0 \in V$ і виділимо її оточення, тобто множину усіх вершин u, суміжних із вершиною v_0. Позначимо цю множину U_0: $u \in U_0$. Множину усіх ребер, інцидентних вершині v_0, позначимо $R_0=\{e=(v_0,u): u \in U_0\}$.

2. З множини вершин V видалимо вершину v_0 і додамо множину вершин ініціатора W.

3. З множини ребер E видалимо множину R_0 і додамо множину $R=\{e=(w,u): w \in W, u \in U_0\}$, обумовлену деяким взаємно однозначним відображенням $\varphi: R_0 \to R$ (тобто кожне ребро з R_0 заміщається ребром, що з'єднує вершину $u \in U_0$ зі «старого» ребра з деякою вершиною ініціатора), крім того додамо ребра ініціатора Q.

У такий спосіб ЗВІ може бути подане як відображення $G=(V,E) \to G^*(V/v_0 \cup W, E/R_0 \cup R \cup Q)$. При цьому у вихідному графі були пронумеровані (пофарбовані, зважені) вершини і ребра. У графі G^* вершини і ребра, що не змінилися, зберігають свої номери (ваги, фарбування), номер v_0 вершини переходить до однієї з вершин ініціатора, інші нові вершини нумеруються з урахуванням уже наявних номерів вершин вихідного графу, ребра з R одержують номери віддалених ребер із R_0, нові ребра (ребра ініціатора) нумеруються аналогічно новим вершинам.

Визначимо поетапний процес побудови фрактального графу.

На етапі $s=1$ у заданому ініціаторі $H=(W,Q)$ нумеруємо вершини і ребра, отриманий граф позначимо через $G^{(1)}=(V^{(1)},E^{(1)})$ і назвемо передфракталом першого покоління.

Нехай виконані етапи $s = 1,2,...,l$ й отриманий передфрактальний граф l-го покоління $G^{(l)} = (V^{(l)}, E^{(l)})$. На етапі $s = l+1$ до кожної вершини $v \in V^{(l)}$ застосовується операція ЗВІ, у результаті чого утворюється граф $G^{(l+1)} = (V^{(l+1)}, E^{(l+1)})$ - передфрактал $l+1$-го покоління. При виконанні нескінченного числа етапів одержуємо фрактальний граф.

Передфрактальний граф $G^{(l)} = (V^{(l)}, E^{(l)})$ умовимося називати (n,q,l)-графом, якщо в його n-вершинному ініціаторі $H = (W, Q)$ множина Q складається з $q = |Q| \le \frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Якщо ініціатор є повним n-вершинним графом, то передфрактальний граф $G^{(l)} = (V^{(l)}, E^{(l)})$ будемо називати (n,l)-графом (повним передфрактальним графом). Параметр l будемо називати рангом графу.

Розглянемо пару послідовних графів $G^{(l)} = (V^{(l)}, E^{(l)})$ і $G^{(l-1)} = (V^{(l-1)}, E^{(l-1)})$. Для $\forall l$ терміном «множина ребер l-того рангу» назвемо множину ребер $R^{(l)} = E^{(l)} \setminus E^{(l-1)}$, елемент $e \in R^{(l)}$ назвемо ребром рангу l. Вершиною l-того рангу будемо називати вершину, якщо мінімальний із рангів інцидентних ребер дорівнює l. Множина усіх вершин графу $G^{(l)} = (V^{(l)}, E^{(l)})$ у такий спосіб розбивається на l непорожніх множин «вершин l-го рангу», що не перетинаються.

Зважування фрактального (передфрактального) графу припускає приписування ваг $\omega(e) > 0$ ребрам відповідно до їхнього рангу. Так, якщо на першому кроці ($l = 1$) приймаються ваги $\omega(e) \in [a,b]$ (a,b – деякі задані числа, $b \ge a$), то на кроці $l \ge 2$ ребрам l-того рангу приписуються числа $\omega(e) \in [\gamma^{l-1}a, \gamma^{l-1}b]$, де $\gamma \le 1$ - коефіцієнт масштабування.

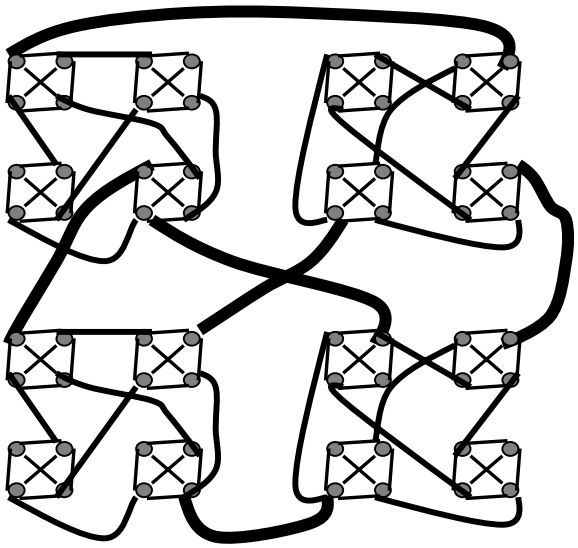


Рис.1

На рис. 1 поданий (4,3)-граф (ініціатор – повний 4- вершинний граф, виконано 3 етапи побудови).

2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕДФРАКТАЛЬНОГО І ФРАКТАЛЬНОГО ГРАФІВ

Нехай $G = (V, E)$ є n-вершинний зв'язний граф [3]. Довжина найкоротшого ланцюга (кількість ребер), що з'єднує пари вершин $v, w \in V$, називається відстанню між вершинами v і w, і позначається через $\rho(v,w)$. Для фіксованої вершини $v \in V$ величина $\varepsilon(v) = \max_{w \in V} \rho(v,w)$ називається ексцентриситетом вершини $v \in V$.

Максимальний серед усіх ексцентриситетів вершин графу $G=(V,E)$ називається діаметром графу G і позначається через $d(G)$, тобто $d(G)=\max\limits_{v\in V}\varepsilon(v)$. Якщо пара вершин $v,w\in V$ з'єднується найкоротшим ланцюгом довжини $\rho(v,w)=d(G)$, то цей ланцюг називається діаметральним.

Радіус графу G позначається через $r(G)$ і обчислюється по формулі $r(G)=\min\limits_{v\in V}\varepsilon(v)$. Вершина, на якій досягається зазначений мінімум, називається центром графу.

Для кожної вершини $v\in V$ число інцидентних їй ребер називається ступенем вершини і позначається $\deg v$. Висячій вершиною називається вершина, ступінь якої дорівнює 1. Важливою характеристикою графу $G=(V,E)$ є число висячих вершин, що будемо позначати $t(G)$.

Оскільки ми розглядаємо фрактальний граф, то для його характеристики недостатньо класичних показників, необхідно використовувати показники, властиві фрактальним об'єктам [4]. Основоположник теорії фракталів – Бенуа Мандельброт – увів два визначення фрактальних об'єктів.

Фрактал – це множина точок, вимірність Хаусдорфа-Безиковича котрої строго більше її топологічної вимірності.

Фрактал – це структура, що складається з частин, що у якомусь змісті подібні цілому (самоподібність).

Вимірність Хаусдорфа-Безиковича визначається в такий спосіб. Нехай є мірка δ^d, і ми цією міркою намагаємося виміряти міру якогось об'єкта. Тоді міра буде дорівнювати

$$M(d)=\sum\gamma(d)\delta^d=\gamma(d)N(\delta)\delta^d\xrightarrow[\delta\to 0]{}\begin{cases}0 & d<D\\ \infty & d>D\end{cases},$$

де $\gamma(d)$ - це стала, обумовлена формою об'єкта, геометричний коефіцієнт (для прямих, площин, кубів $\gamma=1$, для кіл $\gamma=\frac{\pi}{4}$, для сфер $\gamma=\frac{\pi}{6}$). Значення M_d при рості d змінюється стрибкоподібно. Значення D, при якому відбувається зміна міри з ∞ на 0, називається вимірністю Хаусдорфа-Безиковича або фрактальною вимірністю.

Ключовим у другому визначенні фрактала є поняття самоподібності. Обмежена фрактальна множина точок G самоподібна з відношенням подібності r, $r<1$, якщо G є об'єднанням N підмножин $G_1,G_2,...,G_N$, що не перетинаються , кожне з котрих конгруентно множині $r(G)$, яка одержувана з G перетворенням подібності з коефіцієнтом r, тобто $G=\bigcup\limits_{i=1}^{N}G_i$. Для відрізка прямої $r(N)=\frac{1}{N}$, для прямокутника $r(N)=\frac{1}{N^{1/2}}$, для паралелепіпеда $r(N)=\frac{1}{N^{1/3}}$.

Припустимо, що масштабний множник $r(N)=\frac{1}{N^{1/d}}$. Для того, щоб покрити об'єкт зменшеними копіями, нам буде потрібно N таких копій. Множник d у показнику ступеня N є вимірністю подібності:

$$D_s=-\frac{\ln N}{\ln r}\ .$$

Для самоподібних фракталів вимірність подібності збігається з вимірністю Хаусдорфа-Безиковича.

3. ОЦІНКИ ДІАМЕТРА І РАДІУСА (n,l)-ГРАФУ

У процесі обгрунтування оцінок числових характеристик передфрактальних і фрактальних графів ми будемо обпиратися на індуктивну процедуру побудови цих графів, введену в пункті 1.

Зауваження. Для будь-якого повного графу $G=(V,E)$ вірно:

$$\forall v\in V:\varepsilon(v)=d(G)=r(G)=1\ .$$

Дотепер отримані нижня і верхня оцінки діаметра (n,l)-графу: $2l-1 \le d\left(G^{(l)}\right) \le 2^l - 1$ [5]. З погляду застосування фрактальних і передфрактальних графів до моделювання дискретних оптимізаційних задач першочерговий інтерес представляють крайні – мінімальні і максимальні – оцінки числових характеристик графів. У даній роботі нас будуть цікавити наступні питання:

1) від чого залежить розмір радіуса і діаметра конкретного графу;

2) які нижня і верхня оцінки радіуса (n,l)-графу;

3) як будувати графи з екстремальними (максимальною і мінімальною) оцінками радіуса і діаметра.

Для відповіді на ці питання розглянемо процедуру побудови (n,l)-графу при $n=4$.

На першому етапі $G^{(1)} = H$ і радіус визначається однозначно $r\left(G^{(1)}\right) = 1$.

На другому етапі довільно обрана вершина $v_0 \in V^{(1)}$ підлягає процедурі ЗВІ. При цьому в загальному випадку можна вважати, що відображення $\varphi: R_0 \to R$ при приєднанні ребра з R вибирає вершину ініціатора випадково з рівною імовірністю $1/n = 1/4$. У результаті виконання ЗВІ можуть відбутися наступні події:

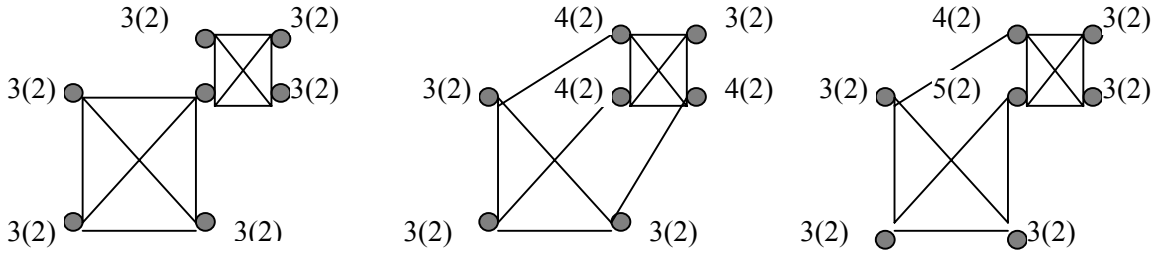
1) усі три ($n-1$) ребра з R приєднуються до однієї вершини ініціатора;

2) усі три ($n-1$) ребра з R приєднуються до різних вершин ініціатора;

3) два ребра з R приєднуються до однієї вершини ініціатора, а останнє - до іншої.

Усі три випадки подані на рис. 2. Біля кожної вершини проставлені її ступінь і ексцентриситет (у дужках).

На рисунках наочно видно, що «кандидатом» на центр графу є вершини з максимальним ступенем, що



випадок 1 $r=1,\ d=2$ | випадок $r=2,\ d=2$ | випадок $r=2,\ d=2$

Рис.2

дозволяє надалі виключати з розгляду вершини немаксимального ступеня.

Продовжуючи етап 2, застосуємо операцію ЗВІ до наступної вершини вихідного графу $G^{(1)}$. При цьому знову можливі перераховані три події, що приведе до появи дев'ятьох ($(n-1)(n-1)$) типів графів, поданих на рис.3.

Користуючись симетричністю ініціатора, можна виявити, що випадки 1-2 і 2-1, 1-3 і 3-1, 2-3 і 3-2 приводять до побудови ізоморфних графів. Тому на наступному кроці (заміщення 3-й вершини ініціатора) можна розглядати 6 графів. Серед отриманих на цьому кроці 18 графів знову є ізоморфними, з них можна виділити 10 графів, серед котрих немає ізоморфних. Таким чином, виконавши 4 операції ЗВІ, одержуємо 15 різновидів графів. Для 10 графів, у котрих хоча б одна з операцій ЗВІ збіглася з випадком 1, $r=2$ і $d=3$. В інших 5 графів - $r=3$ і $d=3$.

Аналогічні побудови були виконані у випадку 3-вершинного повного ініціатора. Проведений аналіз дозволяє зробити висновок, що значення радіуса і діаметра отриманих графів залежать від виду відображення $\varphi : R_0 \to R$, а також сформулювати такі результати.

Теорема 1 (про нижню оцінку радіуса (n,l)-графу). Для повного передфрактального графу $G^{(l)} = (V^{(l)}, E^{(l)})$ ((n,l) -графу) нижньою оцінкою радіуса є $r\left(G^{(l)}\right) \geq l$. Ця оцінка є досяжною.

Доведення. Доведення проводимо по індукції за числом етапів побудови (n,l)-графу.

$k = 1$. На першому етапі $r\left(G^{(1)}\right) = r(H) = 1$.

Нехай виконано k етапів побудови і серед отриманих графів є граф із радіусом $r\left(G^{(k)}\right) = k$. На $k+1$ етапі при виконанні операції ЗВІ будемо приєднувати усі «старі» ребра із R_0 до однієї довільної вершини ініціатора. При цьому ексцентриситет «старих» вершин збільшиться на одиницю, а ексцентриситет «нових» буде не менше, ніж мінімальний із ексцентриситетів «старих» вершин, бо для того, щоб побудувати ланцюг від «нової» вершини до будь-якої іншої вершини, необхідно «пройти» по «новому» ребру приєднаного ініціатора до єдиної в цьому ініціаторі «старої» вершини. Таким чином, мінімальний ексцентриситет, а значить і радіус у побудованому в такий спосіб графі $G^{(k+1)}$ збільшиться на одиницю, тобто $r\left(G^{(k+1)}\right) = r\left(G^{(k)}\right) + 1 = k+1$. Теорема доведена.

Лема. Існує таке відображення $\varphi : R_0 \to R$, що ексцентриситет усіх вершин (n,l)-графу дорівнює $2^l - 1$.

Доведення. Доведення леми є конструктивним. Розглянемо поетапно процес побудови повного передфрактального графу з рівними ексцентриситетами.

$k = 1$. Ініціатор є повним графом, ексцентриситет усіх вершин дорівнює $1 = 2^1 - 1$.

$k = 2$. На другому етапі при виконанні операції ЗВІ відображення $\varphi : R_0 \to R$ визначимо таким чином: усі ребра із R_0 приєднаємо до різних вершин ініціатора. У кожному приєднаному ініціаторі одна вершина буде мати ступінь, рівну $n-1$. Ступінь інших $n^2 - n$ вершин графу $G^{(2)} = \left(V^{(2)}, E^{(2)}\right)$ буде

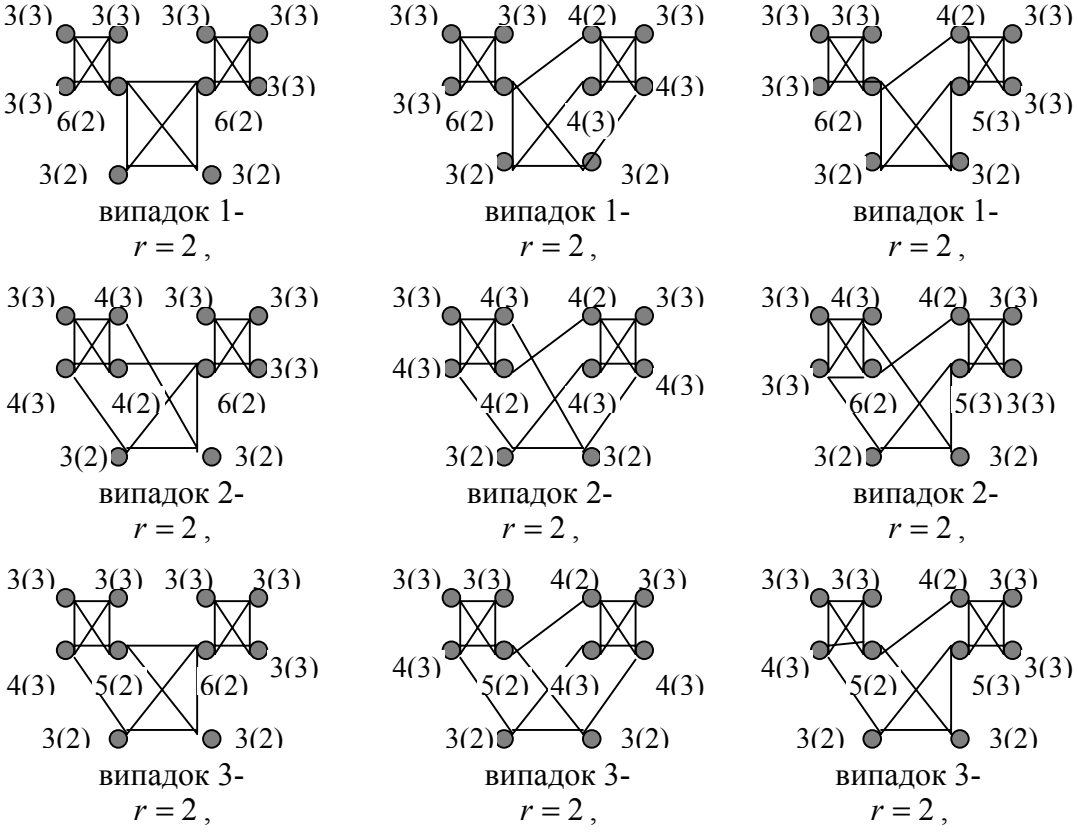


Рис.3

$(n-1)+1=n$. Ексцентриситет усіх вершин буде дорівнювати $2^2-1=3$, тому що ланцюг, який визначає ексцентриситет вершини, буде складатися з ребра ініціатора, інцидентного даній вершині, ребра першого рангу і ребра ініціатора, «найбільш віддаленого» від даної вершини.

Нехай виконано k етапів побудови повного передфрактального графу з рівними ексцентриситетами вершин. Граф $G^{(k)}=\left(V^{(k)},E^{(k)}\right)$ має такі властивості: n вершин мають ступінь $n-1$; ступінь інших n^k-n вершин дорівнює n. Ексцентриситет усіх вершин дорівнює 2^k-1, а ланцюг, що визначає ексцентриситет, складається з 2^k вершин. На $k+1$ етапі заміщення кожною з 2^k вершин за зазначеним правилом приводить до появи додаткового ребра на кожну вершину, тобто ексцентриситет усіх вершин повного передфрактального графу $G^{(k+1)}=\left(V^{(k+1)},E^{(k+1)}\right)$ буде дорівнювати $2^k-1+2^k=2^{k+1}-1$. Лема доведена.

Теорема 2 (про верхню оцінку радіуса (n,l)-графу). Для повного передфрактального графу $G^{(l)}=(V^{(l)},E^{(l)})$ ((n,l) -графу) верхньою оцінкою радіуса є $r\left(G^{(l)}\right)\le 2^l-1$. Ця оцінка є досяжною.

Доведення. Відповідно до леми, існує таке відображення $\varphi: R_0\to R$, що ексцентриситет усіх вершин (n,l)-графу однаковий, тобто $r\left(G^{(l)}\right)=\min\limits_{v\in V^{(l)}}\varepsilon(v)=\max\limits_{v\in V^{(l)}}\varepsilon(v)=2^l-1$. Теорема доведена.

Число висячих вершин у (n,l)-графу $t\left(G^{(l)}\right)=0$, тобто (n,l)-граф являє собою структуру, цілком замкнену на себе.

4. ВИЗНАЧЕННЯ ВИМІРНОСТЕЙ ПОВНОГО ФРАКТАЛЬНОГО ГРАФУ

Якщо ототожнити ваги ребер із їхньою довжиною, то для фрактального графу можна ввести поняття фрактальної вимірності. Для повного фрактального графу справедлива така теорема.

Теорема 3. Вимірність Хаусдорфа-Безиковича повного фрактального графу дорівнює $D=\log_x n$, де $x=1/\gamma$ при $\gamma n>1$.

Доведення. Нехай $a=b=1$, тоді

довжина повного передфрактального графу 1-го рангу дорівнює

$$L_1=|Q|\cdot 1=\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1=\frac{n(n-1)}{2};$$

довжина повного передфрактального графу 2-го рангу дорівнює

$$L_2=|Q|\cdot 1+|Q|\cdot|W|\cdot\gamma=\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot n\cdot\gamma=\frac{n(n-1)}{2}\cdot(1+n\gamma);$$

довжина повного передфрактального графу 3-го рангу дорівнює

$$L_3=|Q|\cdot 1+|Q|\cdot|W|\cdot\gamma+|Q|\cdot|W|^2\cdot\gamma^2=\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot n\cdot\gamma+\frac{n(n-1)}{2}\cdot n^2\cdot\gamma^2=$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(1+n\gamma+n^2\gamma^2\right);$$

…

довжина повного передфрактального графу k-го рангу дорівнює

$$L_k=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(1+n\gamma+n^2\gamma^2+\ldots+n^{k-1}\gamma^{k-1}\right).$$

Вираз у дужках являє собою геометричну прогресію з $b_1=1,\quad q=n\gamma$. Якщо $n\gamma<1$, то це нескінченно спадаюча прогресія і довжина ребер повного фрактального графу при $k\to\infty$ скінченна, тобто він не є фрактальним графом. Нехай $n\gamma>1$, тоді

$$1+n\gamma+n^2\gamma^2+\ldots+n^{k-1}\gamma^{k-1}=\frac{n^k\gamma^k-1}{n\gamma-1},\ L_k=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n^k\gamma^k-1}{n\gamma-1}.$$

При $k\to\infty$ $L_k\sim\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n^k\gamma^k}{n\gamma}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot(n\gamma)^{k-1}$.

Константа перед дужкою визначається видом ініціатора, і для повного фрактального графу дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$ (потужності множини ребер ініціатора). Вона не впливає на значення вимірності Хаусдорфа-Безиковича, тому в подальших викладеннях її можна опустити.

$$\delta=\gamma^{k-1},\qquad k-1=\frac{\ln\delta}{\ln\gamma},$$

$$L_k(\delta)=(n\gamma)^{k-1}=\exp\{(k-1)\ln(n\gamma)\}=\exp\left\{\frac{\ln\delta}{\ln\gamma}(\ln n+\ln\gamma)\right\}=\exp\left\{\ln\delta\left(1+\frac{\ln n}{\ln\gamma}\right)\right\}=\delta^{1+\frac{\ln n}{\ln\gamma}}=\delta^{1-D}.$$

$D=-\frac{\ln n}{\ln\gamma}=\log_{\frac{1}{\gamma}}n=\log_x n$. Теорема доведена.

Наприклад, для поданого на рис. 1 графу при $a=b=1$ і $\gamma=0.5$ фрактальна вимірність дорівнює

$D=\log_{1/0.5}4=\log_2 4=2$, а при $\gamma=1/3$ $D=\log_3 4=1.262$.

Теорема 4. Вимірність подібності для повного фрактального графу дорівнює $D_s=\log_x n$ **,** де $x=1/\gamma$.

Доведення. Відповідно до визначення вимірності подібності масштабний множник для повного фрактального графу дорівнює γ ($\gamma<1$). Стиснувши вихідний граф у $1/\gamma$ разів, ми одержимо зменшену копію вихідного повного фрактального графу. Щоб покрити вихідний граф цими зменшеними копіями, їх буде потрібно n штук. Тоді $D_s=-\frac{\ln n}{\ln\gamma}=-\log_\gamma n=\log_x n$, $x=1/\gamma$. Теорема доведена.

Повний фрактальний граф є самоподібним, тому що вимірність подібності збігається з вимірністю Хаусдорфа-Безиковича.

5. ВИЗНАЧЕННЯ p-АДИЧНОГО ДЕРЕВА

Структура ряду економічних об'єктів моделюється за допомогою так званих p-адичних дерев. Для визначення передфрактального і фрактального p-адичного дерева необхідно ввести узагальнення описаного вище процесу породження передфрактального графу $G^{(l)}=(V^{(l)},E^{(l)})$. Нагадаємо, що при породженні передфрактального графу на кожному етапі $s=1,2,\ldots,l$ у поточному графі $G^{(l-1)}=(V^{(l-1)},E^{(l-1)})$ заміщається тим або іншим ініціатором кожна вершина $v\in V^{(l-1)}$. Передфрактальні графи, одержувані в результаті такого процесу, будемо називати канонічними.

Процедура побудови неканонічного передфрактального графу має таку особливість: при переході від графу $G^{(l-1)}$ до графу $G^{(l)}$ заміщається ініціатором не кожна вершина $v\in V^{(l-1)}$, а лише підмножина вершин $V_*^{(l-1)}\subset V^{(l-1)}$, що визначається або випадково, або відповідно до конкретних правил, що відбивають змістовну специфіку задачі, що моделюється.

P-адичне дерево породжується процедурою, що є окремим випадком процедури породження неканонічного передфрактального графу, коли ініціатором є p-зірка. P-зіркою $H=(W,Q)$ називається зв'язне дерево, у якого p вершин мають ступінь, рівний одиниці, а одна вершина (центр) має ступінь, рівний p, тобто $|W|=p+1$, $|Q|=p$. Визначимо поетапний процес породження p-адичного фрактального дерева.

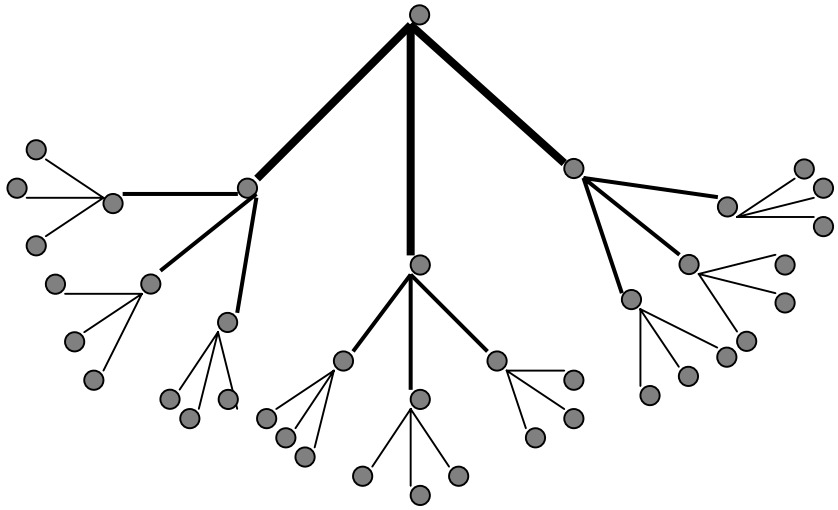


Рис.

На етапі $s=1$ у заданій p-зірці $H=(W,Q)$ нумеруємо вершини і ребра, отриманий граф позначимо через $G^{(1)}=(V^{(1)},E^{(1)})$ і назвемо передфрактальним p-адичним деревом першого покоління.

Нехай виконані етапи $s=1,2,...,l$ й отримано передфрактальне p-адичне дерево l-го покоління $G^{(l)}=(V^{(l)},E^{(l)})$. На етапі $s=l+1$ до кожної висячої вершини $v\in V^{(l)}$ застосовується операція заміщення вершини ініціатором, причому φ визначається в такий спосіб. Єдине ребро множини R приєднується до центру зірки (ініціатора), у результаті чого утворюється граф $G^{(l+1)}=(V^{(l+1)},E^{(l+1)})$ - передфрактальне p-адичне дерево $l+1$-го покоління. При виконанні нескінченного числа етапів одержуємо фрактальне p-адичне дерево.

На рис. 4 подане передфрактальне 3-адичне дерево, виконано 3 етапи побудови.

6. ОЦІНКИ ДІАМЕТРА І РАДІУСА p-АДИЧНОГО ДЕРЕВА

Теорема 5. Діаметр p-адичного передфрактального дерева визначається формулою

$$d\left(G^{(l)}\right)=2l\ .$$

Доведення. Доведення проводимо по індукції за числом етапів побудови p-адичного передфрактального дерева.

$k=1$. На першому етапі $G^{(1)}=H$. Тому що ініціатором є p-зірка, то її діаметр $d(H)=2$. $d\left(G^{(1)}\right)=2\cdot 1=d(H)=2$.

Нехай виконано k етапів і діаметр $d\left(G^{(k)}\right)=2k$. Кінцями діаметрального ланцюга є висячі вершини. Визначимо процес побудови діаметрального ланцюга на етапі $k+1$. Нехай операція ЗВІ застосовується до вершини, що є кінцем діаметрального ланцюга графу $G^{(k)}$. Це не суперечить процедурі побудови p-адичного дерева. Відстань від будь-якої висячої вершини до центру зірки-ініціатора дорівнює одиниці, у такий спосіб довжина діаметрального ланцюга збільшується на 1. Застосовуючи операцію ЗВІ до другого кінця діаметрального ланцюга, збільшуємо діаметр ще на одиницю. Таким чином,

$d\left(G^{(k+1)}\right)=d\left(G^{(k)}\right)+2d(H)=2k+2=2(k+1)$. Теорема доведена.

Теорема 6. Радіус передфрактального p-адичного дерева l-го покоління $G^{(l)}=(V^{(l)},E^{(l)})$ визначається формулою $r\left(G^{(l)}\right)=l$.

Доведення. Доведення проводимо по індукції за числом етапів побудови p-адичного передфрактального дерева.

$k=1$. На першому етапі $G^{(1)}=H$. Тому що ініціатором є p-зірка, то її радіус $r(H)=1$. $r\left(G^{(1)}\right)=1=r(H)=1$.

Нехай виконано k етапів і радіус $r\left(G^{(k)}\right)=k$. Радіальний ланцюг зв'язує вершину дерева з висячою вершиною. Визначимо процес побудови радіального ланцюга на етапі $k+1$. Нехай операція ЗВІ застосовується до вершини, що є кінцем радіального ланцюга графу $G^{(k)}$. Це не суперечить процедурі побудови p-адичного дерева. Відстань від будь-якої висячої вершини до центру зірки-ініціатора дорівнює одиниці, у такий спосіб довжина радіального ланцюга збільшується на 1. Таким чином, $r\left(G^{(k+1)}\right)=r\left(G^{(k)}\right)+r\left(H\right)=k+1$. Теорема доведена.

Число висячих вершин передфрактального p-адичного дерева l-го покоління $G^{(l)}=(V^{(l)},E^{(l)})$ дорівнює $t(G^{(l)})=p^l$.

У загальному випадку як ініціатор можна використовувати не єдину p-зірку, а множину m-зірок, де $m\le p$. У процесі виконання операції ЗВІ вибір зірки з множини зірок може здійснюватися як випадково, так і відповідно до деяких правил, обумовлених змістовною постановкою задачі. Оцінки радіуса, діаметра і числа висячих вершин для таких p-адичних дерев залежать від установленого правила вибору ініціатора з множини зірок.

7. ВИЗНАЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ ВИМІРНОСТІ p-АДИЧНОГО ДЕРЕВА

Теорема 7. Вимірність Хаусдорфа-Безиковича для фрактального p-адичного дерева дорівнює $D=\log_x p$, де $x=1/\gamma$ при $\gamma p>1$.

Доведення. Нехай $a=b=1$, тоді довжина передфрактального p-адичного дерева 1-го рангу дорівнює

$$L_1=|Q|\cdot 1=p\cdot 1=p\ ;$$

довжина передфрактального p-адичного дерева 2-го рангу дорівнює

$$L_2=|Q|\cdot 1+|Q|^2\cdot\gamma=p\cdot 1+p^2\cdot\gamma=p(1+p\gamma)\ ;$$

довжина передфрактального p-адичного дерева 3-го рангу дорівнює

$$L_3=|Q|\cdot 1+|Q|^2\cdot\gamma+|Q|^3\cdot\gamma^2=p\cdot 1+p^2\cdot\gamma+p^3\cdot\gamma^2=p(1+p\gamma+p^2\gamma^2)\ ;$$

довжина передфрактального p-адичного дерева k-го рангу дорівнює

$$L_k=p(1+p\gamma+p^2\gamma^2+\ldots+p^{k-1}\gamma^{k-1})\ .$$

Вираз у дужках являє собою геометричну прогресію з $b_1=1,\quad q=p\gamma$. Якщо $p\gamma<1$, то це нескінченно спадаюча прогресія і довжина ребер повного фрактального графу при $k\to\infty$ скінченна, тобто він не є фрактальним графом. Нехай $p\gamma>1$, тоді $1+p\gamma+p^2\gamma^2+\ldots+p^{k-1}\gamma^{k-1}=\dfrac{p^k\gamma^k-1}{p\gamma-1}$,

$$L_k=p\cdot\frac{p^k\gamma^k-1}{p\gamma-1}\ .$$

При $k\to\infty$ $L_k\sim p\cdot\dfrac{p^k\gamma^k}{p\gamma}=p\cdot(p\gamma)^{k-1}$.

Константа перед дужкою для p-адичного дерева дорівнює p. Вона не впливає на значення вимірності Хаусдорфа-Безиковича, тому в подальших викладеннях її можна опустити.

$$\delta=\gamma^{k-1}\ ,\qquad k-1=\frac{\ln\delta}{\ln\gamma},$$

$$L_k(\delta) = (p\gamma)^{k-1} = \exp\{(k-1)\ln(p\gamma)\} = \exp\left\{\frac{\ln\delta}{\ln\gamma}(\ln p + \ln\gamma)\right\} = \exp\left\{\ln\delta\left(1+\frac{\ln p}{\ln\gamma}\right)\right\} = \delta^{1+\frac{\ln p}{\ln\gamma}} = \delta^{1-D}.$$

$D = -\frac{\ln p}{\ln\gamma} = \log_{\frac{1}{\gamma}} p = \log_x p$. Теорема доведена.

Теорема 8. Вимірність подібності для фрактального p -адичного дерева дорівнює

$D_s = \log_x p$, де $x = 1/\gamma$.

Доведення. Відповідно до визначення вимірності подібності масштабний множник для фрактального p -адичного дерева дорівнює γ ($\gamma < 1$). Стиснувши вихідний граф у $1/\gamma$ разом, ми одержимо зменшену копію вихідного фрактального p -адичного дерева. Щоб покрити вихідне дерево цими зменшеними копіями, їх буде потрібно p штук. Тоді $D_s = -\frac{\ln p}{\ln\gamma} = -\log_\gamma p = \log_x p$, $x = 1/\gamma$. Теорема доведена.

Фрактальне p -адичне дерево є самоподібним, тому що вимірність подібності збігається з вимірністю Хаусдорфа-Безиковича.

ЛІТЕРАТУРА

1. Перепелица В.А., Позднякова А.Ю., Сергеева Л.Н. Фрактальный граф как средство моделирования структурного хаоса // Труды Международной конференции “Математика. Компьютер. Образование”. – Пущино: 29 января - 3 февраля 1997 . - С.203-210.
2. V.A.Perepelitsa, V.P.Pinchuk, L.N.Sergeeva, A.J.Pozdnjakova Fractal Graphs and Their Properties // IKM’97, Bauhaus - Universitat Weimar, 26.2.-1.3.1997, Digital Proceedings (8 pp)
3. Лекции по теории графов / В.А.Емеличев, О.И.Мельников и др.- М.: Наука, 1990. – 382 с.
4. Федер Е. Фракталы.-М.: Мир,1991. – 260 с.
5. Кочкаров А.М. Алгоритмические вопросы теории фрактальных графов: Автореф. дисс. на соискание степени доктора физ-мат. наук / ВГИ. – Нальчик: Б.и., 1999. – 28 с.