УДК 539.371

МАТРИЦЯ ТИПУ ГРІНА КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ ДИСКРЕТНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Левчук С.А.

Розглянуто задачу вісесиметричного вигину круглих пластин дискретно-змінної товщини. Розв'зування здійснюється з використанням методу гранично-складених задач. З цією метою досліджувану пластину розглянуто як складену конструкцію, яка складається з круглої пластини і скінченної кількості кільцевих секцій. Сформульовано умови з'єднання секцій у складеній пластині. Побудовано матрицю типу Гріна для розглянутої задачі. Запропонований спосіб розрахунку узагальнено на випадок n секцій з яких складається досліджувана кругла пластина.

Розглянемо круглу пластину дискретно-змінної товщини. Розрахункова схема для такої моделі може бути визначена таким чином. Вісесиметричний нормальний прогин $W = W(r)$ повинен задовольняти рівнянню [4]:

$$\Delta\Delta W = F, \tag{1}$$

де $F = q / D$, $q = q(r)$ - інтенсивність зовнішнього нормального навантаження, D - циліндрична жорсткість матеріалу, Δ - вісесиметричний оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}. \tag{2}$$

З огляду на осьову симетрію, розв'язок досить визначити тільки вздовж радіуса пластини, яку можна розглядати як складений об'єкт, що складається з круглої пластини радіуса R_1 і деякої кількості n кільцевих пластин, для яких

$R_i \le r \le R_{i+1}$ (i = 1, 2, …, n-1) відповідно.

Фундаментальною системою розв'язків відповідного однорідного рівняння можуть бути системи функцій [4]:

1) для круглої пластини ($0 \le r \le R_1$):

$$W^{(1)} = 1, \qquad W^{(2)} = r^2; \tag{3}$$

2) для кілець ($R_i \le r \le R_{i+1}$) (i = 1, 2, …, n-1):

$$W^{(1)} = 1, \qquad W^{(2)} = ln(r), \qquad W^{(3)} = r^2, \qquad W^{(4)} = r^2\, ln(r). \tag{4}$$

Таким чином, загальні розв'язки рівняння (1) можуть бути записані у вигляді:

$$W_1(r) = C_1(r) + C_2(r)r^2,$$

$$W_k = C_j(r) + C_{j+1}(r)ln(r) + C_{j+2}(r)r^2 + C_{j+3}(r)r^2\, ln(r), \tag{5}$$

де $W_1(r)$ - нормальний прогин круглої пластини радіуса R_1, $W_k(r)$ - нормальний прогин k- ої кільцевої секції пластини, k = 2, 3, …, n, а індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому

k = 2 відповідає j = 3.

Якщо розв'язування далі здійснювати методом варіації довільних сталих, то визначивши C_j і підставивши їх вирази у (5), неважко отримати залежності (з точністю до сталих інтегрування):

$$W_1(r)=\overline{C}_1+\overline{C}_2 r^2+\int_0^r F_1(\xi)\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2+r^2\right)ln\frac{r}{\xi}+\xi^2-r^2\right\}d\xi; \qquad (6)$$

$$W_k(r)=\overline{C}_j+\overline{C}_{j+1}\,ln(r)+\overline{C}_{j+2}r^2+\overline{C}_{j+3}r^2\,ln(r)+\int_0^r F_k(\xi)\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2+r^2\right)ln\frac{r}{\xi}+\xi^2-r^2\right\}d\xi.$$

Для визначення сталих $\overline{C_j}$ (j = 1, 2, …, 4n-2) у формулах (6) слід скористатися крайовими умовами, наприклад, умовами жорсткого затиснення краю складеної пластини:

$$W_n\big|_{r=R_n}=0; \qquad \left.\frac{dW_n}{dr}\right|_{r=R_n}=0, \qquad (7)$$

та умовами з'єднання елементів складеної конструкції [3]:

$$W_i\big|_{r=R_i}=W_{i+1}\big|_{r=R_i}; \qquad \left.\frac{dW_i}{dr}\right|_{r=R_i}=\left.\frac{dW_{i+1}}{dr}\right|_{r=R_i};$$

$$M_i\big|_{r=R_i}=M_{i+1}\big|_{r=R_i}; \qquad Q_i\big|_{r=R_i}=Q_{i+1}\big|_{r=R_i}; \qquad (8)$$

де i = 1, 2, …, n-1, а через M_i і Q_i позначені згинальний момент та поперечна сила відповідно (нижніми індексами тут і далі позначені номери секцій у складеній конструкції), для яких мають місце вирази [4]:

$$M_i(r)=-\frac{E_i h_i^3}{12\left(1-\sigma_i^2\right)}\left\{\frac{d^2W_i}{dr^2}+\frac{\sigma_i}{r}\frac{dW_i}{dr}\right\};$$

$$Q_i(r)=-\frac{E_i h_i^3}{12\left(1-\sigma_i^2\right)}\frac{d}{dr}\Delta W_i, \qquad (9)$$

де h_i - товщини секцій, σ_i - коефіцієнт Пуассона, E_i - модуль Юнга.

Підставляючи (6), (9) у (7), (8), отримаємо систему 4n-2 лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\overline{C_j}$ з матрицею коефіцієнтів при невідомих $A=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{4n-2}$.

Розв'язавши дану систему і підставляючи знайдені вирази для $\overline{C_j}$ (j = 1, 2, …, 4n-2) у (6), будемо мати:

$$W_k(r)=\sum_{l=1}^{n}\int_0^{R_l}G_l(r,\xi)\overline{F_l}(\xi)d\xi, \qquad (10)$$

де $\overline{F}_l(\xi)=\left(F_l(\xi)\quad F_{l+1}(\xi)\right)^T$, $\overline{F}_n(\xi)=F_n(\xi)$, $G_l(r,\xi)=\left(G_{l1}(r,\xi)\quad G_{l2}(r,\xi)\right)$,

l = 1, 2, …, n-1; k = 1, 2, …, n.

$G_l(r,\xi)$ - побудовані матриці типу Гріна для даної задачі.

Якщо через $\overline{A} = \left\{\overline{a}_{ij}\right\}_{i,j=1}^{4n-2}$ позначити матрицю, обернену до матриці $A = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{4n-2}$, що згадувалася вище, а також увести наступні позначення:

$$t_{l1}^{j}(\xi) = -\overline{a}_{ji}\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2 + R_l^2\right)ln\frac{R_l}{\xi} + \xi^2 - R_l^2\right\} - \overline{a}_{ji+1}\frac{\xi}{4}\left\{2R_l\, ln\frac{R_l}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_l} - R_l\right\} +$$

$$+ \overline{a}_{ji+2}D_l\frac{\xi}{4}\left\{2(1+\sigma_l)ln\frac{R_l}{\xi} + (\sigma_l - 1)\frac{\xi^2}{R_l^2} + 1 - \sigma_l\right\} + \overline{a}_{ji+3}D_l\frac{\xi}{R_l}; \qquad (11)$$

$$t_{l2}^{j}(\xi) = \overline{a}_{ji}\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2 + R_l^2\right)ln\frac{R_l}{\xi} + \xi^2 - R_l^2\right\} + \overline{a}_{ji+1}\frac{\xi}{4}\left\{2R_l\, ln\frac{R_l}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_l} - R_l\right\} -$$

$$- \overline{a}_{ji+2}D_{l+1}\frac{\xi}{4}\left\{2(1+\sigma_{l+1})ln\frac{R_l}{\xi} + (\sigma_{l+1} - 1)\frac{\xi^2}{R_l^2} + 1 - \sigma_{l+1}\right\} - \overline{a}_{ji+3}D_{l+1}\frac{\xi}{R_l};$$

$$t_{n}^{j}(\xi) = -\overline{a}_{j4n-3}\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2 + R_n^2\right)ln\frac{R_n}{\xi} + \xi^2 - R_n^2\right\} - \overline{a}_{j4n-2}\frac{\xi}{4}\left\{2R_n\, ln\frac{R_n}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_n} - R_n\right\},$$

де j = 1, 2, …, 4n-2; l = 1, 2, …, n-1, а індекс i збільшується на чотири одиниці при збільшенні l на одну одиницю, причому l=1 відповідає j=1, то компоненти побудованих матриць типу Гріна $G_l(r,\xi)$ набудуть вигляду:

при k = 1:

$$G_{l1}(r,\xi) = \begin{cases} t_{l1}^{1}(\xi) + t_{l1}^{2}(\xi)r^2, & при\ l \neq 1; \\ t_{l1}^{1}(\xi) + t_{l1}^{2}(\xi)r^2 + I_1(r,\xi), & при\ l = 1, \quad I_1(r,\xi) = 0 \quad при\ \xi > r; \end{cases}$$

$$G_{l1}(r,\xi) = t_{l2}^{1}(\xi) + t_{l2}^{2}(\xi)r^2; \qquad G_n(r,\xi) = t_n^{1}(\xi) + t_n^{2}(\xi)r^2;$$

при k ≠ 1:

$$G_{l1}(r,\xi) = \begin{cases} t_{l1}^{j}(\xi) + t_{l1}^{j+1}(\xi)ln(r) + t_{l1}^{j+2}(\xi)r^2 + t_{l1}^{j+3}(\xi)r^2\, ln(r), & при\ l \neq k; \\ t_{l1}^{j}(\xi) + t_{l1}^{j+1}(\xi)ln(r) + t_{l1}^{j+2}(\xi)r^2 + t_{l1}^{j+3}(\xi)r^2\, ln(r) + I_l(r,\xi), & при\ l = k, \\ \quad I_l(r,\xi) = 0, \quad при\ \ \xi > r; \end{cases}$$

$$G_{l2}(r,\xi) = t_{l2}^{j}(\xi) + t_{l2}^{j+1}(\xi)ln(r) + t_{l2}^{j+2}(\xi)r^2 + t_{l2}^{j+3}(\xi)r^2\, ln(r); \qquad (12)$$

$$G_n(r,\xi)=\begin{cases} t_n^j(\xi)+t_n^{j+1}(\xi)ln(r)+t_n^{j+2}(\xi)r^2+t_n^{j+3}(\xi)r^2\,ln(r), & npu\ \ l\neq k; \\ t_n^j(\xi)+t_n^{j+1}(\xi)ln(r)+t_n^{j+2}(\xi)r^2+t_n^{j+3}(\xi)r^2\,ln(r)+I_n(r,\xi), & npu\ \ l=k, \\ I_n(r,\xi)=0, \quad npu \quad \xi > r; \end{cases}$$

де l = 1, 2, …, n-1; k = 2, 3, …, n, , а індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому k=2 відповідає j=3,

$$I_k(r,\xi)=\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2+r^2\right)ln\frac{r}{\xi}+\xi^2-r^2\right\}.$$

Необхідно зазначити також, що при розв'язуванні цієї задачі виникають особливості у вигляді невласних інтегралів від функції, що розривна на лівому кінці відрізка інтегрування:

$$\int_0^r F(\xi)\xi^3\,ln\frac{r}{\xi}d\xi; \qquad\qquad \int_0^r F(\xi)\xi\ln\frac{r}{\xi}d\xi.$$

Застосовуючи теорію границь, неважко показати, що ці інтеграли будуть збіжні (у всякому випадку, якщо функція $F(\xi)$ - константа, або має степеневий характер).

Таким чином, функція (10) з компонентами (11), (12) є розв'язком розглянутої задачі (1), (7), (8). Отримані результати узгоджуються з відомими [2], одержаними за допомогою теорії функції комплексної змінної.

Викладена розрахункова схема явним чином розповсюджується на кільцеві пластини дискретно-змінної товщини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Биргер И.А., Пановко Я.Г. и др. Прочность, устойчивость, колебания. В 3-х т./ М.: Машиностроение, 1968. – Т. 2. – 464 с.
2. Вайнберг Д.В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. – К.:Из-во АН УССР, 1952. – 420 с.
3. Гавеля С.П., Левчук С.А., Ищенко О.А. Расчет упругого деформирования круглой пластины дискретно-переменной толщины// Запорож. ун-т. – Запорожье, 1992. – 10 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 08.06.92, № 845 – Ук92.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. –744 с.