УДК 519.642

РОЗВ'ЯЗОК СТАЦІОНАРНОЇ ТЕРМОПРУЖНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МНОГОЗВ'ЯЗНОЇ ОБЛАСТІ

Звьоздочкіна О.А., Лисенко В.В.

Як відомо [1], у теорії термопружності існує найбільш простий випадок для побудови загального розв'язку, коли відбувається поділ задач: спочатку необхідно визначити температуру, а потім з урахуванням знайденого розподілу температур розв'язати рівняння Ляме, що містить фіктивні масові сили.

Розглянемо таку задачу. Нехай під дією теплового потоку на кінцевій ділянці границі півплощини і температури, заданої на частині контура, що залишилася, відбувся перерозподіл температури в півплощині. Тепер на тій же ділянці границі відбувається зміщення під тиском жорсткого штампа. Інша частина границі вільна від зусиль.

Математично даний процес описується за допомогою двох змішаних задач. Знайти розподіл температури в півплощині, якщо на границі задана функція температури і її похідної.

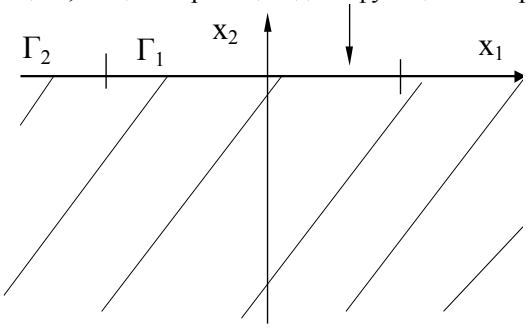

Рис. 1

$$\Delta T = 0,$$

$$T\big|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = q,$$ де q – константа.

Розв'язання даної задачі за допомогою змішаного алгоритму, побудованого на базі методу крайових елементів і функцій Гріна, подано в роботі [2]. На відзнаку від інших чисельних методів даний алгоритм дозволяє побудувати розв'язок у всій півплощині. Результати можна використовувати як фіктивні масові сили для постановки такої задачі.

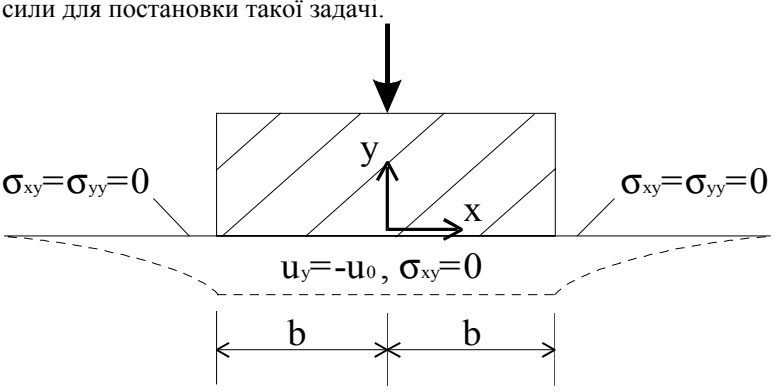

Рис. 2 Вдавлювання жорсткого штампа із мастилом

$$u_y = -u_0, \quad |x| \le b, \quad y=0,$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad |x| < \infty, \quad y=0,$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad |x| > b, \quad y=0.$$

Якщо враховувати температурні явища, отримані в попередній задачі, то необхідно перейти до деякої модифікації закону Гука [1]. Одержуємо співвідношення для напружень через деформації:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda\theta - \alpha T,$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y = 2\mu\varepsilon_y + \lambda\theta - \alpha T, \qquad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

Розв'язання даної задачі будується за допомогою алгоритму, приведеного в роботі [3]. При цьому інтегральне представлення буде мати такий вид [4]:

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_\Gamma p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) =$$

$$= \int_\Gamma u^*_{ij}(\xi,x)\,p_j(x)d\Gamma(x) + 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\int_\Omega u^*_{ik,k}(\xi,x)Td\Omega\,,$$

де інтеграл у лівій частині розуміється в змісті головного значення, T – температура, задана в області Ω, G – модуль зрушення, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт теплопровідності. При цьому, тому що з розв'язку попередньої задачі розподіл температури відомий на всій півплощині, то Ω охоплює всю область, на яку впливають задані теплові крайові умови.

Таким чином, отриманий розв'язок термопружної задачі.

При розв'язанні змішаним методом задачі теплопровідності і задачі про штамп у півплощині, підданій нагріванню (рис. 3), використовувалося дискретне представлення контурів за допомогою постійних крайових елементів однакових розмірів. При цьому кожна сторона розбивалася на однакову кількість елементів. Область Ω обмежена розмірами контура Γ_3. Як показують чисельні результати, збільшення контура прямокутника Γ_3 і, відповідно, області Ω, на якій задане теплове навантаження, дає розв'язок, що незначно відрізняється від попереднього. Це обумовлено побудовою вирішення даним змішаним алгоритмом, що будує розв'язки для будь-якої точки півплощини. Чисельний розв'язок задачі приведений для випадку, коли $u_0/b = 0{,}001$ і ν=0,1, результати подані в безрозмірному вигляді.

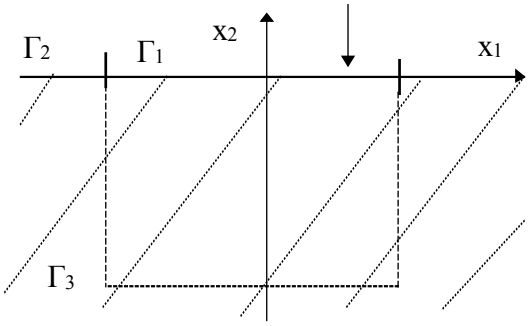

Рис. 3

Нижче наведений графік, що показує залежність розподілу зміщень у півплощині при *x=0* і напружень на границі під штампом при заданому коефіцієнті теплопровідності $\alpha=10^{-5}$. Контур, що обмежує, Γ_3 мав такі розміри: y∈[0,1.25], x∈[-1.25,1.25].

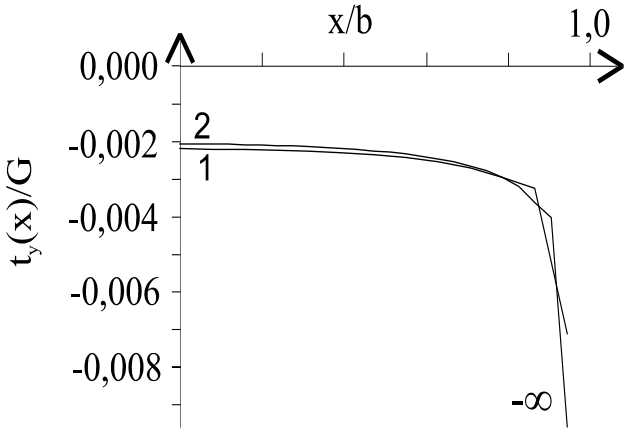

Рис. 4 Розподіл напружень на границі під штампом під впливом температури:

1 – під дією температури, 2 – без урахування теплового навантаження.

Як показують результати, вплив температури на пружні процеси в півплощині цілком відповідає реальним фізичним процесам. При нагріванні зростає тензор напружень на границі під штампом.

Тепер зробимо аналогічну постановку задачі для багатозв'язної області, тобто для півплощини з включенням. На границі включення задані температура, яка дорівнює 10, і нульові напруження. На відзнаку від попередньої задачі, при побудові розв'язку з'явиться новий граничний контур для обох задач.

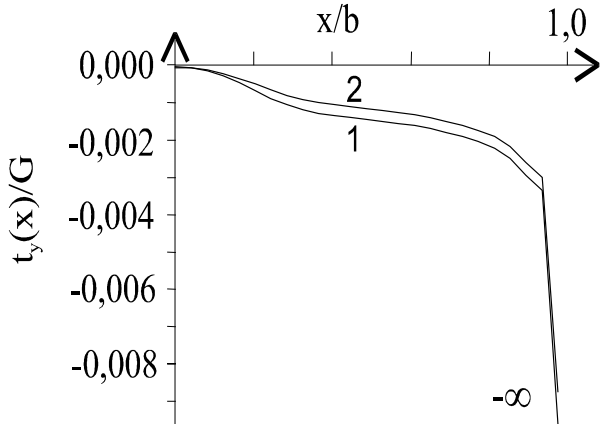

Рис. 5 Розподіл напружень на границі під штампом під впливом температури:
1 – під дією температури, 2 – без врахування теплового навантаження

На рис. 5 приведений графік, що показує залежність розподілу напружень на границі під штампом у півплощині з включенням. Включення квадратної форми зі стороною 0.5 і центром у точці (0,0.5). Обмежуючий контур Γ_3 знаходиться на подвійній відстані від контура включення. Подальше збільшення обмежуючого прямокутника істотно не впливає на розв'язок поставленої задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
2. Звьоздочкіна О. А., Толок В. О. Про один спосіб розв'язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини з включеннями // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – №1. – С. 36-38.
3. Звьоздочкіна О. А., Толок В. О. Про один метод розв'язування задачі статики для пружної неоднорідної півплощини // Вісник Державного університету "Львівська політехніка", с. Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 172-175.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. –М.: Мир, 1987. – 328 с.