УДК 539.3

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКРУГОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Зайцева Т.А., Рассаднікова Н.Є., Шашков К.В.

Розглядаються розв'язки крайових задач для гармонічного та полігармонічного рівнянь у випадку однозв'язних, двузв'язних областей, що близькі до кільцевих або кругових. Такі задачі частіше над усе виникають під час вивчення впливу технологічних похибок. Будуються потенціали, за допомогою яких задачі зводяться до систем інтегральних рівнянь. Використовуючи малі параметри, що характеризують відміну форми області від кільцевої або кругової, отримані нескінчені системи алгебраїчних рівнянь, які являються регулярними або квазірегулярними, й допускають розв'язок за допомогою послідовних наближень методом зрізки.

1. Розглянемо в області Ω розв'язок задачі

$$\Delta u = 0, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{L_k} = \varphi(t) \tag{1.2}$$

у випадку, коли область Ω обмежена контуром L_k, який за умови $k=1$ має форму симетрично деформованого еліпсу L_1 з дещо вгнутими вершинами з параметричними рівняннями

$$x = a\cos\tau\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\tau}, y = a\sin\tau\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\tau}, \tag{1.3}$$

або за умови $k=2$ має форму несиметрично деформованого еліпсу L_2, параметричні рівняння якого

$$x = a\cos^2\tau\cdot\left(1-\varepsilon^2\sin^2\tau\right), y = a\cos\tau\cdot\sin\tau\cdot\left(1-\varepsilon^2\sin^2\tau\right). \tag{1.4}$$

Розв'язки рівняння (1.1) за умови (1.2) представимо у вигляді потенціалів

$$u_k(Q) = \int_{L_k}\mu_k(M)\frac{\cos rn}{r}dl_k, k=1,2. \tag{1.5}$$

Тут $M(x,y)\in L_k, \quad Q(x_0,y_0)\in\Omega, \quad r=|MQ|.$

Підставляючи (1.5) в крайові умови (1.2), отримуємо наступні інтегральні рівняння, нехтуючи доданками, що вміщують ε в четвертому степені та вище:

$$\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\left\{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}\left[2+\cos 2\tau-\cos 2t+2\cos(\tau+t)\right]\right\}d\tau+\pi\mu_1(t)=\varphi(t), \tag{1.6}$$

$$\int_0^{2\pi}\mu_2(\bar\tau)\left\{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}\left[\cos(\bar\tau+\bar t)+\cos\bar\tau\right]\right\}d\bar\tau+\pi\mu_2(\bar t)=\varphi(\bar t), \bar\tau=2\tau, \bar t=2t \tag{1.7}$$

Розв'язки рівнянь (1.6), (1.7) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\mu_k(t)=\tfrac{1}{\pi}\varphi(t)-\tfrac{1}{2}a_{0k}+\varepsilon^2\overline{\mu_k}(t), k=1,2;\\
&\overline{\mu_1}(t)=\tfrac{1}{8}\left[2a_{01}+a_{21}-a_{01}\cos 2t+2a_{11}\cos t-2b_{11}\sin t\right];\\
&\overline{\mu_2}(\bar t)=\tfrac{1}{4}\left[a_{12}\cos\bar t-b_{12}\sin\bar t+a_{12}\right],
\end{aligned} \tag{1.8}$$

де

$$a_{01}=\frac{4A_0-\varepsilon^2A_2}{2\left(4+\varepsilon^2\right)\pi};\ a_{11}=\frac{4A_1}{\left(4+\varepsilon^2\right)\pi};\ b_{11}=\frac{4B_1}{\left(4-\varepsilon^2\right)\pi};$$
$$a_{21}=\frac{A_2}{\pi}+\frac{\varepsilon^2A_0}{4\left(4+\varepsilon^2\right)\pi};\ a_{12}=a_{11};\ b_{12}=b_{11};$$
$$a_{02}=\frac{A_0}{2\pi}-\frac{\varepsilon^2A_1}{\left(4+\varepsilon^2\right)\pi};\ A_0=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt; \tag{1.9}$$
$$A_n=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos ntdt;\ B_n=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sin ntdt.$$

З врахуванням коефіцієнтів (1.9) підставимо вирази (1.8) для щільностей $\mu_k(t)$ до шуканих функцій (1.5), отримаємо

$$u_k(Q)=\int_{L_k}\left(\tfrac{1}{\pi}\varphi-\tfrac{a_{0k}}{2}\right)\tfrac{\cos rn}{r}\,dl_k-\varepsilon^2\int_{L_k}\overline{\mu_k}\,\tfrac{\cos rn}{r}\,dl_k,\quad k=1,2; \tag{1.10}$$

де $\varphi(t)$ – відома з гранічних умов функція. Для практичних обчислень функції (1.10) зручніше представити у вигляді рядів, наприклад,

$$u_1=\left(1+\varepsilon^2\sin^2t\right)\varphi(k,t)+\tfrac{\varepsilon^2k}{4}\left(1+2\sin^2t\right)\varphi'(k,t)-\tfrac{\varepsilon^2k}{4}\varphi_1'(k,t)-$$
$$-\varepsilon^2\left(\tfrac{a_{01}}{4}+\tfrac{a_{21}}{8}+\tfrac{ka_{11}}{8}\cos t-\tfrac{kb_{11}}{8}-\tfrac{5k^2a_{01}}{16}\cos 2t\right); \tag{1.11}$$

$$\varphi(k,t)=\tfrac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}k^n\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right);$$
$$\varphi'(k,t)=\sum_{n=1}^{\infty}nk^{n-1}\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right); \tag{1.12}$$
$$\varphi_1'(k,t)=\sum_{n=1}^{\infty}nk^{n-1}\left(C_n\cos nt+D_n\sin nt\right),\quad k=\frac{a_0}{a},$$

C_n, D_n – коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є відомої функції $\varphi(t)\cos 2t$.

2. Тепер розглянемо розв'язок рівняння (1.1) в двузв'язній області Ω, зовнішній контур якої L_0 – еліпс з параметричними рівняннями $x=a\cos\tau,\ \ y=b\sin\tau$, внутрішній контур L_1 – коло радіусу R_1. Крайові умови візьмемо у вигляді

$$u\big|_{L_0}=\varphi_0(t);\quad u\big|_{L_1}=\varphi_1(t_1). \tag{2.1}$$

Тут $\varphi_i(t)$ – неперервні на контурах функції. Розв'язок рівняння (1.1) візьмемо у вигляді суми потенціалів:

$$u(\xi,\eta)=\int_{L_1}\mu_1(x,y)\left(\frac{\cos rn_1}{r}+\ln R\right)dl_1+\int_{L_0}\mu_0(x,y)\frac{\cos rn_0}{r}\,dl_0. \tag{2.2}$$

Тут $Q(\xi,\eta)$ – внутрішня точка двузв'язної області, обмеженої контурами L_0 і L_1; $M(x,y)$ – точка на контурі області; n_i – нормаль до контуру $L_i\quad (i=0,1)$.

Для визначення невідомих функцій μ_0,μ_1 підставимо вибраний розв'язок (2.2) в крайові умови (2.1), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\varphi_0(t)=\int_0^{2\pi}\mu_1(\theta)\frac{\left[k-\cos(\theta-t)+\varepsilon^2\,\frac{a}{a+b}\sin\theta\sin t\right]R_1 d\theta}{1+k^2-2k\cos(\theta-t)-\varepsilon^2\left(\sin^2\theta-\frac{2R_1}{a+b}\sin\theta\sin t\right)}+$$
$$+\int_0^{2\pi}\mu_1(\theta)\frac{R_1}{2}\left[\ln a^2+\ln\left(1-\varepsilon^2\sin^2 t\right)\right]d\theta+$$
$$+\int_0^{2\pi}\mu_0(\tau)\frac{bd\tau}{2a\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{\tau+t}{2}\right)}-\pi\mu_0(t);\qquad(2.3)$$
$$\varphi_1(t_1)=\int_0^{2\pi}\mu_1(\theta)\left(\tfrac{1}{2}+R_1\ln R_1\right)d\theta+\pi\mu_1(t_1)+$$
$$+\int_0^{2\pi}\mu_0(\tau)\frac{\frac{b}{a}\left[1-k\cos(\tau-t_1)\right]-\frac{k}{a+b}\varepsilon^2\sin\tau\sin t_1}{1+k^2-2k\cos(\tau-t_1)-\varepsilon^2\left(\sin^2\tau-\frac{2R_1}{a+b}\sin\tau\sin t_1\right)}d\tau,$$

в якій ε — ексцентриситет еліпсу; $k=\dfrac{R_1}{a}$.

Підінтегральні вирази в системі (2.3) знайдемо розвиненням в ряди за степенями ε. Вважаючи ε малим, в отриманих рядах нехтуємо четвертим степенем ε і вище, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів $a_{ni}, b_{ni}(i=0,1)$ розвинення в ряди Фур'є шуканих функцій $\mu_0(t),\mu_1(t)$, яка для a_{ni} має наступний вигляд:

$$\begin{cases}a_{00}+a_{01}\left(1+R_1\ln R_1\right)=\frac{1}{2}A_{01};\\ 2a_{00}+a_{01}\left(R_1\ln a^2-\frac{\varepsilon^2}{2}R_1\right)=A_{00};\\ a_{n0}+a_{n1}\left(k^n+\frac{\varepsilon^2 n}{4}k^n\right)-\frac{\varepsilon^2(n-2)}{4}k^{n-2}a_{n-2,1}=-A_{n0},n\ge 2;\\ a_{n0}\left(k^n+\frac{\varepsilon^2 n}{4}k^n\right)+a_{n1}-\frac{\varepsilon^2(n+2)}{4}k^n a_{n+2,0}=A_{n1},n\ge 1,\end{cases}\qquad(2.4)$$

де $A_{ni}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_i(t)\cos ntdt;\ B_{ni}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_i(t)\sin ntdt$.

Для коефіцієнтів $b_{ni}(i=0,1)$ система має аналогічний вигляд. За умови $k<\frac{1}{1+\varepsilon^2}$ система (2.4) є цілком регулярною з обмеженими вільними членами, яка за умови введення нових невідомих $a_{ni}=\dfrac{C_n}{\sqrt{k^n}}$ знов є регулярною, й, тому, має єдиний розв'язок, який знаходиться за допомогою послідовних наближень, зрізаючи число невідомих.

Аналогічний розв'язок знаходиться за умови дослідження подібної задачі, коли зовнішній контур області є симетрично або несиметрично деформованим еліпсом (1.3), (1.4) або, навпаки, внутрішній, а також декількома подібними контурами.

Вирази (2.2), (2.4) являються розв'язком задачі про скрут стрижня еліптичного профілю з круговою порожниною.

3. Розглянемо згин платівки, яка защемлена по контуру, під вільним поперечним навантаженням, що визначається розв'язком задачі

$$\Delta^2 u=f;\quad u\big|_L=0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_L=0,\qquad(3.1)$$

яка за допомогою об'ємного потенціалу може бути зведена до розв'язку задачі для однорідного бигармонічного рівняння з неоднорідними аналогічними крайовими умовами

$$\Delta^2 u=0;\quad u\big|_L=\varphi_1;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_L=\varphi_2,\qquad(3.2)$$

де $\varphi_\mu(\mu=1,2)$ – задані на L функції, які допускають неперервні похідні до порядку $(2-\mu)$ включно, і похідні порядку $(2-\mu)$ задовольняють умові Гьольдера з показником α; ν – внутрішня нормаль до L.

Нехай функції $\delta(M),\mu(M)$ задовольняють аналогічним умовам.

Розв'язок задачі (3.2) візьмемо у вигляді суми потенціалів

$$u(Q)=\int_L \delta(M)\left(1+\cos^2 rn\right)dl+\int_L \mu(M)\frac{\cos^3 rn}{r}\,dl. \tag{3.3}$$

Підставляючи вибраний розв'язок в крайові умови задачі (3.2) і вважаючи, що L – еліпс $x=a\cos\tau$, $y=b\sin\tau$, отримуємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $\delta(t)$ і $\mu(t)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t)&=\int_L \mu(\tau)\tfrac{\cos^3 r_0 n}{r_0}\,dl+\int_L \delta(\tau)\left(1+\cos^2 r_0 n\right)dl+\tfrac{\pi}{2}\mu(t);\\
\varphi_2(t)&=\int_L \mu(\tau)\cdot\tfrac{\partial}{\partial\nu}\tfrac{\cos^3 r_0 n}{r_0}\,dl+\int_L \delta(\tau)\cdot\tfrac{\partial}{\partial\nu}\left(1+\cos^2 r_0 n\right)dl-\\
&\quad-\tfrac{\pi\mu(t)}{a}\cdot\tfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{\left(1-\varepsilon^2\cos^2 t\right)^3}}-\pi\delta(t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Невідомі щільності потенціалів зручніше знаходити у вигляді

$$\mu_1(t)=\frac{b\mu(t)}{a\left(1-\varepsilon^2\cos^2 t\right)},\quad \delta_1(t)=\frac{a\delta(t)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}}. \tag{3.5}$$

Знаходячи розвинення підінтегральних виразів в системі (3.4) в ряди за косинусами і синусами дуг, що кратні $(\tau+t)$, перетворимо систему (3.4) до вигляду:

$$\begin{cases}
2\varphi_1(t)=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_1(\tau)}{2}\left(1-\cos(\tau-t)\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos n(\tau+t)d\tau+\\
\quad+\int_0^{2\pi}\delta_1(\tau)\left(2-\cos(\tau-t)\right)\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\cos n(\tau+t)d\tau+\\
\quad+\frac{\pi\mu_1(t)\left(2-\varepsilon^2-\varepsilon^2\cos 2t\right)}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}};\\
\overline{\varphi}_2(t)=\int_0^{2\pi}\Bigg[\frac{3\mu_1(\tau)}{8\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\left(\varepsilon^2-2\right)\cos(\tau-t)+\varepsilon^2\cos(\tau+t)\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos n(\tau+t)-\\
\quad-\frac{\mu_1(\tau)}{2}\left(1-\cos(\tau-t)\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\cos n(\tau+t)\Bigg]d\tau+\\
\quad+\int_0^{2\pi}\Bigg[\frac{-\delta_1(\tau)}{2}\left(1-\cos(\tau-t)\right)\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos n(\tau+t)+\\
\quad+\frac{\delta_1(\tau)}{2}\left(\left(\varepsilon^2-2\right)\cos(\tau-t)+\varepsilon^2\cos(\tau+t)\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\cos n(\tau+t)\Bigg]d\tau-\\
\quad-\pi\mu_1(t)-\frac{\pi\delta_1(t)}{2}\left(2-\varepsilon^2-\varepsilon^2\cos 2t\right).
\end{cases} \tag{3.6}$$

Тут прийняті наступні позначення:

$$\begin{cases} \overline{\varphi}_2(t) = a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\cdot\varphi_2(t); \\ \alpha_n = \dfrac{\varepsilon^{2n}}{\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^{2n}}\cdot\left(2n+\dfrac{2-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right); \\ \beta_n = \dfrac{2\varepsilon^{2n}}{\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^{2n}}; \\ \gamma_n = \dfrac{\varepsilon^{2n}}{\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^{2n}}\cdot\dfrac{4n^2-4+6n\dfrac{2-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+3\left(\dfrac{2-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2}{4} \end{cases} \tag{3.7}$$

Позначаючи коефіцієнти Фур'є невідомих щільностей $\mu_1(t)$ і $\delta_1(t)$ відповідно через a_n, b_n і $\overline{a_n}, \overline{b_n}$, отримуємо з (3.6) систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, яка для парних n відносно $a_n, \overline{a_n}$ має вигляд:

за умови $n=0$: $\begin{cases} A_{00}a_0 + A_{02}a_2 + \overline{A_{00}}\cdot\overline{a_0} + \overline{A_{02}}\cdot\overline{a_2} = F_0; \\ B_{00}a_0 + B_{02}a_2 + \overline{B_{00}}\cdot\overline{a_0} + \overline{B_{02}}\cdot\overline{a_2} = \overline{F_0}; \end{cases}$

за умови $n = 2m \geq 2$:

$$\begin{cases} A_{n,n-2}a_{n-2} + A_{nn}a_n + A_{n,n+2}a_{n+2} + \overline{A_{n,n-2}}\,\overline{a_{n-2}} + \overline{A_{nn}}\,\overline{a_n} + \overline{A_{n,n+2}}\,\overline{a_{n+2}} = F_n; \\ B_{n,n-2}a_{n-2} + B_{nn}a_n + B_{n,n+2}a_{n+2} + \overline{B_{n,n-2}}\,\overline{a_{n-2}} + \overline{B_{nn}}\,\overline{a_n} + \overline{B_{n,n+2}}\,\overline{a_{n+2}} = \overline{F_n}, \end{cases} \tag{3.8}$$

де $A_{00} = \dfrac{2-\varepsilon^2}{2a}$; $A_{02} = -\dfrac{\varepsilon^2}{2a}$; $\overline{A_{00}} = a$; $\overline{A_{02}} = -\dfrac{\varepsilon^2 a}{(1+a)^2}$;

$B_{00} = -2$; $B_{02} = 0$; $\overline{B_{00}} = -2a$; $\overline{B_{02}} = \dfrac{2\varepsilon^2 a}{(1+a)^2}$;

$A_{n,n-2} = -\dfrac{\alpha_{n-1}}{8} - \dfrac{\varepsilon^2}{8a}$; $\quad A_{nn} = \dfrac{\alpha_n}{4} + \dfrac{2-\varepsilon^2}{4a}$;

$A_{n,n+2} = -\dfrac{\alpha_{n+1}}{8} - \dfrac{\varepsilon^2}{8a}$; $\quad \overline{A_{n,n-2}} = -\dfrac{a}{4}\beta_{n-1}$;

$\overline{A_{nn}} = a\beta_n$; $\quad \overline{A_{n,n+2}} = -\dfrac{a}{4}\beta_{n+1}$; $\quad B_{n,n-2} = \dfrac{\gamma_{n-1}}{4} + \dfrac{3(\varepsilon^2-2)}{16a}$;

$B_{n,n+2} = \dfrac{\gamma_{n+1}}{4} + \dfrac{3(\varepsilon^2-2)}{16a}$; $\quad B_{nn} = \dfrac{3\varepsilon^2}{16a}(\alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}) - \dfrac{\gamma_n}{2} - 1$;

$\overline{B_{n,n-2}} = \dfrac{\varepsilon^2-2}{4}\beta_{n-1} + \dfrac{a}{4}\alpha_{n-1} + \dfrac{\varepsilon^2}{4}$; $\quad \overline{B_{n,n+2}} = \dfrac{\varepsilon^2-2}{4}\left(\beta_{n+1} + \dfrac{a}{4}\alpha_{n+1}\right) + \dfrac{\varepsilon^2}{4}$;

$\overline{B_{nn}} = \dfrac{\varepsilon^2}{4}(\beta_{n-1}+\beta_{n+1}) - \dfrac{\alpha_n a}{2} - \dfrac{2-\varepsilon^2}{2}$; $\quad a = \sqrt{1-\varepsilon^2}$.

В правих частинах системи (3.8) стоять коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_1(t)$ і $\overline{\varphi_2}(t)$, які є обмеженими. Система (3.8) зводиться до вигляду квазірегулярної системи і має єдиний розв'язок.

Аналогічні системи отримуємо і для непарних n відносно a_n і $\overline{a_n}$, а також для парних і непарних n відносно інших невідомих коефіцієнтів $b_n, \overline{b_n}$.

До подібного результату прийдемо і для платівки, обмеженої контуром симетрично або несиметрично деформованого еліпсу с рівнянням (1.3) або (1.4) відповідно.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. - М.: ГИТТЛ, 1963.-415 с.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. –М.-Л.: ГИТТЛ,1950.-625 с.
3. Линейные уравнения математической физики/ Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. - М.: Наука,1964.-368 с.
4. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ,1957.-256 с.
5. Шишканова С.Ф. Применение интегральных уравнений к решению краевых задач для уравнений математической физики высших порядков// Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. II Респ. научно - техн. конф. –К.,1986.- С. 75-76.