УДК 539.3

ЗВ'ЯЗОК РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ВДАВЛЕННЯ ПЛОСКОГО ШТАМПА ВІД ПОКАЗНИКІВ ШОРСТКОСТІ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

Д'яченко Н.М., Шишканова С.Ф.

Чисельний розв'язок задачі про вдавлення кругового в плані плоского штампу в пружний півпростір для деяких показників шорсткості, що обмежені знизу, було наведено в [1].

Розглянемо цю задачу при лінійному законі деформування шорсткості і знайдемо її аналітичний розв'язок в класі неперервних на відрізку $[0,a]$ функцій (a – радіус круга контакту), який виражається через повторні ряди. Такий розв'язок для показників шорсткості, які обмежені знизу, авторами було наведено в [3].

Тиск $p(\rho)$ ($\rho-$ полярна координата) штампа на пружний півпростір із шорсткістю при лінійному законі деформування шорсткості задовольняє інтегральному рівнянню, яке містить інтеграл із слабкою особливістю [1]. Залежно від показників шорсткості це рівняння вимагає різних методів розв'язування. У роботі розглянуті два можливі випадки обмеженості показників шорсткості.

Інтегральне рівняння розподілу нормального тиснення під круговим в плані неплоским штампом, що вдавлюється вертикальною силою Q в пружний півпростір з шорсткою поверхнею характеризується функцією $p(\rho)$, яка задовольняє інтегральному рівнянню [1]:

$$\frac{B_1}{2\pi}\left[p(\rho)\right]^k + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Omega}\frac{p(\rho')}{r(\rho,\rho')}\,ds = \delta_1 . \qquad (1)$$

Тут Ω - круг радіуса a, (ρ,θ) - полярні координати точок півпростору, $(\rho,\theta)\in\Omega$, $ds = \rho'\,d\rho'\,d\theta'$, $r(\rho,\rho') = \sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\theta-\theta')}$, $\delta_1 = \delta\,c/2\pi$, $B_1 = B\,c,$, $c = \pi E/\left(1-\nu^2\right)a$, δ - поглиблення штампа при вдавленні, B і k - показники шорсткості, E - модуль пружності, ν - коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо оператор A на просторі неперервних функцій, що мають вигляд [4]

$$Ap = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Omega}\frac{p(\rho')}{r(\rho,\rho')}\,ds .$$

При лінійному законі деформування шорсткості, тобто при $k=1$, інтегральне рівняння (1) в операторній формі має вигляд:

$$\left(I + 2\pi/B_1\,A\right)p = 2\pi/B_1\,\delta_1 . \qquad (2)$$

Відповідно до виразу для силової функції простого шару щільності $p(\rho)$ у точці маємо:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{p(\rho')}{r(\rho,\rho')}\,ds = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 U_{2n}(\rho),$$

$$U_{2n}(\rho) = \int\limits_0^{\rho}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{2n-1}p(\rho')d\rho' + \int\limits_{\rho}^{a}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{2n}p(\rho')d\rho' .$$

Ряд, через який виражається силова функція, збігається для кожного значення $\rho\in[0,a]$ [2].

Випадок перший : $\boldsymbol{B_1 > 2\pi}$.

Відомо [3], що

$$\|A\| \le 1. \tag{3}$$

Якщо $B_1 > 2\pi$, то $2\pi/B_1 \, \|A\| < 1$. Тоді операторне рівняння (2) має єдиний розв'язок у класі неперервних на $[0,a]$ функцій, який записується у вигляді [4, 3]:

$$p(\rho) = 2\pi/B_1 \; \delta_1 \left(I + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left(2\pi/B_1 \right)^r A^r e \right) =$$

$$2\pi/B_1 \; \delta_1 \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r S_r^0 \left\{ \left(\rho/a \right)^{2n} \right\}_{n=0}^{\infty} \right), \tag{4}$$

де

$e(\rho) = 1$ для кожного $\rho \in [0,a]$,

$$S_r^m \{x_i\}_{i=0}^{\infty} = \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{mn_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \ldots \sum_{n_r=0}^{\infty} a_{n_{r-1} n_r} x_{n_r}, \tag{5}$$

$$a_{mn} = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{1}{2m-2n+1},$$

$$(r \in \{1,2,3,\ldots\}; \quad m \in \{0,1,2,\ldots\}; \quad n \in \{0,1,2,\ldots\}).$$

Якщо на круговий штамп діє вертикальна сила Q, спрямована по осі симетрії, під дією якої штамп вдавлюється в пружний півпростір на глибину δ, то з умови рівноваги $Q = \iint_{\Omega} p(\rho') \, ds$ маємо

$$\frac{\pi E a}{(1-\nu^2) Q} \delta = \frac{B_1}{2\pi} \gamma^{-1}, \tag{6}$$

$$\gamma = 1/2 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left(2\pi/B_1 \right)^r S_r^0 \left\langle 1/(2n+2) \right\rangle_{n=0}^{\infty}. \tag{7}$$

Таким чином, приходимо до висновку: для кожного $B_1 > 2\pi$, існує розв'язок рівняння (2), який є неперервною на відрізку $[0,a]$ функцією, яка може бути представлена у вигляді (4). Глибина, на яку вдавлюється штамп, обчислюється за допомогою (6).

Наближені обчислення основані на наступній ідеї. Вирази (4), (7) містять r-кратні ряди, які виражаються через $(r-1)$-кратні наступним чином:

$$S_r^m \{x_i\}_{i=0}^{\infty} = S_1^m \left\{ S_{r-1}^i \{x_j\}_{j=0}^{\infty} \right\}_{i=0}^{\infty} \quad (m \in \{0,1,2,\ldots\}) \tag{8}$$

Сума в (5) рядів замінюються J-ими, а ряд по r в (4), (7) - N-ими частковими сумами. Обчислювальний алгоритм реалізовано на ЕОМ на мові програмування FORTRAN 77. Знайдемо оцінку точності результатів, що отримані заміною сум рядів на зазначені вище часткові їх суми.

Позначимо наближені значення відповідних величин рискою зверху, а через ε_r $(r \in \{1,2,3,\ldots\})$ - числа, що задовольняють нерівності:

$$\left\| S_r^m \left\{ \left(\rho/a \right)^{2i} \right\}_{i=0}^{\infty} - \overline{S_r^m} \left\{ \left(\rho/a \right)^{2i} \right\}_{i=0}^{\infty} \right\| < \varepsilon_r$$

для кожного $m \le J$. Тоді для всіх $m \le J$ маємо:

$$\left\| S_1^m\{x_i\}_{i=o}^{\infty} - \overline{S_1^m}\{x_i\}_{i=0}^{J} \right\| \le \frac{0{,}58 + ln(J+1)}{2\pi J} \max_{0\le i<\infty}\|x_i\| = \varepsilon_1 \max_{0\le i<\infty}\|x_i\|. \qquad (9)$$

$$\left\| S_r^m\left\{\left(\rho/a\right)^{2i}\right\}_{i=0}^{\infty} \right\| = \left\| A^r\left[\left(\rho/a\right)^{2m}\right] \right\| \le 1, \ (r \in \{1,2,3,\ldots\}) \qquad (10)$$

Нехай $y_i = S_{r-1}^i\left\{\left(\rho/a\right)^{2j}\right\}_{j=0}^{\infty}$, тоді на основі (3), (8), (10) отримаємо для кожного $m \le J$:

$$\left\| S_r^m\left\{\left(\rho/a\right)^{2i}\right\}_{i=0}^{\infty} - \overline{S_r^m}\left\{\left(\rho/a\right)^{2i}\right\}_{i=0}^{J} \right\| \le \left\| S_1^m\{y_i - \overline{y_i}\}_{i=0}^{\infty} \right\| + \left\| \left(S_1^m - \overline{S_1^m}\right)\{\overline{y_i} - y_i + y_i\}_{i=0}^{\infty} \right\| <$$

$$< \varepsilon_{r-1} + \varepsilon_1(\varepsilon_{r-1} + 1),$$

тоді

$$\left\| S_r^m\left\{\left(\rho/a\right)^{2i}\right\}_{i=0}^{\infty} - \overline{S_r^m}\left\{\left(\rho/a\right)^{2i}\right\}_{i=0}^{J} \right\| < (1+\varepsilon_1)^r - 1.$$

З наведеного вище маємо такі оцінки точностей обчислень:

1) з формули (4) -

$$\frac{1}{\delta_1}\left\|p - \overline{p}\right\| \le 2\pi/B_1 \left[\sum_{r=0}^{N}\left(2\pi/B_1\right)^r \left\| S_r^0\left\{\left(\rho/a\right)^{2i}\right\}_{i=0}^{\infty} - \overline{S_r^0}\left\{\left(\rho/a\right)^{2i}\right\}_{i=0}^{J} \right\| + \sum_{r=N+1}^{\infty}\left(2\pi/B_1\right)^r \left\|A^r e\right\| \right] <$$

$$< \frac{2\pi}{B_1}\left(\frac{B_1}{B_1 - 2\pi(1+\varepsilon_1)} - \frac{B_1}{B_1 - 2\pi} + \frac{\left((2\pi)/B_1\right)^{N+1}}{1 - (2\pi)/B_1} \right);$$

2) з умови рівноваги -

$$\left|\gamma - \overline{\gamma}\right| < 1/2 \left\| p(\rho) - \overline{p}(\rho) \right\|;$$

3) точності величин δ, $p(\rho)$ визначається точностями, які знайдені в 1), 2);

4) щоб дотриматись точності не більше, ніж 10^{-2}, наприклад, для $B_1 = 9$, необхідно, згідно з формулами, що наведені в 1), 2) і (9), взяти $N = 25$, а $J = 200$. У дійсності, для отримання такого самого результату можна брати N і J значно меншими.

Випадок другий: $\boldsymbol{0 < B_1 < 2\pi}$.

У рівнянні (2) покладемо $\mu = 1 - B_1/2\pi$ і перепишемо його у вигляді

$$p - (\mu I - A)p = \delta_1. \qquad (11)$$

Розглянемо норму функції

$$[(\mu I - A)p](\rho) = \mu p(\rho) - \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Omega} \frac{1}{r(\rho,\rho')} p(\rho')ds$$

для знакододатних функцій $p(\rho) \in C[0,a]$.

Нехай

$$\left\|(\mu I - A)p\right\| = \max_{[0,a]} \left|[(\mu I - A)p](\rho)\right| = \left|\mu p(\rho_0) - [Ap](\rho_0)\right|.$$

Якщо $\mu p(\rho_0) \geq [Ap](\rho_0)$, то звертаючи увагу на те, що $[Ap](\rho) \geq 0$ для знакододатних функцій $p(\rho)$, отримаємо:

$$\|(\mu I - A)p\| = \mu p(\rho_0) - [Ap](\rho_0) \leq \mu p(\rho_0) \leq \mu \|p\|. \tag{12}$$

Якщо $\mu p(\rho_0) \leq [Ap](\rho_0)$, то враховуючи співвідношення (3) і

$$\mu p(\rho_0) \leq [Ap](\rho_0) \leq \|p\|,$$

отримаємо існування $q \in (0;1)$ такого, що $\mu p(\rho_0) = q\|p\|$, і справедливість ланцюжка нерівностей

$$\|(\mu I - A)p\| = [Ap](\rho_0) - \mu p(\rho_0) \leq (1-q)\|p\|. \tag{13}$$

Таким чином, якщо $0 < B_1 < 2\pi$, то, враховуючи (12) і (13), приходимо до висновку, що існує таке $\alpha = max\{\mu; (1-q)\} \in (0,1)$, що на класі знакододатних функцій

$$\|(\mu I - A)p\| \leq \alpha \|p\|. \tag{14}$$

Отже [4], ***якщо $0 < B_1 < 2\pi$, рівняння (11) має розв'язок на класі неперервних на $[0,a]$ знакододатних функцій.***

Розв'язком рівняння (11) буде така функція:

$$p(\rho) = \delta_1 \sum_{r=0}^{\infty} [\mu I - A]^r e, \tag{15}$$

$$p(\rho) = \delta_1 \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{r} (-1)^i C_r^i \mu^{r-i} S_i^0 \left\langle \left(\rho / a \right)^{2n} \right\rangle_{n=0}^{\infty} + \mu^r \right\} \right), \tag{16}$$

тут $C_r^i = r! / i!(r-i)!$ $(r \in N, i \in \{1,2,...,r\})$.

З умови рівноваги маємо

$$\frac{\pi E a}{(1-\nu^2)Q} \delta = \gamma^{-1}, \tag{17}$$

$$\gamma = 1/2 + \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{r} (-1)^i C_r^i \mu^{r-i} S_i^0 \left\langle 1/(2n+2) \right\rangle_{n=0}^{\infty} + 1/2 \mu^r \right\} \tag{18}$$

Для отримання наближених значень функції тиснення плоского штампа розглянемо суму по r в (16) до M з наближеними членами того ж вигляду, як і було вище.

Позначимо $\sigma_r(\rho) = [\mu I - A]^r e$, врахуємо (14), тоді

$$\left\| \sigma_r - \overline{\sigma_r} \right\| < (\alpha + \varepsilon_1)^r - \alpha^r,$$

де ε_1 визначено в (10). Тому маємо:

$$\frac{1}{\delta_1} \left\| p - \overline{p} \right\| \leq \sum_{r=M+1}^{\infty} \|\sigma_r\| + \sum_{r=0}^{M} \left\| \sigma_r - \overline{\sigma_r} \right\| \leq \frac{\varepsilon_1}{(1-\alpha)(1-\alpha-\varepsilon_1)} + \frac{\alpha^{M+1}}{1-\alpha}.$$

Щоб дотриматись точності не більше, ніж 10^{-2}, наприклад, для $B_1 = 1$, необхідно, згідно з останньою формулою, взяти $M = 50$. Значення $\overline{\gamma}_1$ тоді буде відрізнятися від точного не більше, як на $\delta_1 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$.

У дійсності, для отримання такого самого результату можна брати M значно меншим.

У зв'язку з труднощами, пов'язаними з представленням дійсного числа в ЕОМ, наближені обчислення проводились з подвійною точністю

Для значень B_1, які змінювалися від 0,1 до 12 і для ρ/a - від 0 до 1, проведені обчислення, результати яких наведено на графіках (Рис. 1 і 2). На Рис.1. наведено графік функції $\frac{\pi a^2}{Q} p(\rho)$, що характеризує тиснення під круговим в плані плоским штампом, що вдавлюється в пружний півпростір з шорсткістю.

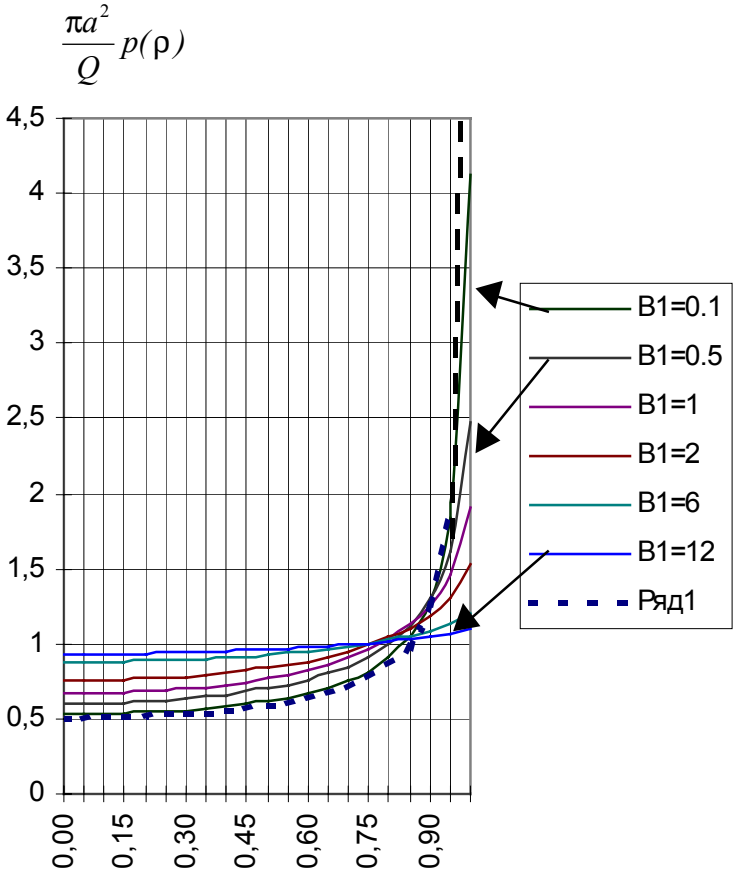

Рис. 1

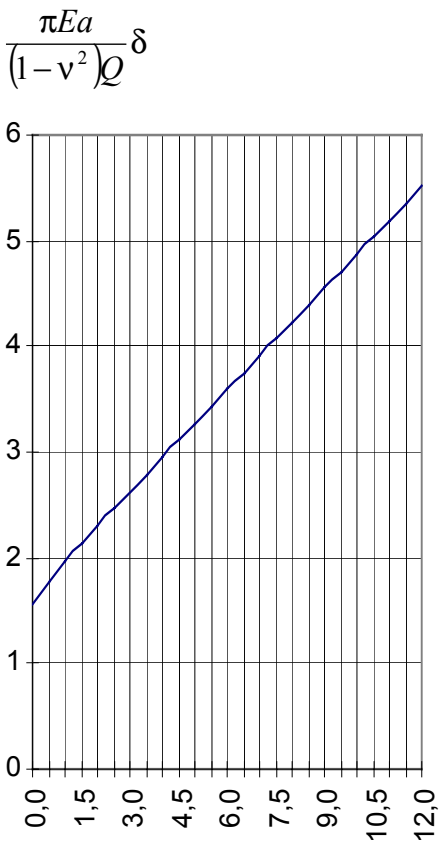

Рис. 2

На рис. 2. - графік залежності поглиблень від коефіцієнтів шорсткості.

Для $B_1 = 0{,}001$ (Рис.1, ряд1) наведений графік зливається в одну лінію з графіком, побудованим за теорією Герца.

Аналізуючи отримані, результати приходимо до таких висновків. Із зменшенням B_1 зменшуються поглиблення штампу в пружний півпростір, при цьому мінімальне тиснення у центрі площадки зменшується, а максимальне тиснення на границі площадки контакту зростає. Ці висновки якісно співпадають з наведеними в [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Горячева И. Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. – М.:Машиностроение, 1988. – 256с.
2. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. - М.: Физматгиз, 1961. – 288 с.
3. Д'яченко Н.М. Шишканова С.Ф.Про розв'язання задачі контакру плоского штампу з шорсткою поверхнею // Вісник ЗДУ. - 1998. - №2. - С.34-38.
4. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Наука, 1962. – 254 с.