УДК 539.3

ДО ПИТАННЯ ПРО НЕЛІНІЙНІ ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ЗА ЧАСОМ ЖОРСТКОСТІ

Грищак В.З., Кабак В.М.

У роботі розглядається вплив характеру поперечного навантаження, статичних зусиль, початкових неправильностей та демпфірування на амплітуду та частоту нелінійних коливань прямокутної пластини. На базі асимптотичного підходу будується наближений аналітичний розв'язок сформульованої проблеми. Результати чисельного аналізу співставлені з даними, які здобуті прямим чисельним методом.

1. ВСТУП

Пластинчаті конструкції широко вживаються в авіакосмічній техніці, суднобудуванні, машинобудуванні, будівництві та інших галузях. Чисельні аварії пов'язані зі збільшенням фактичних навантажень із-за збудження коливань, приводять до необхідності динамічного аналізу конструкцій, працюючих в умовах вимушених коливань. Результати про вплив стискаючих зусиль та геометрії пластини на динамічні характеристики отримані в [1]. У роботі [2] запропоновано підхід до аналізу впливу характеру демпфірування на коливання пластин.

Принциповим з точки зору теоретичного дослідження та практичного вживання є проблема аналізу впливу поперечного навантаження, статичних зусиль, початкових неправильностей та демпфірування на динамічні характеристики пластини, параметри якої залежать від часу.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Розглянемо шарнірно оперту прямокутну пластину з краями, які вільно зміщуються в площині опорного контура. Позначимо через a і b сторони пластини, а товщину - $h(t)=h_0h^*(t)$. Направимо координатні осі x та y вздовж сторін опорного контура. Припустимо, що пластина стискається статичними зусиллями p вздовж сторони a. Питому вагу позначимо як γ. Будемо вважати, що модуль пружності матеріалу пластини змінюється за часом $E(t)=E_0E^*(t)$. Крім того будемо розглядати недосконалу пластину, враховуючи початкові неправильності в формі серединної поверхні, які позначимо через w_0. Приймемо, що на пластину діє рівномірно розподілене поперечне навантаження $q^*(x,y,t)$, тоді інтенсивність поперечного навантаження набуде вигляду:

$$q(x,y,t)=q^*(x,y,t)-2\varepsilon(t)h(t)\frac{\gamma}{g}\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad (1)$$

де $\varepsilon(t)$ – коефіцієнт демпфірування,

g – прискорення вільного падіння,

t – час.

Диференціальні рівняння, що описують вимушені нелінійні коливання розглядуваної пластини наведені в роботі [1]. Використовуючи методику Бубнова-Галеркіна, дану задачу зведемо до розв'язання нелінійного неоднорідного рівняння другого порядку з малим параметром та змінними коефіцієнтами [3]:

$$f''(\tau)+c(\tau)f'(\tau)+\omega^2(\tau)f(\tau)+\alpha\left(P(\tau)f^2(\tau)+Q(\tau)f^3(\tau)\right)=\gamma(\tau), \qquad (2)$$

де $$c(\tau)=2\varepsilon(\tau)\frac{ab}{h_0v^2},\ \omega^2(\tau)=\omega_0^2\varphi(\tau),$$

інші параметри і коефіцієнти наведені в роботі [3].

Рівняння (2), на відміну від рівняння, одержаного в роботі [3], має член, зумовлений наявністю демпфірування. Використовуючи метод подвійного асимптотичного розкладу [4], знаходимо розв'язок рівняння (2) у формі [3]:

$$f(\tau)=\frac{G_1(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}e(\tau)}\left[K-\frac{\gamma_2(\tau)}{\omega_0}\right]+\frac{G_2(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}e(\tau)}\left[L+\frac{\gamma_1(\tau)}{\omega_0}\right]+$$

$$+\alpha\left\{\frac{G_1(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}e(\tau)}\left[\frac{K^2}{\omega_0}R_{112}+\frac{2KL}{\omega_0}R_{122}+\frac{L^2}{\omega_0}R_{222}+\frac{K^3}{\omega_0}P_{1112}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{3K^2L}{\omega_0}P_{1122}+\frac{3KL^2}{\omega_0}P_{1222}+\frac{L^3}{\omega_0}P_{2222}\right]-\frac{G_2(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}e(\tau)}\left[\frac{K^2}{\omega_0}R_{111}+\right.$$

$$+\frac{2KL}{\omega_0}R_{211}+\frac{L^2}{\omega_0}R_{221}+\frac{K^3}{\omega_0}P_{1111}+\frac{3K^2L}{\omega_0}P_{2111}+$$

$$\left.\left.+\frac{3KL^2}{\omega_0}P_{2211}+\frac{L^3}{\omega_0}P_{2221}\right]\right\}, \qquad (3)$$

де інтеграли обчислюються відповідно до [3].

Для нелінійної системи період коливань повинен істотно залежати від ступеня нелінійності системи. Одержаний нами розв'язок (3) описує коливання пластини з періодом $2\pi/\omega(t)$. Тому, для того, щоб наближений аналітичний розв'язок (3) відображував реальну поведінку пластини, необхідно визначити вплив на частоту коливань пластини коефіцієнтів при нелінійних членах. Застосовуючи методику Ліндштедта - Пуанкаре [5], у роботі [6] було знайдено вираз для отримання частоти нелінійних коливань пластини у вигляді:

$$\varphi_{NL}=\varphi+\alpha\frac{3}{4}\frac{Qa^2}{\omega_0^2}+\frac{\alpha^2}{\omega_0^4\varphi}\left(-\frac{5}{6}P^2a^2+2P\gamma_1+\frac{21}{128}Q^2a^4\right). \qquad (4)$$

Підставляючи φ_{NL} замість φ у вираз (3), одержано уточнений наближений аналітичний розв'язок рівняння (2).

3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ

Розглянемо пластину з розмірами: $a=100cm,\ \ b=100cm,\ \ h_0=0{,}5cm$, початковий прогин $w_0=0{,}5cm$. Матеріал пластинки - сталь із фізико-механічними характеристиками: питома вага $\delta=7{,}8\ \ kg/cm^3$, коефіцієнт Пуассона $\mu=0{,}3$ та модуль пружності, який змінюється за законом $E(\tau)=2{,}1\cdot10^6\cdot(1-0{,}019518\tau)\ kg/cm^2$. Статичне зусилля приймемо $p=50kg$, у безрозмірному виді $\overline{p}=0{,}952$. Коефіцієнт демпфірування виберемо $\varepsilon=0$. Будемо вважати, що в як змушуючая сила, на пластинку діє рівномірно розподілене поперечне навантаження $q(t)=0{,}002+0{,}0003t\ \ kg\cdot sek/cm^2$, а в безрозмірному вигляді $\overline{q}^*(\tau)=0{,}043(1{,}0+0{,}156\tau)$. Тоді коефіцієнти та параметри рівняння (2) запишуться таким чином [3]: $c(\tau)=0$; $\omega_0=153{,}0217$; $\varphi(\tau)=0{,}00216237-0{,}00005\tau$; $\alpha=0{,}005$; $Q(\tau)=2435{,}227(1-0{,}019518\tau)$; $\gamma(\tau)=2{,}47(1+0{,}156144\tau)+9{,}4$.

На рис. 1 - 6 показано вплив поперечного навантаження, статичних зусиль, початкових неправильностей та демпфірування на характер коливань пластини.

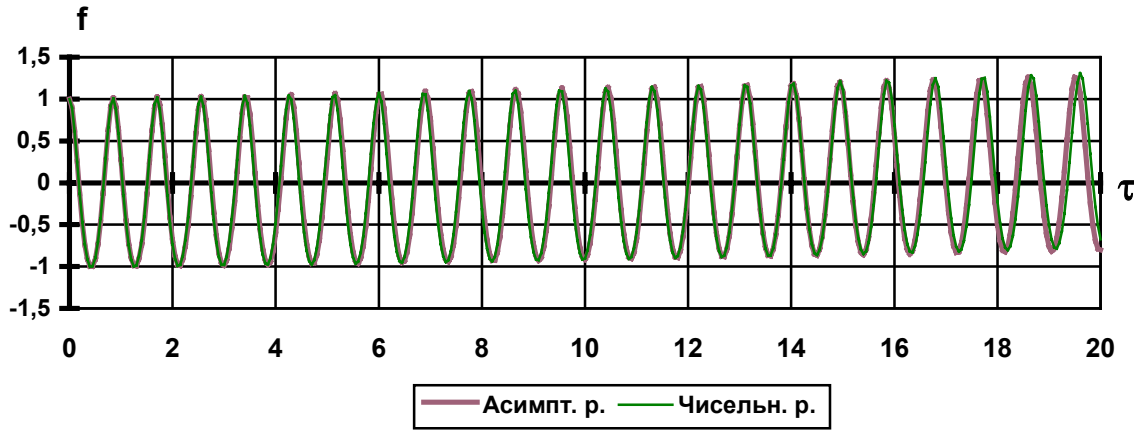

Рис. 1 Зіставлення асимптотичного розв'язку рівняння (2) з чисельними результатами методу Рунге - Кутта

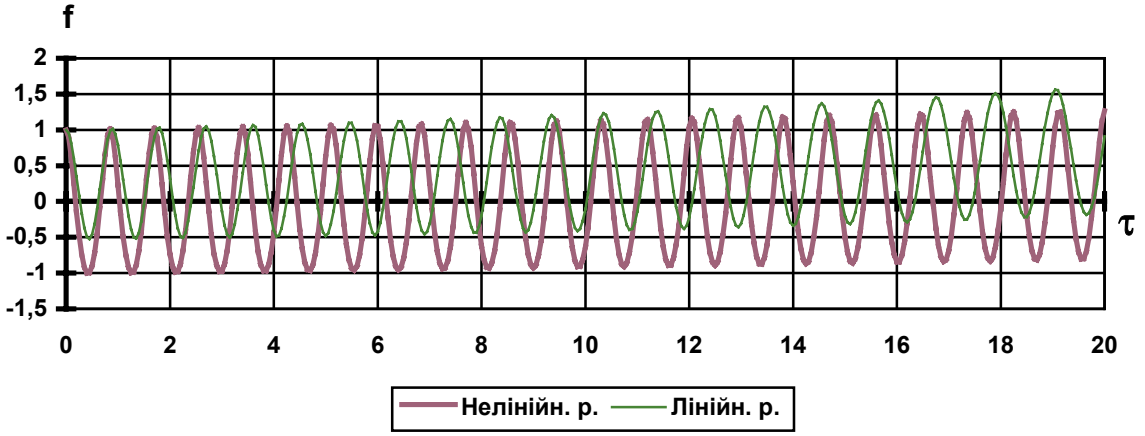

Рис. 2 Зіставлення асимптотичних розв'язків рівняння (1) при $\alpha = 0{,}005$ та $\alpha = 0{,}0$

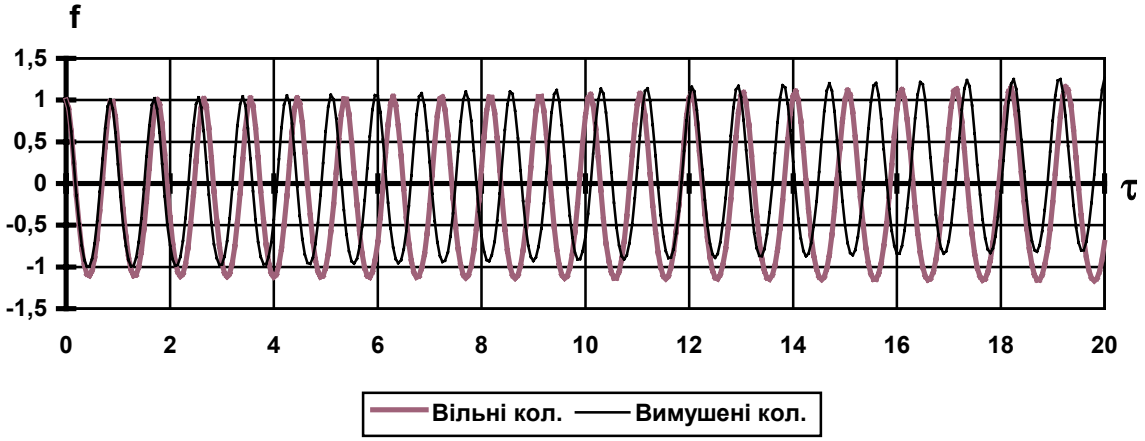

Рис.3 Форма коливань пластини за часом при $\overline{q}^{*}(\tau) = 0{,}0$ і $\overline{q}^{*}(\tau) = 0{,}043(1{,}0 + 0{,}156\tau)$

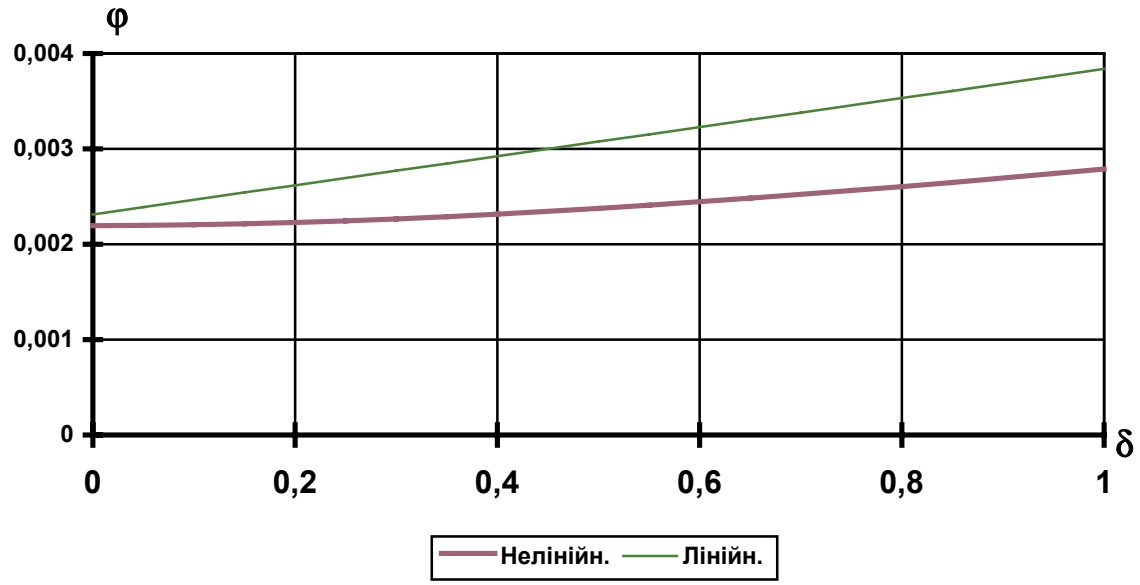

Рис. 4 Вплив розтягуючих статичних зусиль $\delta = \overline{p} / p_0^*$ на частоту коливань пластини

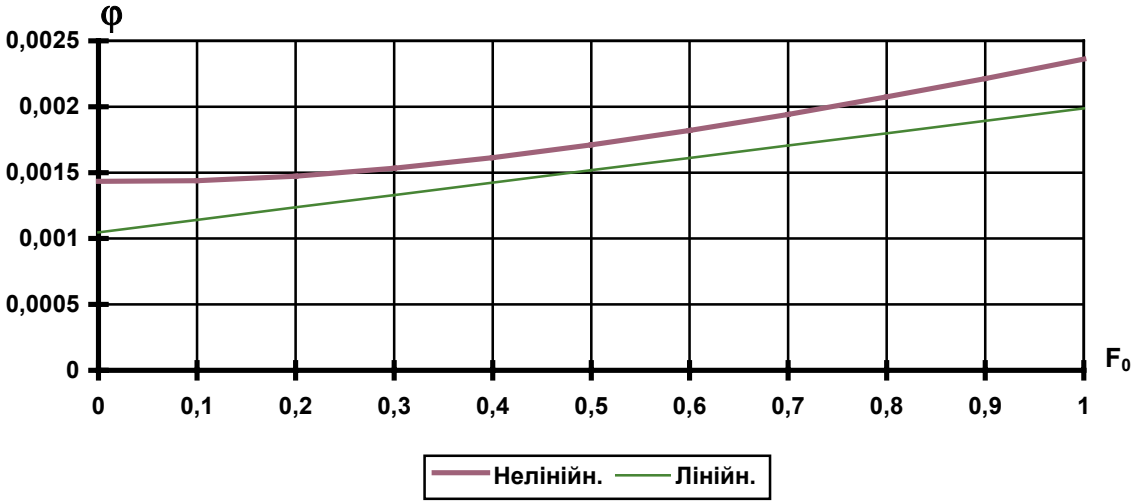

Рис. 5 Вплив початкового прогину F_0 на частоту коливань пластини

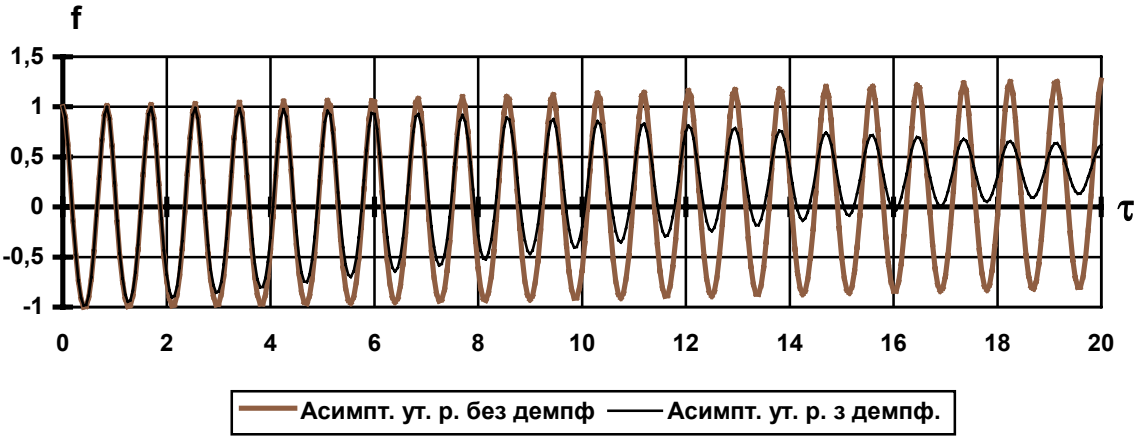

Рис. 6 Форма коливань пластинки за часом при $c(\tau) = 0{,}0$ і $c(\tau) = 0{,}05 + 0{,}01\tau$

ВИСНОВКИ

Аналіз отриманих результатів показав, що у випадку нелінійних коливань пластини, на відміну від лінійних, спостерігається збільшення частоти коливань приблизно на 10%, а амплітуди коливань - на 30% (рис. 2). Порівнюючи нелінійні вимушені та вільні коливання пластини, одержуємо, що у випадку дії на пластину змушуючої сили частота коливань пластини збільшується, а амплітуда коливань зменшується (рис. 3), на відміну від лінійних коливань, при яких частота коливань не залежить від характеру зміни змушуючої сили. Зростання початкового прогину F_0, також як і зростання розтягуючих статичних зусиль, викликає зростання частоти коливань пластини при $\alpha \neq 0{,}0$ (нелінійні коливання) та при $\alpha = 0{,}0$ (лінійні коливання) (рис. 4, рис. 5). Наявність демпфірування значно впливає на поведінку системи, зменшуючи амплітуду коливань за часом (рис. 6). Достовірність результатів асимптотико-чисельного методу зумовлена зрівнянням з прямим чисельним методом Рунге – Кутта. Результати обох методів практично співпали. Так, різниця амплітудних значень склала приблизно 1% (рис. 1).

ЛІТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.: Наука, 1972. - 432 с.
2. Космодамианский А.С., Гофман М.Н. О продольных затухающих колебаниях пластин // Прикл. механика. - 1991. - 27, № 1. С. 124 - 127.
3. Кабак В.Н. Метод двойного асимптотического разложения в задаче о вынужденных колебаниях прямоугольной пластины с параметрами, зависящими от времени // Механіка та машинобудування. - 1998. - № 1. - С. 56 - 62.
4. Gristchak V.Z., Kabak V.N. Doudle Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technishe Mechanik. - 1996. - № 4. - P. 285 - 296.
5. Найфе А.Х. Методы возмущений: Пер. с англ. - М: Мир, 1976. - 456 с.
6. Грищак В.З., Кабак В.М. Про один асимптотичний підхід для дослідження вимушених коливань прямокутних пластин, параметри яких залежать від часу // Вісник Запорізького державного університету. - 1999. - № 1. - С. 35 - 40.