УДК 539.3

АСИМПТОТИЧНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ НАПРУЖЕНЬ У СТИСНУТІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Грищак В.З., Головань О.О.

У роботі на основі енергетичного підходу розв'язується задача стійкості стиснутої кругової циліндричної оболонки змінної товщини. Аналіз будується на енергетичному підході з урахуванням геометричної нелінійності.Пропонується наближена асимптотична формула для обчислювання критичних напружень у стиснутій циліндричній оболонці з товщиною, яка змінюється періодично вздовж осьової координати. Надається порівняльний аналіз чисельних результатів з існуючими в літературі даними.

1. ВСТУП

Існує значна кількість наукових праць, присвячених чутливості стиснутої кругової циліндричної оболонки до початкових недосконалостей геометричної форми. Так, проблема впливу на стійкість оболонки локалізованих початкових недосконалостей розглядалася в роботах [1], [2], де показано, що локалізовані початкові недосконалості небезпечні, як і недосконалості періодичного типу. У роботі [3] виведена аналітична формула, що дозволяє знаходити критичне навантаження, і показано, що його зниження пропорційне $a_l^{2/3}$, де a_l - амплітуда локалізованої недосконалості.

Аналіз чутливості кругової циліндричної оболонки до періодичних дефектів товщини проводився в [4]. Досліджувалася лінійна розв'язувальна система диференціальних рівнянь, і за допомогою асимптотичного методу були виведені аналітичні вирази, що дозволяють оцінити зниження величини параметра критичного зусилля. Отримані результати показали, що стиснута кругова циліндрична оболонка чутлива до періодичних дефектів товщини, хоча й значно менше в порівнянні з впливом початкових недосконалостей.

На базі ідей [1], [2] пропонується асимптотичний підхід та наближена аналітична формула до оцінки впливу характеру зміни товщини оболонки на параметр критичних напружень. Надається порівняльний аналіз чисельних результатів із результатами, отриманими в роботах [4], [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ВИБІР АПРОКСИМУЮЧИХ ФУНКЦІЙ

Нелінійний функціонал повної енергії циліндричної оболонки з початковими недосконалостями товщини та геометричної форми під дією осьового стискального навантаження береться у формі [2]:

$$P[u,v,w,w_0]=\frac{E}{2(1-\nu^2)R^2}\iint_{\Omega}\Big\{h(u'_x)^2+h(\dot v_y+w)^2+$$

$$+2h\nu u'_x(\dot v_y+w)+\frac{1}{2}h(1-\nu)(\dot u_y+v'_x)^2+\frac{h^3}{12R^2}\Big[(w''_{xx})^2+(\ddot w_{yy})^2+$$

$$+2\nu w''_{xx}\ddot w_{yy}+2(1-\nu)(\dot w'_{yx})^2\Big]-\frac{(1-\nu^2)h\sigma}{E}\Big((w'_x)^2+2w'_x w'_{0x}\Big)+$$

$$+\frac{h}{R}\Big(u'_x+\nu(\dot v_y+w)\Big)(w'_x)^2+\frac{h}{R}\Big(\dot v_y+w+\nu u'_x\Big)(\dot w_y)^2+$$

$$+\frac{h}{R}(1-\nu)(\dot u_y+v'_x)w'_x\dot w_y\Big\}dx\,dy\ , \qquad (1)$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$- переміщення в осьовому, круговому і нормальному напрямках відповідно, $w_0(x,y)$- функція початкової недосконалості, $h(x,y)$- товщина оболонки, E - модуль пружності, ν - коефіцієнт Пуассона, R - радіус оболонки, σ - осьове навантаження, x - безрозмірна координата в осьовому напрямку, y - безрозмірна координата в круговому напрямкові, Ω - поверхня оболонки, $[f]'_x$ - похідна по координаті x, $[\dot{f}]_y$ - похідна по координаті y.

У наближеному аналізі ми будемо використовувати метод Релея-Ритца, відповідно до якого функції переміщення виберемо в такому вигляді [2]:

$$u(x,y)=b_0\left(-\frac{\nu}{2m}sin(2mx)+\frac{1-\nu}{m}sin(mx)cos(my)\right)\times$$

$$\times exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \qquad (2)$$

$$v(x,y)=b_0\left(-\frac{3+\nu}{m}\cos(mx)\sin(my)\right)\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \qquad (3)$$

$$w(x,y)=b_0(\cos(2mx)+4\cos(mx)\cos(my))\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \qquad (4)$$

де b_0 - амплітудна характеристика переміщення,

μ^2 - параметр, що впливає на характер локалізації, $m=\sqrt{\frac{cR}{2h_0}}$ - ціле число півхвиль, $c=\sqrt{3(1-\nu^2)}$.

Початкові недосконалості згинної форми задамо таким чином:

$$w_0(x,y)=k\,h_0(cos(2mx)+4\,cos(mx)cos(my))\times$$

$$\times exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \qquad (5)$$

де k - амплітуда локалізованої недосконалості, h_0 - номінальна товщина оболонки.

Будемо розглядати змінну товщину оболонки в такій формі:

$$h(x,y)=h_0\left(1-\varepsilon\,cos(2mx)exp\left(-\frac{N^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)\right), \qquad (6)$$

де ε - малий у порівнянні з одиницею параметр, що впливає на амплітудне значення товщини оболонки, N^2 - параметр, що впливає на характер локалізації товщини.

Характер змінювання товщини оболонки у формі (6) уздовж осьової координати $\tilde{x}=mx$ у залежності від значень параметрів ε і $\frac{N^2}{m^2}$ показаний на рис 1.

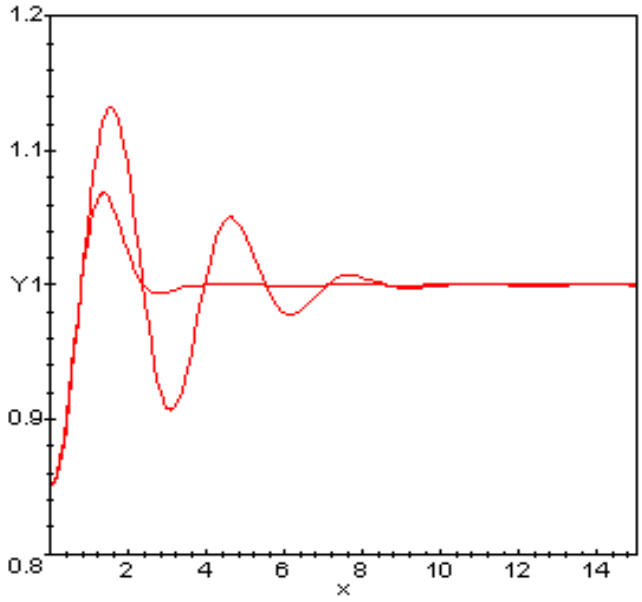

Рис.1 Змінювання товщини оболонки при значеннях параметрів $\varepsilon = 0.15$, $\frac{N^2}{m^2} = 0.1\ ;\ 0.75$.

Використовуючи співвідношення (2)-(6), знайдемо похідні, а потім й усі доданки, що входять до функціонала повної енергії (1), зневажаючи при цьому членами, що містять величини $\frac{\mu^4}{m^4}$, $\varepsilon\frac{\mu^2}{m^2}$, ε^2 і величини більш високих порядків малості в порівнянні з параметрами ε і $\frac{\mu^2}{m^2}$. Після підстановки цих виразів у функціонал енергії (1), одержимо таке його зображення:

$$P[u,v,w,w_0] = \frac{E}{2(1-\nu^2)R^2}\iint\left\{\left[h_0 exp^2\left(-\frac{\mu^2}{2}(x^2+y^2)\right)\left(f_{11}+\frac{\mu^2}{m^2}f_{12}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{h_0{}^3 m^4}{12R^2}exp^2\left(-\frac{\mu^2}{2}(x^2+y^2)\right)\left(f_{21}+\frac{\mu^2}{m^2}f_{22}\right)-$$

$$\left.-\frac{h_0 m^2(1-\nu^2)\sigma}{E}exp^2\left(-\frac{\mu^2}{2}(x^2+y^2)\right)\left(f_{31}+\frac{\mu^2}{m^2}f_{32}\right)\right]b_0^2+$$

$$+\frac{h_0 m^2}{R}exp^3\left(-\frac{\mu^2}{2}(x^2+y^2)\right)\left(f_{41}+\frac{\mu^2}{m^2}f_{42}\right)b_0^3-$$

$$\left.-\frac{h_0{}^2 m^2 k(1-\nu^2)\sigma}{E}exp^2\left(-\frac{\mu^2}{2}(x^2+y^2)\right)\left(2f_{31}+2\frac{\mu^2}{m^2}f_{32}\right)b_0\right\}dx\,dy\ , \tag{7}$$

де кожна складова функції $f_{i,j}(x,y)$, $(i=1,\ldots,4\ ;\ j=1,2)$ містить у вигляді множників тригонометричні функції

$$sin^{\alpha}\tilde{m}x\,,\quad cos^{\alpha}\tilde{m}x\,,\quad sin^{\alpha}\tilde{m}y\,,\quad cos^{\alpha}\tilde{m}y\,.$$

Тут $\alpha = 0,\ldots,3$; $\tilde{m}$ приймає цілі значення.

За допомогою тригонометричних перетворень усі складові функцій $f_{i,j}(x,y)$ можуть бути значно спрощені і будуть містити тільки множники

$$cos^{\alpha}\tilde{k}\,x\cdot cos^{\beta}\tilde{p}\,y\,,\ cos^{\alpha}\tilde{k}\,x\cdot sin^{\beta}\tilde{p}\,y\,,\ cos^{\alpha}\tilde{k}\,y\cdot sin^{\beta}\tilde{p}\,x\,,\ sin^{\alpha}\tilde{k}\,x\cdot sin^{\beta}\tilde{p}\,y\,.$$

Тут $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$; $\tilde{k}$ і $\tilde{p}$ приймають цілі значення.

1. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛУ ЕНЕРГІЇ. ФОРМУЛА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Оскільки усі додаки в підінтегральному виразі (7) містять швидко спадаючий експоненціальний множник $exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)$, можна інтегрування по поверхні оболонки Ω замінити інтегруванням по змінних x і y у межах від $-\infty$ до $+\infty$. У цьому випадку кожний інтеграл із співвідношення (8) можна звести до одного з досить відомих інтегралів виду ($\mu > 0$, $\tilde{n}$ - ціле):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\mu^2x^2\right)cos\left(\tilde{n}x\right)\cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\mu}exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{4\mu^2}\right), \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\mu^2x^2\right)\cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\mu}\,, \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,exp\left(-\mu^2x^2\right)sin\left(\tilde{n}x\right)\cdot dx = \frac{\tilde{n}\sqrt{\pi}}{2\mu^3}exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{4\mu^2}\right), \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,exp\left(-\mu^2x^2\right)cos\left(\tilde{n}x\right)\cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu^3}\left(1-\frac{\tilde{n}^2}{2\mu^2}\right)exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{4\mu^2}\right), \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,exp\left(-\mu^2x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu^3}\,. \tag{12}$$

Тому що число $\tilde{n}$ у підінтегральних виразах (8)-(12) є або саме m, або кратне йому число, і величина m набагато більша, ніж μ, то через наявність швидко спадаючого множника $exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)$ внеском інтегралів типу (8), (10), (11) у розв'язок можна зневажити. Таким чином, основний внесок у розв'язок задачі вносять тільки ті інтеграли, де $\tilde{n} = 0$, тобто інтеграли вигляду (9) і (12).

Приймаючи до уваги усе викладене вище, залишимо у виразах для функцій $f_{i,j}(x,y)$ тільки ті доданки, що мають вигляд підінтегральних функцій у рівностях (9) і (12). У цьому випадку вони приймають такий спрощений вигляд:

$$f_{11} = \frac{3}{2}\left(1-\nu^2\right)+\frac{1}{2}\nu\varepsilon\left(1-\nu^2\right)exp\left(-\frac{N^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{13}$$

$$f_{12} = x^2\mu^2\left(\frac{11-7\nu-2\nu^2-\nu^3}{8}\right)+y^2\mu^2\left(\frac{38+18\nu+11\nu^2-3\nu^3}{16}\right), \tag{14}$$

$$f_{21} = 24-24\,\nu\,\varepsilon\,exp\left(-\frac{N^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{15}$$

$$f_{22} = 20+20\nu+x^2\mu^2\left(20-16\nu\right)+y^2\mu^2\left(20-24\nu\right), \tag{16}$$

$$f_{31} = 6+2\,\varepsilon\,exp\left(-\frac{N^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{17}$$

$$f_{32} = \frac{9}{2}x^2\mu^2, \tag{18}$$

$$f_{41} = 6\,\left(1-\nu^2\right)-2\varepsilon\,\left(1-\nu^2\right)exp\left(-\frac{N^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{19}$$

$$f_{42} = x^2\mu^2\left(\frac{3}{2}+2\nu-\frac{3}{2}\nu^2\right)+y^2\mu^2\left(\frac{11}{2}+3\nu-\frac{9}{2}\nu^2\right). \tag{20}$$

Використовуючи рівності

$$\frac{h_0^2m^4}{12R^2} = \frac{\left(1-\nu^2\right)}{16}, \tag{21}$$

$$\left(1-\nu^2\right)m^2\frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\left(1-\nu^2\right)}{2}, \tag{22}$$

де $$\lambda = \frac{\sigma}{E}, \tag{23}$$

$$\lambda_1 = \frac{h_0}{c\,R}, \tag{24}$$

λ_1 - параметр критичного навантаження для ідеальної оболонки, одержимо таке зображення функціонала енергії (7):

$$P\left[u,v,w,w_0\right] = \frac{3\pi}{2}\frac{E\,h_0}{\mu^2R^2}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(1+d\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon B\right)-\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(1+s\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon C\right)\right]b_0^2+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\frac{m^2}{R}\left(1+e\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon A\right)b_0^3-2\frac{\lambda}{\lambda_1}h_0\,k\left(1+s\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon C\right)b_0\right\}, \tag{25}$$

де d, s, e є деякі величини, значення яких залежать від фізичних властивостей матеріалу оболонки,

A, B, C - параметри, що залежать від характеру локалізації як початкових недосконалостей, так і товщини оболонки.

Для розглянутої нами форми зміни товщини (6) величини d, s, e приймають значення:

$$d = \frac{60 + 4\nu + 7\nu^2 - 5\nu^3 + 80\left(1 - \nu^2\right)}{96\left(1 - \nu^2\right)}, \tag{26}$$

$$s = \frac{3}{8}, \tag{27}$$

$$e = \frac{7 + 5\nu - 6\nu^2}{18\left(1 - \nu^2\right)}. \tag{28}$$

При цьому параметри A, B, C даються у формі

$$A = \frac{1}{3 + \frac{N^2}{\mu^2}}, \tag{29}$$

$$B = \frac{\frac{2}{3}\nu}{2 + \frac{N^2}{\mu^2}}, \tag{30}$$

$$C = \frac{-\frac{2}{3}}{2 + \frac{N^2}{\mu^2}}, \tag{31}$$

За умови стійкості системи

$$\delta^2 P = 0 \tag{32}$$

визначаємо значення амплітудної характеристики b_0^* переміщення, для якої виконується ця рівність:

$$b_0^* = -\frac{R\left[\left(1 + d\frac{\mu^2}{m^2} - \varepsilon B\right) - \frac{\lambda}{\lambda_1}\left(1 + s\frac{\mu^2}{m^2} - \varepsilon C\right)\right]}{4m^2\left(1 + e\frac{\mu^2}{m^2} - \varepsilon A\right)}. \tag{33}$$

Підставляючи значення b_0^* з співвідношення (33) в умову рівноваги системи

$$\delta P = 0, \tag{34}$$

одержимо вираз для визначення параметра критичного навантаження λ^*:

$$\left[\left(1+d\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon B\right)-\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\left(1+s\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon C\right)\right]^2 =$$

$$=-4ck\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\left(1+s\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon C\right)\left(1+e\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon A\right). \qquad (35)$$

Спрощуючи вираз (35), одержимо остаточну асимптотичну формулу для визначення критичних напруг:

$$\left[\left(1+(d-s)\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon(C-B)\right)-\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\right]^2 = =-4ck\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\left(1+(e-s)\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon(C-A)\right). \qquad (36)$$

За практичної точки зору цікавим є випадок, коли оболонка має періодичні дефекти товщини, а початкові недосконалості відсутні. Якщо в співвідношенні (6) покласти $N^2=\mu^2=0$, то ми одержимо періодичну форму товщини, розглянуту в роботі [4]. При відсутності початкових недосконалостей (необхідно покласти $ck=0$, $\frac{\mu^2}{m^2}=0$) для даної форми товщини, варіюючи параметр ε, одержимо значення параметра критичного зусилля за допомогою формули (36). Як видно з таблиці 1, результати цього розрахунку погодяться з результатами, отриманими за допомогою асимптотичних підходів, які описані в [4] і [5].

Таблиця 1 - Значення параметрів критичного навантаження для оболонки з періодичними дефектами товщини у вигляді $h(x,y)=h_0(1-\varepsilon\cos(2mx))$ при відсутності початкових недосконалостей

ε	$\frac{\lambda^*}{\lambda_1}$ (Енергетичний підхід)	$\frac{\lambda^*}{\lambda_1}$ (Асимптотичний підхід)
0.00	1.0000	1.0000
0.01	0.9971	0.9988
0.05	0.9856	0.9916
0.10	0.9711	0.9775
0.15	0.9567	0.9582

4. ВИСНОВКИ

У роботі за допомогою асимптотичного підходу отримана аналітична формула для оцінки впливу змінної товщини оболонки на величину критичного навантаження.

Зіставлення результатів розрахунку, отриманих за допомогою запропонованого підходу, з отриманими раніше чисельними результатами підтверджує ефективність асимптотичного розв'язку.

Таким чином, наявність дефектів товщини оболонки може служити причиною зниження критичного навантаження, і це необхідно враховувати при розрахунках реальних конструкцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Koiter W.T. " The Influence of More or Less Localized Short-wave Imperfections on the Buckling of Circula Cylindrical Shells under Axial Compression (in a first approximation)", Rep. WTHD 534, Delft, May 1974, у кн. " Комплексный анализ и его приложения ".-М:Наука, 1978.-С.242-244.
2. Gristchak V.Z. " Asymptotic Formula for the Buckling Stress of Axially Compressed Circula Cylindrical Shells with More or Less Localized Short-wave Imperfections", Rep. WTHD 88, Delft, September 1976.
3. Jamal M., Midani M., Damil N., Potier-Ferry M. " Influence of Localized Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells under Axial Compression ", Int.J. Solids Structures, Vol. 36, 1999, 441-464.

4. Koiter W.T., Elishakoff Y.W., Starnes J.H. “Buckling of an Axially Compressed Cylindrical Shell of Variable Thickness”, Int.J. Solids Structures, №6, 1994, 797-805.

5. Грищак В.З., Головань О.О. Постановка та метод розв'язку задачі про вплив локалізованого змінення товщини оболонки на величину критичних зусиль// Вісник Запорізького державного університету. - 1998. -№1.- С.20-25.