УДК 539.3

РОЗВ`ЯЗОК ОСНОВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ОСНОВ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИМИ ШАРАМИ

Величко І.Г.

Розглядається плоска деформація багатошарової основи з трансверсально ізотропними шарами. Площини ізотропії паралельні межам шарів. Сусідні шари в основі або зчеплені, або можуть прослизати один вздовж другого. Типи контакту шарів можуть довільним чином чергуватися. Система диференціальних рівнянь розв`язується методом перетворення Фур′є. У даній статті побудовані функції податливості для вказаного типу основ та запропонований алгоритм розв`язку у квадратурах першої і другої основних задач для основ з довільною кількістю шарів, що використовує побудовані функції податливості.

1. Фізична постановка задачі. Нехай на верхній межі багатошарової основи відомі напруження (перша основна задача) або переміщення точок основи (друга основна задача). Потрібно визначити переміщення та напруження в довільній точці основи.

Багатошарова основа являє собою пакет із $n \geq 1$ однорідних трансверсально ізотропних шарів (з площиною ізотропії, яка паралельна межам шара), необмежених в плані, котрі лежать на півпросторі (абсолютно жорстком або пружньому). Нумерация шарів проводиться зверху вниз, починаючи з першого. Півпростору, на якому лежить багатошаровий пакет, надамо номер n+1. Кожний шар віднесемо до місцевої прямокутної декартової системи координат з осями X_k, Y_k, Z_k, k=1,...,n з початком на верхній межі шару. Осі Z_k усіх систем координат співвпадають і спрямовані униз. Усі осі X_k, Y_k паралельні. Кожний шар характеризується величинами $G_{0k}, G_{1k}, \nu_k, \nu_{1k}, \nu_{2k}, h_k$ (h_k- товщина шара) [1]. У подальшому індекс k (якщо це не буде сприяти непорозумінням) буде опускатися, або буде писатися верхнім індексом. В даній статті ми обмежимося розглядом випадка, коли деформація є плоскою. Усі переміщення та напруження в основі є функціями координат X та Z. Позначимо через U_k, W_k- проекції переміщень точок k-го шару основи на осі OX_k та OZ_k відповідно.

2. Математична постановка задачі. Задача полягає у розв′язанні системи диференціальних рівняннь для кожного шару

$$\frac{2G}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\left(1-\nu_1\nu_2\right)+\frac{\partial W}{\partial z}\nu_1(1+\nu)\right\}+G_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{2G(1+\nu)\nu_1}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{(1-\nu)}{\nu_2}\right\}+G_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0, \qquad (1)$$

з трьома групами крайових умов.

Перша група:

Якщо k-й та k+1-й шари зчеплені, то

$$U_k\left(x,h_k\right)=U_{k+1}(x,0),\ W_k\left(x,h_k\right)=W_{k+1}(x,0),$$

$$\sigma_{zk}\left(x,h_k\right)=\sigma_{zk+1}(x,0),\ \tau_{xzk}\left(x,h_k\right)=\tau_{xzk+1}(x,0), \qquad (2)$$

а якщо k-й та k+1-й шари можуть прослизати вздовж загальної межі, то

$$U_k\left(x,h_k\right)=U_{k+1}(x,0),\ W_k\left(x,h_k\right)=W_{k+1}(x,0),$$

$$\sigma_{zk}\left(x,h_k\right)=\sigma_{zk+1}(x,0),\ \tau_{xzk}\left(x,h_k\right)=\tau_{xzk+1}(x,0). \qquad (3)$$

Друга група:

Якщо багатошаровий пакет покоїться на жорсткому півпросторі, то

$$U_n(x,h_n) = W_n(x,h_n) = 0\,, \tag{4}$$

а якщо на пружному півпросторі, то

$$\lim_{Z\to\infty} U_{n+1}(x,z) = \lim_{Z\to\infty} W_{n+1}(x,z) = \lim_{Z\to\infty} \sigma_{Z\,n+1}(x,z) = \lim_{Z\to\infty} \tau_{XZn+1}(x,z) = 0 \tag{5}$$

Третя група:

Для першої крайової задачі-

$$\sigma_{Z1}(x,o) = f_1(x)\,,\ \tau_{XZ1}(x) = f_2(x)\,. \tag{6}$$

а для другої

$$U_1(x,o) = f_1(x)\,,\ W_1(x,o) = f_2(x)\,, \tag{7}$$

3. Перетворення Фур′є. Будемо вважати, що усі похідні від переміщень та напруження задовольняють умовам перетворення Фур′є по змінній X [2]

$$F[f(x)] = \overline{f(x)} = \overline{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}dx \tag{8}$$

Застосуємо перетворення (8) до системи (1) та отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь (наведемо тут тільки ті, які стосуються k-го шару):

$$G_1\frac{d^2S}{dz^2} - \frac{2G(1-v_1v_2)}{1-v-2v_1v_2}p^2S + \left(G_1 + \frac{2Gv_1(1+v)}{1-v-2v_1v_2}\right)p^2\frac{d\overline{W}}{dz} = 0\,,$$

$$\frac{2G(1-v^2)v_1}{(1-v-2v_1v_2)v_2}\frac{d^2\overline{W}}{dz^2} - G_1p^2\overline{W} - \left(G_1 + \frac{2Gv_1(1+v)}{1-v-2v_1v_2}\right)\frac{dS}{dz} = 0 \tag{9}$$

де $p = |\xi|, S(\xi,z) = i\xi\overline{U}$.

Для того, щоб усі корені характеристичного рівняння для системи (9) були дійсними (а інакше не можна буде застосовувути обернене перетворення Фур′є) необхідно, щоб величини, які характеризують пружні властивості рідини підкорялись умові

$$G > G_1\left(\nu_2 + \sqrt{\frac{\nu_2(1-\nu)(1-\nu_1\nu_2)}{\nu_1(1+\nu)}}\right), \tag{10}$$

яку надалі вважаємо виконаною.

Якщо застосувати позначення $g = G/G_1$, $H = \dfrac{\nu_2(1-\nu-2\nu_1\nu_2)}{2\nu_1(1+\nu)}$,

$$t_{1,2} = \sqrt{\frac{g-\nu_2}{1-\nu}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\nu_2(1-\nu)(1-\nu_1\nu_2)}{\nu_1(1+\nu)(g-\nu_2)^2}}\right)}, M_i = \frac{1}{t_i}\frac{2g(1-\nu_1\nu_2) - (1-\nu-2\nu_1\nu_2)t_i^2}{2g(1+\nu)\nu_1 + (1-\nu-2\nu_1\nu_2)}, \text{ i = 1,2} \tag{11}$$

то загальний розв`язок системи (9) можна записати у вигляді

$$S = A\,p\,sh(t_1pz) + B\,p\,ch(t_1pz) + C\,p\,sh(t_2pz) + D\,p\,ch(t_2pz)$$

$$\overline{W} = AM_1\,ch(t_1pz) + BM_1\,sh(t_1pz) + CM_2\,ch(t_2pz) + DM_2\,sh(t_2pz)\,, \tag{12}$$

де A, B, C, D - довільні функції від ξ.

Застосувавши до закону Гука перетворення Фур`є, можна обчислити трансформанти напружень:

$$\overline{\sigma_z} = \frac{G}{H}\left((1-\nu)\frac{d\overline{W}}{dz} - \nu_2 S\right),\ \overline{\sigma_x} = \frac{G}{H}\left(\frac{d\overline{W}}{dz} - \frac{\nu_2(1-\nu_1\nu_2)}{\nu_1(1+\nu)}S\right),$$

$$\overline{\tau_{xz}} = -\frac{i\xi}{p^2}G_1\left(\frac{dS}{dz} + p^2\overline{W}\right) \tag{13}$$

Введемо такі допоміжні функції:

$$\alpha = H\overline{\sigma_z}\big|_{Z=0},\ \beta = G_1 p\overline{W}\big|_{Z=0},\ \gamma = -GS|_{Z=0},\ \delta = -\frac{i\xi}{p}\overline{\tau}_{xz}\big|_{Z=0}. \tag{14}$$

Виразивши через них функції A, B, C, D, отримаємо розв′язок системи (9) у вигляді:

$$S = \frac{\alpha}{\nabla G}(C_2 - C_1) + \frac{\beta}{\Delta G_1}(Y_2 S_1 - Y_1 S_2) + \frac{\gamma}{\nabla G}(L_1 C_2 - L_2 C_1) + \frac{\delta}{\Delta G_1}(M_2 S_1 - M_1 S_2)$$

$$p\overline{W} = \frac{\alpha}{\nabla G}(M_2 S_2 - M_1 S_1) + \frac{\beta}{\Delta G_1}(M_1 Y_2 C_1 - M_2 Y_1 S_1) +$$

$$+ \frac{\gamma}{\nabla G}(L_1 M_2 S_2 - L_2 M_1 S_1) + \frac{\delta}{\Delta G_1} M_1 M_2 (C_1 - C_2) \tag{15}$$

У цих формулах застосовані позначення:

$$L_i = M_i t_i (1-\nu) - \nu_2, \qquad Y_i = M_i + t_i \qquad i = 1,2$$
$$\Delta = M_1 t_2 - M_2 t_1, \quad \nabla = L_2 - L_1$$
$$C_i = ch(t_i pz), \quad S_i = sh(t_i pz), \quad C_g = ch(pz\sqrt{g}), \quad S_g = sh(pz\sqrt{g}) \tag{16}$$

Із формул (15) видно, що задача визначення трансформант напружень і переміщень у k-му пружному шарі, а отже і його напруженого стану, еквівалентна задачі визначення четвірки допоміжних функцій $\alpha_k(\xi), \beta_k(\xi), \gamma_k(\xi), \delta_k(\xi)$.

4. Функції податливості. Застосування перетворення Фур′є до формул (2) та (3) дозволяє знайти рекурентні співвідношення між допоміжними функциями сусідніх шарів.

Почнемо з випадку, коли k та k+1-й шари зчеплені.

$$\alpha_{k+1} = \frac{H_{k+1}}{H_k}\left[\frac{\alpha_k}{\nabla_k}(L_{2k}C_{2k} - L_{1k}C_{1k}) + \frac{\beta_k g_k}{\Delta_k}(L_{1k}Y_{2k}S_{1k} - L_{2k}Y_{1k}S_{2k}) +\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_k}{\nabla_k} L_{1k}L_{2k}(C_{2k} - C_{1k}) + \frac{\delta_k g_k}{\Delta_k}(L_{1k}M_{2k}S_{1k} - L_{2k}M_{1k}S_{2k})\right]$$

$$\beta_{k+1} = \frac{G_{1\,k+1}}{G_k}\left[\frac{\alpha_k}{\nabla_k}(M_{2k}S_{2k} - M_{1k}S_{1k}) + \frac{\beta_k g_k}{\Delta_k}(M_{1k}Y_{2k}C_{1k} - M_{2k}Y_{1k}C_{2k}) +\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_k}{\nabla_k}(L_{1k}M_{2k}S_{2k} - L_{2k}M_{1k}S_{1k}) + \frac{\delta_k g_k}{\Delta_k} M_{1k}M_{2k}(C_{1k} - C_{2k})\right]$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{G_{k+1}}{G_k}\left[\frac{\alpha_k}{\nabla_k}(C_{1k} - C_{2k}) + \frac{\beta_k g_k}{\Delta_k}(Y_{1k}S_{2k} - Y_{2k}S_{1k}) +\right.$$

$$+\frac{\gamma_k}{\nabla_k}\left(L_{2k}C_{1k}-L_{1k}C_{2k}\right)+\frac{\delta_k g_k}{\Delta_k}\left(M_{1k}S_{2k}-M_{2k}S_{1k}\right)\Bigg]$$

$$\delta_{k+1}=\frac{1}{g_k}\Bigg[\frac{\alpha_k}{\nabla_k}\left(Y_{1k}S_{1k}-Y_{2k}S_{2k}\right)+\frac{\beta_k g_k}{\Delta_k}Y_{1k}Y_{2k}\left(C_{2k}-C_{1k}\right)+$$

$$+\frac{\gamma_k}{\nabla_k}\left(L_{2k}Y_{1k}S_{1k}-L_{1k}Y_{2k}S_{2k}\right)+\frac{\delta_k g_k}{\Delta_k}\left(M_{1k}Y_{2k}C_{2k}-M_{2k}Y_{1k}C_{1k}\right)\Bigg] \qquad (17)$$

У цих формулах застосовані позначення

$$C_{ik}=ch\left(t_i ph_k\right), S_{ik}=sh\left(t_i ph_k\right), C_{gk}=ch\left(ph_k\sqrt{g}\right), S_{gk}=sh\left(ph_k\sqrt{g}\right).$$

Зауважимо, що рекурентні співвідношення є лінійними та однорідними.

Припустимо, що багатошарівий пакет лежить на абсолютно жорсткому півпросторі і зчеплений з ним. Тоді мають місце формули (4) або, що то ж саме

$$\beta_{n+1}=\gamma_{n+1}=\tilde{\gamma}_{n+1}=0 \qquad (18)$$

Зафіксуємо будь-яке k<n та виразимо через функції $\alpha_k,\ldots,\delta_k$ за допомогою рекурентних співвідношень допоміжні функції n-го шара $\alpha_n,\ldots,\delta_n$ та підставимо їх в (18). У результаті прийдемо до системи трьох лінійних однородних алгебраїчних рівнянь відносно величин $\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\delta_k$. Розв`язуючи систему відносно β_k та γ_k отримаємо два рівняння:

$$\beta_k=-A_k(p)\alpha_k+A_{\tau k}(p)\delta_k,\ \gamma_k=B_k(p)\alpha_k-B_{\tau k}(p)\delta_k. \qquad (19)$$

Наведені тут функції $A_k, A_{\tau k}, B_k, B_{\tau k}$ називаються *функціями податливості* k-го шару багатошарової основи. Зауважимо, що для багатошарової основи з ізотропними шарами ці функції були вперше побудовані в [3]. Найбільш повний огляд властивостей функцій податливості багатошарової основи з ізотропними шарами та методів їх використання можна знайти в [4].

Рекурентні співвідношення між допоміжними функціями дають можливість побудувати рекурентні залежності між функціями податливості.

$$A_k=\frac{\Delta_k}{g_k d}\left(-F_1-\left(e_2^-\right)^2F_2+\left(e_1^-\right)^2F_5+\left(e_1^-e_2^-\right)^2F_6\right)$$

$$A_{\tau k}=\frac{1}{d}\Big(-F_1\left(L_2M_1-L_1M_2\right)+\left(e_2^-\right)^2F_2\left(L_2M_1+L_1M_2\right)-2e_1^-e_2^-\left(F_3L_2M_2+\right.$$

$$\left.+F_4L_1M_1\right)+\left(e_1^-\right)^2F_5\left(L_2M_1+L_1M_2\right)-\left(e_1^-e_2^-\right)^2F_6\left(L_2M_1-L_1M_2\right)\Big)$$

$$B_k=\frac{1}{d}\Big(F_1\left(Y_2-Y_1\right)+\left(e_2^-\right)^2F_2\left(Y_2+Y_1\right)-2e_1^-e_2^-\left(F_3Y_2+F_4Y_1\right)+$$

$$+\left(e_1^-\right)^2F_5\left(Y_2+Y_1\right)+\left(e_1^-e_2^-\right)^2F_6\left(Y_2-Y_1\right)\Big)$$

$$B_{\tau k}=\frac{\nabla_k g_k}{d}\left(F_1-\left(e_2^-\right)^2F_2+\left(e_1^-\right)^2F_5-\left(e_1^-e_2^-\right)^2F_6\right) \qquad (20)$$

Тут $e_i^{\pm}=\exp\left(\pm pt_ih_k\right)$, $e_g^{\pm}=\exp\left(\pm p\sqrt{g_k}h_k\right)$, $lm=L_2Y_1-L_1Y_2$

$$R_i^{\pm} = G_{1k+1}M_i \pm A_{k+1}\frac{H_{k+1}}{H_k}G_k L_i + A_{\tau k+1}G_{1k}Y_i,\ Q_i^{\pm} = G_{k+1} + B_{k+1}\frac{H_{k+1}}{H_k}G_k L_i \pm B_{\tau k+1}G_{1k}Y_i$$

$$d = F_1 lm - \left(e_2^-\right)^2 F_2\left(L_2Y_1 + L_1Y_2\right) + 2e_1^-e_2^-\left(F_3L_2Y_2 + F_4L_1Y_1\right) -$$
$$\left(e_1^-\right)^2 F_5\left(L_2Y_1 + L_1Y_2\right) + \left(e_1^-e_2^-\right)^2 F_6 lm$$

$$F_1 = R_1^+Q_2^+ - R_2^+Q_1^+,\quad F_2 = R_1^+Q_2^- + R_2^-Q_1^+,\quad F_3 = R_1^+Q_1^- + R_1^-Q_1^+$$

$$F_4 = R_2^+Q_2^- + R_2^-Q_2^+,\quad F_5 = R_1^-Q_2^+ + R_2^+Q_1^-,\quad F_6 = R_1^-Q_2^- - R_2^-Q_1^-$$

Так як при оберненні перетворення Фур`є треба обчислювати невласні інтеграли за змінною $\xi \in (-\infty, \infty)$, то корисно знайти границі функцій податливості при $p = |\xi| \to \infty$.

$$\lim_{p\to\infty} A_k = -\frac{\Delta}{g_k lm},\ \lim_{p\to\infty} A_{\tau k} = \frac{L_1M_2 - L_2M_1}{g_k lm},\ \lim_{p\to\infty} B_k = \frac{Y_2 - Y_1}{g_k lm},\ \lim_{p\to\infty} B_{\tau k} = \frac{\nabla g_k}{lm}. \qquad (21)$$

Помітимо, що ці границі залежать тільки від пружних характеристик лише k-го шару.

З урахуванням (21) формули (20) зручніше використовувати у вигляді

$$A_k = -\frac{\Delta}{g_k lm} - \left(e_2^-\right)^2 a_k,\ A_{\tau k} = \frac{L_2M_1 - L_1M_2}{lm} - \left(e_2^-\right)a_{\tau k},$$

$$B_k = \frac{Y_2 - Y_1}{lm} - \left(e_2^-\right)^2 b_k,\ B_{\tau k} = \frac{\nabla g_k}{lm} - \left(e_2^-\right)^2 b_{\tau k}. \qquad (22)$$

Введені тут функції $a_k, a_{\tau k}, b_k, b_{\tau k}$ називаються *модифікованими функціями податливості.* Наведемо явні формули для їх обчислення:

$$a_k = \frac{2\Delta}{g_k lm}\frac{1}{d}\left(F_2L_2Y_1 - e_1^-e_2^+\left(F_3L_2Y_2 + F_4L_1Y_1\right) + \left(e_1^-e_2^+\right)^2 F_5L_1Y_2 - \left(e_2^-\right)^2 F_6 lm\right),$$

$$a_{\tau k} = \frac{2\Delta}{lm}\frac{1}{d}\left(F_2L_1L_2 - e_1^-e_2^+\left(F_3L_2^2 + F_4L_1^2\right) + \left(e_1^-e_2^+\right)^2 F_5L_1L_2\right),$$

$$b_k = -\frac{2\nabla}{lm}\frac{1}{d}\left(F_2Y_1Y_2 - e_1^-e_2^+\left(F_3Y_2^2 + F_4Y_1^2\right) + \left(e_1^-e_2^+\right)^2 F_5Y_1Y_2\right),$$

$$b_{\tau k} = -\frac{2\nabla g_k}{lm}\frac{1}{d}\left(F_2L_1Y_2 - e_1^-e_2^+\left(F_3L_2Y_2 + F_4L_1Y_1\right) + \left(e_1^-e_2^+\right)^2 F_5L_2Y_1 - \left(e_2^-\right)^2 F_6 lm\right). \qquad (23)$$

Для початку процесу обчислення функцій податливості по рекурентних співвідношеннях необхідно знати ці функції для нижнього шару (який є півпростором).

Почнемо з абсолютно жорсткого півпростору. У цьому випадку будь- яким поверхневим навантаженням відповідають нульові переміщення точок поверхні півпростору, а отже і нульові трансформанти від функцій, що описують переміщення відповідних точок. Тобто при будь- яких α і δ функції β і γ повинні бути тотожно рівними нулю. Звідси випливає, що для жорсткого півпростору

$$A = 0,\ A_\tau = 0,\ B = 0,\ B_\tau = 0. \qquad (24)$$

Перейдемо до випадку пружного півпростору. Пружний півпростір можна розглядати як шар, товщина якого прямує до нескінченності. Зважаючи на це, для отримання відповідних функцій податливості потрібно перейти до границі при $h_k \to \infty$ у формулах (22). Так як у цьому випадку модифіковані функції податливості прямують до певних констант, то при домноженні їх на $\left(e_2^-\right)^2$ граничні значення будуть нульовими. А отже, для пружного півпростору функції податливості мають вигляд

$$A = -\frac{\Delta}{glm},\ A_\tau = \frac{L_2 M_1 - L_1 M_2}{lm},\ B = \frac{Y_2 - Y_1}{lm},\ B_\tau = \frac{\nabla g}{lm}. \qquad (25)$$

Тепер перейдемо до випадку, коли k-й та k+1-й шари можуть прослизати один вздовж другого. Для початку припустимо, що шари, які розташовані нижче (k+1)- го шару, зчеплені. У цьому випадку рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів будуть мати вигляд

$$\alpha_{k+1} = \frac{H_{k+1}}{H_k}\left[\frac{\alpha_k}{\nabla_k}\left(L_{2k}C_{2k} - L_{1k}C_{1k}\right) + \frac{\beta_k g_k}{\Delta_k}\left(L_{1k}Y_{2k}S_{1k} - L_{2k}Y_{1k}S_{2k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_k}{\nabla_k} L_{1k}L_{2k}\left(C_{2k} - C_{1k}\right) + \frac{\delta_k g_k}{\Delta_k}\left(L_{1k}M_{2k}S_{1k} - L_{2k}M_{1k}S_{2k}\right)\right],$$

$$\beta_{k+1} = \frac{G_{1\,k+1}}{G_k}\left[\frac{\alpha_k}{\nabla_k}\left(M_{2k}S_{2k} - M_{1k}S_{1k}\right) + \frac{\beta_k g_k}{\Delta_k}\left(M_{1k}Y_{2k}C_{1k} - M_{2k}Y_{1k}C_{2k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_k}{\nabla_k}\left(L_{1k}M_{2k}S_{2k} - L_{2k}M_{1k}S_{1k}\right) + \frac{\delta_k g_k}{\Delta_k} M_{1k}M_{2k}\left(C_{1k} - C_{2k}\right)\right]$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{g_k}\left[\frac{\alpha_k}{\nabla_k}\left(Y_{1k}S_{1k} - Y_{2k}S_{2k}\right) + \frac{\beta_k g_k}{\Delta_k} Y_{1k}Y_{2k}\left(C_{2k} - C_{1k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_k}{\nabla_k}\left(L_{2k}Y_{1k}S_{1k} - L_{1k}Y_{2k}S_{2k}\right) + \frac{\delta_k g_k}{\Delta_k}\left(M_{1k}Y_{2k}C_{2k} - M_{2k}Y_{1k}C_{1k}\right)\right] = 0 \qquad (26)$$

За припущенням для k+1-го шару

$$\beta_{k+1} = -A_{k+1}(p)\alpha_{k+1} + A_{\tau k+1}(p)\delta_{k+1},\ \gamma_{k+1} = B_{k+1}(p)\alpha_{k+1} - B_{\tau k+1}(p)\delta_{k+1}.$$

Поєднуючи перше з цих рівнянь з останнім рівнянням (26), отримаємо систему:

$$\beta_{k+1} + A_{k+1}\alpha_{k+1} = 0,\ \delta_{k+1} = 0.$$

За допомогою формул (26) цю систему можна представити у вигляді

$$\alpha_k d_{11} + \beta_k d_{12} + \gamma_k d_{13} + \delta_k d_{14} = 0,\ \alpha_k d_{21} + \beta_k d_{22} + \gamma_k d_{23} + \delta_k d_{24} = 0.$$

Розв`язавши її відносно β_k і γ_k та, порівнюючи отриманий результат з (19), будемо мати рекурентні співвідношення між функціями податливості $A_k, A\tau_k$, $B_k, B\tau_k$ та A_{k+1}. Обчислення показують, що вони співпадають з формулами (20), але замість введених там величин $R_i^{\pm}$ і $Q_i^{\pm}$ потрібно застосовувати такі:

$$R_i^{\pm} = M_i \frac{G_{1\,k+1}}{G_k} \pm A_{k+1}\frac{H_{k+1}}{H_k} L_i\ ,\ Q_i^{\pm} = \pm Y_i. \qquad (27)$$

Таким чином і у випадку гладкого контакту між k-м та (k+1)-м шарами співвідношення (19) залишаються вірними (тільки самі функції податливості обчислюються поіншому, ніж у випадку зчепленних шарів). Аналіз наведених вище міркувань показує, що припущення про те, що всі шари нижче k-го зчеплені, є зайвим, і розміркування залишаються без змін для довільного чергування типів контакту шарів нижче к-го.

5. Алгоритм розв′язку основних крайових задач. Якщо функції податливості відомі, то для розв`язку крайової задачі достатньо знайти дві функції α_k та δ_k (або β_k та γ_k), а інші можна визначити із співвідношень (19). Так як граничні умови задаються на верхній межі шару з номером один, то потрібно знати співвідношення між функціями α_k, δ_k та α_1, δ_1. Наведемо рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів з застосуванням модифікованих функцій податливості (тобто у вигляді, який є зручним для чисельної реалізації):

$$\alpha_{k+1} = \frac{H_{k+1}}{H_k}\left[\frac{1}{lm}\left\{e_2^- L_2\left(\alpha Y_1 - \delta L_1 g\right) - e_1^- L_1\left(\alpha Y_2 - \delta L_2 g\right)\right\} + \right.$$

$$\left. + \left(e_2^-\right)^2\left\{e_1^+ L_1 \widetilde{X}_1 - e_2^+ L_2 \widetilde{X}_2 - e_1^- L_1 \widetilde{X}_3 + e_2^- L_2 \widetilde{X}_4\right\}\right],$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{g\,lm}\left\{e_2^- Y_2\left(\alpha Y_1 - \delta L_1 g\right) - e_1^- Y_1\left(\alpha Y_2 - \delta L_2 g\right)\right\} +$$

$$+ \left(e_2^-\right)^2\left\{- e_1^+ Y_1 \widetilde{X}_1 + e_2^+ Y_2 \widetilde{X}_2 - e_1^- Y_1 \widetilde{X}_3 + e_2^- Y_2 \widetilde{X}_4\right\} \qquad (28)$$

Тут

$$2\widetilde{X}_1 = \alpha\left(Y_2 \frac{g}{\Delta} a + L_2 \frac{1}{\nabla} b\right) - \delta\left(Y_2 \frac{g}{\Delta} a\tau + L_2 \frac{1}{\nabla} b\tau\right),$$

$$2\widetilde{X}_2 = \alpha\left(Y_1 \frac{g}{\Delta} a + L_1 \frac{1}{\nabla} b\right) - \delta\left(Y_1 \frac{g}{\Delta} a\tau + L_1 \frac{1}{\nabla} b\tau\right),$$

$$2\widetilde{X}_3 = \alpha\left(Y_2 \frac{g}{\Delta} a - L_2 \frac{1}{\nabla} b\right) - \delta\left(Y_2 \frac{g}{\Delta} a\tau - L_2 \frac{1}{\nabla} b\tau\right),$$

$$2\widetilde{X}_4 = \alpha\left(Y_1 \frac{g}{\Delta} a - L_1 \frac{1}{\nabla} b\right) - \delta\left(Y_1 \frac{g}{\Delta} a\tau - L_1 \frac{1}{\nabla} b\tau\right).$$

Формули для функцій S та $p\overline{W}$, які не містять β та γ, мають вигляд

$$S = \frac{1}{G\,lm}\left\{- ez_1^-\left(\alpha Y_2 - \delta g L_2\right) + ez_2^-\left(\alpha Y_1 - \delta g L_1\right)\right\} +$$

$$\left(e_2^-\right)^2 \frac{1}{G}\left\{ez_1^+ \widetilde{X}_1 - ez_2^+ \widetilde{X}_2 - ez_1^- \widetilde{X}_3 + ez_2^- \widetilde{X}_4\right\},$$

$$p\overline{W} = \frac{1}{G\,lm}\left\{ez_1^-\left(\alpha Y_2 - \delta g L_2\right) M_1 - ez_2^-\left(\alpha Y_1 - \delta g L_1\right) M_2\right\} +$$

$$\left(e_2^-\right)^2 \frac{1}{G}\left\{ez_1^+ \widetilde{X}_1 M_1 - ez_2^+ \widetilde{X}_2 M_2 + ez_1^- \widetilde{X}_3 M_1 + ez_2^- \widetilde{X}_4 M_2\right\} \qquad (29)$$

де, як і раніше, усі величини, в яких явно не зазначено номер шару, відносяться до шару з номером k, а $ez_i^{\pm} = \exp\left(pt_{ik} z\right)$

Застосовуючи обернене перетворення Фур`є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}\left(\xi\right) e^{-i x \xi} d\xi,$$

отримаємо розв′язок задачі у квадратурах

$$2\pi \frac{\partial U}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \overline{U}}{d x} e^{-ix\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\xi\right)\overline{U} e^{-ix\xi} d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} S e^{-ix\xi} d\xi$$

$$2\pi \frac{\partial W}{d x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\partial W}}{\partial x} e^{-ix\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\xi\right)\overline{W} e^{-ix\xi} d\xi$$

$$2\pi\sigma_z = \frac{G}{H}\int_{-\infty}^{\infty}\left((1-\nu)\frac{d\overline{W}}{dz} - \nu_2 S\right)e^{-ix\xi}d\xi,$$

$$2\pi\sigma_x = \frac{G}{H}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\overline{W}}{dz} - \frac{\nu_2(1-\nu_1\nu_2)}{\nu_1(1+\nu)}S\right)e^{-ix\xi}d\xi,$$

$$2\pi\tau_{xz} = -G_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\xi}{p^2}\left(\frac{dS}{dz} + p^2\overline{W}\right)e^{-ix\xi}d\xi \qquad (30)$$

Опишемо алгоритм отримання розв`язку у квадратурах першої та другої крайових задач для багатошарової основи:

1.Знаходимо функції податливості для півпростору, застосовуючи формули (24) для жорсткого півпростору, або ж (25) для пружнього.

2 По рекурентних співвідношеннях (20) для зчеплених шарів та співвідношеннях (20) і (27) для гладкого контакту між шарами знаходимо функції податливості для усіх шарів, починаючи з n-го і скінчуючи першим.

3.Знаходимо трансформанти напружень (для першої крайової задачі) або трансформанти переміщень (для другої крайової задачі) на верхній межі багатошарової основи.

4.Обчислюємо функції α_1, δ_1 за формулами (14) для першої крайової задачі. Для другої крайової задачі для цього ще потрібно застосовувати формули (19).

5.За рекурентними формулами (28) знаходимо α_k, δ_k, де k-номер шару, в якому треба визначити напруження і переміщення.

6.Визначаємо функції $p\overline{W}_k, S_k$ згідно (29)

7. За формулами (30) обчислюємо похідні від переміщень у даному шарі основи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Прусов И.А. Термоупругие анизотропные пластинки.- Минск.: изд-во БГУ, 1978,-200с.
2. Снеддон И. Преобразование Фурье.- М.:ИЛ 1955г.-667с.
3. Приварников А.К., Шевляков Ю.А. Контактная задача для многослойного основания// Прикладная механика.-1962.-Т.8.-N5.-с.508-515
4. Приварников А.К.,Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. Ч.1// Днепропетровск, 1985.-162с. Деп в ВИНИТИ 23.12.85г.,N 8789-В.