УДК 517.982.3

ПЕРЕХІД ДО ДІАГОНАЛЬНОЇ МАТРИЦІ В ЗАДАЧІ ПРО МІНІМІЗАЦІЮ ФУНКЦІОНАЛА

Богун І.В.

Розглянемо задачу про мінімізацію квадратичного функціонала

$$I[p]=\int_0^1[u(T,x)-\phi(x)]^2\,dx+\beta\int_0^T\int_0^1 p^2(t,x)dxdt+\int_0^T\int_0^1\int_0^1 u(t,x)Q(x,s)u(t,s)dsdxdt\,, \qquad (1)$$

де $\beta=const>0$, $\phi(x)\in L_2[0,1]$, $Q(x,s)\ge 0$, $p(t,x)\in L_2(D)$, $D=[0,T]\otimes[0,1]$ - функція, що керує процесом:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+p(t,x),\ \frac{\partial\ u(t,0)}{\partial\ x}=0,\frac{\partial\ u(t,1)}{\partial\ x}+\alpha\ u(t,1)=0\,,\ u(0,x)=g(x)\in L_2[0,1],\alpha>0\,. \qquad (2)$$

При розв'язанні цієї задачі ми користуємося розвиненням функцій у ряди Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля: $X''(x)+\lambda^2X(x)=0;X'(0)=X'(1)+\alpha X(1)=0$.

Коли $Q(x,s)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{nm}q_nX_n(x)X_m(s)$, тобто коли матриця Q коефіцієнтів Фур'є функції $Q(x,s)$ діагональна, розв'язок задачі отримано в [1]. Нехай тепер матриця Q довільна.

Розглянемо оператор $Q:u(t,x)\to\int_0^1 Q(x,s)u(t,s)ds$, який задано на функціях простору $W_2^{0,1}$. Зрозуміло, що цей оператор лінійний та його область значень розташована в енергетичному просторі $H\left(\Lambda^{-1}\right)$ оператора

$$\Lambda^{-1}:v(t,x)\to\Lambda^{-1}v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(t)}{\lambda_n^2}X_n(x).$$

Дійсно,

$$\|Qu\|^2_{H(\Lambda^{-1})}=\left(\sqrt{\Lambda^{-1}}Qu,Qu\right)_{L_2}=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{m=1}^{\infty}q_{nm}u_m(t)}{\lambda_n}\right)^2dt\le\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}^2}{\lambda_n^2\lambda_m^2}\int_0^T\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2u_m^2(t)dt=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}^2}{\lambda_n^2\lambda_m^2}\|u\|^2_{W_2^{0,1}}.$$

З цієї оцінки випливає, що Q - неперервний (обмежений) оператор та

$$\|Q\|\le\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}^2}{\lambda_n^2\lambda_m^2}. \qquad (3)$$

Крім того, останній доданок у критерії оптимальності (1) буде скінченним:

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1 Q(x,s)u(t,x)u(t,s)dsdxdt \le \int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{m=1}^{\infty}q_{nm}u_m(t)}{\lambda_n}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2u_n^2(t)\right)^{1/2}dt = \left(\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{m=1}^{\infty}q_{nm}u_m(t)}{\lambda_n}\right)^2dt\right)^{1/2}\|u\|_{W_2^{0,1}}$$

Розглянемо тепер послідовність лінійних неперервних операторів

$$Q^N : u(t,x)\to\sum_{n,m=1}^{N}q_{nm}u_m(t)X_n(x).$$

Ці оператори компактні (через їх скінченновимірність) та $\|Q-Q_N\|\le\sum_{n,m=N+1}^{\infty}\frac{q_{nm}^2}{\lambda_n^2\lambda_m^2}\to 0$, коли $N\to\infty$.

Таким чином, послідовність компактних операторів $\{Q^N\}_{N=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до оператора Q, який також буде компактним.

Умова (3) дозволяє нам роздивлятися оператор $\sqrt{\Lambda^{-1}}Q\sqrt{\Lambda^{-1}}$, який діє в просторі $L_2(D)$, тобто

$$\sqrt{\Lambda^{-1}}Q\sqrt{\Lambda^{-1}} : v(t,x)\to\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}}{\lambda_n\lambda_m}v_m(t)X_n(x).$$

Очевидно, що $\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}}{\lambda_n\lambda_m}v_m(t)X_n(x)\right)^2dxdt\le\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}^2}{\lambda_n^2\lambda_m^2}\int_0^T\sum_{m=1}^{\infty}v_m^2(t)dt=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}^2}{\lambda_n^2\lambda_m^2}\|v\|_{L_2}^2$,

тобто

$\sqrt{\Lambda^{-1}}Q\sqrt{\Lambda^{-1}} : L_2(D)\to L_2(D)$.

Крім того, цей оператор буде компактним та самоспряженим:

$$\left(\sqrt{\Lambda^{-1}}Q\sqrt{\Lambda^{-1}}v,v\right)=\int_0^T\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}}{\lambda_n\lambda_m}v_n(t)v_m(t)dt=\int_0^T\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{q_{nm}}{\lambda_n\lambda_m}v_m(t)v_n(t)dt=\left(v,\sqrt{\Lambda^{-1}}Q\sqrt{\Lambda^{-1}}v\right).$$

З теореми Гільберта-Шмідта випливає, що матриця компактного самоспряженого оператора за допомогою ортогонального перетворення може бути зведена до діагонального виду, тобто $G^{-1}\sqrt{\Lambda^{-1}}Q\sqrt{\Lambda^{-1}}G=Q_0$, де $G^{-1}=G^*$ та $Q_0 : L_2(D)\to L_2(D)$. Слід відмітити, що елементами діагональної матриці Q_0 будуть власні значення оператора $\sqrt{\Lambda^{-1}}Q\sqrt{\Lambda^{-1}}$.

Тепер зробимо заміну: $$u(t,x)=\sqrt{\Lambda^{-1}}Gv(t,x). \qquad (4)$$

Якщо $v(t,x)\in L_2(D)$, тоді $Gv(t,x)\in L_2(D)$ та $\sqrt{\Lambda^{-1}}Gv(t,x)\in W_2^{0,1}(D)$, що й потрібно для функції $u(t,x)$.

За допомогою заміни (4) задача (2) перетвориться таким чином:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}+p(t,x)\ \sqrt{\Lambda^{-1}}G\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\sqrt{\Lambda^{-1}}G\frac{\partial^2v(t,x)}{\partial x^2}+p(t,x),$$

або

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}+G^{-1}\sqrt{\Lambda}\,p(t,x)=\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}+h(t,x),$$

де $h(t,x)=G^{-1}\sqrt{\Lambda}\,p(t,x)\in H\left(\Lambda^{-1}\right)$.

Крайові умови не зміняться: $\sqrt{\Lambda^{-1}}\,G\frac{\partial\ v(t,0)}{\partial\ x}=0,\sqrt{\Lambda^{-1}}\,G\frac{\partial\ v(t,1)}{\partial\ x}+\alpha\sqrt{\Lambda^{-1}}\,Gv(t,1)=0$, тобто

$$\frac{\partial\ v(t,0)}{\partial\ x}=0,\frac{\partial\ v(t,1)}{\partial\ x}+\alpha\ \ v(t,1)=0.$$

Початкова умова стане такою: $\sqrt{\Lambda^{-1}}\,Gv(0,x)=g(x)$ або $v(0,x)=\sqrt{\Lambda}G^{-1}g(x)=f(x)\in H\left(\Lambda^{-1}\right)$.

З'ясуємо, як зміниться критерій оптимальності (1):

$$\int_0^1[u(T,x)-\phi(x)]^2\,dx=\left(u(T,x)-\phi(x),u(T,x)-\phi(x)\right)_{L_2}=\left(\sqrt{\Lambda^{-1}}\,Gv(T,x)-\phi(x),\sqrt{\Lambda^{-1}}\,Gv(T,x)-\phi(x)\right)_{L_2}=$$

$$=\left(\sqrt{\Lambda^{-1}}\left(Gv(T,x)-\sqrt{\Lambda}\phi(x)\right),\sqrt{\Lambda^{-1}}\left(Gv(T,x)-\sqrt{\Lambda}\phi(x)\right)\right)_H=\left(\left(Gv(T,x)-\sqrt{\Lambda}\phi(x)\right),\left(Gv(T,x)-\sqrt{\Lambda}\phi(x)\right)\right)_H=$$

$$=\left(v(T,x)-G^{-1}\sqrt{\Lambda}\phi(x),v(T,x)-G^{-1}\sqrt{\Lambda}\phi(x)\right)_H=\left(v(T,x)-\theta(x),v(T,x)-\theta(x)\right)_H,\ \text{де}\ \theta(x)=G^{-1}\sqrt{\Lambda}\phi(x).$$

Далі: $\int_0^T\int_0^1 p^2(t,x)dxdt=\left(p(t,x),p(t,x)\right)_{L_2}=\left(Gh(t,x),Gh(t,x)\right)_H=\left(h(t,x),h(t,x)\right)_H$ та

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1 Q(x,s)u(t,x)u(t,s)dsdxdt=(Qu,u)=\left(\sqrt{\Lambda}GQ_0G^{-1}\sqrt{\Lambda}u,u\right)=\left(\sqrt{\Lambda}GQ_0G^{-1}\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda^{-1}}\,Gv,\sqrt{\Lambda^{-1}}\,Gv\right)=$$

$$=\left(\sqrt{\Lambda}GQ_0v,\sqrt{\Lambda^{-1}}\,Gv\right)=\left(GQ_0v,Gv\right)=\left(Q_0v,v\right).$$

Таким чином, загальний вид функціонала не зміниться, тобто перетворену задачу можна розв'язувати тими методами, які було застосовано для задачі з діагональною матрицею.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богун І.В. Про скінченновимірну апроксимацію в задачі про мінімізацію функціонала//Вісник ЗДУ.-1999.-№1.-с.15-21.