УДК 620. 178.5: 620.179

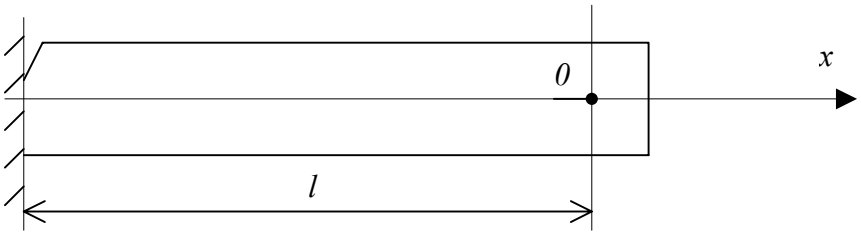
ЕНЕРГЕТИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ПРО ПОДОВЖНІ КОЛИВАННЯ СТРИЖНЯ З ПОПЕРЕЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

Александрова Н.Б., Ройтман А.Б.

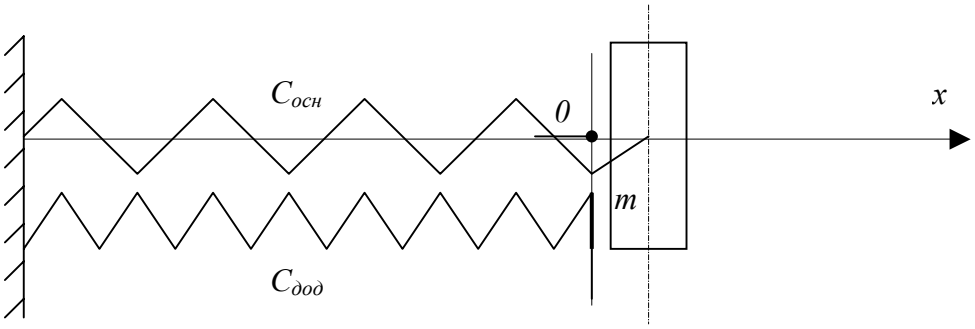
У роботах [1, 2] описані моделі вільних подовжніх коливань консольного стрижня з поперечною тріщиною (рис. 1 а). Через те, що є присутнім поперечна тріщина, частини періоду коливань при відкритій і закритій тріщині мають відмінні амплітуди A_1 і A_2. Їхній розмір можна визначити, розглянувши вільні коливання стрижня як деяку консервативну систему з одним ступенем волі. Цьому і присвячена ця стаття.

1. Нехай стрижень довжиною l із поперечною тріщиною в защемленні робить вільні подовжні коливання. Береги тріщини протягом одного коливального циклу будуть то сходитися, то розходитися. При стиску стрижня наявність тріщини практично не позначається на жорсткості виробу, і матеріал поводиться як суцільний. При розтяганні загальна жорсткість виробу зменшується за рахунок тріщини. Таким чином, деталь із тріщиною є тілом із змінною жорсткістю і його коливання носять нелінійний характер.

За базову обрана така модель (рис. 1 б): маса m з'єднується пружиною жорсткістю $C_{осн}$ із нерухомою опорою. Маса пружини мала в порівнянні з m. Наявність тріщини враховується за допомогою додаткової пружини, що працює тільки на стиск, жорсткістю $C_{дод}$ [1].



а)



б)

Рис. 1

При $x \geq 0$ частота вільних коливань p_T визначається тільки жорсткістю основної пружини (надалі індекс Т означає, що відповідний параметр обчислюється з обліком тріщини), а при $x < 0$ частота вільних коливань системи p визначається сумарною жорсткістю двох пружин: $C = C_{осн} + C_{дод}$.

Такі коливання описуються системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x} + p^2 t = 0, \\ \ddot{x} + {p_T}^2 t = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Розглянемо два різних типи початкових умов:

початковий удар:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= -V_0, \end{aligned} \tag{2}$$

і початкове розтягання:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

2. У випадку початкового удару по кінцю стрижня він буде стискатися, тріщина при цьому закрита. Така поведінка моделі відповідає ділянці 1 на рис. 2. Потім стрижень буде розтягуватися до положення рівноваги, тріщина і на цій ділянці буде закрита (ділянка 2, рис.2). Отже, у першій частині періоду коливань стрижень буде поводитися так, начебто тріщин у ньому немає. На цій частині періоду будуть задіяні обидві пружини системи. Від положення рівноваги і до того моменту, коли стрижень знову повернеться в положення рівноваги, тріщина буде відкрита, жорсткість стрижня зменшена, працює одна пружина (ділянки 3 і 4, рис. 2).

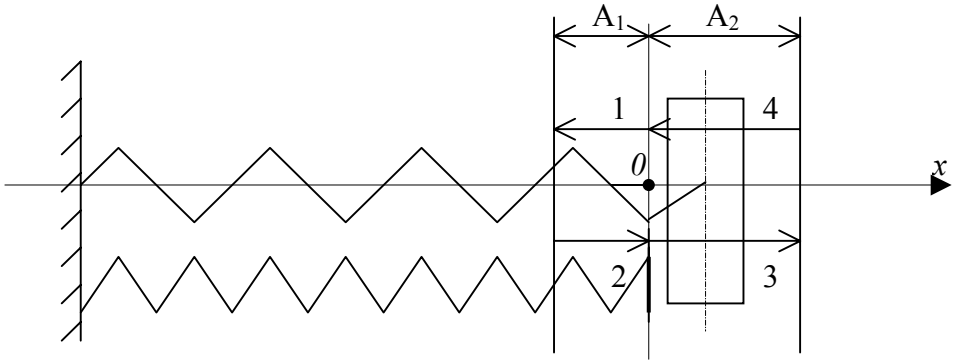


Рис. 2

Виходячи з вищесказаного, перший період коливань буде виглядати так, як показано на рис. 3.

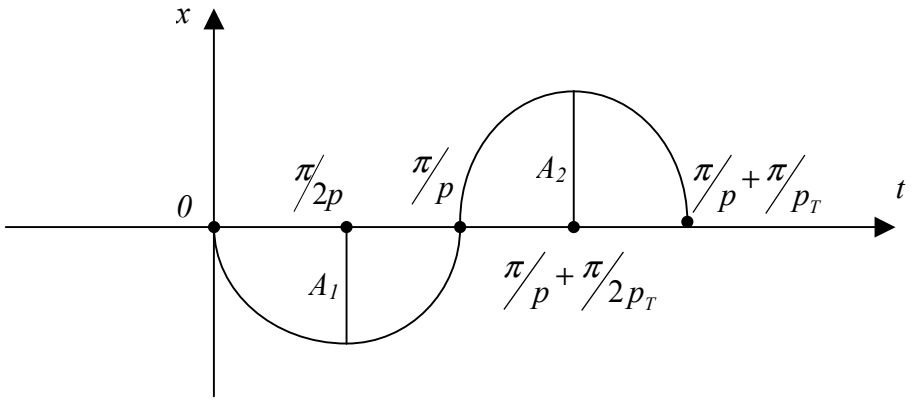


Рис. 3

При цьому виконується така відповідність:

$0 \le t \le \pi/2p$ - ділянка 1 (рис. 2),

$\pi/2p \le t \le \pi/p$ - ділянка 2 (рис. 2),

$\pi/p \le t \le \pi/p + \pi/2p_T$ - ділянка 3 (рис. 2),

$\pi/p + \pi/2p_T \le t \le \pi/p + \pi/p_T$ - ділянка 4 (рис. 2).

Перша частина періоду $0 \le t \le \pi/p$, де p – частота коливань стрижня без тріщини. Ця частина періоду буде описуватися першим рівнянням системи (1), при початкових умовах (2). Розв'язок цього рівняння:

$$x(t) = -\frac{V_0}{p}\sin pt. \tag{4}$$

Тоді потенційна і кінетична енергії на цій ділянці мають вигляд:

$$E_n = \frac{Cx^2}{2} = \frac{CV_0^2}{2p^2}\sin^2 pt,$$
$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2}\cos^2 pt,$$

а загальна енергія системи дорівнює:

$$U = E_n + E_k = \frac{V_0^2 m}{2}. \tag{5}$$

На другій частині періоду $\pi/p \le t \le \pi/p + \pi/p_T$ рівняння коливань відповідає другому рівнянню системи (1), де p_T – частота непошкодженої частини стрижня. Розв'язок цього рівняння представимо у вигляді:

$$x_T(t) = A\sin(p_T t + \alpha). \tag{6}$$

Тоді кінетична і потенційна енергії на цій ділянці приймуть такий вигляд:

$$E^T{}_n = \frac{C_{осн} x_T{}^2}{2} = \frac{C_{осн} A^2}{2}\sin^2(p_T t + \alpha),$$
$$E^T{}_k = \frac{m\dot{x}_T{}^2}{2} = \frac{mA^2 p_T}{2}\cos^2(p_T t + \alpha), \tag{7}$$

а загальна енергія

$$U^T = E^T{}_n + E^T{}_k = \frac{C_{осн} A^2}{2}. \tag{8}$$

При вільних коливаннях системи $U = E_n + E_k = const$. Тоді $U = U^T$ і $\frac{C_{осн} A^2}{2} = \frac{V_0^2 m}{2}$, звідси $A = \frac{V_0}{p_T}$.

З умови $x_T\left(\frac{\pi}{p}\right) = 0$ одержимо $\alpha = -\frac{\pi p_T}{p}$.

Отже, рівняння коливань другої частини періоду має вигляд:

$$x_T(t) = \frac{V_0}{p_T}\sin(p_T t - \frac{\pi p_T}{p}). \tag{9}$$

Амплітуда коливань для першої частини періоду $A_1 = \frac{V_0}{p}$, для другої - $A_2 = \frac{V_0}{p_T}$. Розглянемо відношення амплітуд: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{p_T}{p}$. Отже, відношення амплітуд обернено пропорційно відношенню частот коливань ушкодженої і неушкодженої ділянок, і виходить, є функцією розміру тріщини.

Отримані розв'язки розкладемо в ряд Фур'є на періоді $T = \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{p_T}$ з частотою $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2pp_T}{p + p_T}$.

Використовуючи стандартні формули, знайдемо коефіцієнти розкладання в ряд:

$$a_k = \frac{2V_0(p^2 - p_T^2)(\cos k\omega\pi/p + 1)}{T(p^2 - k^2\omega^2)(p_T^2 - k^2\omega^2)}, \tag{10}$$

$$b_k = \frac{2V_0(p^2 - p_T^2)\sin k\omega\pi/p}{T(p^2 - k^2\omega^2)(p_T^2 - k^2\omega^2)}. \tag{11}$$

3. У випадку початкового розтягання одержуємо, що період коливань розбивається на три ділянки: перша, коли вантаж, відтянутий на відстань x_0, відпускають і він прагне до положення рівноваги, тріщина відкрита і діє одна пружина в системі (ділянка 4, рис.2). У момент рівноваги $t = \frac{\pi}{2p_T}$ тріщина закриється, і стрижень буде поводитися як непошкоджений доти, поки він знову не повернеться в положення рівноваги $t = \frac{\pi}{2p_T} + \frac{\pi}{p}$ - друга ділянка. При цьому діють обидві пружини (ділянки 1 і 2, рис. 2), третя ділянка – коли, пройшовши положення рівноваги, стрижень почне розтягуватися, тріщина відкриється, а в системі буде діяти одна пружина (ділянка 3, рис. 2).

Один період таких коливань поданий на рис. 4. При цьому виконується така відповідність:

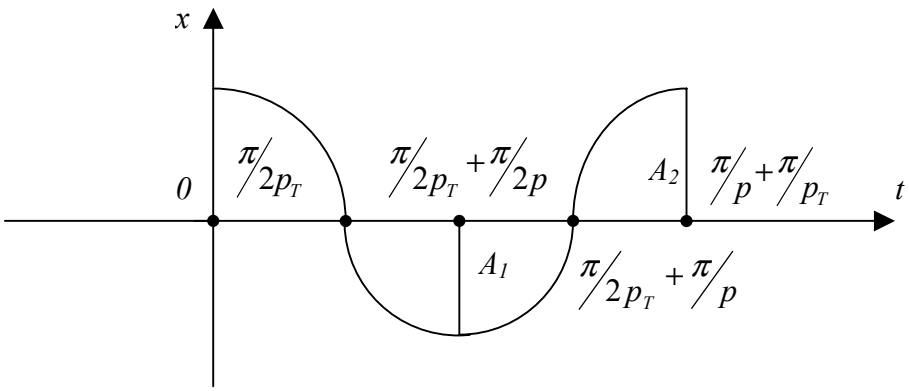


Рис. 4

$0 \le t \le \pi/2p_T$ - ділянка 4 (рис. 2),

$\pi/2p_T \le t \le \pi/2p_T + \pi/2p$ - ділянка 1 (рис. 2),

$\pi/2p_T + \pi/2p \le t \le \pi/2p_T + \pi/p$ - ділянка 2 (рис. 2),

$\pi/p + \pi/2p_T \le t \le \pi/p + \pi/p_T$ - ділянка 3 (рис. 2).

Застосувавши раніше описаний підхід, для кожної з ділянок одержимо три рівняння, що описують відхилення стрижня:

$$x_T = x_0 \cos p_T t \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2p_T},$$

$$x = -x_0 \frac{p_T}{p} \sin p(t - \frac{\pi}{2p_T}) \quad \frac{\pi}{2p_T} \le t \le \frac{\pi}{2p_T} + \frac{\pi}{p}, \tag{12}$$

$$x'_T = -x_0 \cos(p_T t - \frac{\pi p_T}{p}) \quad \frac{\pi}{2p_T} + \frac{\pi}{p} \le t \le \frac{\pi}{p_T} + \frac{\pi}{p}.$$

Тут амплітуди коливань $A_1 = x_0 \frac{p_T}{p}$ і $A_2 = x_0$. Тоді їхнє відношення $\frac{A_1}{A_2} = \frac{p_T}{p}$. Відношення амплітуд для різних початкових умов залишається тим самим.

Розкладемо отриманий розв'язок в ряд Фур'є. Коефіцієнти розкладання будуть дорівнювати:

$$a_k = \frac{4x_0 p_T (p^2 - p_T^2)(-1)^k}{T(p_T^2 - k^2\omega^2)(p^2 - k^2\omega^2)} \cos\frac{k\omega\pi}{2p}, \tag{13}$$

$$b_k = 0.$$

Загальний розв'язок прийме вигляд:

$$x(t) = \frac{4x_0(p^2 - p_T^2)}{Tp^2 p_T^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4x_0 p_T (p^2 - p_T^2)(-1)^k}{T(p_T^2 - k^2\omega^2)(p^2 - k^2\omega^2)} \cos\frac{k\pi\omega}{2p}\right] \cos k\omega t. \tag{14}$$

Отже, маємо дві функції, що описують відхилення стрижня від положення рівноваги для кожної з початкових умов.

4. Викладені підходи виявляються застосовними також при розгляді неконсервативних систем. При наявності опору в рівняннях, що описують коливання стрижня, з'явиться співмножник, відповідальний за згасання коливань - e^{-ht}, де h - коефіцієнт згасання, і зміниться частота власних коливань - $p' = \sqrt{p^2 - h^2}$, $p'_T = \sqrt{p'^2_T - h^2}$. Тоді, представимо функцію коливань у вигляді:

$$x(t) = e^{-ht} q(t), \tag{15}$$

де $q(t)$ - функція, що відповідає вільним коливанням, але зі зміненою власною частотою.

Підставивши замість $q(t)$ відповідні розкладання для вільних коливань і замінивши в них p на p', а p_T на p'_T, одержимо функцію, що описує коливання стрижня з тріщиною при наявності сил опору.

ЛІТЕРАТУРА

1. Карасев В.А., Ройтман А.Б. Доводка эксплуатируемых машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.
2. Александрова Н. Б. Анализ продольных колебаний стержня с поперечной трещиной при наличии сил демпфирования // Придніпровський науковий вісник. Технічні науки. - 1998. - №42 (109). - С. 57-65.