УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ДІЮ ОБ'ЄМНОГО ЗОСЕРЕДЖЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПРУЖНУ ПІВПЛОЩИНУ

Зіновєєв І.В., ст.викладач

Запорізький державний університет

Розглянемо першу основну межову задачу про дію зосередженої об'ємної сили, яка прикладена до внутрішньої точки пружної ізотропної півплощини. На верхній межі півплощини нормальні та дотичні напруження дорівнюють нулю. Треба визначити напруження та похідні від переміщень у довільній точці півплощини при умові, що на нескінченності напруження дорівнюють нулю.

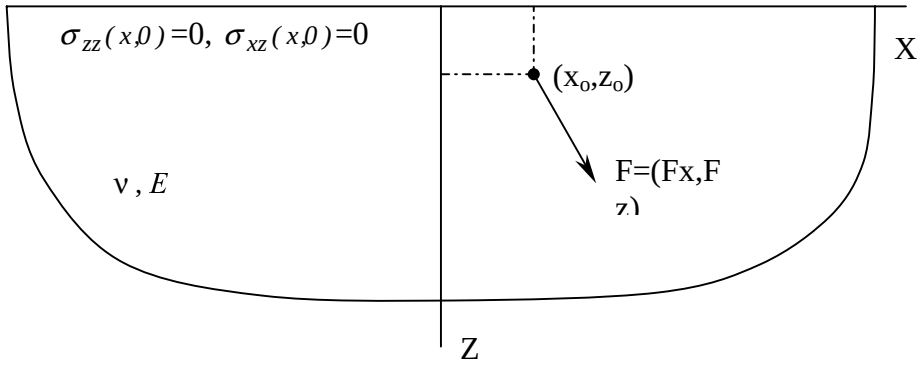

Рис. 1. Дія зосередженої сили на пружну півплощину.

Віднесемо півплощину до прямокутної декартової системи координат, як показано на рис.1. Тоді межові умови можна записати у вигляді

$$\sigma_{zz}(x,0)=0,\ \sigma_{xz}(x,0)=0. \qquad (1)$$

Розв'язок поставленої задачі може бути одержаний як сума розв'язків двох допоміжних задач:

– Перша допоміжна задача - задача про дію зосередженої сили на точку пружної площини (задача Кельвіна);

– Друга допоміжна задача - задача про визначення напружено - деформівного стану пружної півплощини, у якій відсутні об'ємні навантаження.

Домовимось компоненти, що відносяться до першої допоміжної задачі, постачати верхнім індексом 1, а ті, що відносяться до другої допоміжної задачі, верхнім індексом 2 . Тоді

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{1}+\sigma_{ij}^{2},\ u_i=u_i^1+u_i^2,\quad i,j=x,z.$$

Межові умови (1) набувають вигляду

$$\sigma_{zz}(x,0)=\sigma_{zz}^{1}(x,0)+\sigma_{zz}^{2}(x,0)=0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_{zz}^{2}(x,0)=-\sigma_{zz}^{1}(x,0),$$

$$\sigma_{xz}(x,0)=0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_{xz}^{2}(x,0)=-\sigma_{xz}^{1}(x,0), \qquad (2)$$

Перша допоміжна задача про дію зосередженої сили на пружну ізотропну площину відома як задача Кельвіна [1]. Якщо в точці (x_o,z_o) пружної площини прикладена сила $F=(F_x,F_z)$, то розв'язок задачі дається формулами

$$\sigma_{xx}^{1}=A\left\{F_xX\left[\nu_2R+2X^2\right]+F_zZ\left[-\nu_2R+2X^2\right]\right\},\ \sigma_{zz}^{1}=A\left\{F_xX\left[-\nu_2R+2Z^2\right]+F_zZ\left[\nu_2R+2Z^2\right]\right\},$$

$$\sigma_{xz}^{1}=-A\left\{F_xZ\left[\nu_2R+2X^2\right]+F_zX\left[\nu_2R+2Z^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial u_x^1}{\partial x} = -\frac{A}{2G}\left\{F_x X\left[\nu_4 R - 2Z^2\right] + F_z Z\left[X^2 - Z^2\right]\right\},$$
$$\frac{\partial u_z^1}{\partial x} = -\frac{A}{2G}\left\{F_x Z\left[X^2 - Z^2\right] + F_z X\left[\nu_4 R + 2Z^2\right]\right\}, \qquad (3)$$

де

$$\nu_1 = 2(1-\nu), \nu_2 = 1-2\nu, \nu_4 = 3-4\nu, A = \frac{-1}{2\pi\nu_1 R^2}, R = X^2 + Z^2, X = x - x_0, Z = z - z_0 . \qquad (4)$$

Тут ν - коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга, а $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву матеріалу площини.

Друга допоміжна задача – задача про визначення напружено - деформівного стану пружної півплощини, на межі $z = 0$ якої виконуються умови (2). Об'ємні навантаження в півплощини відсутні.

Розв’язок другої допоміжної задачі в просторі трансформант інтегрального перетворення Фур'є [2]

$$\overline{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \qquad (5)$$

визначається формулами [3]

$$\overline{\sigma_{xx}^2}(\xi, z) = -e^{-pz}\{(pz-1)\alpha - (pz-2)\delta\}, \quad \overline{\sigma_{zz}^2}(\xi, z) = e^{-pz}\{(pz+1)\alpha - pz\delta\},$$
$$\overline{\sigma_{xz}^2}(\xi, z) = \frac{i\xi}{p} e^{-pz}\{pz\alpha - (pz-1)\delta\},$$
$$\overline{\frac{\partial u_x^2}{\partial x}}(\xi, z) = \frac{e^{-pz}}{2G}\{(pz-\nu_2)\alpha - (pz-\nu_1)\delta\},$$
$$\overline{\frac{\partial u_z^2}{\partial x}}(\xi, z) = \frac{i\xi}{p}\frac{e^{-pz}}{2G}\{(pz+\nu_1)\alpha - (pz-\nu_2)\delta\} \qquad (6)$$

Тут

$$\alpha(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{zz}^2(x,0) e^{i\xi x} dx = \overline{\sigma_{zz}^2(\xi,0)}, \quad \delta(\xi) = \frac{i\xi}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{xz}^2(x,0) e^{i\xi x} dx = \overline{\sigma_{xz}^2(\xi,0)}, \ p = |\xi| . \qquad (7)$$

Якщо застосувати перетворення (5) до співвідношень (2), отримаємо

$$\overline{\sigma_{zz}^2}(\xi,0) = -\overline{\sigma_{zz}^1}(\xi,0), \ \overline{\sigma_{xz}^2}(\xi,0) = -\overline{\sigma_{xz}^1}(\xi,0). \qquad (2')$$

З урахуванням (2’) співвідношення (7) набувають вигляду

$$\alpha(\xi) = -\overline{\sigma_{zz}^1}(\xi,0), \quad \delta(\xi) = -\frac{i\xi}{p}\overline{\sigma_{xz}^1}(\xi,0) . \qquad (7')$$

Піддавши співвідношення (3) перетворенню (5), одержимо

$$\overline{\sigma_{xx}^1} = \hat{A}\{q\cdot[(3-2\nu) - p|Z|]F_x + w\cdot[2\nu - p|Z|]F_z\}, \quad \overline{\sigma_{zz}^1} = \hat{A}\{q\cdot[-\nu_2 + p|Z|]F_x + w\cdot[\nu_1 + p|Z|]F_z\},$$
$$\overline{\sigma_{xz}^1} = -\hat{A}\{w\cdot[\nu_1 - p|Z|]F_x + q\cdot[\nu_2 + p|Z|]F_z\},$$
$$\overline{\frac{\partial u_x^1}{\partial x}} = \frac{\hat{A}}{2G}\{q\cdot[\nu_4 - p|Z|]F_x - w\cdot p|Z|F_z\}, \quad \overline{\frac{\partial u_z^1}{\partial x}} = -\frac{\hat{A}}{2G}\{-w\cdot p|Z|F_x + q\cdot[\nu_4 + p|Z|]F_z\}, \qquad (8)$$

де

$$q = i \cdot sign(\xi)\,,\ w = sign(Z)\,,\ \hat{A} = -\frac{e^{-p|Z|}\cdot e^{i\xi x_o}}{4(1-\nu)}.$$

Підставивши в (8) $z = 0$, знайдемо допоміжні функції $\alpha(\xi)$ і $\delta(\xi)$. Тоді формули (6) набувають вигляду

$$\overline{\sigma^2_{xx}}(\xi,z) = -B\left\{q\cdot\left[(3-2\nu)-p\tilde{Z}\right]F_x + \left[-2\nu + p\tilde{Z}\right]F_z\right\},\ \overline{\sigma^2_{zz}}(\xi,z) = B\left\{q\cdot\left[\nu_2 - p\tilde{Z}\right]F_x + \left[\nu_1 + p\tilde{Z}\right]F_z\right\},$$

$$\overline{\sigma^2_{xz}}(\xi,z) = B\left\{-\left[\nu_1 - p\tilde{Z}\right]F_x + q\cdot\left[\nu_2 + p\tilde{Z}\right]F_z\right\},$$

$$\overline{\frac{\partial u_x^2}{\partial x}}(\xi,z) = -\frac{B}{2G}\left\{q\cdot\left[\nu_4 - p\tilde{Z}\right]F_x + p\tilde{Z}F_z\right\},\ \overline{\frac{\partial u_z^2}{\partial x}}(\xi,z) = \frac{B}{2G}\left\{-q\cdot p\tilde{Z}F_x + \left[\nu_4 + p\tilde{Z}\right]F_z\right\}, \qquad (9)$$

де

$$B = -\frac{e^{-p\tilde{Z}}\cdot e^{i\xi x_o}}{4(1-\nu)},\ \tilde{Z} = z + z_o\,.$$

Застосовуючи до (9) зворотне інтегральне перетворення Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\xi)e^{-i\xi x}d\xi\,,$$

одержимо розв'язок другої допоміжної задачі

$$\sigma^2_{xx}(x,z) = -\tilde{A}\{\cdot\left[2zz_oI_2 - (z\nu_4 + 3z_o)I_1 + (5-6\nu)I_0\right]F_x - \left[2zz_oJ_2 + (z\nu_4 - 3z_o)J_1 + (4-6\nu)J_0\right]F_z\},$$

$$\sigma^2_{zz}(x,z) = \tilde{A}\{\cdot\left[2zz_oI_2 - (z\nu_4 - z_o)I_1 - \nu_2I_0\right]F_x - \left[2zz_oJ_2 + (z\nu_4 + z_o)J_1 + \nu_1J_0\right]F_z\},$$

$$\sigma^2_{xz}(x,z) = \tilde{A}\{\cdot\left[2zz_oJ_2 - (z\nu_4 + z_o)J_1 + \nu_1J_0\right]F_x + \left[2zz_oI_2 + (z\nu_4 - z_o)I_1 - \nu_2I_0\right]F_z\},$$

$$\frac{\partial u_x^2}{\partial x} = \frac{\tilde{A}}{2G}\left\{\cdot-\left[2zz_oI_2 - \nu_4(z+z_o)I_1 + (\nu_1^2+\nu_2^2)I_0\right]F_x + \left[2zz_oJ_2 + \nu_4(z-z_o)J_1 - 2\nu_1\nu_2J_0\right]F_z\right\},$$

$$\frac{\partial u_z^2}{\partial x} = -\frac{\tilde{A}}{2G}\left\{\cdot\left[2zz_oJ_2 - \nu_4(z-z_o)J_1 - 2\nu_1\nu_2J_0\right]F_x + \left[2zz_oI_2 + \nu_4(z+z_o)I_1 + (\nu_1^2+\nu_2^2)I_0\right]F_z\right\}, \qquad (10)$$

де $$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} i\cdot sign(\xi)\cdot p^k e^{-\tilde{Z}p}e^{-i\xi(x-x_o)}d\xi,\quad J_k = \int_{-\infty}^{+\infty} p^k e^{-\tilde{Z}p}e^{-i\xi(x-x_o)}d\xi\,,\ k = 0,1,2\,,$$

$$I_0 = \frac{2X}{R_1},\quad I_1 = \frac{4X\tilde{Z}}{R_1^2},\quad I_2 = \frac{4X(3\tilde{Z}^2 - X^2)}{R_1^3},$$

$$J_0 = \frac{2\tilde{Z}}{R_1},\quad J_1 = \frac{2(\tilde{Z}^2 - X^2)}{R_1^2},\quad J_2 = \frac{-4\tilde{Z}(3X^2 - \tilde{Z}^2)}{R_1^3},\ \tilde{A} = \frac{1}{4\pi\nu_1},\ R_1 = X^2 + \tilde{Z}^2\,.$$

Підсумовуючи розв'язки (3) і (10), одержуємо розв'язок поставленої задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.:Мир, 1987.– 328 с.
2. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.:ИЛ, 1965.- 667 с.
3. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. - Днепропетровск, 1985.- Ч.1.- 162 с. Деп. в ВИНИТИ 23.12.85,8789-В.