УДК 539.3:519.216/219

МЕТОД ПОДВІЙНОГО АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДУ ПРИ АНАЛІЗІ СТОХАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З КОЕФІЦІЄНТОМ ДЕМПФІРУВАННЯ, ЗАЛЕЖНИМ ВІД ЧАСУ*

Грищак В.З., д.т.н., професор, Лисенко В.В., аспірант

Запорізький державний університет

Ряд задач нелінійної стохастичної динаміки механічних систем, наприклад, нелінійні вимушені коливання пластин та оболонок, зводиться до отримання моментних функцій розв'язку неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі змінними параметрами. У більшості випадків точний розв'язок цього рівняння можна одержати лише в окремих випадках. Аналіз поведінки особливо таких нелінійних нестаціонарних систем при випадкових впливах представляє певні труднощі в порівнянні з відповідним аналізом лінійних задач. Ці труднощі з'являються вже на етапі складання рівнянь відносно моментних функцій вихідного процесу. Одним із засобів одержання деяких характеристик вихідного процесу є використання наближених методів у сукупності з методом функцій Гріна [1], що застосовувався, зокрема, для аналізу поведінки стохастичних систем у роботі [2]. Особливий інтерес представляють асимптотичні підходи при дослідженні випадкових процесів.

У нашій роботі робиться спроба застосувати асимптотичні підходи, зокрема метод фазових інтегралів, для дослідження вимушених коливань нестаціонарних систем із демпфіруванням, що описуються стохастичним нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку у вигляді (1.1) зі змінним коефіцієнтом при першій похідній та випадковою правою частиною. Основою такого дослідження є метод асимптотичного розкладу, що застосовувався для дослідження стохастичної поведінки стаціонарної системи під дією випадкового навантаження в роботі [2] та метод подвійного асимптотичного розкладу, що застосовувався для дослідження детерміністичної поведінки нестаціонарної системи під дією детерміністичного навантаження в роботах [3, 4]. Наведено чисельні результати.

1. ОПИС МЕТОДУ. ЗОВНІШНЯ АСИМПТОТИКА

Досліджуються вимушені коливання механічних систем, коефіцієнт демпфірування яких залежить від часу, що описуються нелінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку вигляду:

$$f''(t)+c(t)\,f'(t)+\omega_0^2\,f(t)+\alpha f^3(t)=\gamma(t)\,, \tag{1.1}$$

де $c(t)$ – функція демпфірування; ω_0^2 – частота коливань механічної системи, причому ω_0>>1; α – малий параметр ($0\le\alpha\le 1$); $\gamma(t)$ – змушуюча випадкова сила з відомими характеристиками.

Щоб уникнути деяких труднощів, початкові умови для цього рівняння приймемо нульовими, тобто

$$f\big|_{t=0}=0\,,\qquad \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=0\,. \tag{1.2}$$

Під механічними системами, параметри яких залежать від часу, можна розуміти стержні, балки, пластинки, оболонки. А малий параметр при дослідженні коливань наведених об'єктів може виражатися відношенням товщини до найбільшого розміру, наприклад, довжини. Рівняння (1.1) описує вимушені коливання системи з одним ступенем свободи з кубічною нелінійністю під дією випадкової сили і є імовірнісним аналогом рівняння Дуффінга зі змінними коефіцієнтами [5]. До цього рівняння методом Бубнова-Гальоркіна [6] зводиться, наприклад, розв'язання задач про коливання пластин і оболонок під дією випадкового навантаження.

Необхідно зазначити, що задача про вільні коливання нелінійних механічних систем з параметрами, залежними від часу, була розв'язана в роботі [7]; задача про вимушені коливання нелінійних механічних систем з параметрами, залежними від часу, під дією детерміністичної нестаціонарної змушуючої сили, була розв'язана в роботах [3, 4], а задача про вимушені коливання нелінійних механічних систем з параметрами, не залежними від часу, під дією випадкової змушуючої сили, була розв'язана в роботі [2].

* Робота виконувалась згідно з держбюджетною темою №3/2000 Міністерства освіти і науки України

Для отримання розв'язку рівняння (1.1) застосуємо метод подвійного асимптотичного розкладу [3, 4], згідно з яким на першому етапі у випадку, якщо параметр α – малий, систему (1.1) можна замінити рекурентною послідовністю лінійних систем. Для цього будемо шукати розв'язок у вигляді ряду за ступенями малого параметра [5, 2] (зовнішня асимптотика):

$$f(t) = f_0(t) + \alpha f_1(t) + \alpha^2 f_2(t) + \ldots, \tag{1.3}$$

де три крапки заміняють доданки, пропорційні ступеням α, більшим двох.

Підставивши наведений ряд (1.3) у початкове рівняння (1.1) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра α, одержимо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій f_0, f_1, ...:

$$\begin{aligned} &f_0''(t) + c(t) f_0'(t) + \omega_0^2 f_0(t) = \gamma(t), \\ &f_1''(t) + c(t) f_1'(t) + \omega_0^2 f_1(t) = -f_0^3(t), \\ &\ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

Істотно, що кожне з рівнянь системи (1.4) лінійне, і що праві частини рівнянь залежать лише від функцій, знайдених на попередньому етапі обчислень.

Нехай зворотному оператору вихідного рівняння (1.1) відповідає оператор Вольтерра з функцією Гріна $h(t,\tau)$. Тоді розв'язок системи (1.4) представимо у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} &f_0(t) = \int_0^t h(t,\tau)\gamma(\tau)d\tau, \\ &f_1(t) = -\int_0^t h(t,\tau) f_0^3(\tau)d\tau, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{1.5}$$

Моментні функції вихідного процесу визначаються осередненням ряду (1.3) за множиною реалізацій. Так, для математичного сподівання вихідного процесу

$$\langle f(t)\rangle = \langle f_0(t)\rangle + \alpha\langle f_1(t)\rangle + \ldots, \tag{1.6}$$

а моментні функції другого порядку визначаються як

$$\begin{aligned} \langle f(t_1) f(t_2)\rangle = &\langle f_0(t_1) f_0(t_2)\rangle + \alpha\langle f_0(t_1) f_1(t_2)\rangle + \\ &+ \alpha\langle f_0(t_2) f_1(t_1)\rangle + \alpha^2\langle f_1(t_1) f_1(t_2)\rangle + \ldots, \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тут і надалі кутовими дужками позначена операція обчислення математичного сподівання.

Після підстановки в рівняння (1.7) виразу для функції f_1 одержуємо

$$\begin{aligned} \langle f(t_1) f(t_2)\rangle = \langle f_0(t_1) f_0(t_2)\rangle &- \alpha\int_0^{t_2} h(t_2,\tau_2)\langle f_0(t_1) f_0^3(\tau_2)\rangle d\tau_2 - \\ &- \alpha\int_0^{t_1} h(t_1,\tau_1)\langle f_0(t_2) f_0^3(\tau_1)\rangle d\tau_1 + \ldots \end{aligned} \tag{1.8}$$

Застосуємо формулу (1.8) для обчислення кореляційної функції вихідного процесу. Нехай $\gamma(t)$ – центрований випадковий процес, тоді $f(t)$ також буде центрованим випадковим процесом і його моментна функція другого порядку $\langle f(t_1) f(t_2)\rangle$ буде дорівнювати кореляційній функції $K_f(t_1,t_2)$. У праву частину виразу (1.8) входить моментна функція четвертого порядку від нульового наближення $f_0(t)$. Щоб знайти цю функцію, потрібно мати інформацію про розподіл процесу $f_0(t)$. Якщо зовнішній вплив є нормальним, то буде нормальним також і процес $f_0(t)$. Тоді для визначення моментної функції четвертого порядку можна скористатися співвідношеннями, що зв'язують старші моментні функції через молодші, які справедливі для нормальних процесів [9]:

$$\left\langle f_0(t_1) f_0^3(\tau_2)\right\rangle = 3\left\langle f_0(t_1) f_0(\tau_2)\right\rangle\left\langle f_0(\tau_2) f_0(\tau_2)\right\rangle = 3K_{f_0}(t_1,\tau_2)K_{f_0}(\tau_2,\tau_2), \quad (1.9)$$

$$\left\langle f_0(t_2) f_0^3(\tau_1)\right\rangle = 3\left\langle f_0(t_2) f_0(\tau_1)\right\rangle\left\langle f_0(\tau_1) f_0(\tau_1)\right\rangle = 3K_{f_0}(t_2,\tau_1)K_{f_0}(\tau_1,\tau_1). \quad (1.10)$$

Підставляючи знайдені значення у вираз (1.8), одержимо остаточно:

$$K_f(t_1,t_2) = K_{f_0}(t_1,t_2) - 3\alpha\int_0^{t_2} h(t_2,\tau_2)K_{f_0}(t_1,\tau_2)K_{f_0}(\tau_2,\tau_2)d\tau_2 - \\ - 3\alpha\int_0^{t_1} h(t_1,\tau_1)3K_{f_0}(t_2,\tau_1)K_{f_0}(\tau_1,\tau_1)d\tau_1 + ..., \quad (1.11)$$

де $K_{f_0}(t_1,t_2)$ – кореляційна функція нульового наближення $f_0(t)$, тобто

$$K_{f_0}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1,\tau_1)h(t_2,\tau_2)K_\gamma(\tau_1,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1, \quad (1.12)$$

$K_\gamma(\tau_1,\tau_2)$ – кореляційна функція зовнішнього навантаження $\gamma(t)$.

Для випадку нормального вхідного процесу $\gamma(t)$ усі виписані члени знайдені точно. Члени, що містять квадрати і більш високі ступені малого параметра, будуть залежати від моментних функцій процесів $f_1(t)$, $f_2(t)$ і т.д. При нормальному зовнішньому навантаженні процеси $f_1(t)$, $f_2(t)$ і т.д. у загальному випадку не є нормальними. Тому обчислення наступних членів розвинення викликає затруднення. Щоб обминути ці затруднення, доведеться, як і раніше, ввести додаткові гіпотези про моментні функції.

2. ФУНКЦІЯ ГРІНА. ВНУТРІШНЯ АСИМПТОТИКА

Для обчислення кореляційної функції вихідного процесу по заданій кореляційній функції вхідного процесу необхідно побудувати функцію Гріна $h(t,\tau)$, що задовольняє рівнянню [1]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + c(t)\frac{\partial h}{\partial t} + \omega_0^2 h = \delta(t-\tau) \quad (2.1)$$

при нульових початкових умовах

$$h\big|_{t=\tau} = 0, \qquad \left.\frac{\partial h}{dt}\right|_{t=\tau} = 0, \quad (2.2)$$

де $\delta(t-\tau)$ – дельта-функція.

Тобто функція Гріна $h(t,\tau)$ – це рівняння вимушених коливань нестаціонарної системи при імпульсному навантаженні в момент часу τ, таким чином, замість того, щоб розв'язувати неоднорідне рівняння (2.1), можна розглянути відповідне однорідне рівняння, записавши початкові умови у вигляді

$$h\big|_{t=\tau} = 0, \qquad \left.\frac{\partial h}{dt}\right|_{t=\tau} = 1. \quad (2.3)$$

Зробивши заміну

$$h(t,\tau) = u(t,\tau)\cdot e^{-\int_\tau^t E(x)dx}, \quad (2.4)$$

розв'язавши отримане рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\omega_0^2 - E^2(t) - E'(t)\right)\cdot u = 0 \quad (2.5)$$

методом фазових інтегралів [8] (внутрішня асимптотика) при обмеженні у розвиненні першими двома членами та знайшовши довільні постійні з початкових умов (2.3) прийдемо до такого:

$$h(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\omega_\varepsilon(\tau)\omega_\varepsilon(t)}}e^{-\int_\tau^t E(x)dx}\sin\int_\tau^t\omega_\varepsilon(x)dx, \qquad (2.6)$$

де $\omega_\varepsilon(t)$ має сенс частоти власних коливань системи, яка обчислена з виправленням на функцію демпфірування:

$$\omega_\varepsilon(t)=\sqrt{\omega_0^2-E^2(t)-E'(t)}\,. \qquad (2.7)$$

При цьому приймаємо, що

$$E^2(t)+E'(t)<\omega_0^2\text{, для будь-якого } t\ge 0, \qquad (2.8)$$

тобто добуток коефіцієнта демпфірування та його похідної завжди менше критичного значення в будь-який час.

3. ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПЕРШІЙ ПОХІДНІЙ

Нижче наведені графіки залежності кореляційної функції вихідного процесу при дії випадкового навантаження з постійною кореляційною функцією $K_\gamma(t_1,t_2)=1$ та нульовим математичним сподіванням від змінного коефіцієнта демпфірування (параметр при першій похідній) $c(t)=2\varepsilon$ при $\omega_0=10$, $\mu=0{,}1$, $t_{1,2}\in[0;3\cdot 2\pi/\omega_0]$. Кореляційна функція навантаження вибрана постійною для того, щоб можливо було чітко простежити вплив коефіцієнта демпфірування на кореляційну функцію вихідного процесу (див. рис. 3.1-3.6).

Як і очікувалось, при зростанні коефіцієнта демпфірування зростає затухання коливань кореляційної функції вихідного процесу. З останнього рисунку (рис. 3.6) ми бачимо, що коливання кореляційної функції загасають і при достатньо великих t_1 та t_2 значення кореляційної функції дорівнює константі. Кореляційна функція дорівнює нулю при $t_1=0$ або $t_2=0$, тому що початкові умови для вихідного процесу дорівнюють нулю, тобто не є випадковими.

Запропонований асимптотичний підхід може бути використаний при розв'язку різноманітних задач стохастичної механіки деформованого тіла, які зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь зі

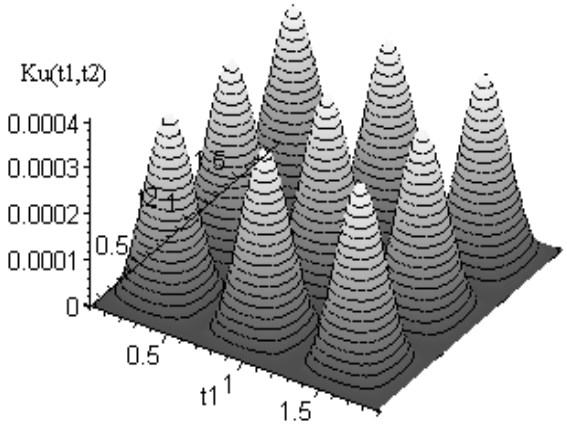

Рис. 3.1. Графік кореляційної функції вихідного процесу, ε = 0.

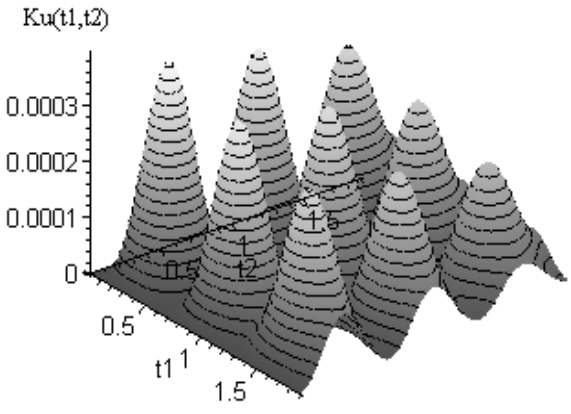

Рис. 3.2. Графік кореляційної функції вихідного процесу, ε = 0,5.

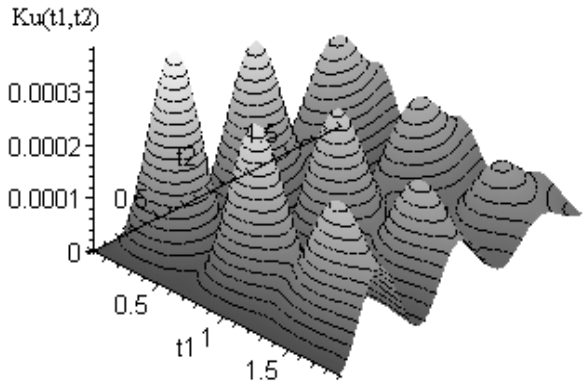

Рис. 3.3. Графік кореляційної функції вихідного процесу, ε = 1.

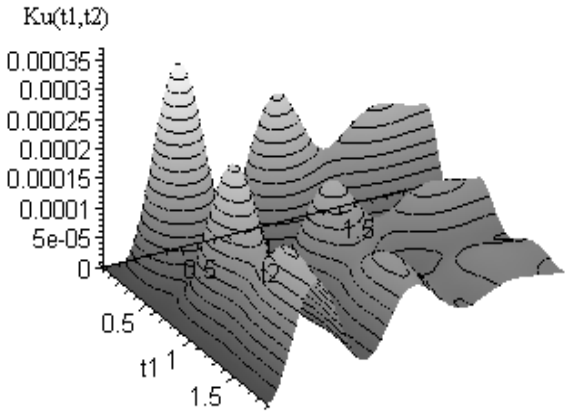

Рис. 3.4. Графік кореляційної функції вихідного процесу, ε = 2.

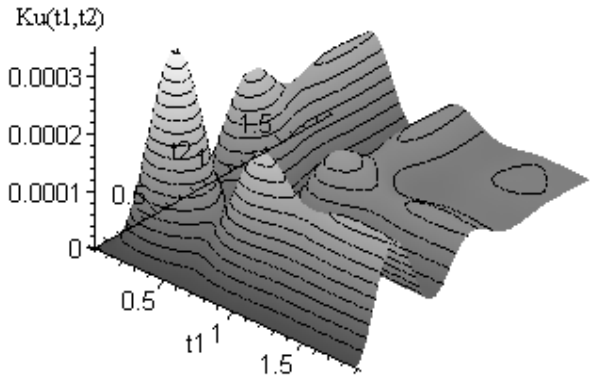

Рис. 3.5. Графік кореляційної функції вихідного процесу, ε = 3.

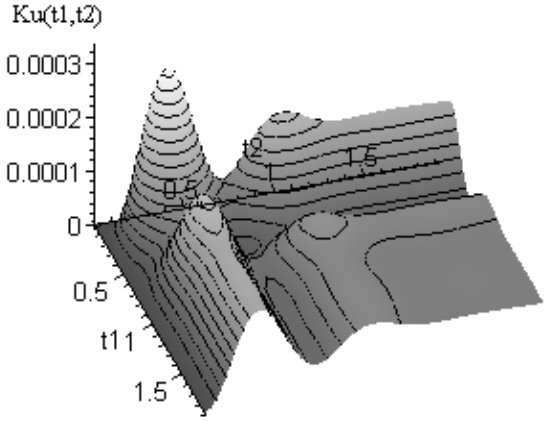

Рис. 3.6. Графік кореляційної функції вихідного процесу, ε = 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

2. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат. – 1970. – 256 с.

3. Gristchak V.Z., Kabak V.N. Doudle Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technishe Mechanik. – 1996. – № 4. – P. 285-296.

4. Грищак В.З., Кабак В.М. Про один асимптотичний підхід до дослідження вимушених коливань механічних систем з демпфіруванням, параметри яких залежать від часу // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – № 1. – С. 28-30.

5. Найфе А.Х. Методы возмущений: Пер. с англ. – М: Мир, 1976. – 456 с.

6. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 631 с.

7. Gristchak V.Z., Golovan O.A. Asymptotic Solution for Nonlinear Dynamic of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technishe Mechanik. – 1995. – № 3. – P. 183-190.

8. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. – М.: Мир, 1965. – 238 с.

9. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960. – 883 с.