УДК 539.3:517.926.4

НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ СТОСОВНО ЗАДАЧІ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ*

Грищак В.З., д.т.н., професор, Герасімов Т.С., аспірант

Запорізький державний університет

1. ВСТУП

Математична постановка задачі про власні не вісесиметричні у загальному випадку коливання тонкої пластини змінної товщини зводиться до розв'язування крайової задачі для диференціального рівняння четвертого порядку із змінними коефіцієнтами. Прямі чисельні методи дозволяють знайти його точний розв'язок при будь-якому заздалегідь відомому законі зміни твердості, однак для кожного нового закону трудомістку процедуру обчислень необхідно виконувати заново.

Точні ж аналітичні розв'язки в замкнутому вигляді можна одержати лише в ряді випадків для деяких конкретних законів зміни товщини, що знижує їхню практичну цінність. Так, наприклад, Конвей [1], на основі вивчення вільних коливань конічної балки [2,3], одержав *точний* розв'язок для круглої пластини, товщина якої зменшується від центра до краю за лінійним законом, і коефіцієнт Пуассона дорівнював одній третій. Ним були визначені власні частоти у випадку затисненого краю пластини. Ряд розв'язків було отримано в роботі Соні [4] для пластин із квадратичним законом зміни товщини. Джейн [5] для обчислення частот перших двох форм коливань затисненої і вільно обпертої пластин у випадку, коли їхня товщина убуває за лінійним і параболічним законами, використовував метод Фробениуса. Ленокс і Конвей [6] одержали точні розв'язки для прогинів кільцевої пластини і чисельно порахували власні частоти. Харісом в роботі [7] були отримані замкнуті аналітичні розв'язки для власних форм і власних частот коливання круглої пластини з вільним краєм. Закон зміни твердості пластини мав вигляд: $D(r) = D_0(1-r^2/R^2)^3$, де D_0 – жорсткість у центрі пластини, r – полярна координата радіуса, R – радіус.

У більшості випадків розв'язки були отримані за допомогою наближених методів. Метод збурювань, заснований на використанні малого параметра, був запропонований Янгом [8]. Він знайшов наближені розв'язки нульового і першого порядків для власних частот затисненої по краю пластини з лінійно змінною товщиною. Лаура [9] у вивченні коливань і пружної рівноваги полярно ортотропної круглої пластини з лінійним законом зміни товщини використовував метод Релея-Ритца. Лал і Гупта [10] визначили власні частоти полярно ортотропной кільцевої пластини перемінної товщини використовуючи поліноми Чебишева. Найбільш універсальна техніка вивчення динамічного поводження полярно ортотропних кільцевих пластин, заснована на методі кінцевих елементів, була запропонована Горманом [11] і Канака Раджу [12].

У роботі на основі застосування асимптотичного підходу (метод ВКБ) зроблена спроба одержати наближений аналітичний розв'язок задачі про власні коливання круглої пластини змінної товщини, коли закон її зміни в загальному випадку довільний і завчасно невідомий. Отриманий розв'язок має досить простий вигляд. Розглянуто випадок вісесиметричних коливань.

Структура розв'язку, до якого входить функція $\varphi(x)$ – зміни товщини пластини уздовж однієї з координат, характеристичні рівняння власних частот для трьох класичних типів крайових умов і наступна графічна *візуалізація* прогинів серединної поверхні пластини, дають можливість представити вплив функції $\varphi(x)$ на форми і частоти коливань пластини.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Власні коливання круглої пластини радіуса a зі змінною циліндричною жорсткістю описуються рівнянням [13]:

$$\nabla^2\left(D\nabla^2 W\right) + \rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

* Робота виконувалась згідно з держбюджетною темою №3/2000 Міністерства освіти і науки України

де $W(r,\theta,t)$ – поперечний прогин, t – координата часу,

$D(r)=\dfrac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}\varphi^3(r)$ – циліндрична жорсткість,

$h(r)=h_0\varphi(r)$ – змінна товщина, h_0 – товщина в центрі, $\varphi(r)$ – закон зміни товщини пластині,

E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, $\rho=\gamma/g$ – поверхнева щільність матеріалу пластини,

$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ – оператор Лапласа в полярних координатах.

Розглянемо також три типи граничних умов при $r=a$:

1. Жорстке затиснення:

$$W=0,\ \frac{\partial W}{\partial r}=0, \tag{2.а}$$

2. Шарнірне обпирання:

$$W=0,\ M_r=0, \tag{2.б}$$

де M_r згинаючий момент.

3. Вільний край:

$$M_r=0,\ Q_r+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}=0, \tag{2.в}$$

де Q_r – перерізуюча поперечна сила, $M_{r\theta}$ – крутильний момент .

У розгорнутому вигляді рівняння (1) можна представити так:

$$D\nabla^2\nabla^2W+\frac{\partial D}{\partial r}\left(2\frac{\partial^3W}{\partial r^3}+\frac{(2+\nu)}{r}\frac{\partial^2W}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3W}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{3}{r^3}\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2D}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}\right)+\rho h\frac{\partial^2W}{\partial t^2}=0. \tag{3}$$

Введемо безрозмірні змінні

$$\tilde{W}=\frac{W}{a},\ x=\frac{r}{a},\ \tau=\frac{t}{T}, \tag{4}$$

де $\tilde{W}(x,\theta,\tau)$ – безрозмірний прогин, який при розподілі змінних можна представити у вигляді

$$\tilde{W}(x,\theta,\tau)=X(x)\cdot e^{in\theta}\cdot e^{i\omega\tau}, \tag{5}$$

де $\omega-$ частота коливань, $n\in Z^+$.

У результаті підстановки (4) і (5) у (3), опускаючи рутинні перетворення, останнє можна записати у вигляді

$$X^{iv}+\alpha_1(x)X'''+\alpha_2(x)X''+\alpha_3(x)X'+\alpha_4(x)X-\frac{\rho ha^4\omega^2}{DT^2}X=0, \tag{6}$$

де

$$\alpha_1(x)=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{2n^2+1}{x^2} + \frac{2+\nu}{Dx}\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{1}{D}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2},$$

$$\alpha_3(x) = \frac{2n^2+1}{x^3} - \frac{2n^2+1}{Dx^2}\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\nu}{Dx}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2},$$

$$\alpha_4(x) = \frac{n^4-4n^2}{x^4} + \frac{3n^2}{Dx^3}\frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\nu n^2}{Dx^2}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}. \qquad (7)$$

З огляду на те, що $h(x) = h_0\varphi(x),\ \ D(x) = \frac{Eh_0^{\ 3}}{12\left(1-\nu^2\right)}\varphi^3(x),$ зведемо останній коефіцієнт із (6) до вигляду:

$$\frac{\rho h}{DT^2}a^4\omega^2 = \frac{12\left(1-\nu^2\right)\rho a^2}{ET^2}\varphi^{-2}(x)\left(\frac{a^2}{h_0^2}\omega^2\right). \qquad (8)$$

Функція $\varphi(x)$ – аналітична і додатна на відрізку [0,1].

Тепер параметр часу T можна вибрати з умови $\frac{12\left(1-\nu^2\right)\rho a^2}{ET^2} = 1.$ (9)

У результаті підстановки (8),(9) у (6), останнє запишеться так:

$$X^{iv} + \alpha_1(x)X''' + \alpha_2(x)X'' + \alpha_3(x)X' + \alpha_4(x)X - \left(\frac{a^2}{h_0^2}\omega^2\right)\varphi^{-2}(x)X = 0. \qquad (10)$$

Обмежимося розглядом вісесиметричних коливань пластини, тобто коли кількість вузлових діаметрів n дорівнює нулю і згідно (7) $\alpha_4(x) = 0$. Тоді маємо

$$\varepsilon^4\left[X^{iv} + \alpha_1(x)X''' + \alpha_2(x)X'' + \alpha_3(x)X'\right] - \varphi^{-2}(x)X = 0. \qquad (11)$$

Рівняння (11) являє собою лінійне однорідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами і малим параметром $\varepsilon^4 = \left(\frac{a}{h_0}\omega\right)^{-2} << 1$ при старших похідних.

3. МЕТОД ФАЗОВИХ ІНТЕГРАЛІВ

Відповідно до методу фазових інтегралів[14], обмежимось одним членом розкладу, і розв'язок рівняння (11) будемо шукати у вигляді:

$$X_{WKB} = \exp\left(\int_0^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right), \qquad (12)$$

де ψ_0 – невідома функція.

Тоді перші чотири похідні будуть такими:

$$\frac{dX_{WKB}}{dx}=\exp\left(\int_0^x\varepsilon^{-1}\psi_0dx\right)\varepsilon^{-1}\psi_0,$$
$$\frac{d^2X_{WKB}}{dx^2}=\exp\left(\int_0^x\varepsilon^{-1}\psi_0dx\right)\left(\varepsilon^{-2}\psi_0^2+\varepsilon^{-1}\psi_0'\right),$$
$$\frac{d^3X_{WKB}}{dx^3}=\exp\left(\int_0^x\varepsilon^{-1}\psi_0dx\right)\left(\varepsilon^{-3}\psi_0^3+3\varepsilon^{-2}\psi_0\psi_0'+\varepsilon^{-1}\psi_0''\right), \quad (13)$$
$$\frac{d^4X_{WKB}}{dx^4}=\exp\left(\int_0^x\varepsilon^{-1}\psi_0dx\right)\left(\varepsilon^{-4}\psi_0^4+6\varepsilon^{-3}\psi_0^2\psi_0'+4\varepsilon^{-2}\psi_0\psi_0''+3\varepsilon^{-2}(\psi_0')^2+\varepsilon^{-1}\psi_0'''\right).$$

Підставивши (12), (13) у (11) і зібравши коефіцієнти при ε^0, одержимо:

$$\psi_0^4-\varphi^{-2}(x)=0, \quad (14)$$

відкіля шукана функція ψ_0 дорівнює

$$\psi_0=\sqrt[4]{\varphi^{-2}(x)}=\begin{cases}\pm\varphi^{-1/2}(x),\\ \pm i\varphi^{-1/2}(x).\end{cases} \quad (15)$$

Таким чином, згідно з (12) часткові розв'язки

$$X_{WKB}=\begin{cases}\exp\left(\pm\int_0^x\varepsilon^{-1}\varphi^{-1/2}(x)dx\right),\\ \exp\left(\pm i\int_0^x\varepsilon^{-1}\varphi^{-1/2}(x)dx\right),\end{cases} \quad (16)$$

і загальний розв'язок рівняння (11) запишеться у вигляді:

$$X(x)\approx C_1\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+C_2\exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+$$
$$+C_3\exp\left(i\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+C_4\exp\left(-i\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right), \quad (17)$$

де C_1,C_2,C_3,C_4 – довільні постійні.

Переходячи у формулі (17) від експонентного представлення функцій до тригонометричного, останнє можна записати:

$$X(x)\approx A_1ch\left(\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+A_2sh\left(\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+$$
$$+A_3\cos\left(\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+A_4\sin\left(\varepsilon^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right), \quad (18)$$

де $A_1=C_1+C_2,\ A_2=C_1-C_2,\ A_3=C_3+C_4,\ A_4=C_3-iC_4.$

Для круглої пластини, що не має центрального отвору, і товщина при цьому змінюється симетрично щодо центра, кут повороту нормалі до серединної поверхні $\partial W/\partial r$ у центрі пластини дорівнює нулю [15]. Беручи до уваги цю умову, можна трохи спростити формулу (18) і записати:

$$X(x)=A\left(ch\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx+\cos\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+$$

$$+B\left(sh\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx-\sin\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right). \qquad (19)$$

Тепер для визначення власних значень ε^{-1} і констант A,B необхідно скористатися граничними умовами (2.а) – (2.в), що з урахуванням перетворень (4) у загальному випадку виглядають так при $x=1$:

Жорстке затиснення:

$$X=0,\ X'=0. \qquad (20.а)$$

Шарнірне обпирання:

$$X=0,\ X''+\frac{\nu}{x}X'-\frac{\nu n^2}{x^2}X=0. \qquad (20.б)$$

Вільний край:

$$X''+\frac{\nu}{x}X'-\frac{\nu n^2}{x^2}X=0,$$
$$X'''+\frac{1}{x}X''+\frac{n^2(\nu-2)-1}{x^2}X'+\frac{n^2(3-\nu)}{x^3}X=0. \qquad (20.в)$$

Так, наприклад, на основі відповідних граничних умов, у випадку ***жорстко затисненого краю*** пластини для вісесиметричних коливань власні значення ε_m^{-1} і коефіцієнти A,B визначаються формулами:

$$\varepsilon_m^{-1}=\pi mP^{-1},$$
$$A=-\frac{sh\varepsilon_m^{-1}P-\sin\varepsilon_m^{-1}P}{\left(ch\varepsilon_m^{-1}P+\cos\varepsilon_m^{-1}P\right)^2+\left(sh\varepsilon_m^{-1}P-\sin\varepsilon_m^{-1}P\right)^2},$$
$$B=\frac{ch\varepsilon_m^{-1}P+\cos\varepsilon_m^{-1}P}{\left(ch\varepsilon_m^{-1}P+\cos\varepsilon_m^{-1}P\right)^2+\left(sh\varepsilon_m^{-1}P-\sin\varepsilon_m^{-1}P\right)^2}, \qquad (21)$$

де $m=0,1,2,...$ – кількість вузлових окружностей, $P=\int_0^1\varphi^{-1/2}(x)dx$. (22)

У випадку, коли край пластини ***шарнірно обпертий***, власні значення ε_m^{-1} обчислюються з характеристичного рівняння

$$\left(cth\varepsilon_m^{-1}P+ctg\varepsilon_m^{-1}P\right)\varepsilon_m^{-1}=\varphi^{-1/2}(1)\varphi'(1)-\nu\varphi^{1/2}(1), \qquad (23)$$

Коефіцієнти A,B тут також можна визначити по формулах (21), (22) відповідно.

І, нарешті, у випадку ***вільного краю*** власні значення можна знайти з граничних умов (20.в), розв'язавши характеристичне рівняння

$$A_1\left(\varepsilon_m^{-1}\right)B_2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)+A_2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)B_1\left(\varepsilon_m^{-1}\right)=0, \qquad (24)$$

де

$$A_1\left(\varepsilon_m^{-1}\right)=\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-3/2}(1)\varphi'(1)+\nu\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-1/2}(1)\right)\left(sh\varepsilon_m^{-1}P-\sin\varepsilon_m^{-1}P\right)+$$
$$+\varepsilon_m^{-2}\varphi^{-1}(1)\left(ch\varepsilon_m^{-1}P-\cos\varepsilon_m^{-1}P\right), \qquad (25)$$

$$A_2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)=\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-3/2}(1)\varphi'(1)+\nu\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-1/2}(1)\right)\left(ch\varepsilon_m^{-1}P-\cos\varepsilon_m^{-1}P\right)+$$
$$+\varepsilon_m^{-2}\varphi^{-1}(1)\left(sh\varepsilon_m^{-1}P+\sin\varepsilon_m^{-1}P\right), \tag{26}$$

$$B_1\left(\varepsilon_m^{-1}\right)=\left[\frac{3}{4}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-5/2}(1)\varphi'^2(1)-\frac{1}{2}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-3/2}(1)\varphi''(1)-\frac{1}{2}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-3/2}(1)\varphi'(1)-\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-1/2}(1)\right]\times$$
$$\times\left(sh\varepsilon_m^{-1}P-\sin\varepsilon_m^{-1}P\right)+\left(-\frac{3}{2}\varepsilon_m^{-2}\varphi^{-2}(1)\varphi'(1)+\varepsilon_m^{-2}\varphi^{-1}(1)\right)\left(ch\varepsilon_m^{-1}P-\cos\varepsilon_m^{-1}P\right)+$$
$$+\varepsilon_m^{-3}\varphi^{-3/2}(1)\left(sh\varepsilon_m^{-1}P+\sin\varepsilon_m^{-1}P\right), \tag{27}$$

$$B_2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)=\left[\frac{3}{4}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-5/2}(1)\varphi'^2(1)-\frac{1}{2}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-3/2}(1)\varphi''(1)-\frac{1}{2}\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-3/2}(1)\varphi'(1)-\varepsilon_m^{-1}\varphi^{-1/2}(1)\right]\times$$
$$\times\left(ch\varepsilon_m^{-1}P-\cos\varepsilon_m^{-1}P\right)+\left(-\frac{3}{2}\varepsilon_m^{-2}\varphi^{-2}(1)\varphi'(1)+\varepsilon_m^{-2}\varphi^{-1}(1)\right)\left(sh\varepsilon_m^{-1}P+\sin\varepsilon_m^{-1}P\right)+$$
$$+\varepsilon_m^{-3}\varphi^{-3/2}(1)\left(ch\varepsilon_m^{-1}P+\cos\varepsilon_m^{-1}P\right). \tag{28}$$

а коефіцієнти визначаються формулами

$$A=-\frac{A_2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)}{A_1^2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)+A_2^2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)},\qquad B=\frac{A_1\left(\varepsilon_m^{-1}\right)}{A_1^2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)+A_2^2\left(\varepsilon_m^{-1}\right)}. \tag{29}$$

Трансцендентні рівняння (23), (24) легко розв'язуються чисельно за допомогою спеціальних процедур, вбудованих у прикладні математичні пакети.

Функція поперечного прогину $\tilde{W}(x,\theta)$, таким чином, запишеться (взята її реальна частина):

$$\tilde{W}(x,\theta)=A\left(ch\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx+\cos\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right)+$$
$$+B\left(sh\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx-\sin\varepsilon_m^{-1}\int_0^x\varphi^{-1/2}(x)dx\right). \tag{30}$$

Прикладом порівняння отриманого наближеного розв'язку (30) з деяким точним розв'язком розглянемо найпростіший випадок, коли закон зміни товщини взятий у вигляді $\varphi(x)=1$. Таким чином, ми маємо пластину постійної товщини, для якої прогини виражаються через комбінацію функцій Бесселя дійсного і уявного аргументів [16], а власні хвильові числа λ є точними коренями визначених характеристичних рівнянь. У таблиці 1 для деякого числа вузлових кіл m показані власні хвильові числа, знайдені наближеним методом ВКБ, наближеним методом Келера–Рубінова [16] і точні їхні значення для коливань пластини, затисненої по краю.

Таблиця 1 – Порівняння власних хвильових чисел

(n,m)	Точні значення λ	Метод ВКБ, $\lambda=\varepsilon^{-1}$	Метод Келера-Рубінова
(0,0)	3.19622	3.14159	3.141593
(1,0)	4.61090	–	4.578895
(0,1)	6.30644	6.28318	6.283185
(1,1)	7.79927	–	7.781379
(0,2)	9.43950	9.42477	9.424778

На рис. 1–3 зображені графіки прогинів $\tilde{W}(x)$ відповідно першим трьом власним значенням λ,отримані за допомогою формули (30) (тонка лінія) і виражені через функції Бесселя (товста лінія) для випадку жорстко затисненого краю пластини при $m=0,1,2$.

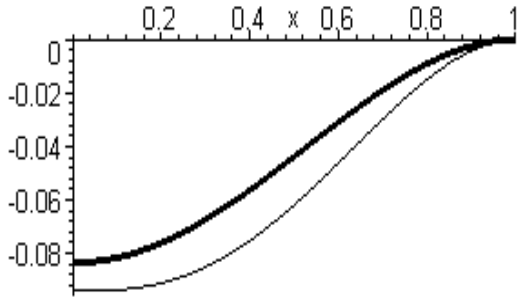


Рис.1 Прогини жорстко затисненої по краю пластини. Товста лінія – точний прогин, тонка лінія – наближений (метод ВКБ). Закон зміни товщини $\varphi(x)=1,\ m=0$.

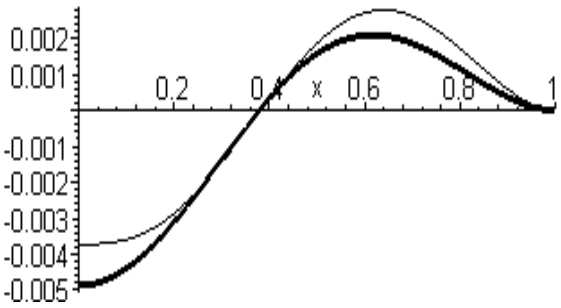


Рис.2 Прогини жорстко затисненої по краю пластини. Товста лінія – точний прогин, тонка лінія – наближений (метод ВКБ). Закон зміни товщини $\varphi(x)=1,\ m=1$.

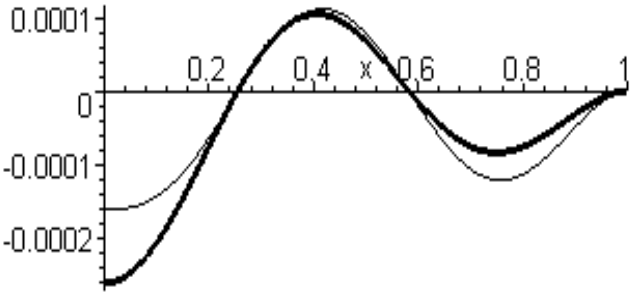


Рис.3 Прогини жорстко затисненої по краю пластини. Товста лінія – точний прогин, тонка лінія – наближений (метод ВКБ). Закон зміни товщини $\varphi(x)=1,\ m=2$.

Як видно з таблиці 1 і графіків прогинів, вже в першому наближенні метод фазових інтегралів дозволяє знайти власні числа і власні функції, близькі до точного.

На рис. 4–5 показані прогини пластини з затисненим (тонка лінія) і шарнірно обпертим (товста лінія) краєм у випадку, коли закон зміни товщини має вигляд $\varphi(x)=\exp(x).$ Кількість вузлових кіл відповідно $m=0,1.$

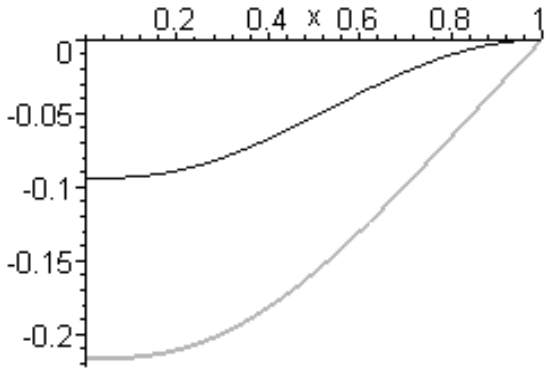


Рис. 4 Прогини пластини з затисненим (тонка лінія) і шарнірно обпертим (товста лінія) краєм при $\varphi(x)=\exp(x),\ m=0$.

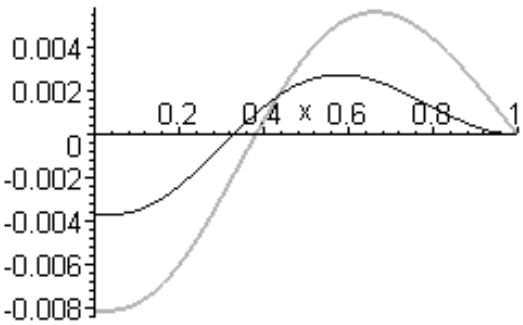


Рис. 5 Прогини пластини з затисненим (тонка лінія) і шарнірно обпертим (товста лінія) краєм при $\varphi(x)=\exp(x),\ m=1$.

Для з'ясування характеру впливу виду функції $\varphi(x)$ на форми прогинів пластини розглянемо перший прогин пластини у випадку, коли $\varphi(x)=10^x$ і $\varphi(x)=(1/10)^x$ при граничних умовах типу жорстке затиснення (рис. 6–7).

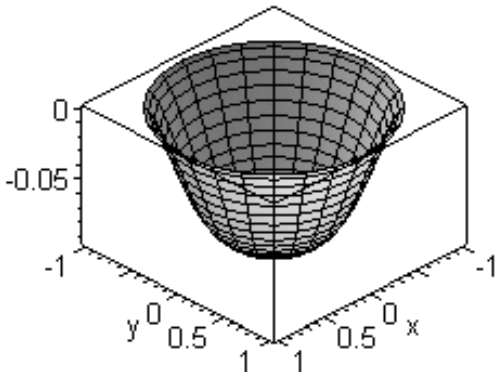


Рис. 6 Форма прогину серединної поверхні жорстко затисненої пластини при $\varphi(x) = (1/10)^x$, $m = 0$.

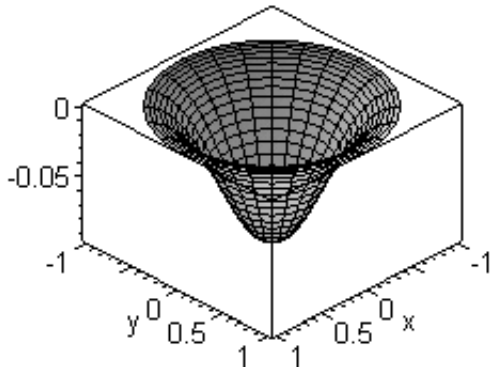


Рис. 7 Форма прогину серединної поверхні жорстко затисненої пластини при $\varphi(x) = 10^x$, $m = 0$

Як видно з рисунків 6,7, найбільші прогини серединної поверхні пластини знаходяться ближче до краю пластини, якщо її товщина зменшується від центра до краю, і ближче до центра у зворотному випадку.

Хоча використаний у роботі метод фазових інтегралів вже в першому наближенні дає розв'язок рівняння (11), близький до точного, та має досить простий вигляд, однак побудований розв'язок не ураховує впливу першого, другого та третього членів цього рівняння. Для їх урахування необхідно ВКБ-розв'язок будувати з використанням кількох членів розвинення, тобто $X_{WKB} = \exp\left(\int_0^x (\varepsilon^{-1}\psi_0 + \psi_1)dx\right)$, або шукати функцію ψ_0 з урахуванням інших коефіцієнтів рівняння (11). Обидва ці підходи досить складні і не завжди здійснені. Тому в подібних задачах є актуальним застосування змішаних асимптотико-чисельних підходів, наприклад, гібридного ВКБ–Гальоркін методу [17], який дозволяє отримати аналітичний розв'язок на широкому інтервалі зміни параметра, одночасно враховуючи вплив усіх коефіцієнтів

ЛІТЕРАТУРА

1. Convey H.D., Becker E.C.H., Dubil J.F. Vibration Frequencies of tapered bars and circular plates // J. Appl. Mech. – 1964.– 31, № 5.– P. 329 – 331.
2. Convey H.D. An analogy between the flexural vibrations of a cone and a disc of linearly varying thickness // Zeitscrift fuer angewandte Mathematik und Mechanic. – 1957. – 37, № 2.– P. 406 – 407.
3. Convey H.D. Some special solutions for flexural vibrations of disc of varying thickness // Ingenieur - Archiv. – 1958. – 26, № 9.– P. 408 – 410.
4. Soni S.R. Vibration of elastic plates and shells of variable thickness // Ph.D. thesis, University of Roorkee. – 1972.
5. Jain R.K. Vibration of circular plates of variable thickness under an inplane forse // J. Sound and Vibr. – 1972. – 23, № 11.– P. 406 – 414.
6. Lenox T.A., Convey H.D. An exact closed-form solutions for flexural vibration of a thin annular plate having a parabolic thickness variation // J. Sound and Vibr. – 1980. – 68, № 5.– P. 231 – 239.
7. Harris C.Z. The normal modes of a circular plate of variable thickness // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1968. – 21, № 4.– P. 320 – 327.
8. Yang J.S. The vibration of circular plates with variable thickness // J. Sound and Vibr. – 1993. – 165, № 7.– P. 178 – 184.
9. Laura P.A., Avalos D.R., Galles C.D. Vibrations and elastic stability of polar orthotropic circular plate of linearly varying thickness // J. Sound and Vibr. – 1982. – 82, № 10.– P. 151 – 156.
10. Lal R., Gupta U.S. Axisymmetric of polar orthotropic annular plate of variable thickness // J. Sound and Vibr. – 1982. – 83, № 4.– P. 229 – 240.
11. Gorman D.G. Natural frequencies of transverse vibrations of polar orthotropic variable thickness annular plate // J. Sound and Vibr. – 1983. – 86, № 8.– P. 47 – 60.

12. Kanaka K. Raju Large amplitude vibrations of circular plates with variable thickness // J. Sound and Vibr. – 1977. – 50, № 3.– P. 399 – 403.

13. Вайнберг Д.В. Расчет пластин.–К.: Будивельник, 1970.– 435с.

14. Найфе А.Х. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. – М: Мир, 1984. – 456с.

15. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины.– К.: Наукова думка, 1959. – 328 с.

16. Goon C., Jianxin Z. Vibration and Damping in Distributed Sysytems, *Volume II*: WKB and Wave Methods.– CRC Press, Boca Raton, FL,1993.

17. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Ye.M. A Hybrid WKB - Galerkin Method and its Application // Technishe Mechanik. – 1995. – 15, № 3. – P. 281 – 294.