УДК 517

НАДАННЯ ЯКІСНОЇ ОЦІНКИ ПОВЕДІНКИ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ АСИМПТОТИКО-ГРУПОВОГО АНАЛІЗУ

Базилєв Б. Ю., аспірант

Запорізька державна інженерна академія

Для моделювання роботи багатосекторних економік досить поширене використання лінійних динамічних рівнянь Леонтьєва[1,2]. Але в багатьох випадках достатньо обмежитися розгляданням відносно невеликої кількості секторів, при цьому уточнити модель, беручи до уваги нелінійні ефекти, котрі можуть значно ускладнити її аналіз. У такому випадку ефективно можна застосувати метод асимптотико-групового аналізу.

Розглянемо такий варіант двопродуктової динамичної моделі Леонтьєва для неперервного часу:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \nu_{11}\frac{dx_1(t)}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2(t)}{dt} \\ x_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \nu_{21}\frac{dx_1(t)}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2(t)}{dt} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

тут x_i – об'єм валової продукції; a_{ij} – норма витрат продукції; ν_{ij} – інвестиційні коефіцієнти.

Модель замкнена, – немає експорту та імпорту, – увесь продукт, що виробляється економікою, йде на витрати виробництва та на чисті інвестиції.

Будемо проводити дослідження моделі за допомогою методу асимптотико-групового аналізу [3].

Перепишемо рівняння (1):

$$\left.\begin{aligned} \nu_{11}d_t x_1 + \nu_{12}d_t x_2 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 &= 0 \\ \nu_{21}d_t x_1 + \nu_{22}d_t x_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

де $d_t = d/dt$, $x_i = x_i(t)$, $b_{11} = a_{11} - 1$, $b_{12} = a_{12}$, $b_{21} = a_{21}$, $b_{22} = a_{22} - 1$.

У такому вигляді рівняння містять одинадцять величин:

$$x_1, x_2, d_t, \nu_{11}, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \qquad (3)$$

Дамо оцінку кожної з зазначених величин:

$$x_1 = \delta^{\beta_1}x_1^*, x_2 = \delta^{\beta_2}x_2^*, d_t = \delta^{\beta_3}d_t^*, \nu_{11} = \delta^{\beta_4}\nu_{11}^*, \nu_{12} = \delta^{\beta_5}\nu_{12}^*, \nu_{21} = \delta^{\beta_6}\nu_{21}^*, \nu_{22} = \delta^{\beta_7}\nu_{22}^* \qquad (4)$$

$$b_{11} = \delta^{\beta_8}b_{11}^*,\ b_{12} = \delta^{\beta_9}b_{12}^*,\ b_{21} = \delta^{\beta_{10}}b_{21}^*,\ b_{22} = \delta^{\beta_{11}}b_{22}^*$$

$$x_1^* \sim 1,\ x_2^* \sim 1,\ d_t^* \sim 1,\ \nu_{11}^* \sim 1,\ \nu_{12}^* \sim 1,\ \nu_{21}^* \sim 1,\ \nu_{22}^* \sim 1,\ b_{11}^* \sim 1,\ b_{12}^* \sim 1,\ b_{21}^* \sim 1,\ b_{22}^* \sim 1 \qquad (5)$$

Тут $\beta_1,\ldots,\beta_{11}$ – деякі константи, а δ – деяка постійна величина, менша за одиницю. Для постійних коефіцієнтів значення β обчислюються як логарифм за основою δ цих коефіцієнтів, а для змінних величин завжди можлива локальна оцінка $\beta_1,\ldots,\beta_{11}$.

Аналіз показує, що система припускає п'ятипараметричну групу розтягнення.

Інваріанти п'ятипараметричної групи мають вигляд:

$$I_i = \delta^{\alpha_i}I_i^*;\quad I_i^* \sim 1\ (i = \overline{1,5}), \qquad (6)$$

$$I_1 = \frac{b_{21}x_1}{b_{22}x_2};\ I_2 = \frac{d_t\nu_{22}}{b_{22}};\ I_3 = \frac{\nu_{11}b_{22}^2}{\nu_{22}b_{12}b_{21}};\ I_4 = \frac{\nu_{12}b_{22}}{\nu_{22}b_{12}};\ I_5 = \frac{\nu_{21}b_{22}}{\nu_{22}b_{21}};\ I_6 = \frac{b_{11}b_{22}}{b_{12}b_{21}} \qquad (7)$$

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_{10} - \beta_{11},\ \alpha_2 = \beta_3 + \beta_7 - \beta_{11},\ \alpha_3 = \beta_4 - \beta_3 - \beta_7 - \beta_{10} + 2\beta_{11} \qquad (8)$$

$$\alpha_4 = -\beta_3 + \beta_5 - \beta_7 + \beta_{11},\ \alpha_5 = \beta_6 - \beta_7 - \beta_{10} + \beta_{11},\ \alpha_6 = \beta_8 - \beta_9 - \beta_{10} + \beta_{11}$$

Якби рівняння (2) були алгебраїчними, тоді величина d_t була б просто чисельним множником, тоді можна було б легко перейти з одинадцятимірного простору вихідних величин до шестимірного простору інваріантів, представляючи рівняння у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} I_1I_2I_3 + I_2I_4 + I_1I_6 + 1 = 0 \\ I_1I_2I_5 + I_3 + I_1 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Таким чином, фактично, слід піддавати оцінці не вихідні величини (3), що входять до рівнянь, а інваріанти групи розтягнення, які припускають рівняння. При цьому кількість величин, яким надається оцінка, зменшується на число однопараметричних підгруп розтягнення, що припускаються рівняннями (2). У цьому випадку, замість одинадцяти вихідних величин (3), треба оцінювати шість інваріантів (7).

Використання інваріантів, що були отримані, покажемо на прикладі.

Розглянемо економічну ситуацію: на виробництво двох одиниць продукції однієї галузі прямі витрати складають приблизно по одній одиниці продукції кожної з двох галузей; інвестиційна ситуація така, що інвестиційні коефіцієнти приблизно рівні в обох галузях, за винятком випадку капітального вкладу продукції першої галузі в другу – тут спостерігається низька віддача.

У цьому випадку інваріанти (7) отримують такі оцінки:

$$I_3 = \frac{\nu_{11}b_{22}^2}{\nu_{22}b_{12}b_{21}} \sim 1;\ I_4 = \frac{\nu_{12}b_{22}}{\nu_{22}b_{12}} = \varepsilon^{-1} > 1;\ I_5 = \frac{\nu_{21}b_{22}}{\nu_{22}b_{21}} \sim 1;\ I_6 = \frac{b_{11}b_{22}}{b_{12}b_{21}} \sim 1 \qquad (10)$$

Тоді інваріант I_4 може бути узятий як природно великий параметр $\varepsilon^{-1} > 1$, й можна записати:

$$I_3 = \delta^0 I_3^*;\quad I_4 = \delta^{-1} I_4^*;\quad I_5 = \delta^0 I_5^*;\quad I_6 = \delta^0 I_6^* \qquad (11)$$

т.т. $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -1$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$.

Виконуючи (11), отримаємо, через (6), що вага кожного члена рівняння (9) буде оцінюватися множником у вигляді деякого степеня δ. Не виписуючи самих перетворених рівнянь, подамо тільки показники степеня δ, розташовуючи їх у тому ж порядку, як і члени рівнянь (9), яким вони відповідають:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{array} \qquad (12)$$

Чим менше показник степеня в таблиці (12), тим більше член, який йому відповідає, у тому чи іншому рівнянні. Таким чином, таблиця (12) дає повну інформацію про ваги членів рівняннь (9) залежно від значень параметрів α_1 и α_2. Знання ваг додатків дозволяє спростити рівняння, відкидаючи найменш значущі члени.

Знайдемо параметри α_1 и α_2. Тут їх пошук здійснимо за допомогою формальних міркувань. Розглянемо площину α_1, α_2 (рис. 1).

Довільному вибору точки на площині буде відповідати, у загальному випадку, таблиця (12), у котрій усі показники степенів, як у першому, так і в другому рядках, будуть відрізнятися. Найменшому з них у першому рядку буде відповідати найбільший член першого з рівнянь (9), а найменшому показнику в другому рядку – найбільший член другого рівняння. Залишаючи найбільші члени та відкидаючи другорядні, ми отримаємо в спрощених рівняннях по одному члену.

Розглянемо випадок рівних ваг двох членів. Співвідношення:

$$\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_2-1 \le \alpha_1,\ 0$$

задають промінь на площині α_1, α_2, кожній точці якого відповідають рівні ваги двох перших членів першого з рівнянь (9) з перевагою над третім і четвертим членами. Аналогічно, співвідношення $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_1 \le \alpha_2-1,\ 0$ задають промінь, що відповідає перевазі першого и третього членів над другим і четвертим.

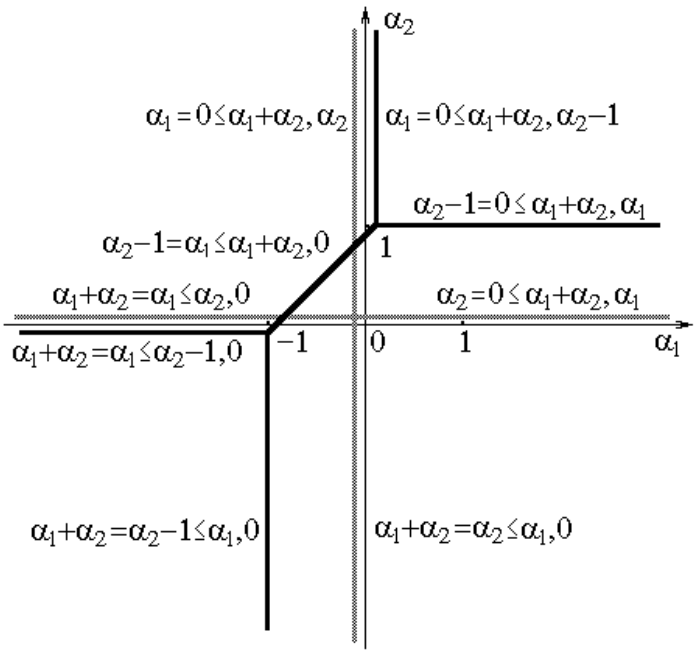


Рис.1

Продовжуючи подібний перебір, будуємо віяло для першого рівняння. Усього утворюється шість співвідношень, котрі задають чотири промені та відрізок.

Таке віяло зображене на рис. 1. Вершинами цього віяла є точки з координатами $\alpha_1= -1$, $\alpha_2= 0$ та $\alpha_1= 0$, $\alpha_2= 1$, що відповідають рівним вагам трьох найбільш значущих членів першого з рівнянь (9).

Аналогічно будується віяло й для другого рівняння. Його вершина має координати $\alpha_1= 0$, $\alpha_2= 0$. Тут два доданка, що мають рівну вагу в рівняннях, виявляються найбільш значущими.

Мінімальне спрощення рівнянь досягається, коли $\alpha_1= 0,\alpha_2=1$ або $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=0$. Тут в одному з рівнянь у спрощеному варіанті залишаються три члени, а у другому – тільки два.

Ці два варіанти мінімального спрощення описують характерні режими поведінки системи.

Розглянемо обидва випадки.

Випадок I: $\alpha_1= 0,\alpha_2= 1$

З (7) випливають такі асимптотичні оцінки:

$$X_1 \sim \frac{b_{22}}{b_{21}} X_2; \quad d_t \sim \frac{b_{22}}{\nu_{22}} \varepsilon$$

Вони відповідають відносній рівновазі валових випусків X_1 та X_2 у галузях. При цьому, в динаміці зміни їх значень йдуть повільно.

Випадок II: $\alpha_1= -1$, $\alpha_2= 0$.

Асимптотичні оцінки такі:

$$X_1 \sim \varepsilon^{-1} \frac{b_{22}}{b_{21}} X_2; \quad d_t \sim \frac{b_{22}}{\nu_{22}}$$

Ці оцінки говорять про те, що валовий випуск X_1 у першій галузі переважає валовий випуск X_2 у другій галузі. При цьому спостерігається значно швидша зміна значень об’ємів виробництва в галузях, порівняно з темпами випадку I.

Таким чином, наведина економічна система має два яскраво виявлені режими поведінки з вищерозглянутими якісними характеристиками.

Перейдемо до точного розв'язку системи.

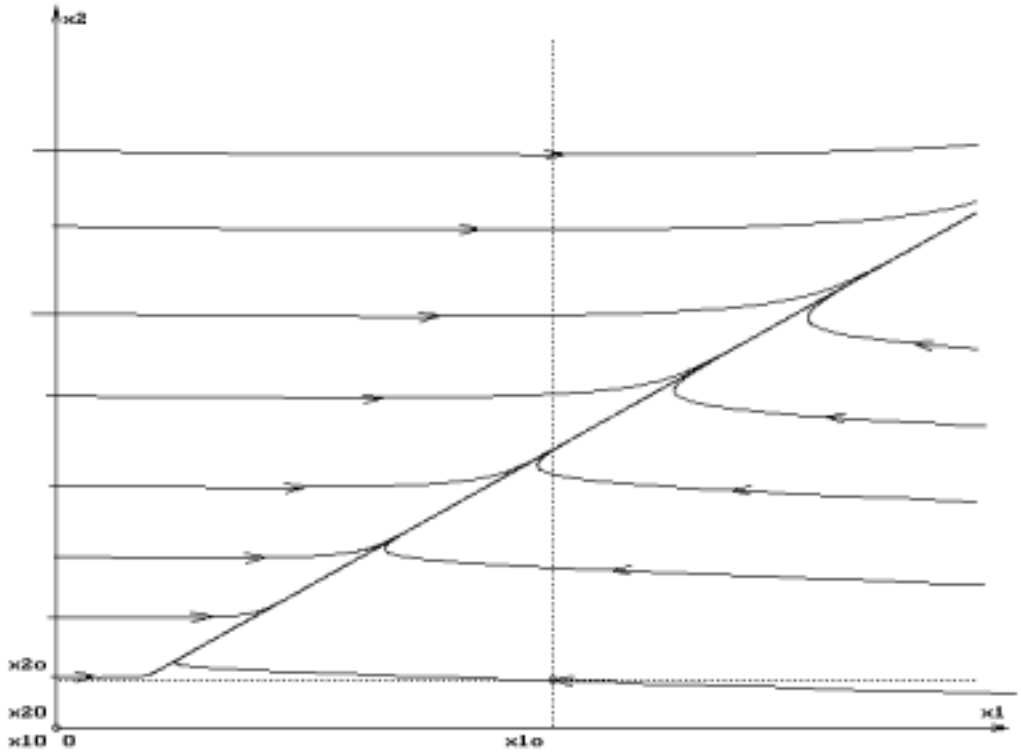


Рис. 2

На рис. 2 подана сім'я кривих, які відображають взаємозалежність величин валових випусків по галузях. Криві побудовані для однакових параметрів моделі та відрізняються тільки початковими значеннями валових випусків.

На рисунку видно, що кожна крива умовно складається з двох частин. На одній з них зміни в об'ємах випуску в першій галузі практично не впливають на випуск у другій. На другій частині – зміна випуску в одній з галузей приводить до зміни випуску, порівняну за об'ємами зі зміною випуску в другій.

На рис. 3 зображена динамічна картина галузевих випусків для кривої, що проходить через точку (x1o, x2o).

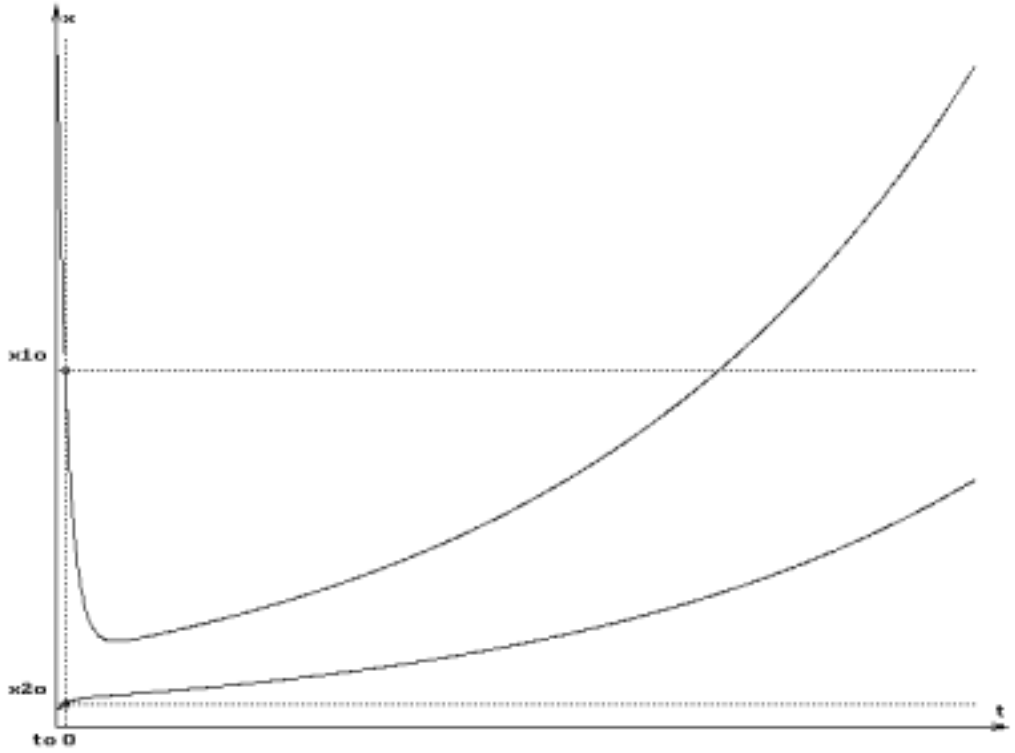


Рис. 3

Маючи динамічну картину, ми вже можемо дізнатися про характер змін у галузях у динаміці, кажучи про швидкість змін або темпи. Опис двох частин траєкторії, які є на графіку взаємозв'язку галузевих випусків, на графцку динаміки випусків, мають бути описані таким чином. Перша частина кривої – це етап швидкого падіння валового об'єму виробництва продукції в першій галузі на фоні невеликого росту в другій галузі; друга частина - ріст в обох галузях з темпом, який схожий на темп змін другої галузі в попередньому випадку.

Ці оцінки збігаються з якісними оцінками, які були дані нами раніше. Важливо зазначити, що оцінки, що були дані раніше, отримані без розв'язку самої системи, виходячи тільки з аналізу величин інваріантів. Таким чином, метод асимптотико-групового аналізу корисно застосовувати для пошуку характерних режимів поведінки економічної системи та отримання їх якісного описання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пономаренко О.І., Пономаренко В.О. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. – К.: Либідь, 1995. – 240 с.

2. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488с.

3. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости.– Запорожье: изд-во ЗГИА, 1997. – 169с.