

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А. Є. Конверський

СУЧАСНА ЛОГІКА

(КЛАСИЧНА ТА НЕКЛАСИЧНА)

*2-ге видання,
перероблене та доповнене*

ПІДРУЧНИК

Київ
«Центр учбової літератури»
2017

УДК 16(075.8)

ББК 87.4я73

К 64

*Рекомендовано до друку
Вченою радою філософського факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(Протокол № 11 від 27.06.2017 р.)*

*Ухвалено методичною комісією
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(Протокол № 5-16/17 н. р. від 10.07.2017 р.)*

Рецензенти:

Дуцзяк І. З. – доктор філософських наук, професор;

Шенгерій Л. М. – доктор філософських наук, професор.

Конверський А. Є.

К 64 Сучасна логіка (класична та некласична). 2-ге вид. перероб. та доп. –
К.: Центр учбової літератури, 2017. – 294 с.

ISBN 978-617-673-684-4

Пропонований читачеві підручник написано на основі досвіду читання курсу «Сучасної логіки» в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, у Національному університеті "Києво-Могилянська академія".

В підручнику розкриті історичні та теоретичні передумови виникнення сучасної логіки. В частині «Класична логіка» проаналізовано специфіку та особливості алгебраїчної системи і числень.

На конкретному матеріалі показано єдність логіки висловлювань та логіки предикатів. Особлива увага приділяється природі некласичної логіки й шляхам застосування її засобів для потреб пізнавального процесу.

Розраховано на студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, а також на усіх, хто цікавиться проблемами сучасної логіки та бажає долучитися до скарбниці логічної науки.

УДК 16(075.8)

ББК 87.4я73

ISBN 978-617-673-684-4

© Конверський А. Є., 2017.
© Центр учбової літератури, 2017.

ЗМІСТ

ЧАСТИНА ПЕРША

Класична логіка

Вступ	5
-------------	---

Розділ І

ПЕРЕДУМОВИ СУЧАСНОЇ ЛОГІКИ	11
----------------------------------	----

1.1. Теорія множин і логіка	11
-----------------------------------	----

1.1.1. Визначення множини	11
---------------------------------	----

1.1.2. Побудова множини та її фундаментальні ознаки	11
---	----

1.1.3. Операції над множинами	22
-------------------------------------	----

1.2. Семантичний аналіз виразів природної мови	28
--	----

1.2.1. Поняття семантичної категорії	28
--	----

1.2.2. Характеристика дескриптивних термінів	30
--	----

1.2.3. Визначення логічних термінів	41
---	----

1.3. Функціональний аналіз у логіці	58
---	----

1.3.1. Мотивація функціонального аналізу в логіці	58
---	----

1.3.2. Види функцій	61
---------------------------	----

Розділ ІІ

ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ	65
---------------------------	----

2.1. Алгебра логіки висловлювань	65
--	----

2.1.1. Мова алгебраїчної системи логіки висловлювань	65
--	----

2.1.2. Типологія формул за синтаксичними ознаками	70
---	----

2.1.3. Види формул за семантичними ознаками	73
---	----

2.1.4. Типологія формул за семантичними ознаками	76
--	----

2.1.5. Рівносильні формули	78
----------------------------------	----

2.1.6. Логічні відношення між формулами	84
---	----

2.1.7. Нормальні форми логіки висловлювань	86
--	----

2.1.8. Логіка висловлювань та контактні схеми	96
---	----

2.2. Числення логіки висловлювань	110
---	-----

2.2.1. Аксиоматичне числення логіки висловлювань	111
--	-----

2.2.2. Метатеорема про дедукцію	117
---------------------------------------	-----

2.2.3. Металогічні принципи в S^2	120
---	-----

2.2.4. Натуральне числення логіки висловлювань	126
Розділ III	
ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ	134
3.1. Алгебраїчна система логіки предикатів	134
3.1.1. Мова алгебраїчної системи логіки предикатів	135
3.1.2. Семантика алгебраїчної системи логіки предикатів	138
3.1.3. Процедури встановлення значень формулам S^4	144
3.1.4. Типологія формул S^4 за семантичними ознаками	147
3.1.5. Логічні відношення між формулами в S^4	150
3.1.6. Проблема розв'язання	152
3.1.7. Закони логіки предикатів	158
3.1.8. Процедури для розв'язання виразів логіки предикатів	165
3.2. Числення логіки предикатів	170
3.2.1. Аксиоматичне числення предикатів	171
3.2.2. Теорема про дедукцію в S^5	178
3.2.3. Металогічні принципи аксиоматичного числення логіки предикатів	180
3.2.4. Натуральне числення предикатів	186

ЧАСТИНА ДРУГА НЕКЛАСИЧНА ЛОГІКА

Вступ	201
Розділ I.	
БАГАТОЗНАЧНА ЛОГІКА	203
1.1. Система багатозначної логіки Я. Лукасевича	204
1.1.1. Тризначна логіка Я. Лукасевича	204
1.1.2. Чотиризначна логіка Я. Лукасевича	209
1.2. Багатозначна логіка Брауера-Гейтінга	216
1.3. Багатозначна логіка Е. Поста	219
1.4. Тризначна логіка Д. Бочвара	222

РОЗДІЛ II.	
МОДАЛЬНА ЛОГІКА НА ПОЧАТКУ XX СТОЛІТТЯ.....	226
2.1.Критика К.І.Льюїсом класичної теорії логічного слідування.....	226
2.2.Концепція модальної логіки Я. Лукасевича.....	234
2.2.1. Тризначна система Я. Лукасевича.....	234
2.2.1. Чотиризначна система Я. Лукасевича.....	240
РОЗДІЛ III.	
СИСТЕМА МОДАЛЬНОЇ ЛОГІКИ.....	250
3.1. Алетична логіка.....	250
3.1.1. Мова атлетичної логіки висловлювань.....	251
3.1.2. Алетична логіка та теорія множинних світів.....	253
3.2. Темпоральна логіка.....	260
3.2.1. Мова темпоральної логіки висловлювань.....	261
3.2.2. Темпоральна логіка та теорія можливих світів.....	263
3.2.3. Метод аналітичних таблиць у темпоральній логіці.....	267
3.3. Деонтична логіка.....	269
3.3.1. Характеристика деонтичного висловлювання.....	270
3.3.2. Мета деонтичної пропозиційної логіки.....	273
3.3.3. Деонтична логіка та теорія можливих світів.....	277
3.4. Епістемічна логіка.....	280
3.4.1. Визначення епістемічної логіки.....	280
3.4.2. Мова епістемічної пропозиційної логіки.....	284
3.4.3. Епістемічна логіка та теорія можливих світів.....	288
Список літератури.....	293

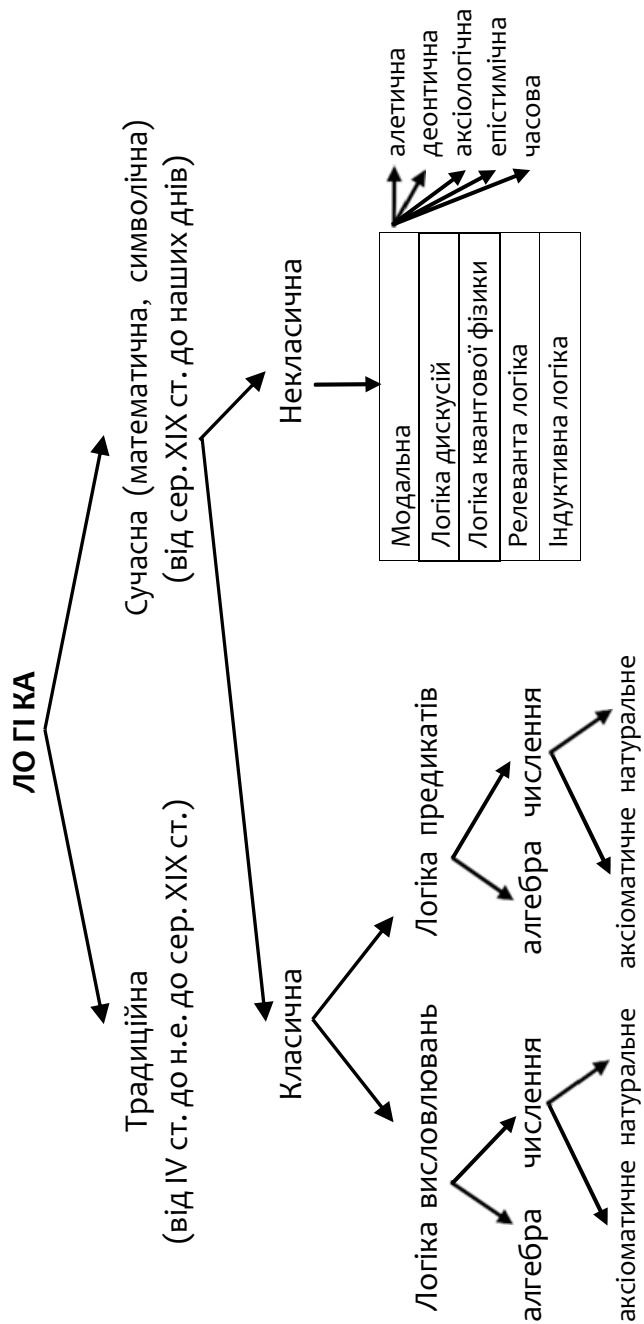
ВСТУП

Із середини XIX ст. розпочинається період розвитку логіки, який отримав назву «сучасна логіка». Від самого початку виникнення цього періоду ведуться дискусії щодо предмету, методу сучасної логіки, а також про її співвідношення з традиційною логікою і про її теоретичне та практичне значення.

Поділ логіки на *традиційну* і *сучасну* свідчить не про існування двох різних логік, а про два історичних, теоретичних періоди однієї науки.

Ці два періоди єдині за методом і предметом, за практичним і теоретичним значенням. Але виконати свою роль (забезпечити семіотичний інваріант знання, тобто унеможливити втратити хоча б часточку здобутого знання, або його спотворити) логіка протягом більш як 2000-літньої історії не завжди була спроможна. Тобто логіка в силу відомих причин не завжди могла застосувати адекватний логічний інструментарій для виконання цієї місії. Хоча арсенал засобів логіки з початку її виникнення і до наших днів один і той самий – формалізована мова логіки, або формально-логічна теорія (ФЛТ). Порівнюючи історичні періоди логіки, ми можемо говорити лише про ступінь досконалості методу формалізації у ході історичного розвитку логічної науки.

Нижче подано схематичну структуру логіки як єдиної науки. Схема наочно представляє еволюцію методу формалізації від *напівформального* (традиційна логіка) до *чисто формального* (сучасна логіка).



Фундаторами сучасної логіки вважаються Рене Декарт і Готфрід Лейбніц. Саме вони звернули увагу на обмеженість засобів традиційної логіки в аналізі наукового знання, саме вони вказали, що майбутнє логічної науки визначатиметься удосконаленням її методу.

З цього приводу Р. Декарт зазначав: «...в логіці її силогізми і більша частина інших її настанов швидше допомагають пояснити іншим те, що нам відомо».

Сучасна Декарту схоластизована аристотелівська логіка не могла бути по-справжньому логічним інструментом дослідження мислення, знання.

Декарт ставить за мету повернути логіці первісне її значення як «органону» («знаряддя-пізнання»). Для цього він слідом за Арістотелем розробляє поняття «змінної».

Введення «змінної» дозволяє з'ясувати логічну форму висловлювання, як центральної ланки міркування. Наприклад, маємо висловлювання: «Будь-яка теорія є формою пізнання». Випишемо дескриптивні терміни, що є в цьому висловлюванні за допомогою відповідних символів x , S , P та отримаємо вираз $\forall x(S(x) \supset P(x))$, який представляє логічну форму цього висловлювання. А оскільки відомо, що отримання одних висловлювань з інших (що є головним інтересом логіки) визначається їх логічною формою, то цей бік смислу висловлювання називається його **дедуктивним змістом**.

Логічні розвідки Декарта досить наочно показують ще один смисловий відтінок трактування «форми», «формалізації», «формального підходу» в логіці, крім того який пов'язаний з формалізацією як методом логіки.

Мається на увазі, що логіка є формальною в тому сенсі, що вона абстрагується від змістовної сторони висловлювань (тобто від тієї інформації яка в них закладена) і бере до уваги лише їх логічну форму, яка (як уже було сказано вище) є їх **дедуктивним змістом**.

Готфрід Лейбніц вбачав майбутнє логіки у перетворенні її у своєрідну універсальну математику де правила доведення замінювалися б правилами числення. Така логіка, як мистецтво числення дозволить розкрити будь-яку логічну помилку як неточність у численні.

В зв'язку з цим Лейбніц дещо метафорично заявив «...єдиний засіб показати наші умовиводи – зробити їх, як і у математиків, наочними, так, щоб свої помилки знаходити очима, і, якщо серед людей виникає суперечка, потрібно буде сказати «Порахуємо», тоді без особливих формальностей можна буде побачити хто правий».

Першими працями із сучасної логіки були роботи англійського логіка Джорджа Буля: «Математичний аналіз логіки» (1847 р.) та «Дослідження законів мислення» (1854 р.). Джордж Буль, як послідовник ідей Лейбніца стосовно розвитку логічної науки, спираючись на аналогію деяких логічних та математичних операцій, створює першу систему сучасної логіки «Алгебру логіки».

Із наведеної вище схеми про етапи логічної науки видно, що сучасна логіка включає в себе «класичну логіку» та «некласичну логіку».

Класична логіка це такий розділ сучасної логіки, який базується на абстракції, що висловлювання може мати одну з двох оцінок: «істина» або «хиба». Класична логіка складається із «логіки висловлювань» і «логіки предикатів».

Логіка висловлювань, або пропозиційна логіка своїми засобами формалізує вживання пропозиційних зв'язок.

Логіка предикатів систематизує міркування в яких отримання висновку передбачає врахування внутрішньої структури висловлювань, із яких будується міркування.

Значний внесок у розвиток класичної логіки зробили Чарльз Пірс, Готлоб Фреге, Бертран Рассел, Альфред Тарський, Алоїз Черч, Рудольф Карнап та ін.

Некласичною логікою є той розділ сучасної логіки де висловлювання може мати більше двох оцінок. Тобто окреме висловлювання може мати не одну із двох оцінок («істина», «хиба»), а одну з трьох, із чотирьох оцінок і т.д.

Творцями некласичної логіки є Я. Лукасевич, Я. Брауер, К. Льюїс, Е. Пост, Х.Г. Врігт та ін.

І в класичній і в некласичній логіці можна віднайти продовження та поглиблення тих проблем, які окреслилися ще у традиційній логіці. Це також є підставою розглядати логіку як єдину систему.

Після цих загальних зауважень виникає доречне запитання: що має передувати викладу сучасної логіки, із чого починати виклад сучасної логіки? Тут можливі кілька варіантів. Або розкрити семантичний аналіз виразів природної мови, а потім перейти до функціонального аналізу в логіці та завершити розглядом елементів теорії множин. А можна розпочати з функціонального аналізу в логіці, розкрити семантичний аналіз виразів природної мови та розглянути елементи теорії множин. Нарешті, увести елементи теорії множин, описати семантичний аналіз виразів природної мови та завершити функціональним аналізом у логіці.

Останній варіант є найбільш ефективний і в методичному, і в теоретичному сенсі.

Розділ I

ПЕРЕДУМОВИ СУЧАСНОЇ ЛОГІКИ

1.1. Теорія множин і логіка

Фундатор теорії множин Георг Кантор навіть і не підозрював, яку важливу роль відіграє відкрита ним теорія у розвитку сучасної логіки.

Мало того, що апарат теорії множин можна ефективно застосовувати для аналізу проблем традиційної логіки (тлумачення об'єму поняття як множини, обґрунтування закону оберненого відношення між об'ємом і змістом поняття, систематичний огляд логічних відношень між поняттями тощо), але, що найголовніше, стало можливим обґрунтувати засобами теорії множин фундаментальні поняття сучасної логіки (*істина, буття, опис станів, дійсний стан речей, можливий світ* тощо), нарешті, забезпечити прикладний аспект логіки.

1.1.1. Визначення множини

Множину можна визначити як сукупність, зібрання предметів, що мають спільну ознаку, відрізняються одне від одного та сприймаються як єдине ціле утворення. Входити до множини, належати множині – не означає просторове й часове співіснування. Наприклад, усі чемпіони Пекінської олімпіади 2008 року утворюють одну множину, хоча живуть у різних країнах; Архімед та Ейнштейн належать до множини геніальних фізиків, хоча жили у різні часи.

Слід зауважити, що поняття множини є первинним, тобто таким, зміст якого в межах даної теорії не можна розкрити через зміст інших понять цієї теорії. Зміст поняття *множина* з'ясовується під час розгляду конкретних множин. Наприклад, можна говорити про *множину планет Сонячної системи*; *множину островів в Індійському океані*; *множину навчальних дисциплін в університеті*; *множину моїх приятелів, які знають англійську мову*;

множину персонажів повісті М.В. Гоголя "Тарас Бульба", множину букв україньського алфавіту тощо.

Із цих прикладів видно, що множина – це сукупність, зібрання предметів, які об'єднані спільною ознакою (бути планетою Сонячної системи; бути островом в Індійському океані; бути персонажем повісті М.В. Гоголя "Тарас Бульба" тощо), при цьому ці предмети розрізняються та, разом із тим, сприймаються як єдине ціле.

Слід зважати на те, що множина не є предметом об'єктивної дійсності. Це є результат інтелектуальної діяльності. Множина відрізняється від таких сукупностей предметів, як сузір'я *Лева*; футбольна команда "*Динамо-Київ*"; Конгрес США тощо. Останні, на відміну від множин, доречніше називати агрегатами. Агрегат також складається із сукупностей предметів, але являє собою дещо зв'язане ціле, або, у крайньому випадку, у деяких відношеннях виступає як реальне ціле (футболісти, конгресмени мають, відповідно, спільні завдання, несуть відповідальність за їх виконання).

Множина лише в мисленні виявляється самостійним об'єктом. Звичайно об'єктом думки може стати й сама сукупність предметів, які утворюють агрегат (зірки "*сузір'я Лева*"; футболісти "*Київського Динамо*"; конгресмени США тощо).

Але предмети, які складають агрегат, – це його частини, а предмети множини – це елементи множини. Елементи множини фіксуються мисленням як такі, що існують окремо, незалежно один від одного, просто як такі, що об'єднані спільною ознакою. Іншими словами, елементи відрізняються один від одного, тому кожен є носієм власного імені (Архімед, Ейнштейн). Одночасно вони нерозрізнявані, оскільки об'єднані спільною ознакою (бути геніальним фізиком).

Позначатимемо елементи множини малими буквами латинського алфавіту – $a, b, c, \dots x, y, z$, а самі множини – $A, B, C, \dots X, Y, Z$. Візьмемо, наприклад, множину Резиденції Гетьманів України. Елементами даної множини будуть предмети: м. Чигирин, м. Глухів, м. Біла Церква, м. Батурин. За допомогою символів цю множину можна записати наступним чином:

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

Множині A належать елементи a, b, c, d ,
або

Множина A складається із елементів a, b, c, d ,
де a – м. Чигирин, b – м. Глухів, c – м. Біла Церква, d – м. Батурин.

Як видно із прикладу, основна ідея теорії множин полягає в тому, що довільні об'єкти $a, b, c, d \dots$ певним чином однозначно визначають деякий новий об'єкт – множину (A) і, навпаки, множина (A), у свою чергу однозначно визначає об'єкти – $a, b, c, d \dots$ (свої елементи). Зазначене відношення між об'єктами та множиною, яку вони визначають, можна виразити так:

Множина (A) складається з елементів $a, b, c, d \dots$,
або елементи $a, b, c, d \dots$ належать множині (A).

Термін *належить*, як і термін *елемент* не визначається, є первинним, і його зміст розкривається на прикладах. Аби записати, що елемент (a) належить множині A застосовують знак належності $\in$.

Відношення неналежності елемента множині позначають символом $\bar{\in}$ або $\notin$, наприклад, $a \notin A$.

1.1.2. Побудова множини та її фундаментальні ознаки

Головними принципами побудови теорії множин є:

- а) *принцип об'ємності* (визначення рівності множин);
- б) *принцип абстракції*.

Розглянемо ці принципи по чергово.

Принцип об'ємності виражає основну вимогу до теорії множин, згідно з якою множина повністю визначається своїми елементами.

Дві множини рівні тоді й тільки тоді,
коли вони складаються з одних і тих самих елементів.

Скорочено принцип об'ємності (визначення рівності множин) можна записати так:

Якщо із $x \in A$ випливає $x \in B$, а із $x \in B$ випливає $x \in A$
для будь-якого x , то $A = B$

або

$$[\forall x ((x \in A) \supset (x \in B) \& \forall x (x \in B) \supset (x \in A))] \supset (A = B).$$

Іншими словами, рівні множини – це ті, що створені із одних і тих самих елементів, але за різними ознаками. Наприклад:

Множина парних чисел (A) і множина чисел,
які діляться на 2 (B)
 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ і $B = \{2, 4, 6, 8\}$.
 $A = B$.

Множина університетів України,
які одними із перших стали національними (A);
Множина університетів України, які одними з перших
здобули статус дослідницького (B).

$A = \{\text{КНУ імені Т.Шевченка, НТУ "КПІ", НаУКМА}\}$.
 $B = \{\text{КНУ імені Т.Шевченка, НТУ "КПІ", НаУКМА}\}$.
 $A = B$.

Проілюструємо на останньому прикладі принцип об'ємності. Якщо із факту належності НаУКМА до національних університетів випливає, що НаУКМА належить до дослідницьких університетів, а із факту належності НаУКМА до дослідницьких університетів випливає, що НаУКМА належить до національних університетів, і це має місце для будь-якого елементу множин A та B , то це означає, що множина A рівна множині B .

Очевидно, що принцип об'ємності можна визначити й так:

Якщо із $x \notin A$ випливає $x \notin B$,
а з $x \notin B$ випливає $x \notin A$ для всіх x , то $A = B$.

Проілюструємо формулювання принципу об'ємності наступним прикладом: Якщо із факту неналежності Житомирського педуніверситету ім. І.Я. Франка до національних університетів випливає неналежність Житомирського педуніверситету ім. І.Я. Франка до дослідницьких університетів, а із факту неналежності Житомирського педуніверситету ім. І.Я. Франка до дослідницьких уні-

верситетів впливає неналежність Житомирського педуніверситету ім. І.Я. Франка до національних університетів, і це має місце для будь-якого педуніверситету України, то множини A та B рівні.

Згідно із принципом об'ємності вірними є такі властивості рівних множин:

- а) $A = A$;
- б) якщо $A = B$, то $B = A$;
- в) якщо $A = B$, а $B = C$, то $A = C$.

Дві множини називають нерівними,
якщо принаймні одна із них містить елемент,
що не міститься в другій: $A \neq B$.

Важливим питанням теорії множин є питання про те, як задати множину. Основною складністю у розв'язанні цього питання є те, що поняття множини, як зазначалось, є первинним, невизначеним.

Виходячи із наведених вище понять *множина*; *елемент*; *відношення належності та неналежності*; *рівність множин*, можна стверджувати: задати множину – означає встановити, із яких елементів вона складається, тобто для кожного елемента з'ясувати, належить він цій множині чи ні. Коли множина скінченна, то її задання полягає у переліку її елементів. Наприклад, *множина бібліотек у нашому місті*, *множина пам'яток культури Поділля* тощо.

Але коли множина нескінченна, або неосяжна, тоді цей спосіб задання множини не підходить. У цих випадках слід застосовувати принцип абстракції.

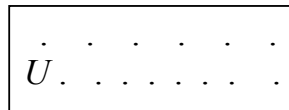
Принцип абстракції – це застосування характеристичної ознаки для задання множини.

Характеристичною називають ознаку, яка належить кожному елементу множини A й не належить жодному елементу за межами цієї множини.

Отже, задати множину – означає вказати її характеристичну ознаку: $A = \{x \mid P(x)\}$ – *множина всіх (x) , яким притаманна ознака P .*

Універсальною називають множину, яка складається з усіх елементів досліджуваної предметної області.

Наприклад, множина фізичних явищ у фізиці, множина чисел у математиці, множина хімічних елементів у хімії, множина історичних явищ в історії тощо. Позначають універсальну множину буквою U (перша буква в латинському слові *загальний*). Графічно універсальну множину зображують прямокутником:



Порожньою називають множину, що не має жодного елементу.

Прикладом порожньої множини є: вічний двигун, круглий квадрат, ідеальний газ, житель Місяця тощо. Позначають порожню множину символом $\emptyset$.

За допомогою первинних понять *множина*, *елемент*, *відношення належності* введемо поняття *підмножина* та *відношення включення*. Будь-яку частину множини називають підмножиною.

Множину (A) називають підмножиною множини (B), якщо кожен елемент множини (A) належить множині (B). У цьому випадку пишуть: $A \subset B$ і говорять:

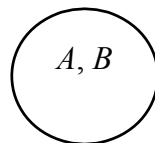
A включається (міститься) до B .

Відношення включення буває двох видів: *включення в широкому сенсі* – $\supseteq$ та *у вузькому сенсі* – $\supset$.

Включенням в широкому сенсі множини (A) до множини (B) називають таке включення, за якого будь-який елемент множини (A) належить множині (B) і, у свою чергу, будь-який елемент множини (B) належить множині (A):

$$A \subseteq B =_{df} [(x \in A) \supset (x \in B)] \wedge [(x \in B) \supset (x \in A)].$$

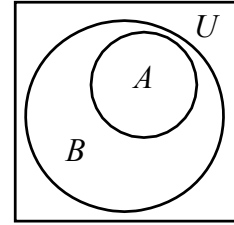
Наприклад, є множина A – множина квадратів і множина B – множина прямокутників із рівними сторонами. Між ними існує відношення включення в широкому сенсі. Графічно це можна зобразити так:



Включенням у вузькому сенсі множини (A) до множини (B) називають таке включення, за якого будь-який елемент множини (A) належить множині (B), але не всі елементи множини (B) належать множині (A):

$$A \subset B = \forall x (x \in A) \supset (x \in B) \wedge \bar{\forall} x (x \in B) \supset (x \in A).$$

Наприклад, маємо множину (A) – давньогрецькі філософи та множину (B) – геніальні філософи. Між ними існує відношення включення у вузькому смислі. Графічно це можна зобразити так:



Множину (A), включену до іншої множини (B), називають правильною частиною, або власною підмножиною (у нашому прикладі це *давньогрецькі філософи*). Множину (B) у цій ситуації називають надмножиною (*геніальні філософи*).

Фактично включення у вузькому смислі, або суворе включення передбачає, що множини не рівні: $A \neq B$.

Кожна множина має повну та порожню частини. Повну частину позначають цифрою (1), а порожню – (0). Їх називають ще невластими підмножинами множини.

Факт наявності у множин невластних підмножин (повної і порожньої) закладений у самій природі характеристичної ознаки. Нагадаємо, що характеристична ознака вказує саме на ту ознаку, яка належить тим і тільки тим самим елементам, які входять до конкретної множини (напр., *множини геометричних фігур*) та не належить жодному елементу, який не входить до *множини геометричних фігур*.

Входження елементів до *множини геометричних фігур* відбувається до повного вичерпання наявних елементів. І трикутник, і квадрат, і трапеція вичерпуються ознакою бути геометричною фігурою.

У той самий час відсутність цієї характеристичної ознаки в усіх інших елементів окреслює межу для даної множини. Тобто порожня множина як невластна частина довільної множини відмежовує, виокремлює цю множину серед інших множин.

Усе, що належить множині, – перебуває в ній; усе, що не належить їй, – відмежоване, відкинute, відділене. Тобто сюди не ввійдуть планети, числа, книги, історичні події.

Із принципу об'ємності та поняття включення випливає, що множини A та B рівні тоді й тільки тоді, коли (A) включається до (B), а (B) включається до (A):

$$(A = B) \equiv_{df} (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Порожня множина за визначенням, є підмножиною будь-якої множини.

Побудуємо доведення цієї тези.

Припустимо, що судження: ***«Порожня множина є підмножиною довільної множини (A)»*** є хибне.

Якщо це так, то існує деякий елемент порожньої множини $\emptyset$, який не належить множині (A):

1) $x \in \emptyset$; і

2) $x \notin A$.

Але така ситуація неможлива, оскільки порожня множина ($\emptyset$) не має жодного елементу. Тоді наше припущення, що порожня множина не включається в довільну множину (A) ($\emptyset \not\subset A$) слід відкинути і визнати істинною тезу: ***«Порожня множина, або нульова множина обов'язково є підмножиною довільної підмножини (A)» – « $\emptyset \subset A$ »***

A це означає також і те, що «Будь-яка непорожня множина (A) обов'язково має дві підмножини»

а) саму множину (A);

б) порожню множину $\emptyset$

Коли довільну множину (A) ми будемо розглядати як частину самої себе, то її слід називати повною частиною. Це і дає підстави називати повну і порожню частини довільної множини (A) її невластими підмножинами. Решта підмножин є власними.

Для більш яскравої аргументації тези, що порожня множина ($\emptyset$) є підмножиною будь-якої множини наведемо ще одне міркування: Якщо $x \notin A$, то $x \notin \emptyset$, оскільки за визначенням порожня множина не має елементів. Отже, $\emptyset \subset A$.

Таким чином, довільна множина (A), яка не дорівнює підмножині $\emptyset$ ($A \neq \emptyset$), має у крайньому разі дві різні підмножини: порожню ($\emptyset$) та саму себе (A).

Сказане вище проілюструємо прикладом. Маємо множину (A) – геніальні філософи. Власною підмножиною є множина (B) – давньогрецькі філософи.

Сократ є елементом множини (A) й Сократ є елементом множини (B). Тоді множина (B) є підмножиною множини (A):

$$\begin{array}{l} \text{Сократ} \in A \\ \text{Сократ} \in B . \\ \hline B \subset A \end{array}$$

А якщо візьмемо ім'я *Архімед*, то воно не належить множині (*A*) і тим більше не належить порожній множині ($\emptyset$).

Архімед не належить до множини *геніальних філософів*.

Архімед не належить до множини *винахідників вічного двигуна*.

Отже, множина *винахідників вічного двигуна* як порожня множина є межею, що відокремлює множину *геніальних філософів* від будь-яких предметів:

$$\begin{array}{l} \text{Архімед} \notin A \\ \text{Архімед} \notin \emptyset . \\ \hline \emptyset \subset A \end{array}$$

Таким чином, якщо конкретний елемент не належить довільній множині (*A*), то він не належить гарантовано тільки одній множині – $\emptyset$, отже порожня множина включається до множини *A*:

$$((x \notin A) \supset (x \notin \emptyset)) = \emptyset \subset A.$$

Після введення понять *множина*, *підмножина* можна ввести алгоритм установлення кількості підмножин для довільної множини. Кількість підмножин для довільної множини встановлюється за формулою: $2^n =$, де 2 – невластні підмножини множини ($\emptyset$ і сама підмножина), *n* – кількість елементів даної множини. Візьмемо, для прикладу, множину із трьох елементів:

$$A = \{1, 2, 3\}, \text{ за формулою } 2^n = 2^3 = 8: \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{\emptyset\}.$$

Або візьмемо множину *Дослідницькі університети в м. Києві*: {КНУ ім. Т. Шевченка, НТУ "КПІ", НаУКМА}. Визначимо підмножини для цієї множини:

$$\begin{array}{l} \{\text{КНУ ім. Т. Шевченка}\}, \{\text{НТУ "КПІ"}\}, \{\text{НаУКМА}\}, \\ \{\text{КНУ ім. Т. Шевченка, НТУ "КПІ"}\}, \\ \{\text{КНУ ім. Т. Шевченка, НаУКМА}\}, \{\text{НТУ "КПІ", НаУКМА}\}, \\ \{\text{КНУ ім. Т. Шевченка, НТУ "КПІ", НаУКМА}\}, \{\emptyset\}. \end{array}$$

Після визначення поняття *підмножини*, *правильної підмножини*, *рівних множин* і *нерівних множин* можна звернути увагу на порівняння будь-яких двох множин.

Тут слід звернути увагу на деякі тонкощі цього порівняння. Коли йшлося про рівні (нерівні) множини, то брався до уваги факт належності (неналежності) елемента множини. Коли ж ідеться про еквівалентні множини, то тут спираються на дослідження відповідності між елементами множин:

Множини A та B називають **еквівалентними**,
якщо між їхніми елементами можна встановити
взаємно-однозначну відповідність –
 $A \sim B$.

Поняття еквівалентності має такі властивості:

1. $A \sim A$ – *рефлексивність*;
2. Якщо $A \sim B$, то $B \sim A$ – *симетричність*;
3. Якщо $A \sim B$, а $B \sim C$, то $A \sim C$ – *транзитивність*.

Коли йдеться про скінченні множини, то між ними можна встановити взаємно-однозначну відповідність. Наприклад, маємо множину (A) – легкові автомобілі університетської автобази та множину (B) – водії легкових автомобілів університетської автобази, або множину (A) – музеї нашого міста та множину (B) – директори музеїв нашого міста. Кожному елементу (a) із множини (A) взаємно-однозначно відповідає елемент (b) із множини (B).

У той самий час скінченна множина не може бути еквівалентна своїй правильній частині (підмножині).

Тільки нескінченна множина може бути еквівалентною своїй правильній частині. Саме цим вона відрізняється від скінченної множини. Наприклад, множина натуральних чисел (A) еквівалентна множині парних натуральних чисел (B), або множина істинних висловлювань (A) еквівалентна множині істинних висловлювань історичної науки (B), або множина геометричних фігур (A) еквівалентна множині трикутників (B) тощо.

Отже, у будь-якій нескінченній множині можна виділити еквівалентну їй правильну частину. Тоді можна ввести такі визначення.

Скінченною називають множину,
що нееквівалентна жодній правильній своїй частині.

Нескінченною називають множину,
для якої існує еквівалентна їй правильна частина.

Охарактеризоване тільки-но поняття відповідності передбачає поняття відображення. Наприклад, візьмемо множину чисел $(A) - \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ і множину чисел $(B) - \{2, 3, 4, \dots\}$. Прийнемо припис, або правило, або закон, або вимогу (назвемо як захочемо), за яким кожному числу із множини (A) ставиться у відповідність число із множини (B) :

$$b = f(a + 1).$$

Ця рівність фіксує залежність величини (b) від величини (a) . А залежність визначається операцією, або законом, або приписом, який тут представлений арифметичною дією додавання $(+)$. Загальний вигляд цієї залежності зазвичай записують як рівність:

$$y = f(x),$$

де (y) – залежна величина із множини (Y) ¹, (x) – незалежна величина із множини (X) ², f позначає будь-яку дію над величиною (x) . За традицією, яка йде від математики, дію, або припис, або закон тощо, позначений символом (f) , називають функцією. Іноді й усю рівність називають функцією. Величину (x) називають аргументом, а величину (y) – значенням. Тоді всю рівність можна охарактеризувати як відображення (f) множини (A) в множину (B) .

Відображення (f) множини (A) у множину (B) називають взаємно-однозначним, або одно-однозначним відображенням, якщо із різними елементами множини (A) зіставляються різні елементи множини (B) . Називатимемо елементи множини (A) прообразами, а елементи множини (B) – образами. Тоді відповідність між множинами (A) та (B) , яка фіксується рівністю

$$b = f(a + 1)$$

буде відображенням множини (A) на множину (B) . Це відображення буде взаємнооднозначним, коли кожен образ (елемент із множини (B)) має не більше одного прообразу у множині (A) .

У нашому випадку у рівність $b = f(a + 1)$ послідовно підставлятимемо прообрази із множини (A) :

$$2 = f(1 + 1) - \text{при } (a) - 1,$$

$$3 = f(2 + 1) - \text{при } (a) - 2,$$

$$4 = f(3 + 1) - \text{при } (a) - 3 \text{ і т.д.}$$

¹ У нашому випадку (b) із множини (B) .

² У нашому випадку (a) із множини (A) .

Отже, прообрази $\{1, 2, 3 \dots\}$ відображаються в образах відповідно $\{2, 3, 4 \dots\}$.

Або візьмемо множину пасажирських місць на залізничному транспорті – (C) і множину пасажирів (D) , чи множину місць у театральній залі (E) та множину глядачів (K) .

Множина (C) відображається у множині (D) завдяки тому, що, володіючи залізничним квитком, будь-який представник множини (C) займе одне й тільки одне чітко визначене місце у вагоні. Тут роль функції виконує стан володіння залізничним квитком (мати статус пасажир залізничного транспорту), роль образу – конкретна особа (Шевченко, Алмазов, Сміт тощо), роль прообразу – конкретне місце у вагоні (із вказівкою типу вагону, № потягу, дати та години відправлення).

У випадку із множиною (E) та (K) , множина (E) відображається у множині (K) , оскільки, маючи статус глядача (володіючи театральним квитком), будь-який представник множини (E) обов'язково (за сприятливих умов) займе одне й тільки одне чітко визначене місце в глядацькій залі. Прообразом у цьому випадку буде володар театрального квитка (з конкретним прізвищем та іменем); образом – місце в глядацькій залі (із вказівкою ряду, сторони, категорії); функцією – статус володаря театального квитка.

1.1.3. Операції над множинами

Оскільки ми визначили відношення відображення однієї множини в іншу як функцію, то це дозволяє нам розглянути дії (операції) над множинами як функції.

Операція над множинами –

це процедура або дія,

яка дозволяє із одних множин отримувати нові множини.

До операцій над множинами належать наступні дії: доповнення, перетин, об'єднання. Розглянемо їх по черзі.

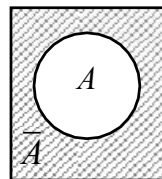
Доповненням довільної множини (A) є множина, яка складається із тих елементів універсальної множини (U) , що не належать множині (A) .

Іноді кажуть не доповнення множини (A), а заперечення множини (A) та позначають:

$$\text{не-}A, \text{ або } \bar{A},$$

$$\text{або } A': \bar{A} =_{df} \{x \mid x \in U \wedge x \in A\}.$$

Графічно це можна зобразити так:



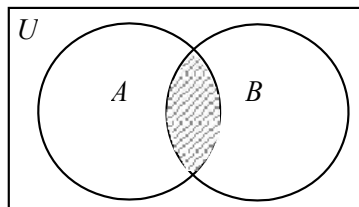
Заштрихована частина універсальної множини – це множина, отримана після заперечення множини (A). Наприклад, маємо множину студентів-київчан (A). Здійснимо доповнення множини (A): множина іногородніх студентів (не- A , або $\bar{A}$, або A').

Перетином множини (A) та множини (B) є нова множина, що складається із тих і тільки тих елементів, які одночасно належать і множині (A), і множині (B).

Позначають операцію перетину множини символом $\cap$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \cap x \in B\}.$$

Графічно операцію перетину множин зображують так:



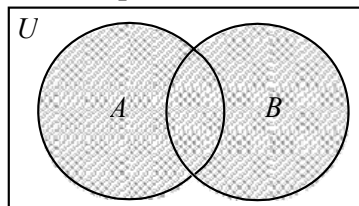
Перетином буде множина, представлена на схемі заштрихованою частиною.

Наприклад, маємо множину поетів (A) і множину лауреатів премії ім. Т.Г. Шевченка (B). У результаті перетину отримаємо множина поетів, які нагороджені державною премією ім. Т.Г. Шевченка – ($A \cap B$). На схемі ця множина представлена заштрихованою частиною.

Об'єднанням множин (A) та (B) є множина, що складається із тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній із множин (A) або (B). Позначають операцію об'єднання символом $\cup$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}.$$

Графічно операцію об'єднання множин зображують так:



Об'єднаємо множину планет (A) із множиною космічних об'єктів (B). У результаті об'єднання отримаємо множину космічний об'єкт.

Розглянуті операції над множинами дають можливість емпіричного тлумачення логічних сполучників.

Візьмемо операцію перетину множин. Унаслідок перетину двох множин утворюється нова множина, яка складається зі спільних елементів цих множин. Тоді новоутворена множина включається до кожної із цих множин. А якщо ми приймемо умову, що множини (A) та (B) моделюють об'єми відповідних понять, то отримаємо емпіричну інтерпретацію кон'юнкції та імплікації:

$$1. WxA(x) \cap WxB(x) \equiv Wx(A(x) \wedge B(x)).$$

Новоутворене поняття з об'ємом $Wx(A(x) \wedge B(x))$ по черзі, як було сказано, включатиметься до кожного із вихідних понять.

$$2. WxA(x) \cap WxB(x) \subset WxA(x).$$

$$3. WxA(x) \cap WxB(x) \subset WxB(x).$$

Оскільки у формулах (2, 3) ліва частина до знаку включення ($\subset$) є лівою частиною рівності (1), то маємо право стверджувати:

$$4. WxA(x) \wedge B(x) \subset WxA(x).$$

$$5. Wx(A(x) \wedge B(x)) \subset WxB(x).$$

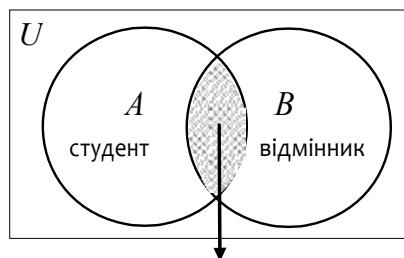
А згідно із законом оберненого відношення між змістом та об'ємом поняття³ отримаємо:

$$6. A(x) \wedge B(x) \supset A(x).$$

7. $A(x) \wedge B(x) \supset B(x)$, або в узагальненому вигляді маємо, відповідно: $A \wedge B \supset A$ та $A \wedge B \supset B$.

Рівності (6, 7) є доброю ілюстрацією, за допомогою таких понять теорії множин, як перетин і включення, емпіричного тлумачення кон'юнкції та імплікації, – це по-перше. А по-друге, ці рівності представляють правило усунення кон'юнкції (УК).

Звернімося до прикладу. Маємо поняття *студент* (A) і *відмінник* (B). У результаті операції перетину отримаємо нове поняття – *студент, який навчається лише на відмінні оцінки*:



³ $WxA(x) \subset WxB(x) = \forall x(A(x) \supset B(x))$, якщо об'єм поняття (A) включається до об'єму поняття (B), то зі змісту поняття (A) впливає зміст поняття (B).

$$A \cap B$$

Студент, який навчається тільки на відмінні оцінки

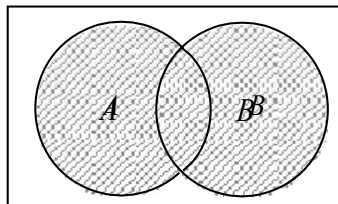
Ця схема за допомогою теоретико-множинного матеріалу досить вдало розкриває екстенціональний характер пропозиційних зв'язків.

Суть операції об'єднання множин полягає в утворенні нової множини, яка складається з усіх елементів, кожен із яких належить принаймні одній із множин, що об'єднуються:

$$8. WxA(x) \cup WxB(x) = Wx(A(x) \vee B(x)).$$

Оскільки об'єми понять ми моделюємо за допомогою множин, то можна сказати, що метою операції об'єднання є виявлення всіх елементів об'ємів понять, що об'єднуються.

Наприклад, маємо поняття проза (A) та поняття поезія (B). У результаті об'єднання отримаємо нове поняття види літературного жанру, чи проза або поезія:



Виходить, що об'єм кожного з понять, що об'єднуються, включається до об'єму нового поняття, яке отримують у результаті об'єднання:

$$9. WxA(x) \subset WxA(x) \cup WxB(x).$$

$$10. WxB(x) \subset WxA(x) \cup WxB(x).$$

Згідно із законом оберненого відношення між змістом та об'ємом поняття, зміст понять, що об'єднуються, є більш інформативним, ніж зміст поняття, яке отримують унаслідок об'єднання:

$$11. WxA(x) \subset Wx(A(x) \vee B(x)).$$

$$12. WxB(x) \subset Wx(A(x) \vee B(x)).$$

$$11. A(x) \supset (A(x) \vee B(x)).$$

$$12. B(x) \supset (A(x) \vee B(x)).$$

Формули 11 і 12 свідчать про те, що операції об'єднання в інтенціональному смислі ставиться у відповідність логічний сполучник диз'юнкція.

Використання у логіці засобів теорії множин, як зазначалося, дозволяє обґрунтувати фундаментальні поняття логіки. Візьмемо

для прикладу поняття *істина*. У логіці слово *істина* не має того сакрального значення, яким воно визнається у філософії. Логіки користуються цим словом для умовного позначення логічної властивості *бути істинним* або *бути хибним*. *Істина* або *хиба* – два істиннісних значення, які, за певних умов, можуть окремо належати конкретному висловлюванню, але не разом. Тому коли висловлювання істинне, то за ним визнають, що воно має істиннісне значення *істина*, а коли висловлювання хибне, то його істиннісне значення буде *хиба*.

В логіці істинне висловлювання розглядають не в смислі тотожності мислення та буття (що є у філософії), а хибне висловлювання не ототожнюється із помилковим відображенням дійсності. Логіка істинне висловлювання ототожнює із порожньою множиною, а хибне висловлювання – із непорожньою.

Тому оцінки *істина* та *хиба* можна легко замінити відповідно на: 0 та 1, добро та зло, прекрасне та потворне, включено та виключено, знає та не знає, відомий і невідомий, справедливий і несправедливий тощо. Саме визначення порожньої і непорожньої множини забезпечує розуміння умов істинності та хибності висловлювання.

Іноді у підручниках і монографіях зазначають, що в основі оцінок *істина*, *хиба* лежить аристотелівське визначення істини як відповідності судження дійсності. Але про яку дійсність і відповідність ідеться в наступних висловлюваннях:

Граф Монте-Крісто – борець за справедливість.

Трикутник – геометрична фігура.

Хома Брут – син Тараса Бульби.

Брюнет із м. Васюки поставив мат О. Бендеру.

$2 \times 2 = 4$.

Ці приклади показують, що оцінка наведених висловлювань криється зовсім не в тому, чи були Хома Брут і Тарас Бульба в родинних зв'язках, чи відвідував Великий комбінатор м. Васюки, а в тих знаннях понятійного апарату теорії множин, які розкривають природу порожньої і непорожньої множини.

І ще одне зауваження щодо коментарів аристотелівського вчення. Як зазначалося, аристотелівське вчення за віки, що минули, зазнало значних нашарувань. І часто деякі положення Арі-

стотеля подають далекими від оригіналу. Наприклад, Арістотелю приписують силогізм:

Усі люди – смертні.

Сократ – людина.

Сократ – смертний.

Хоча цей силогізм належить У.Окаму.

Насправді Арістотель записував силогізм у вигляді приписової залежності:

Якщо A висловлюється про всяке B ,

а B висловлюється про всяке C ,

то A висловлюється про всяке C (Barbara).

Арістотель формулював цю залежність наступним чином: *"Якщо предмет має певну властивість і все, чому притаманна ця властивість, має іншу властивість, то предмет, про який ідеться, має й цю іншу властивість"*. Наведена залежність свідчить про те, що логіка, на відміну від повсякденних ситуацій, в яких ми постійно перебуваємо, і де істини зазвичай є неповними, незавершеними, прагне мати справу із непорушними істинами. А це означає, що оцінки істина та хиба в логіці є своєрідними носіями смислового змісту, що сфокусований у висловлюванні, та який визначається теоретико-множинними поняттями.

Підводячи підсумки, можемо зазначити:

1. *Основна мета логіки як науки* – забезпечити семіотичний інваріант нашого знання. Тому логіка протягом історичного розвитку вдосконалює спеціально пристосований для цього арсенал засобів, долучаючи до нього й інструментарій теорії множин.

2. *Операції над множинами* (доповнення, перетин, об'єднання) *сприяють емпіричній інтерпретації пропозиційних зв'язок.*

3. *Використання теоретико-множинного апарату* дозволяє обґрунтувати такі фундаментальні поняття в логіці, як істина, можливий світ, відображення, образ тощо.

1.2. Семантичний аналіз виразів природної мови

1.2.1. Поняття семантичної категорії

Визначаючи предмет і метод логіки, ми підкреслювали, що логіка вивчає форми та закони мислення не безпосередньо, а опосередковано – через мову (чи природну, чи мову науки). І першим завданням логіки є вилучення із мови логічних форм їх властивостей і відношень. Цей аналіз здійснюється за допомогою семантичного аналізу мовних виразів (визначення, які саме мовні вирази є носіями тієї чи іншої форми, а які – ні). Варто наголосити, що в цьому випадку йдеться про логічну семантику.

У зв'язку з цим дамо деякі пояснення.

Якщо семантика, як розділ семіотики,
досліджує загальні аспекти інтерпретації
будь-якого типу знакових систем,
то логічна семантика має справу з інтерпретацією
особливого виду знакових систем –
мов, побудованих для цілей логіки.

Відомо, що зв'язок між знаком і його значенням не є природним, тому приписування значень виразам знакових систем здійснюється за допомогою спеціальних правил, які називають *семантичними*. У природній мові немає чітких семантичних правил, тут відношення між знаком і його значенням складаються під час комунікативної діяльності людей і залежать від багатьох умов. Це й зумовлює визначення смислу слова природної мови як способу його вживання.

Логічна ж семантика будується для мов із чітко описаною структурою. Семантичні правила логічної семантики включають терміни, які належать до опису мовних виразів, і терміни, що описують позамовні сутності. Наприклад, речення *Моцарт – сучасник Сальєрі* істинне тоді й тільки тоді, коли Моцарт і Сальєрі жили в один і той самий час; термін $5 + 2$ позначає число 7. Слова *істинно*, *позначає* встановлюють відповідність

між мовни-ми виразами та об'єктами області інтерпретації.

За допомогою семантичного аналізу всю множину мовних виразів (ідеться про природну мову) розбивають на таку, що несе у собі певні логічні об'єкти, і таку, що їх не несе. Потім серед множини мовних виразів, які є носіями логічних форм, властивостей і відношень, здійснюється типологія, тобто виділяються класи мовних виразів, які мають однотипні предметні значення. Іншими словами, здійснюється категоризація мови з погляду логічної семантики.

Виділяючи класи мовних виразів з однотипним предметним значенням, тим самим визначають певну семантичну категорію, що одночасно є і синтаксичною категорією, оскільки за класом цих виразів закріплюється один і той самий тип значення. Наприклад, серед тієї множини мовних виразів (слів і словосполучень), які мають самостійний смисл, за допомогою засобів логічної семантики виділяють речення й ті вирази, що відіграють самостійну роль у структурі речення, тобто забезпечують існування речення саме як речення, а не просто нагромадження мовних знаків.

З усієї множини речень (розповідних, запитальних, окличних) логіку насамперед цікавлять *розповідні речення*. Інтерес логіки до розповідних речень обумовлений тим, що вони є носіями такої логічної форми, як судження. Тому розповідні речення називають висловлюваннями.

Висловлювання –

це назва (ім'я) множини розповідних речень,
сміслом яких є судження,

а значенням – такі логічні об'єкти, як *істинність* і *хибність*.

Оскільки ми звертаємося тільки до розповідних речень поза межами спеціального аналізу, терміни *висловлювання* та *речення* отожднюються. У межах спеціального аналізу розповідне речення розглядається як послідовність знаків, що відповідає вимогам правил даної мови (це синтаксична категорія) та своїм змістом має висловлювання (це семантична категорія). Оскільки висловлювання як семантична категорія фіксує у собі мовні відрізки, які виражають судження, її визначають як основну. Це зумовлено тим, що дослідження природи судження дає ключ до розуміння структури поняття як форми мислення та розкриває механізми функціонування понять і суджень у структурі умовиводу.

Вирази, які входять до складу висловлювання, поділяють на:

- *deskриптивні терміни*;
- *логічні терміни*.

Назва *deskриптивний термін* походить від латинського *descriptio* – *опис, описовий*.

Deskриптивними термінами

називають слова, або словосполучення,
які позначають предмети, властивості, відношення чи дії,
операції над предметами.

Логічними термінами

називають слова, які фіксують зв'язки, відношення,
характеристики, що забезпечують інваріантність (незмінність)
семіотичного інваріанту висловлювання
за всіх можливих перетворень і будь-яких значень
його deskриптивних термінів.

Розглянемо приклад:

1. Будь-яка теорія є формою пізнання.
2. Будь-яке явище є виявом закономірності.

Слова *теорія, форма пізнання, явище, вияв закономірності* позначають deskриптивні терміни. Слова *будь-який, є* фіксують логічні терміни. Саме ці терміни утримують незмінним значення першого й другого висловлювань. Ця незмінність забезпечується схемою *Будь-який... є....* Що б ми не підставили на місце пропусків у цій схемі, все одно отримаємо загальностверджувальне судження, яке буде істинним, коли справді кожному предмету із деякого класу належить приписувана у цьому судженні ознака.

1.2.2. Характеристика deskриптивних термінів

Розглянемо види deskриптивних і логічних термінів.

Deskриптивні терміни поділяють на:

- *терми*;
- *предикатори*;
- *функціональні знаки*.

До логічних термінів належать
зв'язки між дескриптивними термінами
всередині висловлювання, між висловлюваннями;
кількісні характеристики дескриптивних термінів,
які фіксують предмет думки в судженні.

Спочатку проаналізуємо дескриптивні терміни.

Терм –

це слово або словосполучення, яке позначає окремі предмети.

Прикладом можуть служити "Дніпро", "Центральне тіло Сонячної системи", "9" тощо.

Терми бувають *постійні* та *змінні*.

Далі йтиметься лише про постійні терми.

У структурі висловлювання терми виконують роль логічного предмета або входять складовою частиною до логічного присудку. Наприклад,

1. "Марс є планета".
2. "Варшава є столиця Польщі".

У першому висловлюванні терм "Марс" виконує роль *логічного підмета*, а у другому – терм "Польща" виконує роль *складової частини логічного присудка*.

Бути логічним присудком терми не можуть.

У природній мові терми виражають власними іменами. Графічно їх виділяють лапками.

1. "Абстракція" – *слово латинського походження*.
2. "Бути електропровідним" – *фізична властивість*.
3. "Бути ровесником" – *симетричне відношення*.
4. "Київський університет ім. Тараса Шевченка розташований на Володимирській вулиці" – *розповідне речення*.

У кожному із цих випадків терм називає конкретний об'єкт: у першому і четвертому – *називає предмети*, у другому – *властивість*, у третьому – *відношення*.

Якщо терм іменує конкретний елемент
із певної множини предметів, то його називають **постійним**
і позначають буквами латинського алфавіту (*a, b, c...*).

Отже, оскільки терм може виконувати у судженні роль тільки логічного підмета, то об'єктом твердження у судженні може

бути предмет, властивість і відношення. Зрозуміло, не просто реальні предмет, властивість і відношення, а їхні імена, зафіксовані відповідними термами.

Предикатор (від лат. *praedicatum* – сказане) – це слово або словосполучення, яке представляє властивість або відношення.

Головна логічна функція предикатора – виконувати роль логічного присудка у судженні.

Підкреслюючи той факт, що терм може бути лише логічним підметом, а функцію логічного присудка здійснює предикатор, уточнимо терміни *логічний підмет* і *логічний присудок*.

Логічним підметом

називають вираз, який позначає те, що є об'єктом судження у даному висловлюванні.

Логічним присудком

називають вираз, який позначає те, що стверджується про предмет у висловлюванні.

Перегляд різноманітних висловлювань свідчить про те, що судження може належати до одного або кількох предметів:

1. Венера є планетою Сонячної системи.
2. Граф Монте-Крісто є персонажем однойменного роману О. Дюма.
3. Київ розташований між Москвою та Одесою.
4. 9 більше 7.

У першому та другому висловлюваннях логічним підметом відповідно є терми "Венера"; "Граф Монте-Крісто", а логічним присудком – предикатори *планета Сонячної системи*; *персонаж однойменного роману О. Дюма*. У третьому й четвертому висловлюваннях логічним підметом відповідно є упорядкована трійка та двійка предметів. Логічним присудком є предикатори *розташований між*, *більше*.

У наведених висловлюваннях логічним підметом виступають терми. Але необхідно враховувати і наявність таких висловлювань, де ствердження належить до всіх або деяких предметів певного класу.

1. Будь-яка мова є знаковою системою.
2. Усі мої приятелі знають одну з іноземних мов.

У першому висловлюванні логічним підметом виступає предикатор *мова*, а у другому – два предикатори: *приятелі* та *іноземна мова*. По суті, ці предикатори представляють класи предметів, до яких належать твердження, а слова *будь-яка*, *усі*, *одну із...* указують, стверджуємо ми щось відносно усього класу предметів чи тільки певної його частини. Тобто логічним присудком є предикатори *знакова система*, *знають*.

Висловлювання, в яких предикатор як присудок належить до одного окремого предмета або кількох окремих предметів, позначених постійними термами, називають **одиничними**.

Наприклад, *Шекспір є видатним драматургом*, *Земля більша за Місяць*. Терми, які є логічними підметами, у цих висловлюваннях указують на предмети, що є аргументами предикаторів, тобто виконують роль логічних присудків.

Слово *аргумент* походить від латинського *argumentum* – *доказ, підстава*. Є різні значення терміна *аргумент*.

У логіці під **аргументом** розуміють судження (або сукупність суджень), завдяки якому обґрунтовують істинність якого-небудь судження чи теорії.

У доведеннях аргументи є засновками, із яких виводять судження, істинність якого потрібно встановити. Наприклад, нам потрібно обґрунтувати істинність судження *Марс має природний супутник*. Для цього беремо за аргументи судження *Будь-яка планета Сонячної системи має природний супутник* та *Марс є планетою Сонячної системи*. Отже, на підставі цих аргументів можна стверджувати, що *Марс має природний супутник*. Якщо наведені судження (аргументи) визнають істинними, то із цього з необхідністю випливає істинність судження, що й *Марс має природний супутник*.

За терміном *аргумент* закріплено й інше значення, яке свої витоки бере із математики та набуває своєрідного забарвлення в логіці. У цьому розумінні *аргумент* трактують як незалежну змінну, замість якої підставляють імена об'єктів із тієї предметної області, до якої має сенс застосування відповідного предикатора. Наприклад, візьмемо предикатор *давніогрецький філо-*

соф. Цей предикатор можна приписати до об'єктів такої предметної області, як множина людей. Якщо взяти ім'я *Сократ*, то отримаємо істинне судження *Сократ є давньогрецьким філософом*, а якщо вказати ім'я *Кант*, то отримаємо хибне судження *Кант є давньогрецьким філософом* (тобто судження, що не відповідає дійсності).

Зупинимося детальніше на характеристиці предикатора як семантичної категорії. Інтерес до цієї категорії обумовлений тим, що якщо терм може виконувати функцію логічного підмета, але не може бути логічним присудком, то предикатор вживається не тільки як логічний присудок, а й як логічний підмет.

Предикатор характеризується низкою ознак:

- *місткістю*;
- *областю визначення*;
- *областю істинності*.

Місткістю предикатора

є кількісна характеристика його застосування як логічного присудка до об'єктів указаної предметної області.

Якщо предикатор можна приписати одному предмету, його називають *одномісним*, а якщо його можна приписати двійці, трійці, четвірці тощо аргументів, то його називають відповідно *двомісним*, *тримісним*, *чотиримісним* тощо. Наприклад, предикатори *держава*, *лекція*, *від'ємне число є одномісними*; *учитель*, *раніше*, *південніше* – *двомісними*; *розташований між*, *повідомляє* – *тримісними*.

Місткість предикатора фіксує його логічний зміст.

Лише одномісний предикатор виражає властивість, а інші – відношення.

Зазвичай указівка на те, якої місткості конкретний предикатор, фіксується у його назві: *більше* (двомісний); *метал* (одномісний). Іноді ж установити місткість предикатора можна тільки за допомогою додаткових методологічних процедур. Для прикладу візьмемо предикатор *читає*. Якщо це стан, то предикатор означає властивість: *Мій приятель читає нормативний курс лекцій*. А якщо це дія, спрямована на щось, то цей предикатор виражає відношення: *Мій брат ч и т а є н р о останню перемогу Київського "Динамо"*.

Доцільним буде зробити деякі пояснення щодо можливості предикаторів представляти властивості або відношення.

У природній мові слова (іменники) *держава, книжка, рідина* тлумачать як вирази, що позначають предмети, а не властивості. По суті, вони позначають класи предметів, об'єднані до одного цілого на основі якої-небудь ознаки. На цю особливість іменників звернув увагу Рейхенбах у праці "Елементи символічної логіки". Б. Рассел вважає, що предикатори-іменники – це також позначаючі вирази, як і терми.

Саме здатність предикаторів-іменників позначати клас предметів дає можливість використовувати їх не тільки як логічний присудок, а й логічний підмет висловлювання:

1. Планета є космічний об'єкт.
2. Земля є планета.

У наведених прикладах *предикатор-іменник* у першому висловлюванні, виконуючи роль логічного підмета, *позначає клас предметів*, а у другому, виконуючи роль *логічного присудка*, *представляє властивість*. У ролі логічного присудка можуть бути різні граматичні категорії (іменники, прикметники, дієслова). Це їх й об'єднує до однієї семантичної категорії – предикатора:

1. Моя сестра малює.
2. Сонце є зірка.
3. Метал – електропровідний.

Ураховуючи здатність предикаторів-іменників нарівні із термами виконувати функцію позначення, варто зважати на ті труднощі, які виникають у процесі розрізнення предикаторів і термів. Наприклад, слова *метал, камінь*, з одного боку можуть позначати відповідно конкретний вид речовини або узагальнення різних видів речовин. У реченні *Метал є хімічний елемент* слово "метал" – виконує роль терму, який позначає певну речовину. А у словосполученнях *кольоровий метал, чорний метал* тощо слово *метал* являє собою клас предметів. Усе залежить від контексту, в якому вживається слово.

Наступною характерною ознакою предикатора є область визначення.

Областю визначення предикатора
є множина його можливих аргументів.

Тобто множина предметів, у межах якої має сенс застосування даного предикатора. Наприклад, областю визначення предикатора *рідина* є клас речовин, областю визначення предикатора *ровесник* – клас людей.

Особливістю одномісних предикаторів

є те, що їх областю визначення виступає
множина можливих аргументів
предикатора.

Особливістю багатомісних предикаторів

є те, що область їх визначення складається із множини
впорядкованих пар, трійок, четвірок тощо предметів.

Більш того, область визначення багатомісного предикатора може складатися з аргументів, які належать до різних множин. Наприклад, предикатор *довіряє* в одному випадку може фіксувати відношення між людьми *N довіряє M*, у другому – відношення людини до якогось виду діяльності, ситуації, речі тощо.

1. *N довіряє інтуїції.*
2. *M довіряє пам'яті.*
3. *K довіряє експерименту.*

У першому та другому висловлюваннях один із аргументів предикатора *довіряє* належить до множини людей, другий – до множини видів психічної діяльності. У третьому висловлюванні предикатор *довіряє* – один з аргументів, знову належить до множини людей, а другий – до множини видів обґрунтування знання. Наскільки важливим є правильне встановлення області визначення предикатора свідчить той факт, що однакові за синтаксичною структурою предикатори можуть бути різними завдяки різним областям визначення. Візьмемо предикатор *більше*. Якщо це слово представляє відношення між числами (*5 більше 1*) – це один предикатор, а якщо відношення між містами (*Київ більший за Канів*), – то інший.

Отже,

Визначення кількості місць предикатора
та встановлення для нього області визначення
є необхідною передумовою його правильного застосування.

Іншими словами, це дає можливість установити:

- а) *що представляє предикатор* – властивість чи відношення;
- б) *із якої сфери треба брати предмети, аби будувати осмислені вирази.*

Тільки після цього можна сказати, що певна послідовність знаків є такою семантичною категорією, як предикатор.

Область визначення будь-якого предикатора розбивається на дві взаємовиключаючі частини. Одна із них складається тільки із тих аргументів, які з даним предикатором, що виконує роль логічного присудка, утворюють істинне висловлювання. Цю частину області визначення предикатора називають *областю істинності предикатора*. Наприклад, для предикатора *планета* областю визначення буде множина космічних об'єктів. До області його істинності ввійдуть *Земля, Марс, Венера* тощо. За межами області істинності залишаться ті предмети із області визначення цього предикатора, які разом із ним утворюють хибне висловлювання: *Сонце, Місяць* тощо.

Ураховуючи, що є два види предикаторів (за місткістю) – *одномісні* та *багатомісні*, можна ще й так визначити область істинності стосовно кожного з них.

Областю істинності одномісного предикатора

(який представляє певну властивість)

є сукупність тих предметів, яким притаманна ця властивість.

Областю істинності багатомісного предикатора

(який представляє відношення)

є сукупність послідовностей предметів, між якими існує це відношення.

Наприклад, маємо предикатор *сучасник*. Областю його визначення буде множина людей. До області істинності ввійдуть пари таких імен: *Платон, Арістотель; Гегель, Фейєрбах* тощо. За межами області істинності цього предикатора залишаться пари: *Платон, Гегель; Архімед, Ейнштейн* тощо.

Прийнято також називати область істинності предикатора об'ємом представленого ним відношення чи властивості.

Однією із характерних ознак предикатора, як зазначалося, є те, що він представляє ознаки предмета, але не називає предме-

ти. Навіть якщо предикатор-іменник виконує роль логічного підмета у висловлюванні, він все одно не позначає предмети, а представляє класи предметів, узагальнені на основі деяких властивостей. Наприклад, *Будь-яка планета має природний супутник*. До речі, це й є підставою для тлумачення предикаторів-іменників, що перебувають у позиції логічних підметів як своєрідних змінних термів.

Тільки терм позначає предмети.

Тому про терм часто говорять, що це називаючі вирази. Така відмінність між предикатором і термом обумовлює необхідність дати аналіз терміна *предмет*.

Зазвичай слово *предмет* (рiч) розуміють у широкому сенсі як усе те, що може бути об'єктом думки, тобто це й предмети об'єктивної дійсності, і події, й ознаки предметів, і теоретичні конструкти науки. Перетворити властивість, відношення, судження на предмет – означає зробити його предметом думки. Технічно це можна зробити, побудувавши висловлювання, в якому йтиметься відповідно про властивість, відношення, судження тощо.

1. Властивість *бути підлітком* є віковою.
2. Відношення, зафіксоване словом *приятель*, є симетричним.
3. Речення *Варшава розташована на березі Дніпра* – хибне.

У першому, другому й третьому висловлюваннях вирази *властивість бути підлітком*; *відношення, зафіксоване словом "приятель"*; *речення "Варшава розташована на березі Дніпра"* позначають предмети, тобто це – терми.

Отже, усе, що ми називали, стає об'єктом думки або предметом, а сама назва належить до категорії термів. Наприклад, у першому висловлюванні об'єктом думки ми зробили властивість *бути підлітком* і таким чином отримали предмет, а назва цього предмета – терм. Щоб показати, що це терм, застосовують такі технічні засоби, як лапки.

На відміну від терму, предикатор може лише представити ознаку, але не може її назвати.

У нашому прикладі вирази *приятель* і відношення *"приятель"* належать до різних категорій: *перший – це предикатор, а другий – терм*.

Щоб пересвідчитися в їхній розбіжності, спробуємо поміняти їх місцями. У результаті отримаємо висловлювання: *Платон приятель Арістотеля*. Здійснимо тут вказану зміну: *Платон відношення "приятель" Арістотель*. Отриманий вираз навіть не є реченням. По суті, це послідовність термів.

Отже,

У структурі висловлювання
головними дескриптивними термінами
є *терм* і *предикатор*.

Саме ці семантичні категорії фіксують головні чинники висловлювання *те, що говориться* та *те, про що говориться*.

Але, крім цих категорій, існують ще вирази, які позначають певні дії, операції над предметами, унаслідок яких виникають нові предмети. Ідеться про *предметні функтори*, або *предметно-функціональні вирази*.

Із предметними функторами (тобто назвами предметних функцій) ми зустрічаємося у математиці ($\sin$, $+$, $\log$ тощо). У природній мові предметні функції виражають словами *віддаль*, *зріст*, *вага*, *маса*, *швидкість*, *колір*, *професія* тощо. Предметний функтор, як і предикатор, має область визначення.

Областю визначення функтора

є множина предметів,
до яких доцільно застосувати даний функтор.

Наприклад, областю визначення функтора *зріст* є множина людей (*Петро*, *Тарас*, *Микола* тощо).

Як і предикатор, функтори поділяють на *одномісні* (напр., *вік*, *професія*) та *багатомісні* (*добуток*, *відстань*).

Але, на відміну від предикатора, застосування функтора *вік* до предметів *Петро*, *Микола*, *Тарас* тощо, дасть новий предмет, тобто відповідне поіменоване число (18, 19, 26 тощо). Тому стосовно предметного функтора може йтися не про область істинності, а про область можливих значень функтора.

Говорячи про терм, предикатор, функтор, зазначалося, що ці вирази позначають або представляють певні об'єкти. Це постійні

вирази: постійний терм, постійний предикатор, постійний функтор. Водночас у науковій практиці застосовують *змінні вирази*, або *вирази зі змінними значеннями*.⁴

Логіка використовує змінні для суджень, предметів, властивостей, відношень, предметних функцій. Це дає змогу підвищити ефективність логічного аналізу природної мови, а також досконаліше будувати формалізовані мови. Наприклад, для суджень вводять пропозиційні змінні або змінні висловлювання; для предметів – предметні змінні, або змінні терми; для властивостей і відношень – предикатні змінні, або змінні предикатори; для предметних функцій – функціональні змінні.

Головною особливістю змінних символів є те, що вони нічого не позначають і не представляють (як постійні вирази).

⁴ У таких судженнях як *Деякі дерева є морозостійкими*, *Деякі трикутники є рівнобедреними*, *Деякі теорії є гуманітарними* однакова логічна структура, яку можна записати у вигляді формули $\text{Деякі } S \in P$. S і P виражають у цих судженнях різні за змістом поняття. Слова *деякі*, є фіксують одні й ті самі логічні зв'язки. Отже, ті знаки-символи у формулах логіки, які замінюються конкретними поняттями, називають *змінними* (ідеться про S і P). Символи (слова), наявні у всіх конкретних за змістом думках, які мають однакову логічну структуру, називають *логічними постійними* (у наших прикладах це слова *деякі* та ϵ). Термін *змінна* широко застосовують у математиці. Тут він уживається у двох значеннях *змінна величина* та *змінний знак у формулах*. У математиці *змінна величина* – це функція, тобто величина (y), яка залежить від зміни другої величини (x). Під змінним знаком математики розуміють знак, на місце якого можна підставляти, відповідно до певних правил, імена індивідуальних предметів. Саме *змінна* – не ім'я, а пусте місце для конкретних імен. Наприклад, у виразі $(a + x) = (x + a)$ знаки x та a є змінними у другому смислі. У логіці змінні розуміють саме у другому смислі, тобто як змінні знаки. При побудові логічної теорії символами позначають і логічні змінні, і логічні постійні. Завдяки цьому можна не тільки скоротити запис, а й усунути багатозначність слів, за допомогою яких ми виражаємо логічні постійні. Наприклад, слова *якщо*, *то*, сполучаючи два речення, можуть виражати причинні зв'язки, часові зв'язки, умовні зв'язки тощо. Але у логіці ми відволікаємося від цих смислових відтінків слів *якщо*, *то*, і за допомогою логічного терміна *імплікація* надаємо будь-якому складному висловлюванню, утвореному із двох простих шляхом їх поєднання словами *якщо*, *то*, один і той самий смисл: якщо висловлювання, що стоїть після слова *то* хибне, то у цілому складне висловлювання буде хибним, а в усіх інших випадках – істинним.

Наприклад, змінне висловлювання набуває значень із множини суджень, змінний предикатор набуває значень із множини властивостей чи відношень тощо.

Указати предметну область (область, звідки беруть значення відповідні змінні) є необхідною дією для визначення певного знака як змінної. Не визначивши предметну область, не можна сказати, є дана послідовність символів знаком, який є змінною, чи ні.

У природній мові роль змінних виконують загальні імена (предикатори-іменники у позиції логічного підмета). По суті, введення змінних – основа методу формалізації.

У логіці об'єкти дослідження та операції над ними позначають відповідними символами. Завдяки цьому про об'єкти та логічні відношення між ними можна говорити мовою символів. Застосування змінних у логіці, з одного боку, забезпечує дослідження логічної структури природної мови, а з іншого – допомагає розкрити структуру виразів і правил виведення у формалізованих мовах.

1.2.3. Визначення логічних термінів

Таким чином, розгляд групи семантичних категорій, яку називають дескриптивними термінами, показує, що вони фіксують головні типи мислинневих структур, із яких будується процес міркування.

Самі ж логічні зв'язки, відношення, що мають місце у процесі міркування, представлені другою групою семантичних категорій – *логічними термінами*.

До логічних термінів належать відношення⁵ між дескриптивними термінами всередині висловлювання, відношення між висловлюваннями, кількісні характеристики предметів думки у простих висловлюваннях, описові вирази предметів думки у простих висловлюваннях.

⁵ Зрозуміло, що не самі відношення є логічними термінами, а слова й словосполучення, за допомогою яких зафіксовані ці відношення.

У природній мові відношення між термінами у простому висловлюванні, відношення між простими висловлюваннями у складному висловлюванні виражають, відповідно, словами *є* (*суть*); *і*; *або*; *якщо, то*; *ні*; *якщо й тільки якщо, то*. Відношення, зафіксовані цими словами, називають логічними зв'язками.

Кількісні характеристики предмета думки у простому висловлюванні виражають словами *будь-які, усі, деякі* й називають кванторами (*усі – квантор загальності, деякі – квантор існування*).

Описові вирази предмета думки у простому висловлюванні представлені словами *той; який; такий, що*. Це – оператори визначених і невизначених дескрипцій.

Розглянемо стисло логічні зв'язки. До характеристик кванторів та операторів визначеної і невизначеної дескрипцій звернемося пізніше.

Серед групи логічних зв'язок виділяють зв'язку *є* й так звані пропозиційні зв'язки *і; або; якщо, то; ні; якщо й тільки якщо, то*.

Зв'язка *є* (або множинна форма *суть*), як зазначалося, фіксує логічні відношення між дескриптивними термінами у простому висловлюванні. Вона констатує наявність певної ознаки у суб'єкта висловлювання. А оскільки ознаки бувають двох видів (*властивість* або *відношення*), то зв'язка *є* вказує на наявність у предмета думки певної властивості, або наявність між предметами думки певного відношення.

1. Варшава є столичним містом.

2. Сократ є вчителем Платона.

У першому висловлюванні зв'язка *є* приписує властивість предмета думки *столичне місто*, у другому – відношення, прип'яманне Сократу та Платону.

Залежно від того, що констатує *є* у висловлюванні, їх поділяють на:

- *атрибутивні* (висловлювання про властивості);

- *релятивні* (висловлювання про відношення).

Щоб у даному випадку не виникло плутанини стосовно зв'язки *є* (тобто, що зв'язка *є* виражає відношення між *S* і *P*, і тут же, що зв'язка *є* приписує відношення предмета думки висловлювання), звернемо увагу на таку обставину. Виходячи із того, що зв'язка *є* фіксує відношення між *S* і *P*, а ці відношення можуть бути двох видів: або *відношенням належності*, або *відношенням неналежності*.

Відношення належності –

це відношення простору, часу, величини, сили, причинності тощо.

Наприклад, у висловлюванні *Логіка є філософською наукою* маємо відношення належності, а у висловлюванні *Логіка виникла раніше від кібернетики* – маємо відношення часу. За логічним характером ці висловлювання різні. У першому – констатується зв'язок між предметом і такою його ознакою, як властивість, а у другому – зв'язок між предметами через таку ознаку, як часове відношення.

Відношення належності має такі різновиди:

- а) *належність властивості предмета* (6 є парним числом);
- б) *належність певного предмета до класу предметів* (Ньютон є видатним фізиком);
- в) *належність одного класу предметів до іншого* (трикутник є геометричною фігурою).

Отже, розуміння зв'язки є як відношення належності чи неналежності дає єдиний критерій логічного аналізу простих висловлювань, на якому ґрунтується логіка предикатів – один із розділів сучасної формальної логіки.

На відміну від зв'язки є, слова природної мови *ні; і; або; якщо, то; якщо й тільки якщо, то...* складають групу логічних термінів, які фіксують логічні відношення не між *S* і *P*, а між висловлюваннями.

Слова *і; або; якщо, то...* й подібні до них прийнято називати граматичними сполучниками. І це справді так, якщо ми хочемо описати способи зв'язку простих речень у складні. За допомогою граматичних сполучників досягається певна смислова єдність простих речень у складному. Утворюючи складне речення, зосереджуються на тому, щоб воно було зв'язане за змістом, незважаючи на те, істинні чи ні прості речення (що входять до його складу), а також отримане із них складне речення. Але ці самі слова є носіями й логічних сполучників. На відміну від граматичних, логічні сполучники фіксують зв'язки між висловлюваннями, а не між реченнями.

Сполучаючи висловлювання за допомогою логічних сполучників, ми враховуємо лише логічні значення (істинність, хиб-

ність) простих висловлювань і відволікаємося від змісту, смислу простих висловлювань. При утворенні складних висловлювань нас цікавить залежність істинності чи хибності складного висловлювання від істинності чи хибності простих висловлювань, що його складають. Наприклад, візьмемо висловлювання *Квадрат є геометричною фігурою або Франція є монархією*. У цьому висловлюванні немає смислового, змістовного зв'язку, тому слово *або* не є носієм граматичного сполучника. Але з погляду логіки таке сполучення простих висловлювань допустиме, та отримане з них висловлювання має конкретне значення. Таким чином, отримане складне висловлювання ми оцінюємо як істинне.

Ураховуючи цю особливість логічних сполучників (які у природній мові представлені тими самими словами, що й граматичні), у логіці вводять спеціальні назви та *символи для позначення логічних сполучників*:

- *і* – кон'юнкція ($\wedge$);
- *або* – диз'юнкція ($\vee$);
- *якщо, то* – імплікація ($\supset$);
- *якщо й тільки якщо, то* – еквівалентність ($\leftrightarrow$);
- *ні* – заперечення ($\neg$).

Оскільки логічні сполучники, з'єднуючи прості висловлювання у складні, фіксують не смисл, зміст простих висловлювань, а лише їхнє значення, то визначення кожного логічного сполучника зводиться, по суті, до встановлення умов, за яких утворене складне висловлювання буде істинним, а за яких – хибним. Іншими словами, пояснити, наприклад, що собою являє кон'юнкція, означає показати, як залежить значення складного висловлювання від значень простих, що його утворюють, за допомогою цього сполучника. А оскільки у складних висловлюваннях береться до уваги тільки значення простих, які комбінуються за допомогою логічних сполучників і це є визначальним, то зазвичай складне висловлювання часто називають за іменем сполучника, що його утворює. Тобто, говорять не *складне кон'юн- ктивне висловлювання*, а *кон'юнкція*.

За допомогою логічних сполучників із простих висловлювань утворюють складні, їх називають логічними операціями.

Розділ логіки, що досліджує природу таких логічних термінів як заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність, називають **ЛОГІКОЮ ВИСЛОВЛЮВАНЬ**.

Логічні терміни кон'юнкція, диз'юнкція й подібні називають пропозиційними сполучниками, або пропозиційними зв'язками (пропозиція від слова висловлювання).

Отже, підсумовуючи попередні зауваження щодо характерних ознак пропозиційних сполучників, можна виділити два головних питання, які цікавлять логіку висловлювань:

1) яким чином із простих (атомарних) висловлювань можна утворити складні (молекулярні)?

2) як залежить логічне значення молекулярного висловлювання від логічних значень атомарних?

Розглянемо тепер визначення пропозиційних зв'язок.

Серед пропозиційних зв'язок виділяють *заперечення* як унарну зв'язку. *Унарна* – означає *одномісна*. Її застосовують до одного висловлювання. Решта зв'язок (чотири), є *бінарними*, *двомісними*. Іншими словами, лише за наявності двох простих висловлювань можна отримати правильно побудоване складне висловлювання.

Запереченням називають логічну операцію, за допомогою якої із певного істинного висловлювання отримують нове висловлювання, яке буде хибним, і навпаки.

Заперечне висловлювання складається із вихідного висловлювання та знаку заперечення ($\neg$), який ставлять перед ним: $\neg A$ (часто вживають й інші символи для позначення заперечення: $(-)$ або $(\sim)$, відповідно: $\bar{A}$, або $(\sim A)$). Запереченням висловлювання A є складне висловлювання $\neg A$. У природній мові аналогами заперечення є слова *не*; *невірно*, *що*; *не має місця*, *що*.

У логіці висловлювань процедури визначення кожної логічної операції задають так звані таблиці істинності. Для побудови таблиці істинності ми маємо прийняти такі умови:

1) просте висловлювання може бути або істинним, або хибним, але не може бути одночасно й істинним, і хибним;

2) кількість рядків таблиці істинності для певного складного висловлювання відповідає формулі: 2^n (де 2 – кількість логічних значень для простого висловлювання (істина та хиба), а n – кіль-

кість простих висловлювань, що входять до складу складного висловлювання).

У логіці логічне значення *істина* позначають буквою *t* (від англ. *truth* – *правда, істина*), а логічне значення *хиба* – буквою *f* (від англ. *false* – *хибний, помилковий*). Наприклад, якщо до складу складного висловлювання входять два простих висловлювання, то відповідно до формули 2^n замість *n* підставляємо 2 та отримуємо формулу $2^2 = 4$. Таким чином, таблиця істинності для цього складного висловлювання складатиметься із чотирьох рядків. Якщо таблицю будують для простого висловлювання, то вона складатиметься із двох рядків, відповідно до формули $2^1 = 2$.

Побудуємо таблицю істинності для заперечення. Вона ілюструє визначення логічної операції заперечення, яке ми дали вище. За істинності *A* хибним буде не-*A* ($\bar{A}$), а за хибності *A* істинним буде не-*A* ($\bar{A}$).

<i>A</i>	$\bar{A}$
<i>i</i>	<i>x</i>
<i>x</i>	<i>i</i>

Як зазначалося раніше, до бінарних пропозиційних сполучників належать $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\leftrightarrow$.

Кон'юнкцією називають складне висловлювання $(A \wedge B)$, яке істинне тоді й тільки тоді, коли істинне *A* та істинне *B*.

Слово кон'юнкція походить від *conjunctio* – зв'язок, сполучник.

У природній мові аналогами кон'юнкції є вирази *A разом із B*; *A та B*; *як A, так і B*; *A, у той час як B*; *B, хоча й A*; *B, незважаючи на A*; *не тільки A, а й B* тощо.

У логіці кон'юнкцію позначають символами: $\wedge$, &.

Наведеному визначенню кон'юнкції відповідає таблиця істинності.

Відповідно до наведеної таблиці складне висловлювання *Ми перебували в аудиторії*, і *на вулиці йшов дощ* буде істинним лише тоді, коли істинними будуть обидва прості висловлювання *Ми перебували в аудиторії* і

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \wedge B$
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>x</i>	<i>x</i>
<i>x</i>	<i>i</i>	<i>x</i>
<i>x</i>	<i>x</i>	<i>x</i>

На вулиці йшов дощ. В усіх інших випадках воно хибне.

Відомим фактом є багатозначність слів природної мови. І це стосується не тільки слів-іменників, а й сполучників, серед яких є й слово *або*. Логіка створює спеціальні засоби, за допомогою

яких аналізують подібну багатозначність та які дають можливість запобігти цієї багатозначності.

Складне висловлювання, утворене за допомогою сполучника або, відображає існування різних можливостей. Наприклад, висловлювання *Він досяг гарних результатів у навчанні або завдяки старанності, або завдяки здібностям* відображає наявність різних можливостей отримання добрих результатів у навчанні. Це висловлювання буде істинним, якщо одна із двох можливостей реалізується. Істинним воно буде й тоді, коли реалізуються обидві можливості. Таке висловлювання називають диз'юнктивним. Слово диз'юнкція походить від латинського *disjunctio* – роз'єднання, подія, розрізнення.

У природній мові аналогами диз'юнкції є вирази: *A або B; A або B, або обидва; A та (або) B; A, якщо не B.*

Для позначення диз'юнкції використовують символ $\vee$.

Різні значення сполучника або у логіці фіксують:

- *з'єднувальна диз'юнкція* (або проста диз'юнкція);
- *розділова диз'юнкція* (або строга диз'юнкція);
- *виключна диз'юнкція* (або антикон'юнкція).

Прикладом з'єднувальної диз'юнкції є наведене висловлювання. Отже,

З'єднувальною диз'юнкцією

називають складне висловлювання $A \vee B$,

яке буде істинним тоді й тільки тоді,

коли буде істинним принаймні одне із висловлювань A або B .

Наведене визначення відображене у таблиці істинності для диз'юнкції.

Якщо потрібно показати, що із двох можливостей реалізується тільки одна та що реалізація однієї можливості виключає реалізацію іншої, користуються *розділовою, строгою або сильною диз'юнкцією*.

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	x	i
x	i	i
x	x	x

У природній мові строга диз'юнкція має аналогом вираз *A або B, але не обидва; A, якщо не B; A, крім випадку, коли B.*

Логіка для позначення сильної диз'юнкції використовує символи:

$\vee, \underline{\vee}, \neq$.

Сильною диз'юнкцією називають висловлювання $A \vee B$,
яке істинне тоді й тільки тоді,
коли одне із простих висловлювань, що входять до його складу,
істинне, а друге – обов'язково хибне.

Наприклад, *Ця людина або житель Києва, або іногородній*.

Таблиця істинності для сильної диз'юнкції має наступний вигляд.

Сильною диз'юнкцією користуються тоді, коли відомо, що із двох можливостей, які включають одна одну, реалізуватися може лише одна, але невідомо яка саме.

A	B	$A \vee B$
i	i	x
i	x	i
x	i	i
x	x	x

Отже, у диз'юнкції істинність одного простого висловлювання не виключає істинності другого, а в сильній диз'юнкції істинність одного виключає істинність другого.

У природній мові сполучник *або* можна вживати й у третьому значенні, яке також є виключаючим. Іноді нам необхідно сказати, що одна, а то й обидві можливості не мають місця. Наприклад, у висловлюванні *Він є студентом або школярем* ми хочемо сказати, що він у жодному випадку не є ні тим, ні іншим одночасно. У крайньому разі, одним із них. За допомогою виразу у крайньому разі ми підкреслюємо, що він може бути ні тим, ні іншим (щодо нашого прикладу: він і не учень школи, і не студент, а учень технікуму). Тому наведене висловлювання буде істинним і тоді, коли обидва простих висловлювання хибні.

Таке складне висловлювання називають *виключенням*, або *антикон'юнкцією*. По суті, смисл сполучника *або* в цьому випадку можна передати комбінацією таких логічних термінів, як кон'юнкції і заперечення. Комбінацію цих термінів позначимо вертикальною рисою ($A \mid B$).

Отже,

Складне висловлювання,
яке виражає несумісність простих висловлювань, що
його складають,
називають **виключенням** або **антикон'юнкцією**.

Виключенням (антикон'юнкцією)

називають складне висловлювання, яке
істинне тоді й тільки тоді,
коли у крайньому разі одне із простих висловлювань, що
його складають, є хибним.

Цьому визначенню виключення відповідає таблиця істинності.

До багатозначних сполучників природної мови, крім сполучника *або*, належить і сполучник *якщо, то*, що фіксує той факт, що одне явище спричиняє інше.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> <i>B</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>x</i>
<i>i</i>	<i>x</i>	<i>i</i>
<i>x</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>x</i>	<i>x</i>	<i>i</i>

З'єднавши цим сполучником два прості висловлювання, отримаємо складне умовне висловлювання.

Граматичному сполучнику *якщо, то* відповідає логічний термін *імплікація*. Слово *імплікація* походить від латинського *implicite* – *тісно пов'язую*.

Аналогами імплікації у природній мові є слова *якщо A, то B*; *A тоді, коли B*; у випадку *A* має місце *B*; *B*, якщо *A*; для *B* достатньо *A*; для *A* необхідно *B*.

Для позначення імплікації логіка використовує символи $\rightarrow$, $\supset$.

Однією з особливостей імплікації як логічного терміна, на відміну від уже розглянутих, є те, що прості висловлювання, поєднані імплікацією, не можна переставляти місцями, бо це змінить логічне значення складного висловлювання. Кожне із простих висловлювань, які входять до імплікативного висловлювання, має спеціальну назву, відповідно до функцій, які воно виконує у складному висловлюванні.

Висловлювання, якому надіслане слово *якщо*
та яке стоїть перед словом *то*,
називають **антецедентом**
(від лат. *antecedens* – *попередній*).

Висловлювання, яке стоїть після слова *то*,
називають **консеквентом**
(від лат. *consequens* – *наступний*).

У літературі *антецедент* прийнято називати *умовою, причиною, підставою, основою*, а *консеквент* – *наслідком, висновком*.

Стверджуючи імплікацію, ми стверджуємо, що в жодному разі не може трапитися так, щоб антецедент був істинним, а консеквент – хибним. Виходить, що *імплікація істинна у трьох випадках*:

- *антецедент істинний і консеквент істинний*;
- *антецедент хибний і консеквент істинний*;
- *антецедент хибний і консеквент хибний*.

І лише коли антецедент істинний, а консеквент – хибний, імплікація – хибна. Це відображено в таблиці істинності для імплікації.

A	B	$A \supset B$
i	i	i
i	x	x
x	i	i
x	x	i

Звідси випливає, що, приймаючи імплікацію за істинну та визначаючи істинним

її антецедент, ми маємо визнати істинним і її консеквент, а приймаючи імплікацію за істинну та відкидаючи в той самий час її консеквент як хибний, ми маємо відкинути й її антецедент.

Для імплікації, як і для диз'юнкції, характерна багатозначність, що полягає у розбіжності між вживанням її у логіці та в побуті. Аналог імплікації у природній мові – сполучник *якщо*, то з'єднує два простих висловлювання у складне у випадках, коли між ними існує певний зв'язок за формою та змістом. Під цим зв'язком розуміють, що консеквент обов'язково впливає із антецедента. Іншими словами, *визнаючи антецедент за істинний, ми змушені визнати істинним і консеквент*.

Із суто інтуїтивного погляду можна сказати, що ми звертаємося до імплікації у наших міркуваннях тільки тоді, коли не впевнені, істинні її антецедент і консеквент, чи ні. В усіх інших випадках уживання імплікації утрачає сенс. Наприклад, *Якщо дане космічне тіло – планета, то воно має природний супутник*. Наведене висловлювання, як і будь-яке інше імплікативне висловлювання, містить певний сумнів, який кодується наведеною таблицею істинності.

А. Тарський у "Вступі до логіки та методології дедуктивних наук" наводить один із фізичних законів (*Кожен метал є пластичним*), який записує у вигляді імплікації: *Якщо x є метал, то x є пластичним*. Ця імплікація є формою конкретних застосувань загального закону. Коли ми впевнені в істинності загального закону, то змушені визнати істинність усіх його часткових за-

стосувань. Іншими словами, коли на місце *x* ми поставимо назву будь-якого матеріалу (напр., *мідь*, *глина*, *камінь* тощо), то завжди матимемо істинне конкретне імплікативне висловлювання.

Можна легко переконатися, що:

а) усі висловлювання, отримані в результаті такої підстановки, відповідатимуть умовам істинності імплікації. Ми не матимемо ситуації, за якої при істинності антецедента хибним буде консеквент;

б) у кожній з імплікацій як конкретизації загального закону існує тісний зв'язок між антецедентом і консеквентом, що відображається у формальному збігу їх суб'єктів;

в) приймаючи антецедент кожної із цих імплікацій (напр., *мідь – метал*) за істинний, можемо вивести із нього істинний консеквент (*мідь – пластична*). Підставою для цього є загальний закон, що всі метали – пластичні.

Однак, як зазначає А. Тарський, із погляду природної мови деякі з імплікативних висловлювань будуть штучними та сумнівними.

Коли ми замість *x* підставимо назву конкретного матеріалу, щодо якого ми не знаємо, чи є він металом і чи пластичний він, імплікативний зв'язок відповідатиме своєму призначенню. Якщо ми замінимо *x* *міддю*, антецедент і консеквент будуть безсумнівно істинні. Тому тут доречніше замість імплікації вжити вираз: *Оскільки мідь – метал, то мідь – пластична*. Підставивши замість *x* *глину*, отримаємо імплікацію із хибним антецедентом та істинним консеквентом, яку доцільніше замінити виразом: *Хоча глина й не метал, вона – пластична*. А дібравши для *x* назву такого матеріалу, коли утворена імплікація матиме хибним як антецедент, так і консеквент, ми збережемо імплікацію, але при цьому необхідно змінити граматичну форму дієслів. Наприклад, підставивши замість *x* *камінь*, матимемо: *Як би камінь був металом, то він був би пластичним*.

Ураховуючи прагнення мови науки до строгого визначення термінів, логіка задає чітке визначення імплікації. Імплікацію вважають осмисленою навіть тоді, коли між антецедентом і консеквентом немає жодного зв'язку. Істинність чи хибність імплікації залежить винятково від істинності або хибності антецедента та консеквента.

Такий підхід дає можливість, по-перше, установити логічний смисл виразу *якщо, то* і, по-друге, звільнити цей вираз від психологічних факторів. Із цього погляду осмисленими будуть такі висловлювання:

Якщо Варшава – столиця Польщі, то Дніпро впадає в Чорне море.

Якщо Варшава – столиця Франції, то Дніпро впадає в Чорне море.

Якщо Варшава – столиця Польщі, то Дніпро впадає в Каспійське море.

Якщо Варшава – столиця Франції, то Дніпро впадає в Каспійське море.

У природній мові ці висловлювання не мають смислу. Логіка ж визнає їх осмисленими, оскільки вони чітко фіксують логічне значення фрази *якщо, то*, яке полягає в тому, що тільки третє висловлювання хибне, а решта – істинні. Імплікацію з таким визначенням називають *матеріальною*

Матеріальною є імплікація,

в якій між антецедентом і консеквентом немає змістовного зв'язку.

Уперше концепцію матеріальної імплікації висунув давньогрецький філософ Філон (IV ст. до н.е.).

Крім матеріальної, існує й формальна імплікація.

Формальна імплікація –

це вид імплікації, який фіксує змістовний зв'язок між антецедентом і консеквентом.

Назву *формальна* ця імплікація дістала завдяки тому, що антецедент і консеквент мають суб'єкти, що збігаються за формою. Прикладом може бути закон фізики, наведений А. Тарським: Для будь-якого x , якщо $x \in \text{метал}$, то $x \in \text{пластичний}$.

Б. Рассел запропонував застосовувати формальну імплікацію для позначення законів природи.

Отже, ми переконалися, що імплікація без смислового зв'язку між антецедентом і консеквентом звучить парадоксально. Незвичний вираз *Якщо пальми ростуть на полюсі, то крокодили літають* визнається істинним, згідно із таблицею істинності для імплікації. Ця незвичність (ще раз підкреслимо) обумовлена тим, що в природній мові, користуючись імплікацією, ми намагаємося передати певний смисловий зв'язок між антецедентом і консеквентом, а в логіці фіксується той факт, що імплікація хибна тільки при істинності антецедента та хибності консеквента.

Користуючись засобами природної мови, за допомогою сполучника *якщо*, то ми відображаємо різні смислові зв'язки між антецедентом і консеквентом. Ці зв'язки можуть бути таких видів:

а) *причинний* (напр., *Якщо через провідник пропустити електричний струм, то він збільшиться*). У цьому висловлюванні відображено те, що певна дія (проходження електричного струму провідником) є причиною збільшення провідника. При цьому перше має передувати другому;

б) *зв'язок, який вказує, що знання про один факт є логічною підставою для ствердження знання про другий факт* (напр., *Якщо ртуть у термометрі піднялася, то в кімнаті потеплішало*). Тут ми маємо справу вже не з причинним зв'язком, оскільки підйом ртуті у термометрі не спричиняє потепління в кімнаті;

в) *зв'язок, який висуває один факт як умову для виникнення або існування іншого факту* (напр., *Якщо я успішно складу сесію, то я поїду в закордонну мандрівку*). У цьому висловлюванні антецедент є обов'язковою умовою появи факту, що фіксує консеквент;

г) *зв'язок, який відображає часову послідовність подій* (напр., *Якщо сьогодні я закінчу писати статтю, то завтра віддам її на рецензію*). Це висловлювання фіксує часову (а не причинну) послідовність фактів, зафіксованих, в антецеденті та консеквенті, відповідно.

Очевидно, що у кожному із цих висловлювань сполучник *якщо*, то має свою специфіку. У логіці ця специфіка відходить на другий план. Використовуючи імплікацію, ми, по суті, абстрагуємося від смислових відтінків сполучника *якщо*, то, до яких звикли та які досить ефективно використовуємо в процесі спілкування. Цим ми досягаємо більшої точності у передаванні інформації, але, зрозуміло, вимушені жертвувати змістом.

Із наведених висловлювань можна зробити висновок, що будь-яке істинне умовне висловлювання фіксується істинною імплікацією, але не будь-яка істинна імплікація є виявом умовного висловлювання у звичайному смислі.

Аналіз імплікації передбачає визначення понять *достатня підстава*, *необхідна підстава*. Ці поняття досить широко використовують в науці, тому необхідно дати їх чіткі визначення.

Достатньою називають підставу, наявність якої обов'язково спричиняє певний наслідок.

За відсутності підстави наслідок може настати, а може й не настати. Наприклад, *Якщо був дощ, то дахи будинків мокрі*. Тут антецедент фіксує достатню підставу, але не необхідну, оскільки без дощу дахи будинків можуть бути як мокрими, так і сухими. Причиною наслідку, що зафіксований у консеквентні, може бути дощ, туман, мокрий сніг тощо. Отже, стверджувати, що *A* є достатньою підставою для *B* рівнозначно твердженню: *якщо має місце A, то обов'язково матиме місце B*. Буквально це фіксується в імплікації $A \supset B$.

Необхідною є підстава,

відсутність якої зумовлює відсутність конкретного явища.

Наявність цієї підстави не означає обов'язкову появу наслідку (наслідок може бути, а може й не бути).

Звернемося до згаданого вже висловлювання, але залишимо його в такому вигляді: *Якщо дахи будинків мокрі, то був дощ*. У цьому висловлюванні антецедент виражає необхідну, але не достатню умову. Це означає, що за наявності умови, яку фіксує антецедент, наслідок може настати, а може й не настати (дахи будинків можуть бути мокрі й від дощу, і від снігу). Тільки коли відсутня умова – буде відсутній і наслідок (коли дахи будинків сухі, то й не було дощу).

Отже, коли говорять, що *B* є необхідною, але не достатньою підставою для *A*, то це буквально відповідає висловлюванню *B*, тільки якщо *A*. Іншими словами, якщо достатню підставу виражають через імплікацію (*Якщо був дощ, то дахи будинків мокрі*, або $A \supset B$), то необхідна підстава фіксується конверсією,⁶ а твердження достатньої підстави (*Якщо дахи будинків мокрі, то був дощ*, або $B \rightarrow A$). У природній мові, щоб висловити необхідну підставу, часто застосовують зворот *тільки якщо*. Наприклад, *Тільки якщо контакт замкнений, лампочка горить*; *Тільки якщо він депутат, то він може бути обраний головою комісії Верховної Ради*. Таким чином, лише з'ясувавши логічну структуру висловлювань, можна визначити, яке із них виражає достатню підставу, а яке – необхідну. Природна мова таких критеріїв не має й не може мати.

⁶ Конверсією імплікації $A \supset B$ (або оберненою імплікацією) називають висловлювання, в якому антецедентом є консеквент вихідної імплікації, а консеквентом – антецедент вихідної імплікації: $B \rightarrow A$.

Цей висновок значною мірою характеризує природу наступного логічного терміна – еквіваленції.

Еквіваленція (або подвійна імплікація) висловлювань A та B – це складне висловлювання, яке буде істинним тоді й тоді, коли A та B одночасно істинні або одночасно хибні. В інших випадках еквіваленція буде хибною.

Еквіваленцію позначають символами:

$$\leftrightarrow, \equiv, \boxplus: (A \leftrightarrow B, A \equiv B, A \boxplus B).$$

У природній мові аналогами еквіваленції є вирази: A тоді й тільки тоді, коли B ; A , якщо B , і B , якщо A ; Для A достатньо та необхідно B ; A матеріально еквівалентно B .

Наведеному визначенню еквіваленції відповідає таблиця істинності. Ця таблиця відрізняється від таблиці істинності для імплікації третім рядком, а від таблиці істинності для конверсії імплікації – другим.

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	x	x
x	i	x
x	x	i

Оскільки імплікація виражає відношення між достатньою умовою та її наслідком, а конверсія імплікації – між необхідною умовою та її наслідком, то еквіваленція або подвійна імплікація виражає відношення між достатньою та необхідною умовою та її наслідком. Наприклад, *Якщо він знає англійську мову, то він перекладе цей текст; Якщо геометрична фігура квадрат, то її діагоналі діляться навпіл*. Як у матеріальній імплікації сполучник *якщо*, то не виражає смислового зв'язку між антецедентом і консеквентом, так і в еквіваленції сполучник *якщо й тільки якщо* не виражає змістовно зв'язку між лівою та правою частинами еквівалентності. Він виражає лише відношення між їх істинними значеннями (*істина, хиба*). Ця особливість еквіваленції відіграє важливу роль для операцій із символами у логічних численнях.

Знання логічної еквіваленції дає можливість:

- спростити запис послідовності висловлювань;*
- перейти від одного висловлювання до логічно еквівалентного йому (тобто із тим самим істинним значенням);*
- замінити у послідовності формул одні формули на інші.*

Аналіз логічних зв'язок як однієї із підмножин множини логічних термінів характеризує головні типи логічних відношень, без яких неможливо збагнути підвалини логіки висловлювань і логіки предикатів.

Крім логічних зв'язок, серед логічних термінів виділяють логічні оператори, до яких належать квантори та описові вирази або оператори дескрипції. Розрізняють два види кванторів:

- квантор загальності;
- квантор існування.

Слово квантор походить від латинського *quantum* – скільки. За допомогою кванторів виявляють відношення між предметною областю та предикатами, які визначені для неї.

Для позначення квантора загальності застосовують символи: $\forall x$, (x) , (Ax) , x , x , x . Читається знак квантора $\forall x$ так: для будь-якого x . У природній мові аналогами квантора загальності є слова: усі, кожний, будь-який тощо. Квантор загальності ставиться при загальних судженнях. Наприклад, судження *Будь-яка планета є космічним тілом* можна записати, використовуючи квантор загальності, у такому вигляді:

$$\forall x(S(x) \supset P(x)).$$

Для будь-якого x , якщо x – планета, то x є космічним тілом.

Такий запис свідчить, що це судження буде істинним для будь-якого x , визначеного на предметній області S , і хибним – у протилежному випадку. Таким чином, якщо ми на місце x поставимо назву будь-якої планети, то отримаємо істинне судження. Саме цей факт фіксується формулою

$$\forall x(S(x) \supset P(x)).$$

Тому $\forall x$ розглядають як узагальнення кон'юнкції із нескінченною кількістю кон'юнктив:

$$(S(a) \supset P(a)) \wedge (S(b) \supset P(b)) \wedge (S(c) \supset P(c)),$$

де a , b , c (у нашому прикладі) – назви планет: Земля, Марс, Венера тощо.

Квантор існування в логіці позначають символами:

$$\exists x, x, x, x$$

Існує такий x , що...

У природній мові аналогами квантора існування є вирази: деякі, існує, іноді, кілька тощо.

Квантор існування приписують частковим судженням. Наприклад, судження *Деякі планети мають атмосферу* за допомогою $\exists x$ квантора можна записати формулою:

$$\exists x(S(x) \wedge P(x)),$$

Існує такий x , який є планетою та має атмосферу.

Вираз $\exists x(S(x) \wedge P(x))$ указує на те, що це судження буде істинним при підстановці замість x принаймні одного предмета із предметної області S , і хибним – навпаки. А це означає, що квантор існування можна тлумачити як узагальнення диз'юнкції із нескінченною диз'юнкцією її членів:

$$(S(a) \wedge P(a)) \vee (S(b) \wedge P(b)) \vee (S(c) \wedge P(c)) \dots,$$

де a, b, c – назви конкретних планет (щодо нашого прикладу).

Ось так можна охарактеризувати квантор загальності та квантор існування. Що ж стосується ще двох логічних операторів, а саме операторів дескрипції, то про них ітиметься далі.

Розгляд логічних і дескриптивних термінів робить очевидним факт, що логічні терміни фіксують той бік смислу висловлювання, який виражає логічну форму відповідного судження. Щоб з'ясувати логічну форму судження та логічну структуру висловлювання, треба замінити всі дескриптивні терміни змінними символами відповідних категорій. Наприклад, маємо висловлювання: *Будь-яка теорія має логічне обґрунтування*. Випишемо дескриптивні терміни за допомогою символів: x, S, P . Отримаємо вираз:

$$\forall x(S(x) \supset P(x)),$$

який представляє логічну форму даного висловлювання. А оскільки відомо, що процес отримання одних висловлювань з інших (що й є головним інтересом логіки) визначається їх логічною формою, то цей бік смислу висловлювання називають його дедуктивним змістом.

Таким чином, головна функція логічних термінів – визначення дедуктивного змісту висловлювань.

1.3. Функціональний аналіз у логіці

1.3.1. Мотивація функціонального аналізу в логіці

Завершуючи розгляд питань, пов'язаних із семантичним аналізом виразів природної мови, зупинимось на застосуванні функціонального аналізу в логіці.

Початок запровадження функціонального аналізу в логіці поклав Готлоб Фреге. Він піддав ревізії трактування логічної структури судження. Фреге звернув увагу на те, що виділення у судженні того, *про що говориться* (S), і того, що *про що говориться* (P), має суто лінгвістичний характер і до логіки має віддалене відношення. Звернімося до прикладу:

1. *Герцог Веллінгтон завдав поразки Наполеону під Ватерлоо.*
2. *Наполеона було розбито герцогом Веллінгтоном під Ватерлоо.*

Ці судження мають різні суб'єкти та предикати. Якщо у першому судженні суб'єктом є поняття *герцог Веллінгтон*, а предикатом – *переможець*, то в другому судженні суб'єктом є *Наполеон*, а предикатом – *переможений*. При цьому значення цих суджень залишається тим самим – *істина*. Це й дає підставу Фреге розглядати суб'єктно-предикатну структуру судження як лінгвістичний феномен, а не логічний.

Визначаючи просте судження, ми зазначаємо, що це таке судження, яке не має самостійних, автономних частин, тобто неділиме, атомарне. Візьмемо судження

S	P
Планета є космічний об'єкт.	

Вилучимо із нього предикат P та отримаємо фрагмент незакінченої думки: *Планета є...*. Візьмемо ситуацію, за якої із судження вилучено зв'язку: *Планета, космічний об'єкт*. Маємо перелік понять. Вилучимо із судження суб'єкт: *... є космічний об'єкт (...P)*, тобто маємо предикат. Судження, як закінчена думка, зникло, але є схема судження, бланк судження. Якщо на пропу-

щене місце підставити назву якогось предмету, то ми отримаємо судження істинне або хибне.

Додаючи до залишеного предикату ім'я *Венера*, матимемо істинне судження *Венера – космічний об'єкт*, а підставивши до отриманого виразу замість пропусків ім'я *Мідь*, матимемо хибне судження: *Мідь – космічний об'єкт*. Отже, вираз "... *P*" більш адекватно передає логічну структуру судження, ніж схема

$$S \left| \begin{array}{c} \epsilon \\ \text{не } \epsilon \end{array} \right| P.$$

Тоді *S* і *P* слід замінити, на думку Фреге, відповідно поняттями *аргумент* та *функція*.

Відмовившись від суб'єктно-предикатної структури, Фреге залишає термін *предикат*. Але тепер термін *предикат* має новий смисловий зміст, який передає поняття *пропозиційної функції*.

Відомо, що під функцією в математиці розуміють певний закон, за допомогою якого встановлюється відповідність між довільними об'єктами, одні з яких називають значеннями аргументу, а інші – значеннями функції.

Пропозиційною або висловлювальною функцією є операція або дія, яка співвідносить об'єктам деякої предметної області конкретні висловлювання у вигляді логічних об'єктів *істина*, *хиба*.

Предикат ...*P* (або якщо на місця пропусків поставимо букву (*x*)), то матимемо вираз *P(x)* є одним із видів пропозиційної функції. Прикладами такої функції є вирази:

1. *x* – геніальний філософ;
2. *x* більше *y*,

де *x* та *y* – аргументи, предметні змінні, на місце яких ми можемо підставляти імена конкретних об'єктів із відповідних предметних областей.

Якщо взяти за предметну область множину людей (тобто вони можуть бути значеннями аргументу (*x*)), то, підставивши до першої пропозиційної функції замість (*x*) імена *Платон*, *Кант*, отримаємо істину (значенням функції буде *істина*), а підставивши імена *Архімед*, *Ньютон*, отримаємо хибу (значенням функції буде *хиба*).

За допомогою символів пропозиційну функцію записують у вигляді формул:

$$P(x), R(x, y),$$

де x, y – предметні змінні, а P і R – фіксовані змінні (конкретно визначені за змістом), властивості та відношення, відповідно.

Із погляду функціонального підходу до логічного аналізу природної мови всі слова звичайної мови можна поділити на чотири групи:

а) слова, які можуть бути аргументами функцій (ті, які можна підставляти замість змінних x, y, z тощо) у виразах

$$P(x), R(x, y, z), Q(y);$$

б) слова, що виконують роль пропозиційних функцій;

в) слова, які виконують роль логічних зв'язків та операцій (логічні постійні або логічні константи).

До слів, які можуть бути аргументами функцій, належать власні імена (Варшава, Арістотель, Дніпро) та кількісні числівники (два, п'ять, сім).

До слів, які виконують роль пропозиційних функцій, належать іменники (держава, батько, планета), прикметники (вчасний, розчинний, білий), порядкові числівники (другий, п'ятий), дієслова (читає, допомагає).

Здатність цих слів виконувати роль пропозиційних функцій обумовлена тим, що, оперуючи ними, ми співвідносимо їх з індивідуумами із конкретних предметних областей, а результат такого співвідношення оцінюємо або як істинний або як хибний. Іншими словами, за допомогою цих слів ми встановлюємо відповідність між предметами деякої предметної області й такими логічними об'єктами, як істина та хиба.

Ураховуючи сказане, названі слова можна зобразити у вигляді таких виразів: x – планета, x – батько – y , x – розчинний, x – другий, x – читає, x – допомагає у тощо (тобто ці слова виконують роль пропозиційних функцій з однією або кількома змінними).

До слів, які виконують роль логічних зв'язків та операцій, належать слова: *є, якщо, то, і, або, будь-який, деякий, неправильно тощо*.

Нарешті, слова *зріст, вага, маса, професія, вік тощо* є носіями предметних функцій.

1.3.2. Види функцій

Усю множину функцій поділяють на *логічні* та *предметні*. Логічні – у свою чергу поділяють на *пропозиційні* та *понятійні*. Серед пропозиційних виділяють наступні види:

- а) *предикати*;
- б) *квантори*;
- в) *логічні сполучники*.

Схематично це можна зобразити наступним чином:

Функції	
логічні	предметні
пропозиційна	понятійна

Названі види пропозиційних функцій мають однакові значення (висловлювання або пропозицію), але аргументи у кожного виду різні.

Із наступної таблиці видно, що всі пропозиційні функції єдині за значенням, але відрізняються за аргументами. Це свідчить про те, що:

■ по-перше, якщо в традиційній логіці центральними категоріями є *поняття*, *судження*, *умовивід* як форми мислення, то в сучасній логіці центральними категоріями є *аргумент* і *пропозиційна функція*;

■ по-друге, поділ пропозиційної функції на види показує відмінність *логіки висловлювань* від *логіки предикатів* та одночасно демонструє їх органічну єдність.

Крім пропозиційної функції до логічних функцій також належить *понятійна функція*. Уже із самої назви зрозуміло, що значенням цієї функції є поняття, а аргументами – одиничні висловлювання, суб'єктами яких є предмети, узагальнені в даному понятті. Мовою символів понятійну функцію можна записати у вигляді виразу:

$$xS(x),$$

де $S(x)$ – предикат, який виражає зміст поняття (символ S уживаємо для того, щоб показати, що тут предикатор виконує роль логічного предмету), а x – змінна, специфікована предикатом $S(x)$.

Аргумент	Функція	Значення
x	$f(x)$	y
терм	предикат	одиничне висловлювання
$\{a, b, c, \dots\}$	$P(x), R(x, y)$	$P(a), P(b), \dots; R(a, b), R(a, c) \dots$
{Сократ, Платон, Діоген}	Бути давньогрецьким філософом Бути сучасником	Сократ – давньогрецький філософ Платон – давньогрецький філософ Сократ – сучасник Платона
предикат	квантор	загальне висловлювання, часткове висловлювання
$P(x), R(x, y)$	$\forall x, \exists x$	$\forall x P(x), \exists x P(x),$ $\forall x \exists x R(x, y)$ $\forall x \forall y R(x, y)$ $\exists x \exists y R(x, y)$
Бути давньогрецьким філософом Бути сучасником	Будь-який Деякі	Усі люди є давньогрецькими філософами Деякі люди є давньогрецькими філософами Будь-яка людина є сучасником якогось наукового відкриття
прості висловлювання	пропозиційні зв'язки	складні висловлювання
$\{p, q, r, s, \dots\}$	$\wedge, \vee, \supset, >, \perp$	$p \wedge q, p \vee q, p \supset q, p \perp q, p \wedge q \dots$
"Ідея – форма пізнання" "Теорія – форма пізнання"	і; або; якщо, то; якщо й тільки якщо; невірно, що	Ідея і теорія форми пізнання

Схематично понятійну функцію можна розписати наступним чином:

Аргумент	Функція	Значення
одиничні істинні висловлювання	понятійна функція	терми
$\{S(a), S(b), \dots S(n)\}$	$xS(x)$	$\{a, b, c, \dots n\}$
{Київ – столиця, Варшава – столиця, Париж – столиця}	Предмет, який має ознаку бути столичним містом	{Київ, Варшава, Париж...}

Зі схеми видно, що аргументами понятійної функції є істинні одиничні висловлювання $S(a), S(b) \dots S(n)$, а значенням – область істинності предиката $S(x)$.

Отже, область істинності предиката є не чим іншим як об'ємом поняття $\{a, b, \dots, n\}$. Оскільки ми моделюємо об'єм поняття засобами теорії множин, то це дає нам право записати об'єм поняття наступним чином:

$WxS(x)$, де W – перевернуте M – оператор утворення множини.

Відповідно синтаксис поняття можна зафіксувати так:

$xS(x)$ – предмет думки в понятті;

$S(x)$ – зміст поняття;

$WxS(x)$ – об'єм поняття.

Що стосується предметних функцій, то їх аргументами та значеннями є терми. Іншими словами, це функції, які із предметів породжують предмети. У математиці це – операції додавання, множення, піднесення до степеня тощо.

У природній мові роль предметних функцій виконують слова *зріст, вага, маса, професія*.

Наприклад, візьмемо слово *зріст* і використаємо його як предметну функцію $zріст\ x$. За область визначення функції візьмемо множину людей. Тоді кожний результат застосування цієї функції матиме вигляд: $zріст\ a$, де a – ім'я конкретної людини, значенням же цієї функції буде множина всіх іменованих чисел, які можуть характеризувати зріст людини.

Зважаючи на сказане щодо всіх видів функцій, які застосовуються у логіці, можемо наочно переконатися, що функціональний підхід справді дає можливість більш тонко підійти до логічного аналізу природної мови, ніж це було у межах традиційної логіки.

Для прикладу візьмемо слово *планета*. Поза контекстом висловлювання не можна однозначно визначити його логічну форму. Використаємо це слово у структурі висловлювання:

1. Планета – космічний об'єкт.
2. Планета – слово, що складається із семи букв.
3. Земля – планета.

У цих висловлюваннях одне й те саме слово *планета* має різні логічні статуси. У першому висловлюванні воно виконує *понятійну функцію*, у другому – *предметну*, у третьому – *пропозиційну*.

Підсумовуючи сказане щодо логічного аналізу мови, треба підкреслити, що мета цього аналізу – насамперед розкрити мову як засіб пізнання, показати, що головні категорії мовних виразів відіграють важливу роль не тільки у комунікативних процесах, а й у процесі мислення, а функціональний підхід до аналізу мовних виразів дає можливість чіткіше визначити, носіями яких логічних форм є ті чи інші фрагменти мови.

Запитання для самоконтролю

1. Яку множину називають універсальною?
2. Яку підмножину називають *власною*, а яку – *невласною*?
3. Який об'єкт може бути *елементом множини*?
4. Опишіть відношення *належності* та *відношення включення*.
5. Які множини називають еквівалентними?
6. Які існують способи задання множини?
7. Яку ознаку називають *характеристичною*?
8. Як пов'язані операції над множинами?
9. Зміст понять *відображення*, *образ*, *прообраз*.
10. Як знайти всі підмножини довільної множини?
11. Дефініція семантичної категорії.
12. Типологія дескриптивних термінів.
13. Терм як семантична категорія.
14. Характеристика предикатора як семантичної категорії.
15. Типологія логічних термінів.
16. Особливості функціонального аналізу в логіці.
17. Види пропозиційних функцій.
18. Порівняльна характеристика логічних функцій.
19. Понятійна функція.
20. Характеристики предметної функції.

Розділ 2

ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Класична логіка – це розділ сучасної логіки, що базується на принципі двозначності, відповідно до якого будь-яке висловлювання є або істинним, або хибним.

Логіка висловлювань – перша частина класичної логіки, яка є порівняно простою логічною теорією. Вона посідає особливе місце серед інших логічних систем, оскільки її концепції і методи враховуються, використовуються і розвиваються у більш багатіших і складніших теоріях.

Центральною категорією класичної логіки є висловлювання.

Висловлювання –

це ім'я множини розповідних речень,
зміст яких можна оцінити як істинний або хибний.

У логіці висловлювань не аналізується внутрішня структура простого висловлювання, у ній відволікаються від смислового змісту висловлювання. Висловлювання порівнюються лише за значеннями (істина, хиба). Тому серед завдань, які вирішує логіка висловлювань, головними є два:

- а) яким чином із простих висловлювань утворюються складні?
- б) як залежить значення складного висловлювання від значень простих висловлювань, що входять до його складу?

Логіку висловлювань (або пропозиційну логіку)

можна визначити як логічну теорію,
мова якої складається із одного типу нелогічних символів
– пропозиційних змінних, а також одного типу логічних символів –
пропозиційних зв'язок.

Логіка висловлювань включає *алгебру* (або, як іноді її називають, морфологічну побудову логіки висловлювань) та *числення*. Саме у такій послідовності й буде здійснений виклад логіки висловлювань.

2.1. Алгебра логіки висловлювань

Алгебра логіки висловлювань
досліджує операції над висловлюваннями,
які мають лише одну ознаку – істиннісне значення.

Це дає змогу ототожнювати всі істинні висловлювання та всі хибні, абстрагуючись від їхнього змісту. Завдяки тотожностям, які відіграють тут роль законів, здійснюються різноманітні перетворення висловлювань.

При викладі алгебри логіки висловлювань увагу буде зосереджено на підвалинах її побудови та завданнях, які вона вирішує своїми засобами.

2.1.1. Мова алгебраїчної системи логіки висловлювань

Мова алгебраїчної системи логіки висловлювань, або мова морфологічної системи логіки висловлювань є своєрідною формально логічною теорією (ФЛТ). Структура мови логіки висловлювань складається із двох компонентів: *об'єкт-мови* (OL) та *метамови* (ML).

Об'єкт-мова –

це сукупність правильно побудованих формул⁷ (ППФ), в яких фіксується, відображається, кодується певний фрагмент наукової теорії або контексту природної мови.

Метамова –

це мова, засобами якої досліджують та описують властивості об'єктної мови.

Метамова має задовольняти таким вимогам:

а) наявність засобів для опису синтаксичних властивостей об'єктної мови – засобів для побудови виразів OL;

б) вона має бути достатньою з погляду виразних можливостей настільки, щоб для кожного виразу OL у ній існувала формула, яка була б перекладом цього виразу;

в) логічний словник має бути (у крайньому випадку) настільки ж багатим, як і словник OL;

г) в ML мають бути додаткові змінні (метазмінні), які належать до більш високого типу, ніж змінні OL.

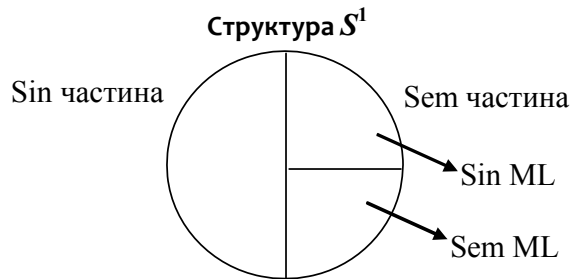
⁷ Вирази об'єкт-мови називають формулами, оскільки вони відрізняються одне від одного лише за формою.

OL і ML називають відповідно синтаксичною частиною формально логічної теорії (Sin ч.ФЛТ) і семантичною частиною формально логічної теорії (Sem ч. ФЛТ).

ML складається із синтаксису (Sin ML) і семантики (Sem ML).

Мову алгебраїчної системи логіки висловлювань як певну формально логічну теорію позначають символом S^1 . Sin ML у S^1 представлено правилами утворення (ПУ), які включають алфавіт і визначення правильно побудованих формул (Df – ППФ).

Sem ML в S^1 представлена правилами інтерпретації (ПІ), що містять правила для пропозиційних змінних і пропозиційних зв'язок.



Виходячи зі структури S^1 , більш аргументовано пояснимо, чому S^1 називають алгеброю або морфологічною системою.

Загалом алгебру можна визначити як непорожню множину об'єктів із визначеними на них операціями. Стосовно нашої ситуації такими об'єктами є *пропозиційні змінні*, а операціями – *пропозиційні зв'язки*⁸.

Характерною особливістю S^1 є те, що Sin ML має лише один вид правил – *правила утворення*. Це зумовлює те, що в S^1 формули розглядають в статичному варіанті, де не досліджують перехід від одних формул до інших, тобто не досліджують процес доведення.

Отже, завдання, які розв'язуються засобами S^1 :

- 1) типологія ППФ на синтаксичному рівні;
- 2) типологія ППФ на семантичному рівні;
- 3) систематичний огляд логічних законів;
- 4) визначення відношення логічного слідування;
- 5) систематичний аналіз логічних відношень.

⁸ Тут ідеться про словесну, вербальну подібність S^1 з алгеброю як відповідним розділом математичної науки.

Тепер перейдемо до побудови мови системи S^1 . Перш за все потрібно описати (задати) алфавіт.

Алфавіт –

це сукупність вихідних символів даної формалізованої мови.

Алфавіт S^1 містить *нелогічні, логічні та технічні символи*.

Розглянемо послідовно кожну складову частину алфавіту мови логіки висловлювань.

Нелогічними символами

є множина пропозиційних змінних: $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots$.

Пропозиційні змінні використовують для позначення простих висловлювань природної мови. Іншими словами, пропозиційні змінні – p, q, r, s тощо використовують як заміники простих висловлювань при виявленні логічних форм контекстів природної мови. Наприклад, пропозиційна змінна p може позначати множину конкретних простих висловлювань типу: Місяць – природний супутник; Усі планети – космічні об'єкти; 7 є простим числом; Книга є джерелом інформації тощо.

Логічними символами

у системі S^1 є істиннісно-пропозиційні зв'язки:

$\neg$	– заперечення;
$\wedge$	– кон'юнкція;
$\vee$	– слабка диз'юнкція;
$\underline{\vee}$	– сильна диз'юнкція;
$\supset$	– (матеріальна) імплікація;
$\equiv$	– (матеріальна) еквіваленція.

До технічних символів

у системі S^1 належать ліва та права дужки.

Переліком вихідних символів завершується побудова алфавіту системи S^1 .

Наступним етапом у побудові S^1 є задання дефініції ППФ, яка належить до індуктивних визначень:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є формулою.
2. Якщо A – формула, то

$\neg A$

не- A або невірно, що A – також формула.

3. Якщо A та B – довільні формули, то

$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \underline{\vee} B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
A та B	A або B	або A , або B	якщо A , то B	A тоді й тільки тоді, коли B – також формули

4. Жодні інші вирази, крім указаних у пунктах 1, 2, 3, не є формулами класичної логіки висловлювань.

Зауважимо, що латинські літери A та B , які застосовують у дефініції формули, належать не до OL, а до ML в S^1 . Іншими словами, вони належать тій мові, якою ми говоримо про вирази OL у системі S^1 , і служать для позначення довільних формул із OL. На відміну від літер $p, q, r, s \dots$, що є пропозиційними змінними, їх називають *мета*змінними або *металітерами*.

Отже, вирази, які мають металітери: $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \supset B, A \equiv B, A \underline{\vee} B$ – не формули, а схеми формул певного вигляду. Наприклад, вираз $A \wedge B$ може представляти нескінченну множину формул OL в S^1 , які мають вигляд:

$$\begin{aligned} &(p \wedge q), \\ &(p \supset q) \wedge \neg q, \\ &[(p \equiv q) \vee s] \wedge (\neg p \vee \neg q) \text{ тощо,} \end{aligned}$$

а вираз $B \supset B$ буде схемою для формул $(p \supset p)$,

$$\begin{aligned} &[(p \equiv r) \wedge \neg r] \supset [(p \equiv r) \wedge \neg r], \\ &[(p \supset q) \vee s] \supset \sim [(p \supset q) \vee s] \text{ тощо.} \end{aligned}$$

Надалі застосовуватимемо вираз формула $A \wedge B$, розуміючи, що за цим виразом стоїть будь-яка формула OL відповідного вигляду, а не запис $A \vee B$, який є схемою формул.

Дефініція формули в S^1 дозволяє визначити, чи є будь-яка послідовність знаків алфавіту формулою. Наприклад, послідовність знаків $((p \supset q) \vee \neg r) \equiv (p \supset q)$ є формулою, адже вона побудована відповідно до пунктів 1-3 дефініції формули. Наприклад, пропозиційні змінні є формулами, згідно із пунктом 1, вираз $\sim r$ є формулою, згідно із пунктом 2.

Якщо як A взяти вираз $((p \supset q) \vee \neg r)$, а як B – вираз $(p \supset q)$, то весь вираз є формулою, згідно із пунктом 3.

Якщо ж ми візьмемо послідовності знаків:

$$p \vee); p \supset r (; \neg \supset r (q \neg \text{ тощо,}$$

то вони не будуть формулами у S^1 , відповідно до дефініції формули цієї системи.

2.1.2. Типологія формул за синтаксичними ознаками

За синтаксичними ознаками формули в S^1 поділяють на елементарні (атомарні) та складні (молекулярні).

Елементарною або атомарною
називають таку формулу пропозиційної логіки,
яка не має самостійних частин.

Це формули, відповідні пункту 1 наведеної дефініції: $p, q, r, s \dots$.

Складними або молекулярними
називають формули, які складаються із двох
або більше елементарних формул,
з'єднаних логічними зв'язками.

Наприклад, формули: $p \wedge q$; $(p \supset q) \vee r$; $(p \vee q) \equiv (r \wedge s)$ тощо. Іншими словами, складними формулами в S^1 є вирази, які відповідають пунктам 2 і 3 дефініції формули.

Будь-яка частина формули є *підформулою*. Візьмемо для прикладу формулу: $((p \equiv \neg r) \supset q) \vee (r \wedge s)$. Підформули цієї формули:

- 1) *пропозиційні змінні* – $p, q, r, s \dots$;
- 2) *формули* – $\neg r$; $(p \equiv \neg r)$; $(p \equiv \neg r) \supset q$; $r \wedge s$;
- 3) *уся формула* – $((p \equiv \neg r) \supset q) \vee (r \wedge s)$.

Підформули A та B у формулі $A \wedge B$ називають *кон'юнктами* або *кон'юнктивними членами*, у формулі $A \vee B$ – *диз'юнктами* або *диз'юнктивними членами*, а у формулі $A \supset B$ підформулу A називають *антецедентом*, а підформулу B – *консеквентом*.

Ступенем формули в S^1 називають кількість логічних термінів, що входять до складу формули. Наприклад,

$((p \supset \neg q) \wedge r) \equiv s$ є формулою *четвертого ступеня*.

$A(p \vee \neg q) \wedge r$ має *третій ступінь*,

оскільки тут наявні три пропозиційні зв'язки: $\neg, \vee, \wedge$.

Головним логічним знаком у S^1 називають логічний термін, який застосовують останнім при побудові формули.

У формулі $\sim p$ головним логічним знаком є *заперечення* (позначають символом $\neg$, або $\neg$, або $\sim$). У формулі $(\neg p \equiv (q \supset p))$

головним логічним знаком буде еквіваленція ($\equiv$), у формулі $((\neg p \supset r) \wedge q)$ – кон'юнкція ($\wedge$), у формулі $\neg [(p \wedge r) \supset (p \vee q)]$ – заперечення тощо.

Для компактності запису формул необхідно прийняти угоду про опускавання дужок. Якщо першим знаком формули є ліва, а останнім – права дужка, то цю пару опускають. Наприклад, маємо формулу $((p \supset q) \vee \neg r)$. Відповідно до даної умови її можна записати як $(p \supset q) \vee \neg r$.

Розташування дужок у формулі має принципове значення. Застосування лівої і правої дужок дає можливість визначити область дії кожної пропозиційної зв'язки. Наприклад, область дії зв'язки $\supset$ у формулі $A \supset (B \vee \neg C)$ є формули A та $B \vee \neg C$, а у формулі $(A \supset B) \vee \neg A$ – формули A та B .

При розташуванні дужок необхідно враховувати ступінь сили пропозиційної зв'язки. За ступенем зростання сили пропозиційної зв'язки вони розподіляються у такій послідовності: $\equiv$, $\supset$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Отже, найсильнішою пропозиційною зв'язкою є заперечення $\neg$. Виходячи із цього, спочатку виконують дію, що вказана сильнішою зв'язкою. Наприклад, у формулі

$$A \equiv B \wedge C \supset B$$

за допомогою дужок указують порядок виконання дій

$$A \equiv ((B \wedge C) \supset B).$$

Цей запис показує, що першу дію здійснюють над $\wedge$, другу – над $\supset$, і третю – над $\equiv$.

А якщо потрібен інший порядок дій, то змінюють розташування дужок. Візьмемо ту саму формулу, але змінимо порядок дій

$$((A \equiv B) \wedge C) \supset B.$$

У цьому випадку першу дію необхідно виконати над $\equiv$, другу над $\wedge$, і третю над $\supset$.

Якщо у формулі наявні лише кілька імплікацій, то приймають групування дужок ліворуч:

$$A \supset B \supset C \in (A \supset B) \supset C.$$

Для виконання групування дужок праворуч застосовують крапку після відповідного знака імплікації

$$A \supset B \supset C \in A \supset (B \supset C).$$

Прийняттям цих угод завершується побудова словника у системі S^1 .

Розглянемо, як можна виразити логічну форму висловлювань природної мови засобами словника системи S^1 . Для прикладу візьмемо конкретне висловлювання: *Якщо студент здібний, але не старанний, то він може мати посередні результати на сесії або високі.*

Для виявлення логічної форми конкретного висловлювання засобами словника системи S^1 необхідно здійснити такі дії:

1) *виписати всі прості висловлювання, що входять до складу складного;*

2) *кожному простому висловлюванню поставити у відповідність конкретну пропозиційну змінну;*

3) *виділити логічні терміни, що входять до складу складного висловлювання;*

4) *установити порядок і спосіб поєднання простих висловлювань у складне за допомогою логічних сполучників.*

Прокоментуємо кожну дію окремо.

I. Наведене складне висловлювання складається із чотирьох простих висловлювань:

1. Студент – здібний.
2. Студент – старанний.
3. Студент має посередні результати на сесії.
4. Студент має високі результати на сесії.

II. Кожному виділеному простому висловлюванню ставимо у відповідність окрему пропозиційну змінну: першому – p ; другому – q ; третьому – r ; четвертому – s .

III. Виділяємо логічні терміни, що поєднують прості висловлювання у складі складного висловлювання: виразу *але* відповідає – $\wedge$; виразу *не* – $\neg$; виразу *або* – $\vee$; виразу *якщо, то* – $\supset$.

IV. Необхідно виділити головний логічний сполучник. Тільки після цього можна встановити порядок поєднання простих висловлювань у складне.

У нашому прикладі *головним логічним сполучником* є $\supset$. Тому логічною формою цього складного висловлювання буде імплікативна формула.

Антецедентом буде кон'юнктивна формула, де кон'юнктами будуть p і заперечення $\neg q$, а *консеквентом* – диз'юнктивна формула із диз'юнктами r і s . Записують це як $(p \wedge \neg q) \supset (r \vee s)$.

У цілому логічною формою даного висловлювання формула

$$(p \wedge \neg q) \supset (r \vee s).$$

У такий спосіб можна записати логічну форму будь-якого складного висловлювання природної мови.

У літературі іноді зустрічається мова S^1 , де не використовують дужки. Ідеться про бездужкову логічну мову, запропоновану Яном Лукасевичем. Розглянемо послідовно складові словника цієї мови.

Алфавіт:

- *множина нелогічних символів*: $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots$
- *логічні терміни*: N (заперечення), K (кон'юнкція), A (диз'юнкція), C (імплікація), E (еквіваленція), I (строга диз'юнкція).

Дефініція формули:

- 1) пропозиційна змінна є формулою;
- 2) якщо α – формула, то $N\alpha$ – також формула;
- 3) якщо α та β – формули⁹, то $K\alpha\beta$, $A\alpha\beta$, $C\alpha\beta$, $E\alpha\beta$ та $I\alpha\beta$ – формули;
- 4) ніщо, крім переліченого у пунктах 1-3, не є формулами.

Якщо ми маємо формулу $((\neg p \equiv q) \supset (p \vee (r \wedge \neg s)))$, то засобами даної мови її можна записати – $CENpqApKrNs$. Цей запис був застосований Лукасевичем при дослідженні аристотелівської силогістики.

Отже, ми розглянули *синтаксис* метамови S^1 (Sin ML).

Тепер проаналізуємо *семантику* метамови в S^1 (Sem ML).

2.1.3. Види формул за семантичними ознаками

При характеристиці структури системи S^1 зазначалося, що семантика метамови S^1 представлена *правилами інтерпретації*. Термін *інтерпретація* походить від латинського слова *interpretatio* – *роз'яснення, тлумачення*.

У логіці під інтерпретацією розуміють приписування деякого змістовного смислу, значення символам і формулам формальної системи. Завдяки цьому формальна система перетворюється на мову, що описує відповідну предметну область. Саму предметну область і види значень, що приписуються символам і формулам, також називають інтерпретацією.

⁹ Мовою Я. Лукасевича α та β – метазмінні.

За допомогою правил утворення (ПУ) ми здійснили синтаксичну побудову формальної системи, яка є своєрідною грою із символами, коли можна комбінувати символи відповідно до правил, з'єднувати їх, роз'єднувати тощо. Для того, щоб система набула смислу, стала мовою, описом певних об'єктів, властивостей і відношень між ними, необхідно надати їй інтерпретації.

До правила інтерпретації Sem ML у S^1 належать два правила:

- 1) правила інтерпретації пропозиційних змінних;
- 2) правила інтерпретації пропозиційних зв'язок.

Правило інтерпретації пропозиційних змінних:

кожна пропозиційна змінна може мати одне із двох значень:
істину (i), або хибу (x), але не одне та друге одночасно.

Фактично правило інтерпретації пропозиційних змінних є функцією приписування окремій пропозиційній змінній одного із двох логічних об'єктів: *істина* або *хиба*.

Правилами інтерпретації пропозиційних зв'язок є таблиці істинності.

Таблиця істинності –

це такий вид таблиць, за допомогою якого встановлюється істиннісне значення складного висловлювання за даних значень простих висловлювань, що входять до його складу.

Таблиці істинності є визначенням пропозиційних зв'язок і мають вигляд:

p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	$p \not\equiv q$
i	x	i	i	i	i	i	i	x
x	i	i	x	x	i	x	x	i
		x	i	x	i	i	x	i
		x	x	x	x	i	i	x

Після визначення табличним методом значення логічних сполучників, можна встановлювати значення будь-якого складного висловлювання. Проілюструємо це на прикладах.

Маємо формулу

$$(p \wedge q) \supset \neg q.$$

Відомо, що коли антецедент цієї формули $(p \wedge q)$ відповідає значенню i , а консеквент $\neg q - x$, то відповідно до таблиці істинності для імплікації, уся формула матиме значення x .

Для побудови таблиці істинності для довільної формули необхідно виконати такі дії:

1) скласти без повторів список пропозиційних змінних, що входять до складу формули;

2) розпочинати новий стовпчик таблиці має кожна пропозиційна змінна;

3) для кожної підформули у тій послідовності, в якій вони входять до складу формули, будують відповідний стовпчик таблиці;

4) кількість рядків у таблиці істинності обчислюють за формулою 2^n (де 2 – кількість логічних значень, які приписують пропозиційним змінним i або x , а n – кількість пропозиційних змінних, що входять до складу формули). Кожен набір значень має відрізнятися від інших;

5) визначають головний логічний сполучник у формулі;

6) останній стовпчик таблиці істинності будують для головного логічного сполучника, що відповідає значенню всієї формули.

Побудуємо таблицю істинності для формули

$$(((p \wedge q) \supset \neg r) \vee s) \vee q) \equiv s.$$

p	q	r	s	$\neg r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \supset \neg r$	$((p \wedge q) \supset \neg r) \vee s$	$((p \wedge q) \supset \neg r) \vee s) \vee q$	$((p \wedge q) \supset \neg r) \vee s) \vee q) \equiv s$
i	i	i	i	x	i	x	i	x	x
i	i	i	x	x	i	x	x	i	x
i	i	x	i	i	i	i	i	x	x
i	i	x	x	i	i	i	i	x	i
i	x	i	i	x	x	i	i	i	i
i	x	i	x	x	x	i	i	i	x
i	x	x	i	i	x	i	i	i	i
i	x	x	x	i	x	i	i	i	x
x	i	i	i	x	x	i	i	x	x
x	i	i	x	x	x	i	i	x	i
x	i	x	i	i	x	i	i	x	x
x	i	x	x	i	x	i	i	x	i
x	x	i	i	x	x	i	i	i	i
x	x	i	x	x	x	i	i	i	x
x	x	x	i	i	x	i	i	i	i
x	x	x	x	i	x	i	i	i	x

Із таблиці очевидно, що формула істинна для семи наборів логічних значень пропозиційних змінних і хибна – для решти. У такий спосіб можна обчислити логічне значення для формули будь-якої складності.

2.1.4. Типологія формул за семантичними ознаками

За синтаксичними ознаками всю множину правильно побудованих формул (ППФ) у S^1 поділяють на *прості (атомарні)* та *складні (молекулярні)*.

За семантичними ознаками ППФ у S^1 поділяють на:

- *тотожно-істинні* (або тавтології, або логічні тотожності, або логічні закони, або загально-значимі формули);
- *тотожно-хибні* (або протиріччя, або не загально-значимі формули);
- *виконувані формули*.

Тотожно-істинною

є така формула, що за будь-яких наборів значень пропозиційних змінних набуває значення *i*.

Іншими словами, це такі формули, що істинні в силу своєї логічної структури. Наприклад, формули

$$p \supset (q \supset p), (p \supset p), ((p \wedge q) \supset r) \supset ((p \wedge \neg r) \supset \neg q).$$

Якщо побудувати таблиці істинності для цих формул, то можна переконатися, що вони істинні за будь-яких наборів значень пропозиційних змінних. Для прикладу візьмемо формулу $p \supset (q \supset p)$.

p	q	$q \supset p$	$p \supset (q \supset p)$
i	i	i	i
i	x	i	i
x	i	x	i
x	x	i	i

Тотожно-істинні або загальнозначимі формули (за термінологією Л. Вітгенштейна – тавтології) називають у сучасній логіці логічними **законами**.

Із логічними законами ми вже зустрічалися у традиційній логіці. Але, якщо основні формально-логічні закони мають нормативний, методологічний характер, тобто регламентують процес міркування, забезпечуючи послідовність, несуперечливість, обґрунтованість наших думок, то закони сучасної логіки (тотожно-істинні формули) – це регламентуючі параметри при побудові логічних конструкцій. Досить виразно про це сказав творець сучасної логіки Л. Вітгенштейн: "... із тавтології "дощ або йде, або не йде" ($A \vee \neg A$), ми нічого не можемо дізнатися про погоду. Речення логіки не вважаються образами дійсності, що зображують можливі стани речей. Вони просто формули, що вказують на припустимі в мові перетворення. Вони – частина символізму, подібно до того як 0 є частина символізму арифметики"¹⁰.

Отже, закони логіки – це такі формули, які є істинними завдяки своїй логічній формі, а логічну форму виражають ті пропозиційні зв'язки, що входять до складу формули.

Тотожно-хибною
називають формулу,

що хибна за будь-яких наборів значень пропозиційних змінних.

Наприклад, $p \wedge \neg p$; $\neg(p \supset (q \supset p))$; $\neg p \wedge \neg(\neg p \vee q)$ тощо.

Таблиця істинності для кожної із цих формул і схожими з ними результатом матиме одне значення х.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg(\neg p \vee q)$
i	i	x	i	x	x
i	x	x	x	i	x
x	i	i	i	x	x
x	x	i	i	x	x

Тотожно-хибні формули є суперечливими до тотожно-істинних формул. Це означає, що заперечення тотожно-істинної формули дає тотожно-хибну формулу, і навпаки.

І, нарешті, третім видом формул за семантичними ознаками є виконувані або нейтральні формули.

Виконуваною в S^1

називають таку формулу, яка за одних наборів значень пропозиційних змінних є істинною, а за інших – хибною.

¹⁰ Вітгенштейн Л. Логіко-філософський трактат. – М., 1958. – С. 4, 13, 461.

Їх іноді називають фактичними істинами. Наприклад,

$$p \wedge (q \supset r), p \supset \neg s, (p \vee q) \supset p.$$

Пересвідчитися у тому, що наведені формули є виконуваними, допомагають таблиці істинності для цих формул.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \supset p$
i	i	i	i
i	x	i	i
x	i	i	x
x	x	x	i

Тавтології і протиріччя називають L-детермінованими виразами (логічно детермінованими, логічно спричиненими), а виконувані формули L-недетермінованими (логічно недетермінованими).

Уміння розпізнавати та диференціювати формули за семантичними ознаками передуює розгляду різноманітних відношень між формулами у системі S^1 .

2.1.5. Рівносильні формули

При аналізі множини формул у S^1 нерідко зустрічаються ситуації, за яких різні за структурою формули за однакових наборів значень пропозиційних змінних набувають однакового значення. Наприклад, візьмемо дві формули та побудуємо для них таблиці істинності.

$(p \supset q)$		
p	q	$p \supset q$
i	i	i
i	x	x
x	i	i
x	x	i

$(\neg p \vee q)$			
p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
i	i	x	i
i	x	x	x
x	x	i	i
x	i	i	i

Ці формули (та їм подібні) називають *рівносильними*.

Нехай A та B – формули, а $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – список усіх пропозиційних змінних, що входять у крайньому разі до складу однієї із них. За наявності цих вихідних даних вважається, що формули A та B – рівносильні, якщо за будь-яких наборів значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – логічні значення формул A та B збігаються.

Із цього визначення випливає, що рівносильними будуть не тільки ті формули, до складу яких входять одні й ті самі пропо-

зиційні змінні, але й такі, в яких пропозиційні змінні різняться. Наприклад,

$$1) \neg p \wedge (p \supset q); \quad 2) p \supset (\neg p \wedge r)$$

p	q	r	$\neg p$	$p \supset q$	$\neg p \wedge (p \supset q)$	$\neg p \wedge r$	$p \supset (\neg p \wedge r)$
i	i	i	x	i	x	x	x
i	x	i	x	i	x	x	x
i	i	x	x	i	x	x	x
i	x	x	x	x	x	x	x
x	i	i	i	i	i	i	i
x	x	i	i	i	i	i	i
x	i	x	i	i	i	x	i
x	x	x	i	i	i	x	i

Незважаючи на те, що перша та друга формули різняться змінними q і r , їхні таблиці істинності збігаються. Це дає підставу стверджувати, що логічні значення формули A не залежать від пропозиційної змінної x_i , якщо для будь-якого набору логічних значень решти пропозиційних змінних у таблиці істинності для A логічне значення A одне й те саме, коли x_i хибне та x_i істинне.

Для відношення рівносильності характерними є:

- 1) *рефлексивність* (A рівносильне A);
- 2) *симетричність* (якщо A рівносильне B , то B рівносильне A);
- 3) *транзитивність* (якщо A рівносильне B та B рівносильне C , то A рівносильне C).

Термін *рівносильно* є виразом метамови. Якщо поєднати дві рівносильні формули знаком еквіваленції, то отримаємо тотожно-істинну формулу або закон логіки. Якщо A та B *рівносильні*, то формула $A \equiv B$ буде логічним законом, що має вигляд:

$$\models A \equiv B.$$

Законів логіки (тобто тавтологій) в S^1 може бути скільки завгодно. Але можна виділити кілька десятків тавтологій, за допомогою яких здійснюються всі дії у системі S^1 . Ці вирази легко можна перевірити за допомогою таблиць істинності.

Разом із тим, побудова таблиць істинності – досить громіздка справа для визначення завжди істинних формул. Розв'язання цієї задачі досягається в еквівалентних перетвореннях вихідних формул за допомогою законів логіки.

Розглянемо *основні закони логіки висловлювань*, записані за-
собами метамови в S^1 .

1. Закон подвійного заперечення

$$\Vdash \neg \neg A \equiv A$$

те, що не є не- A , є те ж саме, що A

2. Закон комутативності

Результат операції із двома елементами не залежить
від порядку, в якому беруться ці елементи.

Назва цього закону походить від латинського слова *commutativus* – *змінюваність*; *той, що піддається переміщенню*. Сутність цього закону: властивість комутативності притаманна операціям $\wedge$ та $\vee$.

$$\Vdash A \wedge B \equiv B \wedge A$$

A та B є те саме, що B та A .

$$\Vdash A \vee B \equiv B \vee A$$

A або B є те саме, що B або A .

3. Закон асоціативності

За подвійного здійснення операції над трьома висловлюваннями можна з'єднати (асоціювати) перше та друге висловлювання, виконати операцію над ними, а далі цю саму операцію провести над отриманим результатом і третім висловлюванням.

Рівноцінним є й такий порядок здійснення операцій: з'єднати друге та третє висловлювання, провести операцію над ними, а далі цю саму операцію провести над отриманим результатом і першим висловлюванням.

Назву цьому закону дає латинське слово *associatio* – *з'єднання*. Асоціативність властива для $\wedge$ і $\vee$.

$$\Vdash (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

$(A$ та $B)$ і C є те саме, що й A та $(B$ і $C)$.

$$\Vdash (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

$(A$ або $B)$ або C є те ж саме, що й A або $(B$ або $C)$.

ЗАКОНИ ДИСТРИБУТИВНОСТІ

4. Закон дистрибутивності кон'юнкції щодо диз'юнкції

$$\models A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

A та $(B$ або $C)$ є те саме, що й $(A$ та $B)$ або $(A$ та $C)$.

5. Закон дистрибутивності диз'юнкції до кон'юнкції

$$\models A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

A або $(B$ і $C)$ є те саме, що й $(A$ або $B)$ та $(A$ або $C)$.

Назва цього закону походить від латинського слова *distributio* – *розміщення, розподілення*. Із формули закону видно, що тут відбувається розподілення, розміщення першого висловлювання щодо другого, а далі – першого щодо третього. Результати цього розміщення об'єднують через $\vee$.

6. Закон ідемпотентності

Якщо кон'юнкцією чи диз'юнкцією сполучаються дві однакові змінні, то одну змінну можна виключити.

Назва цього закону походить від латинського слова *idempotens* – *що зберігає той самий ступінь*.

$$\models A \wedge A \equiv A$$

A та A є те саме, що й A .

$$\models A \vee A \equiv A$$

A або A є те саме, що й A .

Розглянемо чотири закони щодо *завжди істинних* і *завжди хибних* формул.

Завжди істинну формулу (або тавтологію) позначимо символом $\top$, а завжди хибну формулу – $\perp$.

7. Закон виключення тавтології із кон'юнкції

Кон'юнктивне приєднання до виконуваної (нейтральної або довільної) формули A тавтології не додає до цієї формули жодної нової інформації.

Іншими словами, згідно із природою $\wedge$ значення формули $A \wedge \perp$ цілком залежить від значень формули A .

$$\models A \wedge \top \equiv A.$$

8. Закон перетворення кон'юнкції на протиріччя

У силу природи кон'юнкції,
якщо один із кон'юнктив завжди хибний $\perp$,
то вся кон'юнкція стає завжди хибною

$$\Vdash A \wedge \perp \equiv \perp.$$

9. Закон перетворення диз'юнкції на тавтологію

Коли один із диз'юнктив завжди істинний,
то вся диз'юнкція завжди буде істинною $\top$.

$$\Vdash A \vee \top \equiv \top.$$

10. Закон виключення протиріччя із диз'юнкції

Якщо приєднати диз'юнктивно до довільної формули A
завжди хибну формулу, то в силу природи диз'юнкції
значення утвореної формули $A \vee \perp$ залежатиме

від довільної формули A

$$A \vee \perp \equiv A.$$

11. Перший закон де-Моргана або заперечення кон'юнкції

$$\Vdash \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B.$$

12. Другий закон де-Моргана або заперечення диз'юнкції

$$\Vdash \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B.$$

Суть законів де-Моргана полягає в перенесенні заперечень, застосованих до складних висловлювань, на прості висловлювання, що їх складають.

13. Закон виразу кон'юнкції через диз'юнкцію

$$\Vdash A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B).$$

14. Закон виразу диз'юнкції через кон'юнкцію

$$\Vdash A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B).$$

15. Закон виключення імплікації

$$\Vdash A \supset B \equiv \neg A \vee B.$$

16. Закон заміни еквіваленції

$$\Vdash A \equiv B \equiv (A \supset B) \wedge (B \supset A).$$

17. Закон заміни сильної диз'юнкції

$$\Vdash A \underline{\vee} B \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B).$$

ЗАКОНИ ВИЯВЛЕННЯ**18**

$$\Vdash \neg A \wedge (B \vee A) \equiv \neg A \wedge (B \vee A) \wedge B;$$

19

$$\Vdash \neg A \vee (B \wedge A) \equiv \neg A \vee (B \wedge A) \vee B;$$

20

$$\models (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C);$$

21

$$\Vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

ЗАКОНИ ПОГЛИНАННЯ**22**

$$\Vdash (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \equiv B;$$

23

$$\Vdash (A \vee B) \wedge A \equiv A;$$

24

$$\Vdash (A \wedge B) \vee A \equiv A.$$

Правило заміни рівносильності

Нехай A – деяка формула та A' , яку отримують із A заміною принаймні одного входження підформули B до формули A на B' .

Тоді, якщо B' рівносильна B , то формула A' рівносильна A .

Застосовуючи це правило, можна переходити від одних формул до інших, які їм рівносильні.

Наведені закони обґрунтовуються таблицями істинності. Але, використовуючи ці закони, не звертаючись до таблиць істинності, а керуючись правилом заміни, можна встановити рівносильність будь-якої формули. Наприклад, візьмемо формулу

$$\neg(A \vee B) \supset C.$$

Відповідно до другого закону де Морґана (11) замінімо у цій формулі *антецедент*

$$(\neg A \wedge \neg B) \supset C.$$

Отримана формула рівносильна вихідній. Згідно із законом *виключення імплікації* (14) замінімо цю формулу рівносильною їй

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee C.$$

Підформулу $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ замінімо, згідно із *першим законом де Моргана* (10):

$$\neg\neg A \vee \neg\neg B \vee C.$$

Тепер застосуємо закон подвійного заперечення (1):

$$A \vee B \vee C.$$

У силу транзитивності відношення рівносильності отримана формула є рівносильною всім попереднім.

Користуючись правилом заміни, будь-яку формулу можна перетворювати на рівносильну їй таким чином, щоб вона не містила одних логічних сполучників, але містила – інші.

Наприклад, використовуючи закони 14, 15, 16 за правилом заміни, формулу, яка містить знаки $\supset$, $\equiv$, $\vee$, можна перетворити на формулу, в якій відсутні ці знаки. У такий спосіб, добираючи відповідних законів, можна отримувати формули, які містять лише $\wedge$ та $\neg$, або $\vee$ і $\neg$, або $\supset$ і $\neg$.

2.1.6. Логічні відношення між формулами

Поряд із виділенням логічних законів, у системі S^1 розв'язують ще одну задачу, яка встановлює логічні відношення (за істинністю та хибністю) між формулами.

Як фундаментальні логічні відношення у S^1 виділяють відношення:

- *сумісності за істинністю*;
- *сумісності за хибністю*;
- *логічного слідування*.

Формули деякої множини¹¹ є *сумісними за істинністю* в S^1 тоді й тільки тоді, коли в S^1 існує інтерпретація нелогічних символів, які входять до складу вказаних формул, за якої кожна формула із Γ набуває значення *істина*. У протилежному випадку формули – *несумісні за істинністю*.

Формули із множини Γ є *сумісними за хибністю* в S^1 тоді й тільки тоді, коли в S^1 існує інтерпретація нелогічних символів, що входять до складу вказаних формул, за якої кожна формула

¹¹ Γ – це метазнак, що використовують для позначення множини довільних формул.

із Γ набуває значення хибна. У протилежному випадку ці формули – несумісні за хибністю.

Найбільш важливим є відношення логічного слідування.

Із множини формул Γ логічно слідує формула B у S^1 тоді й тільки тоді, коли в S^1 не існує інтерпретації нелогічних символів, що входять до Γ і до B , за якої кожна формула із Γ набуває значення істина, а формула B – значення хибна. У протилежному випадку B не слідує із Γ .

Твердження із Γ слідує B записують як $\Gamma \Vdash B$.

Для кращого розуміння логічних відношень між формулами в S^1 звернемося до прикладів. Візьмемо формули

$$p \vee q, q \supset r, p \vee r$$

і побудуємо для них спільну таблицю істинності. Розглянемо названі логічні відношення.

p	q	r	$p \vee q$	$q \supset r$	$p \vee r$
i	i	i	i	i	i
i	i	x	i	x	i
i	x	i	i	i	i
i	x	x	i	i	i
x	i	i	i	i	i
x	i	x	i	x	x
x	x	i	x	i	i
x	x	x	x	i	x

Розглянемо, які ж логічні відношення мають місце між наведеними формулами. Критерієм сумісності за істинністю, хибністю та логічним слідуванням будуть вищезазначені дефініції.

Якщо у спільній таблиці істинності знайдеться у крайньому разі один рядок, в якому кожна формула набуває значення істинності i , то ці формули вважаються сумісними за істинністю. У протилежному випадку вони – не сумісні за істинністю.

Якщо у спільній таблиці істинності знайдеться принаймні один рядок, де кожна формула набуває значення хибності x , то ці формули сумісні за хибністю. У протилежному випадку вони – не сумісні за хибністю.

Якщо потрібно з'ясувати, чи слідує із формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ формула B , будують спільну таблицю істинності. Якщо у побудованій таблиці відсутній рядок, в якому формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ одночасно істинні, а формула B – хибна, то $A_1, A_2, \dots, A_n \Vdash B$.

Зі складеної таблиці істинності видно, що формули $p \vee q, q \supset r, p \vee r$ сумісні за істинністю. Свідченням цього є рядки: 1, 3, 4 і 5.

Але ці формули несумісні за хибністю, оскільки не має жодного рядка, де б кожна формула набувала значення x .

Формула $p \vee r$ логічно слідує із формул $p \vee q$, $q \supset r$, оскільки в таблиці істинності немає жодного рядка, де б $p \vee q$ і $q \supset r$ набували значення i , а формула $p \vee r = x$. Записують це як

$$p \vee q, q \supset r \models p \vee r.$$

Формула $p \vee q$ не слідує із формул $q \supset r$ і $p \vee r$, оскільки у сьомому рядку наведеної таблиці істинності формули $q \supset r$ і $p \vee r$ істинні, а формула $p \vee q$ – хибна. Записують це як

$$q \supset r, p \vee r \not\models p \vee q.$$

У такий спосіб можна розглядати логічні відношення між будь-якими формулами у системі S^1 .

2.1.7. Нормальні форми логіки висловлювань

Серед нормальних форм логіки висловлювань виділяють:

- а) кон'юнктивну нормальну форму (КНФ);
- б) досконали кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ);
- в) скорочену кон'юнктивну нормальну форму (СКНФ);
- г) диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ);
- д) досконали диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ);
- е) скорочену диз'юнктивну нормальну форму (СДНФ).

Кожна із цих формул має власний спосіб утворення та розв'язує характерні для неї задачі.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ). У сучасній логіці існує таке поняття як *проблема розв'язання*. Вона уточнюється стосовно кожного розділу сучасної логіки. В алгебраїчній системі логіки висловлювань цю проблему можна визначити так:

Проблема розв'язання –

це встановлення ефективної процедури,
яка кінцевим числом кроків дозволяє встановити,
чи є дана формула тотожно-істинною,
чи тотожно-хибною, чи виконуваною.

У S^1 такими процедурами є:

- 1) побудова таблиць істинності;
- 2) зведення формули до КНФ і ДНФ.

Про таблиці істинності йшлося вище. Розглянемо КНФ.

Кон'юнктивною нормальною формою
називають кон'юнкцію елементарних диз'юнкцій.

Наприклад,

- 1) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$;
- 2) $(A \vee B) \wedge C$ тощо.

У другій формулі кон'юнктивний член C розглядають як виведену диз'юнкцію з одним диз'юнктом. Будь-яку формулу логіки висловлювань можна звести до КНФ.

Для зведення формули до КНФ необхідно виконати такі дії:

1. За допомогою відповідних законів треба звільнитися від $\neg$, $\supset$, $\equiv$, якщо вони наявні у вихідній формулі;
2. Усунути загальне та подвійне заперечення, відповідно до конкретних законів;
3. До отриманої формули застосувати закон дистрибутивності диз'юнкції щодо кон'юнкції.

За допомогою КНФ розв'язують такі задачі:

- 1) чи є дана формула тотожно-істинною;
- 2) чи є формула C наслідком із формул $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Розглянемо зведення формули до КНФ наприкладі.

$$1. [(A \wedge B) \supset C] \supset [(A \wedge \neg C) \supset \neg B].$$

До цієї формули застосовуємо закон виключення імплікації:

$$2. \neg[\neg(A \wedge B) \vee C] \vee [\neg(A \wedge \neg C) \vee \neg B].$$

Застосовуємо другий закон де Моргана:

$$3. [\neg\neg(A \wedge B) \wedge \neg C] \vee \neg A \vee \neg\neg C \vee \neg B.$$

Скористаємося законом подвійного заперечення:

$$4. (A \wedge B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee C \vee \neg B.$$

Звернемося до закону дистрибутивності диз'юнкції щодо кон'юнкції:

$$5. (A \vee \neg A \vee C \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A \vee C \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee C \vee \neg B).$$

Ми отримали КНФ. Кожен із кон'юнктив містить диз'юнкцію змінної і її заперечення

$$(A \vee \neg A), (B \vee \neg B), (C \vee \neg C),$$

тобто тавтологію. Отже, вихідна формула є тавтологією.

Формула може мати не одну КНФ. Наприклад, візьмемо формулу $(A \vee B) \supset C$.

1. $(A \vee B) \supset C$;
2. $[(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)] \supset C$;
3. $\neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee C$;
4. $[\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B)] \vee C$;
5. $[(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)] \vee C$;
6. $[(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)] \vee C$;
7. $[(\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \vee C$;
8. $(\neg A \vee A \vee C) \wedge (\neg B \vee A \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee B \vee C)$.

Отже, ми отримали КНФ для вихідної формули, але для неї КНФ буде й формула

$$(\neg A \vee A \vee C) \wedge (\neg B \vee A \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg C).$$

Завдяки структурним особливостям КНФ, за зовнішнім її виглядом можна визначити, є вихідна формула тавтологією чи ні. Наприклад, маємо формулу

$$(\neg B \wedge (A \supset B)) \supset \neg A.$$

Зведемо її до КНФ:

1. $\neg(\neg B \wedge (A \supset B)) \vee \neg A$;
2. $(\neg\neg B \vee \neg(\neg A \vee B)) \vee \neg A$;
3. $(B \vee (\neg\neg A \wedge \neg B)) \vee \neg A$;
4. $(B \vee (A \wedge \neg B)) \vee \neg A$;
5. $((B \vee A) \wedge (B \vee \neg B)) \vee \neg A$;
6. $(B \vee A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B \vee \neg A)$.

Оскільки обидва кон'юнкти містять змінну та її заперечення, то це – тавтологія.

Як вже зазначалося, другою задачею, яку розв'язують за допомогою КНФ, є з'ясування питання: Чи є довільна формула логічним наслідком із інших формул.

Як перевірити, чи є довільна формула C наслідком із формул $A_1, A_2, \dots, A_n$? Необхідно приєднати через імплікацію формулу C до формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, а потім отриманий вираз звести до КНФ. Якщо отримана КНФ – тавтологія, то це буде підтвердженням того, що формула C випливає із формул $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Перевіримо, чи слідує C із формул $A \vee B, A \supset C, B \supset C$ як за-
сновків. Поєднаємо кон'юнктивно за-
сновки

$$(A \vee B) \wedge (A \supset C) \wedge (B \supset C).$$

Приєднаємо до них імплікативно C

$$((A \vee B) \wedge (A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset C.$$

Зведемо отриману формулу до КНФ:

1. $\neg ((A \vee B) \wedge (A \supset C) \wedge (B \supset C)) \vee C$;
2. $(\neg (A \vee B) \vee \neg (A \supset C) \vee \neg (B \supset C)) \vee C$;
3. $(\neg (A \vee B) \vee \neg (\neg A \vee C) \vee \neg (\neg B \vee C)) \vee C$;
4. $((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C)) \vee C$;
5. $((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee (B \wedge \neg C) \vee C$;
6. $((\neg A \vee A \vee B) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge$
 $\wedge (\neg A \vee \neg C \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A \vee B) \wedge (\neg B \vee A \vee \neg C) \wedge$
 $\wedge (\neg B \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg C)) \vee C$;
7. $(\neg A \vee A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg C \vee C) \wedge$
 $\wedge (\neg A \vee \neg C \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee \neg C \vee C) \wedge$
 $\wedge (\neg B \vee A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee A \vee \neg C \vee C) \wedge$
 $\wedge (\neg B \vee \neg C \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg C \vee C).$

Кожен кон'юнкт має змінну та її заперечення, а це означає, що вихідна формула – тавтологія, тому C є наслідком із формул $A \vee B$, $A \supset C$, $B \supset C$.

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ). Кожна не тотожно-істинна формула має одну КНФ, яку називають досконалою кон'юнктивною нормальною формою.

Ознаки ДКНФ:

- 1) вона не має двох однакових кон'юнктів;
- 2) жоден кон'юнкт не має двох однакових змінних ($A \vee B \vee A$);
- 3) жоден кон'юнкт не має змінної і її заперечення ($A \vee B \vee \neg A$);
- 4) у кожному кон'юнкті наявні всі змінні, що входять до складу вихідної формули.

Для приведення формули до ДКНФ варто виконати такі дії:

- а) *звести вихідну формулу до КНФ*;
- б) *зіставити отриману КНФ із переліченими ознаками ДКНФ*;
- в) якщо в якомусь із кон'юнктів відсутня змінна, наявна у вихідній формулі, то необхідно *диз'юнктивно приєднати до цього кон'юнкта протиріччя* ($X \wedge \neg X$), а потім *застосувати закон дистрибутивності диз'юнкції щодо кон'юнкції*.

За допомогою ДКНФ розв'язують задачу знаходження всіх логічних наслідків із даних формул. Наведемо приклади.

Маємо формули $\neg B$ та $A \supset B$. Знайдемо всі логічні наслідки із цих формул. Спочатку кон'юнктивно з'єднаємо формули

$$\neg B \wedge (A \supset B).$$

Приведемо цю формулу до ДКНФ. Спочатку дістанемо КНФ.

$$\neg B \wedge (A \supset B),$$

$$\neg B \wedge (\neg A \vee B).$$

Тепер зіставимо її з ознаками ДКНФ. Виявляється, що у першому кон'юнкті відсутня змінна A , наявна у вихідній формулі. Припишемо диз'юнктивно до першого кон'юнкту протиріччя

$$(A \wedge \neg A)$$

і застосуємо закон дистрибутивності диз'юнкції щодо кон'юнкції.

$$(\neg B \vee (A \wedge \neg A)) \wedge (\neg A \vee B),$$

$$(\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B).$$

Отже, ми отримали ДКНФ, яка дає можливість розглянути всі логічні наслідки із даних формул:

1. $(\neg B \vee A)$;
2. $(\neg B \vee \neg A)$;
3. $(\neg A \vee B)$;
4. $(\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A)$;
5. $(\neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee B)$;
6. $(\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B)$;
7. $(\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B).$

Візьмемо такі формули

$$B \vee C, B \supset \neg A, B \supset C$$

і знайдемо всі їхні наслідки.

1. $(B \vee C) \wedge (B \supset \neg A) \wedge (B \supset C)$;
2. $(B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C)$;
3. $[(B \vee C) \vee (A \wedge \neg A)] \wedge [(\neg B \vee \neg A) \vee (C \wedge \neg C)] \wedge [(\neg B \vee C) \vee (\neg A \wedge A)]$;
4. $(B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee \neg A).$

Ця ДКНФ представляє всі можливі наслідки із даних формул. Якщо до вихідної формули 1 приєднати імплікативно будь-який із законів, то отримана формула буде тавтологією.

Скорочена кон'юнктивна нормальна форма (СКНФ).

Ознаки СКНФ:

- 1) жоден кон'юнкт не утримує двох однакових змінних
($A \vee B \vee A$);
- 2) у СКНФ відсутні два однакових кон'юнкти;
- 3) у СКНФ відсутні кон'юнкти, до складу яких входить змінна та її заперечення.

Для приведення формули до СКНФ необхідно виконати дії:

- 1) *отримати із вихідної формули КНФ;*
- 2) *зіставити отриману КНФ з ознаками СКНФ;*
- 3) *до отриманого виразу послідовно застосовувати закони виявлення та поглинання.*

Завдяки СКНФ розв'язують задачу знаходження всіх простих наслідків із кон'юнкції заданих формул.

За допомогою ДКНФ знаходять всі логічні наслідки із заданих формул, але виникає потреба знайти лише прості наслідки.

Простим

називають такий наслідок,

який не поглинається жодним, сильнішим наслідком¹².

Знайдемо всі прості наслідки із засновків:

$$A \supset \neg B, A \vee C, \neg(B \wedge C):$$

1. $(A \supset \neg B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg(B \wedge C);$
2. $(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C).$

Ми отримали КНФ. Зіставимо її з ознаками СКНФ. Потім до формули 2 послідовно застосуємо закони виявлення та поглинання.

$$3. (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B).$$

Формула 3 отримана у результаті застосування закону виявлення (19) до формули 2.

$$4. (A \vee C) \wedge \neg B.$$

Формула 4 отримана у результаті застосування закону поглинання (22) до формули 3. Отже, кожен із кон'юнктив є простим наслідком.

¹² Формула A сильніша за формулу B , якщо $A \supset B$ є тавтологією.

Розглянемо ще один приклад.

Дано засновки $(A \supset B)$, $(A \supset C)$, $(\neg B \vee \neg C)$. Потрібно знайти всі прості наслідки.

1. $(A \supset B) \wedge (A \supset C) \wedge (\neg B \vee \neg C)$;
2. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C)$;
3. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\sim A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B)$;
4. $\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)$.

Перейдемо до розгляду групи диз'юнктивних нормальних форм (ДНФ).

Кожна формула в S^1 може бути приведена до ДНФ.

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) даної формули називають диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій

$$(A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C) \vee A \text{ тощо.}$$

Для приведення формули до ДНФ необхідно виконати дії:

- 1) за допомогою відповідних законів *послідовно звільнитися* від $\underline{\vee}$, $\equiv$, $\supset$, якщо вони наявні у вихідній формулі;
- 2) *віднести загальне заперечення до елементарних висловлювань*;
- 3) *застосувати до отриманої формули закон дистрибутивності кон'юнкції щодо диз'юнкції*.

ДНФ дозволяє встановити, чи є довільна формула тотожно-хибною. Наприклад, знайдемо ДНФ формули

$$\neg \{[(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)] \supset (B \vee D)\}:$$

1. $\neg \{ \neg [(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)] \vee (B \vee D) \}$;
2. $[(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)] \wedge \neg (B \vee D)$;
3. $[(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)] \wedge \neg B \wedge \neg D$;
4. $[(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (A \vee C)] \wedge \neg B \wedge \neg D$;
5. $[(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C) \vee (B \wedge D)] \wedge (\neg A \vee C) \wedge \neg B \wedge \neg D$;
6. $[(\neg A \wedge \neg C \wedge A) \vee (\neg A \wedge D \wedge A) \vee (B \wedge C \wedge A) \vee (B \wedge D \wedge A) \vee (\neg A \wedge \neg C \wedge C) \vee (\neg A \wedge D \wedge C) \vee (B \wedge \neg C \wedge C) \vee (B \wedge D \wedge C)] \wedge \neg B \wedge \neg D$;
7. $(\neg A \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (B \wedge C \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (B \wedge D \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg C \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (B \wedge D \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg D)$.

В отриманій ДНФ у восьмому рядку кожен диз'юнкт має змінну та її заперечення, отже, дана формула тотожно-хибна.

Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ). Кожна не-тотожно-хибна формула в S^1 має одну доскоалу диз'юнктивну форму. *Ознаки ДДНФ:*

- 1) відсутність двох однакових диз'юнктивів;
- 2) жоден диз'юнкт не містить змінної та її заперечення;
- 3) жоден диз'юнкт не має двох однакових змінних;
- 4) кожен диз'юнкт містить усі змінні, наявні у вихідній формулі.

Для приведення формули до ДДНФ необхідно виконати такі дії:

- 1) *звести формулу до ДНФ;*
- 2) *зіставити отриману ДНФ з ознаками ДДНФ;*
- 3) якщо в якомусь диз'юнкті не вистачає змінної, що наявна у вихідній формулі, то до нього *потрібно кон'юнктивно приєднати диз'юнкцію цієї змінної та її заперечення* ($X \vee \sim X$).

За допомогою ДДНФ розв'язують задачу перегляду всіх гіпотез цієї формули.

Гіпотезою формули B

називають таку формулу A ,

якщо $A \supset B$ є тотожно-істинною формулою.

Диз'юнктами ДДНФ цієї формули є різні гіпотези, за істинності яких формула істинна. Наприклад, приведемо до ДДНФ формулу

$$(A \supset B) \wedge (\neg B \supset A).$$

1. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg \neg B \vee A);$
2. $(\neg A \vee B) \wedge (B \vee A);$
3. $(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge B) \vee (A \wedge B).$

Формула у рядку 3 є ДНФ вихідної формули. Порівняймо її з ознаками ДДНФ.

4. $(\neg A \wedge B) \vee B \vee (A \wedge B);$
5. $(\neg A \wedge B) \vee [B \wedge (A \vee \neg A)] \vee (A \wedge B);$
6. $(\neg A \wedge B) \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge \neg A) \vee (A \wedge B);$
7. $(\neg A \wedge B) \vee (B \wedge A).$

Із отриманої ДДНФ очевидно, що вихідна формула має три гіпотези:

1. $(\neg A \wedge B);$
2. $(B \wedge A);$
3. $(\neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A).$

Якщо будь-яку гіпотезу приєднати через імплікацію до вихідної формули, то отримаємо тавтологію.

$$(\neg A \wedge B) \supset [(A \supset B) \wedge (\neg B \supset A)].$$

Для перевірки цього факту зведемо дану формулу до КНФ:

1. $(\neg A \wedge B) \supset [(A \supset B) \wedge (\neg B \supset A)];$
2. $\neg(\neg A \wedge B) \vee [(\neg A \vee B) \wedge (\neg \neg B \vee A)];$
3. $\neg A \vee \neg B \vee [(\neg A \vee B) \wedge (B \vee A)];$
4. $(A \vee \neg B \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B \vee B \vee A).$

Кожен кон'юнкт отриманої КНФ має змінну та її заперечення, а це означає, що $\neg A \wedge B$ дійсно є гіпотезою для вихідної формули.

Розглянемо скорочену диз'юнктивну нормальну форму.

Скороченою диз'юнктивною нормальною формулою (СДНФ) є ДНФ, якій притаманні такі *характерні ознаки*:

- 1) у жодному диз'юнкті немає двох однакових кон'юнктів;
- 2) якщо є два однакових диз'юнкти, то один із них скорочується;
- 3) жоден диз'юнкт не містить змінної і її заперечення.

Для приведення формули до СДНФ необхідно виконати дії:

- 1) *привести вихідну формулу до ДНФ;*
- 2) *зіставити отриману ДНФ із ознаками СДНФ;*
- 3) *попередовно застосувати до отриманого виразу закони виявлення та закони поглинання.*

За допомогою СДНФ знаходять усі прості гіпотези довільної формули.

Гіпотезу A формули B називають простою,

якщо вона не поглинається жодною іншою гіпотезою формули B .

Наприклад, візьмемо формулу

$$((A \wedge B) \vee C) \supset C.$$

Знайдемо всі її прості гіпотези, тобто приведемо її до СДНФ.

1. $\neg((A \wedge B) \vee C) \vee C;$
2. $(\neg(A \wedge B) \wedge \neg C) \vee C;$
3. $((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee C;$
4. $(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee C.$

Приведемо формулу ДНФ вихідної формули у 4 рядку до СДНФ. Для цього послідовно застосовуємо *закони виявлення та поглинання*.

$$5. (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee C \vee \neg A \vee \neg B;$$

$$6. C \vee \neg A \vee \neg B.$$

Ми отримали чотири прості гіпотези:

$$1. C;$$

$$2. \neg A;$$

$$3. \neg B;$$

$$4. C \vee \neg A \vee \neg B.$$

Якщо імплікативно приєднати до будь-якої гіпотези вихідну формулу, то отримаємо тавтологію:

$$(C \vee \neg A \vee \neg B) \supset [(A \wedge B) \vee C] \supset C.$$

Зведемо цю формулу до КНФ:

$$1. \neg(C \vee \neg A \vee \neg B) \vee \neg[(A \wedge B) \vee C] \vee C;$$

$$2. (\neg C \wedge A \wedge B) \vee [\neg(A \wedge B) \wedge \neg C] \vee C;$$

$$3. (\neg C \wedge A \wedge B) \vee [(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C] \vee C;$$

$$4. (\neg C \wedge A \wedge B) \vee [(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee C)];$$

$$5. (\neg C \vee \neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg C \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C \vee A) \wedge (\neg C \vee C \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C \vee B) \wedge (\neg C \vee C \vee B).$$

Отримана КНФ показує, що вихідна формула є тавтологією, отже формула $C \vee \neg A \vee \neg B$ є гіпотезою для формули

$$((A \wedge B) \vee C) \supset C.$$

Розглянемо ще один приклад. Знайдемо *прості гіпотези* для формули

$$((A \wedge \neg B) \supset C) \supset (C \vee B).$$

$$1. \neg((A \wedge \neg B) \supset C) \vee (C \vee B);$$

$$2. \neg(\neg(A \wedge \neg B) \vee C) \vee C \vee B;$$

$$3. ((A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \vee C \vee B;$$

$$4. (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee C \vee B;$$

$$5. (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee C \vee B \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C);$$

$$6. (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee C \vee B \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee A;$$

$$7. C \vee B \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee A;$$

$$8. C \vee B \vee (A \wedge \neg C) \vee A;$$

$$9. C \vee B \vee A.$$

Останньою формулою є СДНФ, яка містить усі прості гіпотези вихідної формули.

Ознайомленням із нормальними формами завершують аналіз характерних особливостей S^1 і тих завдань, які вони розв'язують.

2.1.8. Логіка висловлювань та контактні схеми

Ідея застосування засобів логіки висловлювань в техніці належить відомому фізику початку XIX століття П. Еренфесту.

Наочним прикладом застосування логіки висловлювань до розв'язання завдань є аналіз електричних схем.

Для початку прийемо деякі домовленості. Відомо, що електричний струм проходить від джерела до приймача (наприклад, ел. лампочка) через один або більше контактів. Кожен контакт може бути розімкнутий або замкнутий. При розімкнутому контакті електричний струм не проходить, а при замкнутому контакті струм проходить.

Оскільки в електричній схемі може бути декілька контактів, то закономірно виникає питання, при яких саме замкнутих контактах струм буде проходити.

Кожному контакту поставимо у відповідність елементарне висловлювання: $p, q, r, s, \dots$

Тепер так як і висловлювання контакти стають змінними, які можуть приймати одне із двох значень «контакт розімкнутий» і «контакт замкнутий».

А відносно висловлювань ці стани контактів можна передати істинісними значеннями: «істина» (1) і «хиба» (0):

«контакт замкнутий»:

(істина (1))



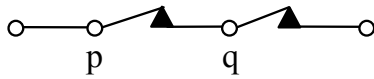
«контакт розімкнутий»:



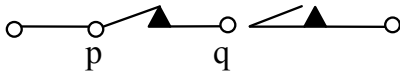
(«хиба» (0)).

Послідовне з'єднання контактів уподібнюється добутку контактів ($p \times q$), а паралельне з'єднання контактів є сумою контактів ($p + q$).

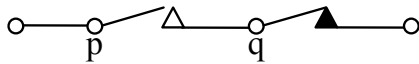
Тоді послідовне з'єднання буде представлено наступними рівностями



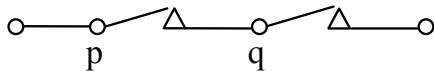
$$p=1 \text{ і } q=1 \\ p \times q = 1 \times 1 = 1$$



$$p=1 \text{ і } q=0 \\ p \times q = 1 \times 0 = 0$$



$$p=0 \text{ і } q=1 \\ p \times q = 0 \times 1 = 0$$



$$p=0 \text{ і } q=0 \\ p \times q = 0 \times 0 = 0$$

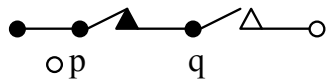
Опишемо основні логічні операції і ті схеми, що їм відповідають у сфері релейно-контактних схем.

Домовимося спочатку, що крім трактовки станів релейно-контактної схеми «замкнено» («1»), «розімкнено» («0») як «істинно» («1»), «хибно» (0), «логічний добуток» будемо ототожнювати з «логічним множенням» (&), «логічну суму» – з «логічним додаванням» (v), «протилежний контакт» – з «логічним запереченням» (–).

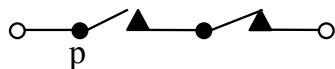
Після наведених зауважень добутком контактів («a b»)¹ є схема, що відображає їх послідовне з'єднання. Ланцюг буде замкнений («1») тоді і тільки тоді, коли обидва контакти p і q замкнені: $p=1 \text{ і } q=1, p \times q = 1 \times 1 = 1$



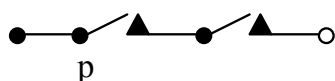
У випадку коли хоча б один із контактів розімнений («0»), ланцюг буде розімнений («0»).



$$p=1 \text{ і } q=0, p \times q = 1 \times 0 = 0$$



$$p=0 \text{ і } q=1, p \times q = 0 \times 1 = 0$$



$$p=0 \text{ і } q=0, p \times q = 0 \times 0 = 0$$

¹ Тут і надалі для зручності будемо брати два контакти, оскільки отриманий результат можна екстраполювати на будь-яку кількість контактів.

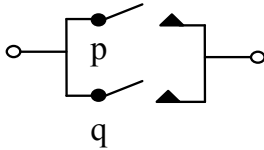
На таблиці це виглядає наступним чином:

p	q	$p \times q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

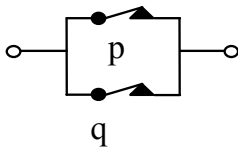
Наведена таблиця відповідає таблиці істинності для кон'юнкції. Тоді схеми послідовного з'єднання двох контактів може бути представлена їх кон'юнкцією: $(p \& q)$. В теорії релейно-контактних схем таке поєднання контактів називається «схемою І» або «схемою співпадінь».

Сумою двох контактів p і q ($p+q$) називається схема паралельного з'єднання контактів.

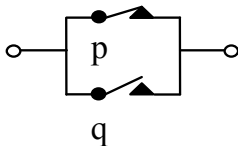
А це означає, що ланцюг буде розімкнутий («0») тоді і тільки тоді, коли обидва контакти розімкнуті. В решті випадків ланцюг буде замкнутий («1»)



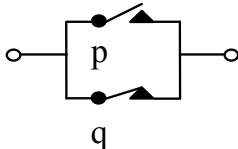
$$p=0 \text{ і } q=0, p+q=0+0=0$$



$$p=1 \text{ і } q=1, p+q=1+1=1$$



$$p=1 \text{ і } q=0, p+q=1+0=1$$



$$p=0 \text{ і } q=1, p+q=0+1=1$$

Таблицею таке з'єднання контактів можна записати наступним чином:

p	q	$p+q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Отже, табличне представлення паралельного з'єднання двох контактів, є не що інше як таблиця істинності для диз'юнкції: $(p \vee q)$

В теорії релейно-контактних схем спеціально оговорюється ситуація, коли контакти не завжди є незалежними один від одного, як у попередніх схемах. Такі контакти називаються залежними, або групою контактів.

Групою контактів будемо називати такі контакти, які з'єднані особливим жорстким зв'язком, який полягає в одночасному замкненні і розмиканні.

Схематично цей зв'язок зображається пунктирною лінією. Такі контакти позначають однією і тією ж пропозиційною змінною.

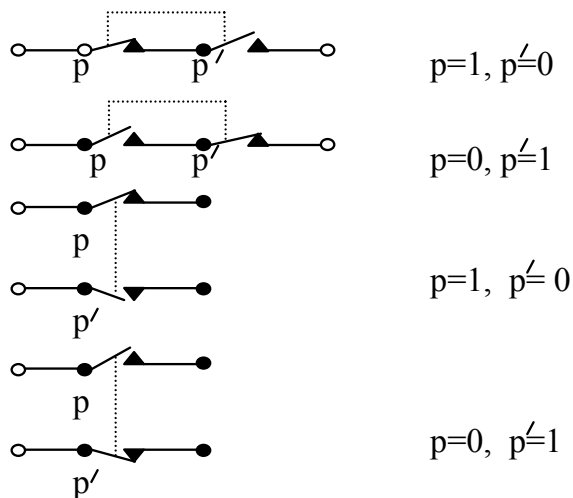
Отже, різні входження однієї і тієї ж змінної у формулу, яка відповідає даній схемі, означає, що в цій схемі контакти механічно з'єдані і цим самим утворюють групу контактів.

Утворення групи контактів має місце як при послідовному з'єднанні контактів, так і при паралельному.

Два контакти технічно можна так з'єднати, що коли один із них розімкнутий, то другий в цей же час буде замкнутий. Будемо називати один із таких контактів «данним», а другий «протилежним». «Даний контакт» будемо позначати (p) , а «протилежний контакт» – $(\bar{p})$.

Тоді протилежний данному контакту буде такий контакт, який замкнутий (1), якщо даний контакт розімкнутий (0), і навпаки.

На схемі взаємодія «данного» і «протилежного» контактів зображається наступним чином:



Таке з'єднання контактів відображається наступною таблицею:

p	p'
1	0
0	1

Дана таблиця відповідає таблиці істинності для заперечення ($\bar{p}$).

Наведене тлумачення $\vee$, $\neg$ досить виразно свідчить, що дія релейно-контактних схем підпорядкована правилам логіки висловлювань. А операції над контактами можна здійснювати засобами логіки висловлювань.

Огляд роботи релейно-контактних схем можна здійснювати на рівні синтезу та на рівні аналізу.

Синтезом контактних схем є побудова такого послідовно-паралельного з'єднання контактів, яке б відповідало чітко заданим умовам його роботи, тобто безперебійному протіканню електричного струму від джерела до приймача.

Тоді аналізом контактних схем є визначення умов роботи конкретної релейно-контактної схеми, при яких струм буде проходити, а при яких ні.

При побудові релейно-контактних схем потрібно враховувати ту обставину, що контактна схема може складатися із одного постійно замкненого контакту («1») або із одного розімкненого контакту («0»).

Тоді якщо створювати такі контактні схеми, що мають лише постійні контакти, то вся схема буде еквівалентна одному із двох постійних контактів: «1» або «0».

Виходить, що так само як в логіці висловлювань ми абстрагуємося від змістовної сторони висловлювання і беремо до уваги його істиннісне значення («істина», «хиба»), так і в теорії релейно-контактних схем головним для контакту є стан його замкнутості.

Ще раз наголосимо, що якщо в будь-якій схемі контакти позначаються однією буквою (наприклад «р»), то ці контакти приймають одне й те ж значення («замкнуто» – 1, або розімкнуто – 0), це по-перше.

А по-друге, якщо в схемі який-небудь контакт є запереченням іншого контакту, то їх значення завжди будуть протилежними. Іншими словами, ці контакти так з'єднані, що коли один «замкнений» ($p \rightarrow 1$), то інший – «розімкнений» ($\bar{p} \rightarrow 0$).

Після наведених загальних зауважень розглянемо основні типові задачі які можна розв'язувати засобами логіки висловлювань в теорії релейно-контактних схем.

Першою такою типовою задачею є визначення умов роботи заданої схеми, або іншими словами, дослідження при яких положеннях контактів струм буде проходити від джерела до приймача, а при яких ні. Звернемося до прикладу. Маємо схему яка мовою логіки висловлювань може бути представлена наступною формулою:

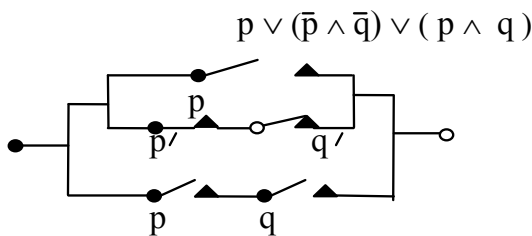


Схема 1

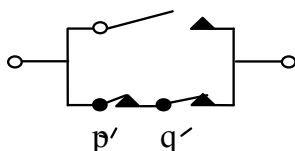
Побудуємо таблицю істинності для формули 1):

	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\vee$	$p \wedge q$
1	1	1	0	0	1	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	1	1	1	0

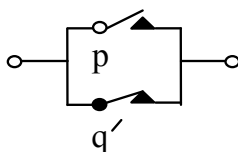
Отже, формула має значення «хиба» («0») тоді і тільки тоді, коли контакт «р» «розімкнений» («0»), а контакт «q» – «замкнений» («1»). Якщо контакт «р» замкнений, то струм проходитиме через верхню гілку схеми незалежно від стану контакту «q». А якщо «р» та «q» розімкнуті, то p' і q' будуть замкнуті і струм проходитиме через середню гілку схеми.

Формулою для верхньої та середньої гілок схеми є наступний вираз: $p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$.

Ця формула говорить про те, що на електричні властивості схеми не впливає нижня гілка схеми, тому її можна відключити



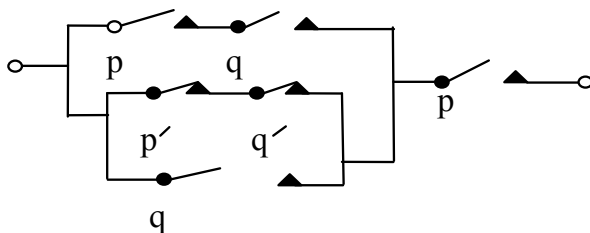
А оскільки формула $p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$ еквівалентна формулі: $(p \vee \bar{q})$, то її можна спростити:



Отже, завдяки еквівалентним перетворенням стає можливим спрощувати контактні схеми

Здійснюючи аналіз контактної схеми ми встановлюємо умови, за яких схема буде замкненою, це по-перше, а, по-друге, виявляємо мінімізовану схему (тобто знаходимо схему з такими ж характеристиками, але з меншим числом контактів).

Розглянемо ще один приклад. Маємо контактну схему:



яка відповідає формулі: $[(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q] \wedge p$, (а).

Побудуємо таблицю істинності для цієї формули:

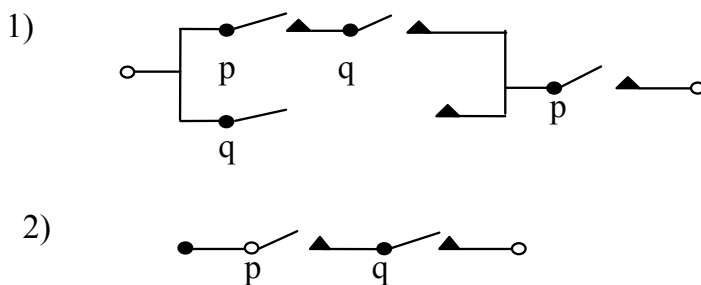
p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\vee$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\vee a$	$\wedge p$
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0

Таблиця істинності показує струм пройде по схемі від джерела до приймача при умові, що контакт p та q будуть замкнені.

Застосовуючи еквівалентні перетворення мінімізуємо формулу (а):

1. $[(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q] \wedge p.$
2. $\left\{ [(p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{p}) \wedge (q \vee \bar{q})] \vee q \right\} \wedge p.$
3. $(p \vee \bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q} \vee q) \wedge (q \vee \bar{p} \vee q) \wedge (q \vee \bar{q} \vee q) \wedge p.$
4. $(q \vee \bar{p}) \wedge p$
5. $(q \vee \bar{p}) \wedge p \vee q$
6. $p \wedge q$

Еквівалентні перетворення показують, що вихідну схему можна спростити у двох варіантах.



Але можна йти і у зворотньому напрямку при побудові релейно-контактних схем. Мається на увазі створення такого послідовно-паралельного з'єднання контактів, яке б відповідало певним умовам при його провідності (тобто від якої кількості контактів залежить робота схеми).

Мовою логіки висловлювань це означає побудову складного висловлювання із заданою таблицею істинності. При цьому наголосимо, що в такій формулі повинно бути лише 3 операції: заперечення, кон'юнкція і диз'юнкція.

Опишемо цю процедуру.

Для того щоб побудувати складне висловлювання із заданою таблицею істинності слід вчинити наступні дії або кроки:

1. Вказати у яких рядках таблиці складне висловлювання матиме значення «істина» (1)
2. Виписати основні кон'юнкції і з'єднати їх диз'юнкцією.
3. Відповідно до отриманої формули побудувати релейно-контактну схему.

Перш ніж застосувати наведену процедуру дамо визначення «основної кон'юнкції»

Основною кон'юнкцією довільної таблиці істинності називається істинна кон'юнкція змінних яка відповідає рядку таблиці істинності. Така кон'юнкція містить змінну, або її заперечення залежно від того, що стоїть під цією змінною в таблиці «1» чи «0».

Наприклад, якщо наша формула має дві змінні, то основними кон'юнкціями будуть наступні вирази:

p	q	основні кон'юнкції
1	1	$p \wedge q$
1	0	$p \wedge \bar{q}$
0	1	$\bar{p} \wedge q$
0	0	$\bar{p} \wedge \bar{q}$

Припустимо, що нам потрібно знайти складне висловлювання яке складається із двох висловлювань, таблиця істинності якого має значення «1» у другому і четвертому рядках, а в решті рядків «0»: 0101.

Щоб знайти дане висловлювання із заданою таблицею істинності, слід виписати диз'юнкцію основних кон'юнкцій із тих рядків, яким у заданій таблиці відповідає значення «1»:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$\vee$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Отже, таблиця істинності показує, що утворення висловлювання має значення «істина» (1) саме в тих рядках, в яких ми й прогнозували. Складне висловлювання може утримувати в собі два і більше простих висловлювань. Тоді основних кон'юнкцій може бути відповідно 4, 8, 16 і т.д.

Візьмемо складне висловлювання, яке складається із 3-х простих: p, q, r.

Його основними кон'юнкціями будуть наступні:

	p	q	r	основні кон'юнкції
1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$
2	1	1	0	$p \wedge q \wedge \bar{r}$
3	1	0	1	$p \wedge \bar{q} \wedge r$
4	1	0	0	$p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}$
5	0	1	1	$\bar{p} \wedge q \wedge r$
6	0	1	0	$\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}$
7	0	0	1	$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r$
8	0	0	0	$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}$

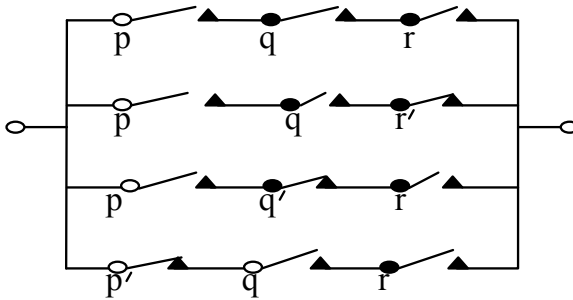
Наприклад, нам потрібно побудувати релейно-контактну схему, що відповідає висловлюванню із таблицею істинності:

11101000.

Для такого висловлювання підійдуть наступні основні кон'юнкції: 1, 2, 3, 5.

$$(p \wedge p \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r)$$

Дане висловлювання представляє наступну схему:



Ця схема відповідає наступній умові: електричний струм по цій схемі буде проходити тоді і тільки тоді, коли замкнуті, в крайньому разі, хоча б два контакти із трьох.

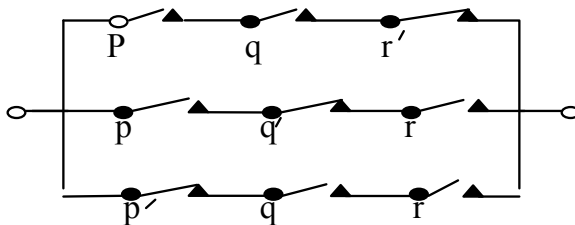
Побудуємо схему з трьома незалежними контактами, яка проводить електричний струм тоді і тільки тоді, коли замкнуті тільки два контакти.

Із таблиці основних кон'юнкцій видно, що такій задачі відповідає складне висловлювання в якому значення «істина» приймають одночасно два змінних висловлювання із трьох: p , q , r . Це рядки 2, 3, 5.

$$(p \wedge p \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r)$$

Дана формула відповідає таблиці істинності із значенням: 01101000.

Моделлю цієї формули буде наступна релейно-контактна схема.



З наведеної схеми видно, що електричний струм буде проходити від джерела до приймача за умови, коли замкнутими є контакти:

а) p і q , або

б) p і r , або

в) q і r

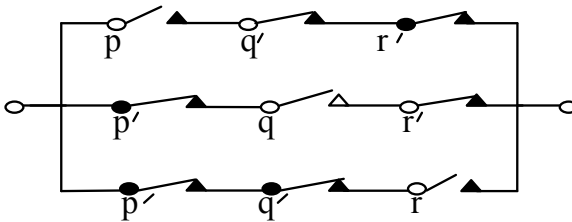
Нарешті побудуємо релейно-контактну схему з трьома незалежними контактами, яка проводитиме електричний струм тоді і тільки тоді, коли замкнутим є один контакт з трьох.

Це означає, що формула, яка відповідає даній схемі, приймає значення «істина» тоді і тільки тоді, коли значення приймає одне із трьох висловлювань p, q, r .

З наведеного вище переліку основних кон'юнкцій це 4, 6, 7 рядки таблиці істинності:

$$(p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)]$$

Побудуємо схему, яка моделює цю формулу:



Отже, електричний струм проходить від джерела до приймача по цій схемі тоді і тільки тоді, коли замкнутим буде один із трьох контактів: або p , або q , або r .

Наведені приклади свідчать про ефективність засобів логіки висловлювань при проведенні аналізу та синтезу релейно-контактних схем.

Запитання для самоконтролю

1. Поняття алгебри логіки висловлювань.
2. Структура мови алгебраїчної системи логіки висловлювань.
3. Поняття змінної і метазмінної.
4. Синтаксис метамови в S^1 .
5. Семантика метамови в S^1 .
6. Характеристика завдань, які розв'язуються засобами S^1 .
7. Структура алфавіту S^1 .
8. Визначення нелогічних термінів.
9. Характеристика логічних символів.

10. Дефініція формули.
11. Типологія формул за синтаксичними ознаками.
12. Поняття підформули.
13. Поняття степеня формули.
14. Способи розстановки дужок у формулі.
15. Визначення головного логічного знаку у формулі.
16. Порядок виконання дій над формулою.
17. Фіксація логічної форми висловлювань природної мови засобами словника S^1 .
18. Характерні особливості бездужкової логічної мови Я. Лукасевича.
19. Семантика метамови.
20. Поняття інтерпретації.
21. Правила інтерпретації Sem ML в S^1 .
22. Таблиці істинності.
23. Порядок побудови таблиці істинності.
24. Типологія формул за семантичними ознаками.
25. Тавтології і логічні закони.
26. Поняття рівносильної формули.
27. Характеристика відношення рівносильності.
28. Основні закони логіки та їхні функції.
29. Відношення сумісності за істинністю між формулами.
30. Відношення сумісності за хибністю між формулами.
31. Відношення логічного слідування.
32. Поняття нормальної форми логіки висловлювань.
33. Проблема розв'язання в S^1 .
34. КНФ, способи її отримання та задачі, які вона розв'язує.
35. ДКНФ, способи її отримання та задачі, які вона розв'язує.
36. Характерні особливості СКНФ, способи отримання та задачі, які вона розв'язує.
37. ДНФ, способи отримання та задачі, які вона розв'язує.
38. ДДНФ, способи її отримання та задачі, які вона розв'язує.

39. СДНФ, способи її отримання та задачі, які вона розв'язує.

40. Перевірити, чи є формулами логіки висловлювань такі вирази:

- а) $(p \supset q) \vee r \wedge$;
- б) $(p \vee \neg r) \supset (\neg q \wedge) \vee p$;
- в) $\neg(p \supset q) \supset r$.

41. Побудувати таблиці істинності для таких формул:

- а) $((\neg q \supset p) \vee q) \equiv q$;
- б) $((p \vee q) \vee r) \supset (\neg q \supset r)$;
- в) $(r \supset ((p \vee q) \wedge \neg r))$.

42. За допомогою таблиць істинності перевірити, чи є рівносильними формули:

- а) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \supset \neg q)$;
- б) $(\neg p \vee q) \wedge (p \supset \neg q)$;
- в) $p \supset (q \supset r) \wedge (p \wedge q) \supset r$;
- г) $\neg((p \wedge q) \vee r) \wedge (p \supset \neg q) \wedge \neg r$.

42. Установити, чи є тотожно-істинними формули:

- а) $p \supset (q \supset (p \wedge q))$;
- б) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$;
- в) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((q \supset p) \supset (r \supset p))$.

44. Наведені формули звести до КНФ:

- а) $p \supset ((p \supset q) \supset q)$;
- б) $((p \supset q) \wedge (r \supset s)) \supset ((p \wedge r) \supset (q \wedge s))$;
- в) $((p \supset q) \vee (p \supset r)) \supset (p \supset (p \vee r))$.

45. Знайти всі наслідки із засновків:

- а) $(p \wedge q), q, r$;
- б) $(\neg p \supset q), (q \supset r), (r \supset p)$.

46. Знайти всі прості наслідки із засновків:

- а) $p \vee q, q \vee r, \neg p \wedge c$;
- б) $p \supset q, p \supset c, \neg q \vee \neg c$.

47. Звести формулу до ДНФ

$$((p \vee q) \supset (\neg q \wedge r)) \equiv \neg r.$$

48. Привести до ДДНФ формулу

$$((p \supset q) \vee (r \equiv s)) \supset (\neg p \wedge s).$$

49. За допомогою СДНФ знайти всі прості гіпотези формул:

- а) $((p \vee q) \vee (p \wedge q))$;
- б) $((p \wedge \neg q) \supset r) \supset (r \vee q)$.

2.2. Числення логіки висловлювань

Числення

можна визначити як формальний апарат оперування зі знаками певного вигляду, що дозволяє описати деякий клас задач, а для окремих підкласів цього класу – й алгоритм розв'язання.

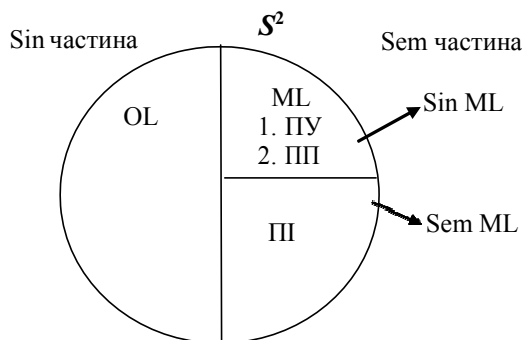
У логіці поняття числення уточнюється та конкретизується засобами строгої формалізації. Тут логічне числення задають на базі деякої формалізованої мови. Спочатку визначають набір вихідних положень, із яких за допомогою чітких правил перетворення отримують нові положення (їх називають теоремами).

Якщо до техніки числень додати інтерпретацію, яка надає значень вихідним символам і формулам, то числення перетворюються на мову, що описує конкретну предметну область. Це можуть бути числення висловлювань, або числення предикатів, або числення класів тощо.

У першому розділі ми розглядали алгебраїчну систему логіки висловлювань, яку позначали символом S^1 . Характерною особливістю цієї системи є те, що в синтаксисі метамови є лише один вид правил – *правила утворення* (ПУ).

Мова числення логіки висловлювань, крім правил утворення, включає також і *правила перетворення* (ПП). Іншими словами, до складу мови числення логіки висловлювань входять усі засоби S^1 , але тут вони набувають нового звучання та виконують інші функції.

Виходячи із вищезазначеного, структуру числень можна представити у вигляді такої схеми



2.2.1. Аксіоматичне числення логіки висловлювань

Аналізуючи пропозиційну логіку на рівні *алгебраїчної системи*, ми розглядали кожен вираз як вираз, що може набувати одного із двох значень: *істина* або *хиба*. Завдяки цьому засобами даної системи можна було розв'язувати такі задачі:

- 1) проводити демаркацію між тавтологіями й нетавтологіями;
- 2) визначати відношення логічного слідування між двома формулами;
- 3) здійснювати перевірку формул на рівносильність.

Однак, складніші задачі засобами S^1 розв'язати неможливо. Для цього необхідно залучати ефективніші логічні засоби.

Звернімося до мови аксіоматичного числення логіки висловлювань. Аксіоматичне числення логіки висловлювань позначають символом S^2 . До складу синтаксису (Sin ML) S^2 входять, крім правил утворення (як зазначалося), *правила перетворення* (ПП).

Зупинимося на характеристичі правил утворення (ПУ).

Алфавіт S^2 включає такі самі символи, що й алфавіт S^1 :

- 1) *пропозиційні символи*:

$$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots;$$

- 2) *логічні символи*:

$$\wedge, \vee, \supset, \equiv, \neg.$$

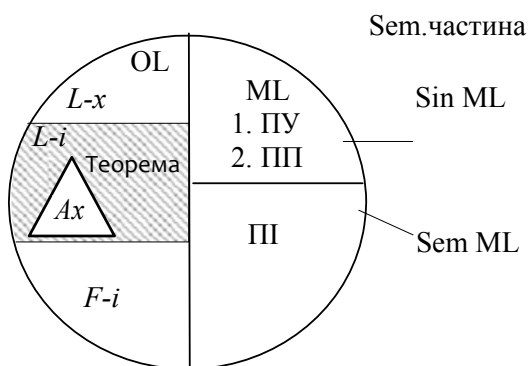
Як бачимо, за назвою – це ті самі об'єкти, що й в алфавіті S^1 , але у S^2 їх розглядають з іншого, формальнішого боку. Тут p, q, r, s – вже не сутності, здатні набувати значень *істина* або *хиба* за різних наборів значень, а певні об'єкти, що чітко відрізняються один від одного, і властивості яких явно не визначаються. Щодо логічних символів зауважимо, що тут уже не йдеться про їхнє табличне визначення.

Єдиним способом визначення пропозиційних символів і пропозиційних зв'язок є способи поводження з ними, відповідно до правил висновку.

Дефініція формули така сама, як і в S^1 . Але формула в S^2 характеризується не таблицями істинності, а ситуацією виведен-

ня (випливання). Тому тут відбувається диференціація формул не на тавтології, протиріччя та нейтральні (виконувані), а на теореми та аксіоми. Саме цю типологію висувають на передній план, а не те, що в об'єкт-мові S^2 відсутні тотожно-хибні (або протиріччя, або $L-x$) формули та нейтральні (або виконувані, або $F-i$) формули.

Усередині тотожно-істинних (або тавтологій, або $L-i$) формул відбувається розшарування на теореми та аксіоми. Вищезазначене можна проілюструвати за допомогою *схеми мови* S^2 :



Осі ПУ можна охарактеризувати в S^2 . Очевидно, що вони збігаються із ПУ в S^1 , але тут вони, природно, набувають певної специфіки.

Розглянемо *правила перетворення* (ПП). До їх складу входять:

1. Дефініція аксіоми.
2. Дефініція теореми.
3. Список аксіом.
4. Правила доведення, які включають:
 - а) правило відділення або правило модус поненс (МР);
 - б) правило підстановки (п/п);
5. Дефініція доведення.
6. Дефініція доведеної формули.

Аксіомою в S^2

називають підмножину тавтологій,
які визначаються вихідними при побудові доведення.

Не варто розглядати аксіому S^2 у традиційному розумінні як очевидну істину або істину, що не потребує доведення.

У логічному численні всі формули, у тому числі й аксіоми, розглядають безвідносно до їх можливих значень очевидно або неочевидно. Тут значення формул ураховують опосередковано.

Теореми в S^2

називають підмножину тавтологій, для яких існує доведення.

Аксіоми та теореми вичерпують усю множину тавтологій у S^2 . Ураховуючи це, аксіоматичні числення будують так, щоб клас теорем збігався із класом тавтологій. Іншими словами, S^2 своїми засобами забезпечує можливість охарактеризувати всю множину тавтологій. Саме цій змістовній вимозі підпорядкований вибір аксіом і правил висновку у S^2 .

Набір аксіом у S^2 може бути різним, але він має бути достатнім для доведення теорем у S^2 .

Як зразок візьмемо набір аксіом, запропонований німецьким ученим Давидом Гільбертом:

1. $A \supset (B \supset A)$;¹³
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;
3. $(A \wedge B) \supset A$;
4. $(A \wedge B) \supset B$;
5. $A \supset (B \supset (A \wedge B))$;
6. $A \supset (A \vee B)$;
7. $B \supset (A \vee B)$;
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$;
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;
10. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$.

Застосовуючи до наведеного набору аксіом правила доведення, можна вивести будь-яку теорему в S^2 .

Визначимо правила доведення:

Правило відділення (MP)

Якщо A та $A \supset B$ істинні, то B також істинне.

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

¹³ Зрозуміло, що тут маються на увазі аксіомні схеми.

Правило підстановки (п/п)

Нехай A – формула, яка містить змінні $p_1, p_2, \dots, p_n$.
Тоді, якщо A – істинна формула у численні висловлювань,
то, замінюючи у ній змінні $p_1, p_2, \dots, p_n$ всюди,
де вони входять довільними змінними $B_1, B_2, \dots, B_n$,
отримаємо формулу A' , що також буде істинною.

$$\frac{A(x_1, x_2, \dots, x_n)}{A'(y_1, y_2, \dots, y_n)}.$$

Доведенням

називають послідовність формул $A_1, \dots, A_n$,
де кожна із формул є або аксіомою, або доведеною раніше формулою,
або отримана за правилами доведення.

Остання формула послідовності A_n є виразом, який ще необхідно довести. Формулу A називають доказовою тоді, коли є можливість побудувати доведення, останньою формулою якого є формула A .

Факт, що *формула доказова* записують як $\vdash A$, якщо *формула не доказова*, – то як $\nvdash A$.

Розглянемо структуру доведення на прикладі доведення теореми:

$$\vdash p \supset p.$$

Доведення

- | | | |
|----|--|------------------------------------|
| 1. | $p \supset (q \supset p)$ | – $A1$ |
| 2. | $p \supset ((p \supset p) \supset p)$ | – $q/p \supset p$ за п/п до 1 |
| 3. | $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ | – $A2$ |
| 4. | $(p \supset ((p \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (p \supset p)) \supset$
$\supset (p \supset p))$ | – $q/p \supset p, r/p$ за п/п до 3 |
| 5. | $(p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p)$ | – за МР до 2, 4 |
| 6. | $p \supset (q \supset p)$ | – $A1$ |
| 7. | $p \supset (p \supset p)$ | – q/p за п/п до 6 |
| | $\vdash p \supset p$ | – за МР до 7, 5 |

Дамо деякі пояснення щодо структури доведення. Послідовність у доведенні *ліворуч* утворює *доведення теореми* $p \supset p$. Послідовність *праворуч* є *аналізом цього доведення*, тобто тут указані підстави, за якими кожен рядок включений до доведення.

Варто зважати на те, що аналіз доведення не є його частиною та може бути опущений.

Опишемо хід доведення із аксіом. Для побудови доведення формули F необхідно здійснити дії:

- 1) *виписати одну із аксіом*;
- 2) *послідовно застосувати правила підстановки (п/п) та відділення (МР)*;
- 3) *доведення є закінченим, якщо останнім виразом у послідовності формул буде F .*

Розглянемо приклад побудови доведення *теорема*:

$$\vdash (p \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q).$$

1. Візьмемо аксіому 8:

$$(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r));$$
2. Застосовуємо правило підстановки та підставимо замість r/q :

$$(p \supset q) \supset ((q \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q));$$
3. Беремо аксіому 2:

$$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r));$$
4. За правилом підстановки підставляємо замість $p/p \supset q$, замість $q/q \supset q$, замість $r/(p \vee q) \supset q$:

$$((p \supset q) \supset ((q \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q))) \supset (((p \supset q) \supset (q \supset q)) \supset ((p \supset q) \supset (p \vee q) \supset q));$$
5. Застосовуючи правило відділення (МР) до 2 і 4 рядків, дістаємо:

$$((p \supset q) \supset (q \supset q)) \supset ((p \supset q) \supset (p \vee q) \supset q);$$
6. Візьмемо формулу, раніше доведену в S^2 :

$$p \supset p;$$
7. Застосовуємо *правило підстановки* та підставимо замість p/q :

$$q \supset q;$$
8. Беремо аксіому 1:

$$p \supset (q \supset p);$$
9. Використовуючи правило підстановки, підставимо замість $p/q \supset q$ і замість $q/p \supset q$:

$$(q \supset q) \supset ((p \supset q) \supset (q \supset q));$$
10. Застосовуємо правило відділення (МР) до 6 і 8 рядків, дістанемо:

$$(p \supset q) \supset (q \supset q);$$

11. Використовуючи правило МР до 9 і 4, дістаємо:

$$\vdash (p \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q).$$

Одинадцятий рядок збігається із формулою, яку потрібно довести, отже доведення закінчено.

Наведені доведення є доведеннями із аксіом. Доведення можна розширити у тому сенсі, що воно стане доведенням не лише із аксіом, але й з деякого кінцевого числа довільних формул, які називають *припущеннями* або *гіпотезами*.

Доведенням із гіпотез $A_1, \dots, A_n$ формули B називають кінцеву послідовність формул $B_1, \dots, B_n$, кожна з яких є або аксіомою, або гіпотезою, або раніше доведеною формулою в S^2 , або отриманою із двох попередніх формул за правилом МР, причому $B_n \in B$.

Факт, що формулу B доводять із гіпотез $A_1, \dots, A_n$ записують як $A_1, \dots, A_n \vdash B$.

Іноді в літературі доведенням із гіпотез називають дедукцію (вивідність) із гіпотез, залишаючи термін доведення для позначення доведення із порожньої множини гіпотез або доведення із аксіом. Наведемо приклад цього виду доведення.

Маємо гіпотези: $p \wedge q, p \supset (q \supset r)$. Необхідно побудувати доведення із них формули r :

$$p \wedge q, p \supset (q \supset r) \vdash r.$$

Доведення

- | | | |
|----|---------------------------|----------------|
| 1. | $p \wedge q$ | – припущення 1 |
| 2. | $(p \wedge q) \supset p$ | – аксіома 3 |
| 3. | p | – МР до 1 і 2 |
| 4. | $p \supset (q \supset r)$ | – припущення 2 |
| 5. | $q \supset r$ | – МР до 3 і 4 |
| 6. | $(p \wedge q) \supset q$ | – аксіома 4 |
| 7. | q | – МР до 1 і 6 |
| 8. | r | – МР до 5 і 7 |

Отже, існує вивід r із $p \wedge q, p \supset (q \supset r)$.

Необхідно розрізняти терміни *теорема* та *метатеорема*.

Теоремами називають доказувані формули числення.

Метатеореми –

це доказувані змістовні твердження про властивості числення.

До таких фундаментальних властивостей числень належать:

- вивідність;
- розв'язуваність;
- несуперечливість;
- повнота;
- незалежність.

Кожну із цих властивостей описує відповідна метатеорема:

- про дедукцію;
- про несуперечливість;
- про розв'язуваність;
- про повноту;
- про незалежність.

2.2.2. Метатеорема про дедукцію

Уперше ця теорема була сформульована 1930 року Жаком Ербраном, тому іноді її називають *теоремою Ербрана*. Але як загальний методологічний принцип, що характеризує аксіоматично-дедуктивні системи, вона з'явилася у А. Тарського.

Формулюється метатеорема про дедукцію так:

Якщо $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B$, то $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$,
тобто, якщо із формул $A_1, \dots, A_{n-1}$ та A_n виводиться B ,
то із формул $A_1, \dots, A_{n-1}$ виводиться імплікація $A_n \supset B$.

Іншими словами,

Якщо дано доведення B із $A_1, \dots, A_{n-1}$,
то можна побудувати висновок $A_n \supset B$
на підставі цього доведення.

Вивідність формули на підставі метатеореми про дедукцію визначається трьома особливостями, які виражаються у вигляді правил:

- а) із довільних формул $A_1, \dots, A_n$ вивідна кожна із цих формул:
 $A_1, \dots, A_n \vdash A_i$ де $n \geq i \geq 1$;

б) із довільних формул $A_1, \dots, A_n$ вивідною є кожна формула, яка є вивідною в S^2 :

$$A_1, \dots, A_n \vdash R \quad (R - \text{вивідна формула в } S^2);$$

в) якщо із довільних формул $A_1, \dots, A_n$ вивідні засновки правила МР, то із них також вивідний і висновок цього модусу.

Ці особливості вивідності (дедукції) на підставі метатеореми про дедукцію стають очевидними на основі таких *семантичних міркувань*:

Перша особливість виражає властивість рефлексивності слідування:

Із засновку випливає він сам $A \models A$, оскільки $\models A \supset A$.

Друга особливість виражає властивість істинних (вивідних) формул.

Кожна істинна формула розглядається як консеквент

$L \supset$ (логічно істинної імплікації) із довільним антецедентом.

Нарешті, третя особливість фіксується у такий спосіб:

Якщо із $A_1, \dots, A_n \vdash B'$ та $A_1, \dots, A_n \vdash B' \supset B''$,
то $\models B' \supset B''$, але це можливо, коли $\vdash B''$.

Перейдемо до доведення *метатеореми про дедукцію*:

$$\frac{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B}.$$

I. B - може бути однією із формул $A_1, \dots$

A_n : 1) $B = A_1$;

2) $B = A_n$;

3) $B = A_i$ – при $n \geq i \geq 1$.

Розглянемо послідовно ці випадки.

$$1) B = A_1 \quad \frac{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B}$$

Доведення.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------|
| 1. $A \supset (B \supset A)$ | – Ах. 1 |
| 2. $A_1 \supset (A_n \supset A_1)$ | – за п/п $A/A_1, B/A_n$ |
| 3. $\vdash A_1$ | – за умовою |
| 4. $\vdash A_n \supset A_1$ | – за МР – 2,3 |

2) $B = A_n$	$\frac{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash A_n}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset A_n}$	
Доведення.	1. $A \supset A$	– теорема в S^2
	2. $A_n \supset A_n$	– за п/п A/A_n
	3. $\vdash A_n \supset A_n$	– за властивістю $\vdash R$ в S^2
3) $B = A_i$	$\frac{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash A_i}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset A_i}$	
Доведення.	1. $A \supset (B \supset A)$	– Ах. 1
	2. $A_i \supset (A_n \supset A_i)$	– за п/п $A/A_i, B/A_n$
	3. $\vdash A_i$	– за умовою
	4. $\vdash A_n \supset A_i$	– за МР – 2,3

II. B - може бути вивідною формулою в S^2 ($\vdash R$):

$$\frac{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash R}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n A_{n-1} R}.$$

Цей випадок є очевидним.

III. B -може бути консеквентом вивідної імплікації, що має вигляд правила *modus ponens*:

$$\frac{\vdash [B' \wedge (B' \supset B'')] \supset B''}{\frac{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B''}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B'}},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (B' \supset B'')}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B''}.$$

Доведення

1. $A \supset (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ – Ах. 2
2. $A_n \supset (B' \supset B'') \supset ((A_n \supset B') \supset (A_n \supset B''))$ – за п/п $A/A_n, B/B', C/B''$
3. $\vdash A_n \supset (B' \supset B'')$ – за умовою
4. $(A_n \supset B') \supset (A_n \supset B'')$ – за МР – 2,3
5. $\vdash A_n \supset B'$ – за умовою
6. $\vdash A_n \supset B''$ – за МР – 4,5

Розглянуті варіанти доведення метатеорема про дедукцію показують, що вона описує одну із фундаментальних властивостей числень, суть якої полягає у тому, що

*Доведена формула із множини засновків,
з'єднуючись через імплікацію
із будь-яким із цих засновків чи їх комбінацією,
також буде доведеною.*

2.2.3. Металогічні принципи в S^2

Властивості розв'язання, несуперечливості,
повноти та незалежності називають
металогічними принципами.

Аналізують ці принципи через доведення відповідних метатеорем.

Розглядаючи **принцип розв'язання**, зауважимо, що *логічна мова повинна мати процедуру, яка дозволяє ефективно – кінцевим числом кроків установити, є дана формула логічним законом чи ні.*

Особливість принципу розв'язання в аксіоматичному численні висловлювань пов'язана з тим, що при аксіоматизації логіки висловлювань головним завданням є систематизація логічних законів. Множина законів задається тут не у вигляді сукупності, а у вигляді виведення їх із деяких вихідних законів за допомогою правил висновку. Іншими словами, в аксіоматичному численні висловлювань розв'язуюча процедура для конкретних формул забезпечується побудовою їх доведення.

Опишемо принцип розв'язання через доведення відповідних метатеорем (MT).

$$MT_1 - \vdash A \Rightarrow \Vdash A$$

якщо A доведене, то тотожно-істинне A .

$$MT_2 - \nVdash A \Rightarrow \neg \vdash A^{14}$$

якщо A не тотожно-істинне, то й не доведене A .

$$MT_3 - \Vdash A \Rightarrow \vdash A$$

якщо A тотожно-істинне, то й доведене A .

$$MT_4 - \neg \vdash A \Rightarrow \nVdash A$$

якщо A не доведене, то й не тотожно-істинне A .

¹⁴ У формулюванні та доведенні мета теорем використовуються символи $\Rightarrow$ для позначення метамовної імплікації і $\neg$ – для метамовного заперечення.

Розглянемо по чергово кожну із наведених метатеорем.

$$\text{MT}_1 \vdash A \Rightarrow \Vdash A.$$

Із наведеної вище структури S^2 очевидно, що множина тавтологій включає в дві підмножини: *аксіоми* та *теореми*.

Відомо, що якщо $\Vdash A$ та $\Vdash A \supset B$, то $\Vdash B$, тобто правило висновку забезпечує зберігання властивості *бути тавтологією*. Тоді, якщо кожна аксіома – це тавтологія та правило висновку зберігає властивість *бути тавтологією*, то у силу визначення поняття «доведення» кожна теорема є тавтологією.

$$\text{MT}_2 \vdash \Vdash A \Rightarrow \vdash A.$$

Доведення

1. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ – A10
2. $(\vdash A \supset \Vdash A) \Rightarrow (\neg \Vdash A \supset \neg \vdash A)$ – п/п к 1: $A/\vdash A, B/\Vdash A$
3. $\vdash A \Rightarrow \Vdash A$ – MT_1
4. $\vdash \Vdash A \Rightarrow \vdash A$ – МР до 2,3

$$\text{MT}_3 \Vdash A \Rightarrow \vdash A.$$

Ця метатеорема приймається як очевидна.

$$\text{MT}_4 \vdash \vdash A \Rightarrow \vdash \Vdash A.$$

Доведення

1. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ – A10
2. $(\Vdash A \Rightarrow \vdash A) \Rightarrow (\neg \vdash A \Rightarrow \neg \Vdash A)$ – п/п до 1: $A/\Vdash A, B/\vdash A$
3. $\Vdash A \Rightarrow \vdash A$ – MT_3
4. $\vdash \vdash A \Rightarrow \vdash \Vdash A$ – МР до 2,3

Таким чином, через доведення $\text{MT}_1 - \text{MT}_4$ ми показали, що в S^2 множина вивідних формул збігається із множиною тавтологій.

Принцип несуперечливості формулюють щодо:

- теорем;
- правил висновку;
- елементів алфавіту.

Логічна система несуперечлива,
якщо клас теорем не збігається із класом
правильно побудованих виразів (ППВ).

Логічна система несуперечлива,
якщо існує принаймні один ППВ, який не є тавтологією.

Логічна система несуперечлива,
якщо не всі ППВ є теоремами.

Ми навели різні варіанти дефініції MT_5 . За суттю вони ідентичні, відмінність є лише у словесному вираженні.

Доведення MT_5

Візьмемо довільну формулу, яка не є тавтологією: $A \supset B$ (те, що формула не є тавтологією, очевидно із її таблиці істинності).

1. $\neg \vdash A \supset B$
2. $\neg \vdash (A \supset B) \supset \neg \vdash (A \supset B)$ — MT_2
3. $\neg \vdash (A \supset B)$ — МР до 1,2
4. $(A \wedge \neg A) \supset B$ — теорема (із хибного випливає все, що завгодно)
5. $(A \wedge \neg A) \Rightarrow \vdash (A \supset B)$ — п/п до 4: $B/\vdash (A \supset B)$
6. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ — $A10$
7. $[(A \wedge \neg A) \Rightarrow \vdash (A \supset B)] \Rightarrow \neg \vdash [\neg \vdash (A \supset B) \Rightarrow \neg (A \wedge \neg A)]$ — п/п до 6: $A/A \wedge \neg A, B/\vdash A \supset B$
8. $\neg \vdash (A \supset B) \Rightarrow \neg (A \wedge \neg A)$ — МР до 5,7
9. $\neg (A \wedge \neg A)$ — МР до 3,8

Отже, в S^2 неможлива ситуація $A \wedge \neg A$.

Наслідком MT_5 є семантичне формулювання несуперечливості:

Якщо принаймні один ППВ недоказовий, то жодна теорема не є логічним протиріччям.

У синтаксичному смислі система S^2 несуперечлива щодо перетворень, якщо в ній неможливо довести A та довести $\neg A$.

Доведення цього положення дається двома метатеоремами:

MT_6 (пряма)

Якщо вивідне A , то невірно, що вивідне $\neg A$:

$\vdash A \Rightarrow \neg \vdash \neg A$.

Доведення

1. $\vdash A$ — припущення
2. $\vdash A \Rightarrow \Vdash A$ — MT_1
3. $\Vdash A$ — МР до 1, 2
4. $\Vdash A \Rightarrow \neg \Vdash \neg A$ — за таблицею істинності для заперечення
5. $\neg \Vdash \neg A$ — МР до 3, 4
6. $\neg \Vdash \neg A \Rightarrow \neg \vdash \neg A$ — MT_2
7. $\neg \vdash \neg A$ — МР до 5, 6

MT₇ (обернена)

Якщо в S^2 вивідне $\neg A$, то невірно, що вивідне A :
 $\vdash \neg A \Rightarrow \neg \vdash A$.

Доведення

1. $\vdash \neg A$ — припущення
2. $\vdash \neg A \Rightarrow \Vdash \neg A$ — MT_1
3. $\Vdash \neg A$ — МР до 1, 2
4. $\neg \Vdash A$ — за таблицею істинності для заперечення
5. $\neg \Vdash A \Rightarrow \neg \vdash A$ — MT_2
6. $\neg \vdash A$ — МР до 4, 5

У семантичному сенсі ці дві метатеореми свідчать, що в S^2 немає двох таких теорем, одна із яких є запереченням іншої. У кінцевому рахунку, несуперечливість обумовлена прийнятими правилами висновку в S^2 . Це такі правила, на основі яких здійснювані перетворення із тавтологій породжують тавтології.

Несуперечливість щодо елементів алфавіту
 (пропозиційних змінних):

- а) у синтаксичному розумінні жодна окрема пропозиційна змінна не є теоремою, тобто недоказова;
- б) у семантичному розумінні жодна окрема пропозиційна змінна не є тавтологією.

Формула, що складається з однієї пропозиційної змінної, набуває значення i або x , тобто є F -істиною, отже не є теоремою, тобто недоказова.

Принцип повноти характеризує дві властивості формалізованих мов:

- засобів мови;
- дедуктивних засобів мови.

Відповідно до цього розрізняють повноту мови:

- 1) функціональну;
- 2) дедуктивну.

Якщо йдеться про функціональну повноту засобів мови, то, перш за все, мають на увазі повноту логічних сполучників.

Відомо, що в S^1 група логічних сполучників має бути достатньою для вираження всіх із п'яти сполучників або множини ППФ, де є ці сполучники. Але, у групі сполучників ($\&$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\neg$) виділяють деякі базисні, вихідні до яких можна звести решту сполучників. Саме таку групу називають *функціонально повною*.

В S^1 функціонально повними є:

1. $(\wedge, \vee, \neg)$; 2. $(\wedge, \neg)$; 3. $(\vee, \neg)$; 4. $(\supset, \neg)$.

На відміну від S^1 у S^2 функціональна повнота характеризується через групу аксіом і правил висновку. У різних аксіоматичних системах можуть бути прийняті різні групи аксіом і ПВ.

Дедуктивна повнота характеризує властивості засобів побудови доведення. В S^2 такими засобами є аксіоми та правила висновку.

MT₈

Система S^2 дедуктивно повна, якщо у ній
для будь-якої формули B доказово, що:

- 1) або B вивідне $\vdash B$;
- 2) або приєднання B до системи аксіом робить її суперечливою.

Доведення

1. Припустимо, що B має вигляд $A \supset B$.
2. За допомогою таблиці істинності показуємо, що $A \supset B$ не є тавтологією

$$\neg \models (A \supset B).$$

3. $\neg \models (A \supset B) \Rightarrow \neg \vdash (A \supset B)$ — MT₂
4. $\neg \vdash (A \supset B)$ — МР до 2, 3
5. Приєднаємо $A \supset B$ до системи аксіом в S^2 .

6. Застосуємо до нової аксіоми $A \supset B$ правило підстановки так, щоб замість A підставити тавтологію, а замість B – протиріччя:

$$\begin{aligned} A/A \supset A \quad B/\bot (B \supset B); \\ (A \supset A) \supset \bot (B \supset B). \end{aligned}$$

Позначимо цю формулу символом $\vdash \Sigma$. Вона вважається доведеною, оскільки отримана за правилом підстановки із аксіоми.

7. Але, відповідно до таблиці істинності, вона є тотожно-хибною.

8. Якщо $\Sigma - \bot \Vdash$, то $\bot \Sigma - \Vdash$ (за табличним визначенням заперечення): $\Vdash \bot \Sigma$.

$$9. \Vdash \bot \Sigma \Rightarrow \vdash \bot \Sigma \quad - \text{MT}_3$$

$$10. \vdash \bot \Sigma \quad - \text{MP до 8, 9}$$

Отже, виходить, якщо до нашої системи аксіом додати довільну формулу $A \supset B$, то вивідними будуть Σ і $\bot \Sigma$, а це свідчить про суперечливість отриманої логічної системи. Цим самим встановлено, що сама по собі система S^2 є несуперечливою, отже, дедуктивно повною.

Принцип незалежності. Термін *незалежність* уживають у логіці для характеристики відношення між структурними утвореннями формалізованої мови щодо:

- окремих аксіом;
- системи аксіом;
- правил висновку.

MT₉

Аксіома, яка не є вивідною із прийнятої в S^2 системи аксіом, вважається незалежною.

Проілюструємо, що аксіома $(A \& B) \supset A$ є незалежною:

1. Припустимо, що $A \& B \supset A$ не вивідна із аксіом S^2 . Якщо це так, то $\bot \Vdash$, тобто набуває значення, відмінного від значень решти аксіом.

2. Надамо цій аксіомі інтерпретації, відмінної від інтерпретації решти аксіом. Для цього зумовимо кон'юнкцію такою кон-

статацією: $A \wedge B = B$, тобто якого значення набуває B , такого значення набуває $A \wedge B$.

3. Відповідно до цього аксіома набуде вигляду $B \supset A$.

4. $B \supset A$ не є $\models$ (згідно із таблицею істинності для імплікації).

За такої інтерпретації $\wedge$ можна гарантувати, що аксіоми, у структурі яких відсутня кон'юнкція, залишаються тавтологіями.

Нас цікавить, як поведуться аксіоми, у структурі яких є $\&$:

- | | | |
|----|---|-----------------------------|
| а) | 1. $(A \wedge B) \supset B$ | – $A4$ |
| | 2. $\models (B \supset B)$ | – п/п: $A \wedge B/B$ до 1а |
| б) | 1. $A \supset (B \supset (A \wedge B))$ | – $A5$ |
| | 2. $\models A \supset (B \supset B)$ | – п/п: $A \wedge B/B$ до 1б |

Отже, усі аксіоми, крім $(A \wedge B) \supset A$, залишаються тавтологіями, незважаючи на ті дефініції, які над ними здійснювалися. А це означає, що вона є незалежною.

Аналізом металогічних принципів завершується ознайомлення з аксіоматичним численням логіки висловлювань.

2.2.4. Натуральне числення логіки висловлювань

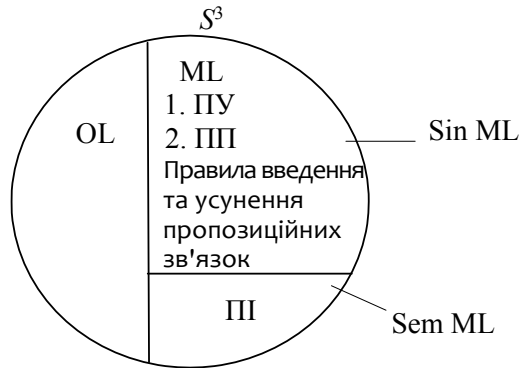
Натуральним численням логіки висловлювань
називають такий вид числення,
в якому висновок будують із гіпотез (припущень)
відповідно до певних правил.

Позначають цей вид числень символом S^3 .

До S^3 повністю входять засоби S^1 : *алфавіт, правила утворення, правила інтерпретації нелогічних і логічних термінів*. Крім того, до S^3 входять 14 правил висновку.

Якщо в аксіоматичному численні логіки висловлювань ми маємо набір аксіом і кілька правил висновку, то тут дедуктику (а це правила перетворення) складають правила введення й усунення пропозиційних зв'язок.

Структуру S^3 можна подати схематично:



Логічне числення у вигляді натурального висновку має такі особливості:

а) назва цього числення – *натуральне* характеризується тим, що в ньому процес виведення висновку більш наближений до звичайних міркувань людини.

Натуральне вживається не в смислі *неформальне, нерегламентоване* строгими правилами, а в смислі *отримання наслідку* із *довільних припущень* (гіпотез), а не із аксіом;

б) перевагою S^3 над S^2 вважається те, що тут процес виведення наслідку коротший.

Відомо, що в S^2 одна й та сама формула у структурі доведення може зустрічатися кілька разів, що рідко трапляється в S^3 ;

в) в S^3 відбувається певна систематизація правил висновку. Із кожною пропозиційною зв'язкою зіставляється одне правило введення й усунення конкретної зв'язки як головного знаку формули (наявність двох правил УК (усунення кон'юнкції), ВД (введення диз'юнкції), УЕ (усунення еквіваленції) не є суттєвим).

Варто мати на увазі, що група правил введення пропозиційних зв'язок є фактично їх визначенням, а група правил усунення пропозиційних зв'язок – наслідком цих визначень.

При усуненні конкретного знаку формула, якої це стосується, і знак, про який ідеться, можуть використовуватися лише в тому значенні, яке вони отримують при введенні даного знаку. Наприклад, формулу $A \supset B$ можна ввести, якщо наявний висновок B із припущення A , тобто якщо правильно $A \vdash B$.

Застосовуючи до формули $A \supset B$ правило УІ (усунення імплікації), ми діємо так, якби B було вивідним із доведеного A , а це можливо, оскільки формула $A \supset B$ у засновку застосування правила УІ реєструє існування висновку B із A .

Систематизація правил введення й усунення пропозиційних зв'язок належить відомому німецькому математику та логіку Герхарду Генцену (1909 – 1946). Іноді натуральні числення називають *генценівськими* численнями.

Запишемо *правила висновку* для S^3 :

- | | |
|---|---|
| $1. \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \quad (\text{BI})$ | $2. \frac{A, A \supset B}{\quad} \quad (\text{UI})$ |
| $3. \frac{A, B}{A \wedge B} \quad (\text{BK})$ | $4. \frac{A \wedge B; A \wedge B}{\quad} \quad (\text{UK})$ |
| $5. \frac{A \wedge B}{A}; \frac{A \wedge B}{B} \quad (\text{BD})$ | $6. \frac{\Gamma, A \vdash C, \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \quad (\text{UD})$ |
| $7. \frac{\Gamma, A \vdash B, \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \quad (\text{B3})$ | |
| $8. \frac{\neg \neg A}{A} \quad (\text{УПЗ})$ | $\frac{\neg A}{A} \quad (\text{слабке УЗ})$ |
| $9. \frac{A \supset B, B \supset A}{A \equiv B} \quad (\text{BE})$ | $\frac{A \equiv B, A \equiv B}{A \supset B, B \supset A} \quad (\text{UE})$ |

Над ризикою у кожному правилі записано *засновки*, а під ризикою – *резюме застосування правил*. Кожне правило містить один висновок, у той час, як засновків може бути кілька (одно-, двозасновкові тощо).

Усі *правила введення* вводять відповідну зв'язку до висновку застосування правила, а кожне *правило усунення* усуває відповідну зв'язку із засновків. Виняток становить лише правило УД: диз'юнкція $A \vee B$ скоріше тут *вводиться*, ніж *усувається*. Але це правило можна записати у непарадоксальному вигляді:

$$\frac{A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}.$$

Із записів низки правил введення й усунення пропозиційних зв'язок очевидно, що в них використовується знак вивідності $\vdash$, який вважається вихідним. За Генценом, цього можна уникнути:

$$\frac{B}{A \supset B} \quad (\text{BI}) \qquad \frac{A \vee B \vee C}{C} \quad (\text{UD}) \qquad \frac{B \neg B}{\neg A} \quad (\text{B3})$$

Квадратні дужки вказують на те, що в них містяться припущення (або гіпотези).

У нашій системі S^3 вважатимемо знак $\vdash$ вихідним. При використанні цього знаку в наступних доведеннях і дедукціях мають на увазі такі його властивості:

- а) $A \vdash A$ – *рефлексивність вивідності*;
- б) якщо $\Gamma \subseteq \Delta$ і $\Gamma \vdash A$, то $\Delta \vdash A$ (де Γ і Δ – довільні послідовності формул, A – формула).

Ця властивість фіксує той факт, що якщо A вивідна із множини засновків, то вона залишається вивідною, якщо до Γ додати додаткові засновки. Іншими словами, якщо $A \vdash B$, то $C, A \vdash B$;

- в) $\Gamma \vdash A$ тоді й тільки тоді, коли в Γ існує кінцева підмножина формул Δ , для якої $\Delta \vdash A$;

- г) якщо $\Delta \vdash A$ та $\Gamma \vdash B$ для будь-якої формули B із Δ , то із $\Gamma \vdash A$. Іншими словами, якщо $A \vdash B$ і $B \vdash C$, то $A \vdash C$ (транзитивність $\vdash$).

Власне ці властивості знаку вивідності $\vdash$ справедливі й для S^2 .

Тепер розглянемо дефініцію доведення в S^3 .

На відміну від правил висновку у S^2 , які застосовуються тільки для виведення доведених виразів із доведених, у натуральному численні правила висновку можуть бути застосовані до будь-якого ПП-виразу.

Вираз, що впливає за якимось правилом із доведеного виразу, тим самим є доведеним.

Але вираз, що впливає із недоведеного виразу, ще не доведений.

У цьому випадку необхідно звільнитися якимось чином від використовуваних припущень. У наведених правилах висновку для S^3 тільки двом правилам притаманна властивість звільнення від припущень: ВІ і ВЗ, адже тільки вони усувають гіпотезу A зі списку гіпотез.

Оскільки в S^3 немає аксіом, то доведення тут базується або на правилі введення імплікації, або на правилі введення заперечення.

Якщо останнім застосовується правило ВІ, то висновок буде прямим, а якщо – ВЗ, то висновок буде непрямым.

Доведення в S^3 починають із припущень, а далі за правилами висновку отримують із них відповідні наслідки, після чого за

допомогою правил ВІ та ВЗ елімінують (усувають) припущення. Тому в S^3 вихідним є поняття доведення із припущень (гіпотез), а поняття безумовного доведення – похідним.

Вивідність із припущень

Формула B вивідна із припущень Γ, A символічно:

$$\Gamma, A \vdash B,$$

якщо й тільки якщо:

- 1) існує правило висновку, в якому Γ та A є засновками, а B – висновком цього правила;
або
- 2) існує деяка кінцева послідовність застосування правил висновку $A_1, \dots, A_n$, в якій засновками застосування кожного правила є або формули із Γ, A , або наслідки попередніх (у даній послідовності) застосувань правил, і наслідком останнього застосування правила є формула B .

При цьому дозволяється використовувати властивості знака $\vdash$.

Гіпотезу називають усуненою у ході дедукції,

якщо у процесі дедукції до цієї гіпотези (або наслідку із неї) застосовується правило ВІ або ВЗ.

Доведенням формули A

називають дедукцію із деякої кінцевої множини гіпотез, у ході якої кожна із гіпотез усувається.

Здійснимо доведення деяких теорем пропозиційного числення за допомогою натурального висновку.

Для побудови доведення теореми в S^3 необхідно виконати дії:

- 1) *вписати всі можливі припущення*, виходячи зі структури даної формули;
- 2) *застосувати до вписаних припущень відповідні правила висновку* із 14 правил, що входять до дедуктики S^3 ;
- 3) *застосувати одне із правил* (ВІ або ВЗ) для елімінації припущень.

Користуючись цими настановами, перейдемо до доведення конкретних теорем.

Теорема 1. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

Доведення

1. $A \supset B$

– припущення 1

- | | |
|--|----------------|
| 2. $B \supset C$ | – припущення 2 |
| 3. A | – припущення 3 |
| 4. B | – УІ до 1, 3 |
| 5. C | – УІ до 2, 4 |
| 6. $A \supset C$ | – ВІ до 3, 5 |
| 7. $(B \supset C) \supset (A \supset C)$ | – ВІ до 2, 6 |
| 8. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ | – ВІ до 1, 7 |

Теорема 2. $(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$

Доведення

- | | |
|--|----------------|
| 1. $(A \supset B)$ | – припущення 1 |
| 2. $(C \supset A)$ | – припущення 2 |
| 3. C | – припущення 3 |
| 4. A | – УІ до 2, 3 |
| 5. B | – УІ до 1, 4 |
| 6. $(C \supset B)$ | – ВІ до 3, 5 |
| 7. $(C \supset A) \supset (C \supset B)$ | – ВІ до 2, 6 |
| 8. $(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$ | – ВІ до 1, 7 |

Теорема 3. $(A \supset B) \supset ((C \wedge A) \supset (C \wedge B))$

Доведення

- | | |
|--|----------------|
| 1. $A \supset B$ | – припущення 1 |
| 2. $C \wedge A$ | – припущення 2 |
| 3. C | – УК до 2 |
| 4. A | – УК до 2 |
| 5. B | – УІ до 1, 4 |
| 6. $C \wedge B$ | – ВК до 3, 5 |
| 7. $(C \wedge A) \supset (C \wedge B)$ | – ВІ до 2, 6 |
| 8. $(A \supset B) \supset ((C \wedge A) \supset (C \wedge B))$ | – ВІ до 1, 7 |

Теорема 4. $(A \supset B) \supset ((A \wedge C) \supset (B \wedge C))$

Доведення

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. $A \supset B$ | – припущення 1 |
| 2. $A \wedge C$ | – припущення 2 |
| 3. A | – УК до 2 |
| 4. C | – УК до 2 |
| 5. B | – УІ до 1, 3 |
| 6. $B \wedge C$ | – ВК до 4, 5 |

7. $(A \wedge C) \supset (B \wedge C)$ – ВІ до 2, 6
 8. $(A \supset B) \supset ((A \wedge C) \supset (B \wedge C))$ – ВІ до 1,7

Теорема 5. $(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$

Доведення

1. $A \supset B$ – припущення 1
 2. A – припущення 2
 3. B – ВІ до 1,2
 4. $C \vee B$ – ВД до 3
 5. C – припущення 3
 6. $A \supset B, C \vee A \vdash C \vee B$ – УД⁴ до (1, 2, 4) і (1, 5, 4)
 7. $(A \supset B) \supset (C \vee A) \supset C \vee B$ – ВІ до 6
 8. $\vdash (A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$ – ВІ до 7

У такий спосіб будують доведення будь-якої теореми в S^3 .

Отже, у численнях логіки висловлювань виділяють дві формально логічні теорії: S^2 і S^3 , основна різниця яких полягає в їхній дедуктивній логіці або у дедуктиці.

Запитання для самоконтролю

1. Поняття числення у логіці.
2. Структура S^2 .
3. Порівняльна характеристика систем S^1 і S^2 .
4. Алфавіт S^2 .
5. Правила перетворення в S^2 .
6. Аксиоми й теореми в S^2 .
7. Правила доведення в S^2 .
8. Дефініція доведення.
9. Дефініція доказової формули.
10. Структура доведення в S^2 .
11. Хід доведення із аксіом.
12. Розширене поняття доведення в S^2 .
13. Поняття "теорема" та "метатеорема".
14. Метатеорема про дедукцію.
15. Варіанти доведення метатеореми про дедукцію.
16. Металогічні принципи в S^2 .
17. Принцип розв'язання.

18. Принцип несуперечності.
19. Принцип повноти.
20. Принцип незалежності.
21. Загальна характеристика натурального числення висловлювань S^3 .
22. Структура S^3 .
23. Правила висновку в S^3 .
24. Дефініція доведення в S^3 .
25. Прямі та непрямі доведення в S^3 .
26. Хід побудови доведення в S^3 .
27. Довести вивідність формул:
 - а) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;
 - б) $(A \wedge (A \supset B)) \supset B$;
 - в) $(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$;
 - г) $(A \vee (B \wedge C)) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$;
 - д) $A \supset (B \supset (A \wedge B))$;
 - е) $A \supset (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;
 - ж) $(A \supset B) \supset ((C \supset D) \supset ((A \vee C) \supset (B \vee D)))$.

Розділ 3

ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

Проаналізована у першій частині класична логіка висловлювань є специфічною логічною теорією. Засобами цієї логічної теорії можливо виділити досить вузьку множину тавтологій. У її межах обґрунтовується правильність доволі обмеженої групи дедуктивних міркувань.

Основною причиною такої ситуації є недостатньо виразні можливості логіки висловлювань. Відомо, що, розв'язуючи у межах логіки висловлювань питання про логічну істинність висловлювань, правильність чи неправильність міркувань, відволікаються від внутрішньої структури простих висловлювань, замінюючи їх пропозиційними змінними. Але нерідко виникає ситуація, за якої логічну істинність висловлювань, правильність міркувань неможливо дослідити без урахування внутрішньої структури простих висловлювань.

Наприклад, *Будь-який підручник є книгою. Отже, деякі книги є підручниками.* Правильність такого міркування залежить не тільки від зв'язків між висловлюваннями, але й від внутрішньої структури самих висловлювань.

Ефективний аналіз висловлювань і міркувань такого типу потребує використання мов із виразнішими можливостями. Такою мовою є мова класичної логіки предикатів.

3.1. Алгебраїчна система логіки предикатів

Цю частину логіки предикатів, як своєрідну формально-логічну теорію, позначають символом S^4 .

Засобами S^4 здійснюється типологія формул за синтаксичними та семантичними ознаками, систематизуються закони логіки предикатів, визначаються основні види логічних відношень між формулами, описується процедура розв'язання.

3.1.1. Мова алгебраїчної системи логіки предикатів

Знайомство з S^4 розпочнемо із Sin ML. Синтаксис метамови алгебраїчної системи логіки предикатів містить:

- *список вихідних символів*;
- *дефініцію терму*;
- *дефініцію формули*.

Розглянемо по чергово кожен із компонентів.

До вихідних символів належать:

а) *предметні змінні* – $x_1, x_2, \dots, x_n$ (потенційно нескінченна множина);

б) *предметні константи* – $a_1, a_2, \dots, a_n$ (кінцева або нескінченна множина; є мови, де символи такого рангу не вводять);

в) *предикатні символи* (предикатори різних місткостей, на які вказують верхні числові індекси):

$$\begin{aligned} P_1^1, P_2^1, \dots \\ P_1^2, P_2^2, \dots \\ \dots\dots\dots \\ P_1^n, P_2^n, \dots \end{aligned}$$

(для зручності використовуватимемо предикатні символи P, Q, R, S і за необхідності – верхні індекси для вказівки місткості);

г) *знаки предметних функцій* (предметні функтори різних місткостей):

$$\begin{aligned} f_1^1, f_2^1, \dots \\ f_1^2, f_2^2, \dots \\ \dots\dots\dots \\ f_1^n, f_2^n, \dots \end{aligned}$$

д) *логічні терміни* $\neg, \&, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists$;

е) *технічні знаки* $, , ; , ()$ – кома, крапка із комою, ліва та права дужки.

Дефініція терму:

1. Будь-яка предметна змінна та предметна константа є термом.

Дефініція формули:

2. Якщо $t_1, t_2, \dots, t_n$ – терми, а f^n – n -місний функтор, то $f^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ також є термом.
3. Ніщо, крім указанного в пунктах 1 і 2, не є термом.
 - а) якщо $t_1, t_2, \dots, t_n$ – терми та P^n – n -місна предикаторна змінна, то $P^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ є формулою;
 - б) якщо A та B – формули, то $A \wedge B, A \vee B, A \supset B, A \equiv B, \neg A$ – також формули;
 - в) якщо x – предметна змінна та A – формула, то $\forall xA$ та $\exists xA$ є формулами.
4. Ніщо, крім вказаного в пунктах 1-3, не є формулами.

У дефініціях терму та формули використано $t_1, t_2, \dots, t_n, f, P, A, B, x$ – символи метамови, які є синтаксичними змінними, що мають значеннями вирази відповідних категорій об'єктної мови. Формули A та B у дефініції формули називають підформулами відповідних формул.

Вважають, що введені визначення вихідного символу, терму та формули є ефективними або рекурсивними.

Під *рекурсивністю* поняття розуміють існування чіткого способу, за допомогою якого завжди можна встановити, є даний символ вихідним, термом чи формулою.

Введемо поняття *зв'язаної змінної* та *вільної змінної*.

Індивідна змінна, яка входить до області дії квантора за цією змінною, зв'язується цим квантором.

Таке входження називають **зв'язаним**.

Змінну, яка не входить до дії відповідного квантора, називають **вільною**,

а її входження до формули – **відмінним входженням**.

Одна й та сама змінна у конкретній формулі може мати зв'язане та вільне входження. Наприклад,

$$\forall x(P(x) \supset Q(y)) \vee \exists z(R(x, z) \wedge Q(y)).$$

Справжніми змінними є тільки вільні змінні.

Зв'язані змінні називають **фіктивними**.

У загальному розумінні змінна – це те, замість чого можна підставити одне із його значень і дістати осмислене висловлювання. Вільні змінні задовольняють цю умову, а зв'язані – ні. Наприклад, якщо a є одним із значень змінної x і $P(x)$ має смисл, то $P(a)$ також матиме смисл. За цих умов і $\forall xP(x)$ має смисл, а вираз $\forall xP(a)$ смислу не має. Цим самим підкреслюється фіктивний характер входження x та y до формул

$\forall xP(x)$ та $\forall yP(y)$, які означають одне й те саме:

Усі x (відповідно, y) мають властивість P .

Їх різниця полягає у фіктивних змінних: вони по-різному виражають одне й те саме висловлювання. Такі формули називають конгруентними (подібними). Виходячи із цього, можна сформулювати *правило перейменування зв'язаних змінних*

Усі зв'язані входження змінної x до формули
можна замінити входженням іншої змінної,
при цьому отримаємо формулу, конгруентну вихідній.

Наприклад, маємо формулу:

$$P(x) \vee \exists xP(x).$$

Замінімо в ній зв'язану індивідну змінну x на індивідну змінну y . Дістанемо формулу, яка буде конгруентна даній:

$$P(x) \vee \exists yP(y).$$

Якщо формула або терм не мають вільних змінних,
то їх відповідно називають

замкненою формулою та **замкненим термом**.

Зауважимо, що S^4 є мовою *першопорядкової логіки предикатів*, в якій дозволяється зв'язувати квантором лише предметні змінні. Систему S^4 можна розширити за рахунок введення предметно-функціональних і предикаторних змінних і дозволити їх квантифікувати. Тоді матимемо мову логіки предикатів більш високого порядку. Наприклад, логічною формою висловлювання *Деякі риси вчення Платона притаманні вченню Арістотеля* буде

$$\exists P(P(a) \wedge P(b)),$$

де P – предикаторна змінна, що пробігає множиною властивостей, а предметним константам a та b відповідають імена *Платон* та *Арістотель*.

Мову логіки предикатів першого порядку можна модифікувати іншим чином. Запишемо в списку нелогічних символів лише предметні змінні. Замість предметних констант введемо конкретні імена, замість предметно-функціональних констант – предметні функтори, замість предикаторних констант – предикатори природної мови. Перетворення термів і формул зберігається, із тією лише різницею, що там, де раніше йшлося про параметри відповідних видів, тепер маються на увазі нелогічні терміни природної мови. Отриману внаслідок такої перебудови мову називають *прикладною першопорядковою мовою логіки предикатів*.

Для мови логіки предикатів характерним є префіксне застосування предметно-функціональних символів у складних термах і предикаторних символів в атомарних формулах

$$(f^n(t_1, t_2, \dots, t_n), P^n(t_1, t_2, \dots, t_n)).$$

У природній мові префіксне застосування предметних функторів і предикаторів зустрічається рідко, тому прикладна мова логіки предикатів може бути наближена до природної мови за рахунок відмови від обов'язкового префіксного використання предметно-функціональних і предикаторних символів. Наприклад, запис *Квадрат* $(t)^n$ можна замінити на більш звичний – t^2 , запис *давньогрецький філософ* (t) – на t – *давньогрецький філософ*; запис *Сучасник* (t_1, t_2) – на t_1 – *сучасник* t_2 .

3.1.2. Семантика алгебраїчної системи логіки предикатів

Зупинимось на характеристиці семантики S^4 . Вихідним етапом у побудові будь-якої логічної теорії є задання множини допустимих інтерпретацій її нелогічних символів – вказати, які типи об'єктів можуть бути зіставлені як значення нелогічних термінів різних категорій.

Якщо у класичній логіці висловлювань кожній пропозиційній змінній зіставляється один із двох абстрактних об'єктів *істина* або *хиба*, то у логіці предикатів процедурі інтерпретації нелогічних термінів передуює вибір деякої непорожньої множини, яка називається *областю інтерпретації* або *універсумом розгляду* (мір-кування).

Єдина умова, яку висувають до області інтерпретації (позначимо її символом U) – це непорожність U (наявність принаймні одного елементу). Таким чином, у логіці предикатів як універсум розгляду може виступати довільна непорожня множина (напр., множина міст, зірок, історичних подій, людей тощо).

Інтерпретація нелогічних символів в S^4 релятивізується щодо деякого, наперед вибраного універсуму U . Символам нелогічних термінів як значень зіставляють лише об'єкти, задані відповідним чином на множині U .

Як зазначалося, нелогічні терміни в S^4 поділяють на константи (предметні, предметно-функціональні та предикаторні) та змінні. Установлено, що константи не можуть зв'язуватися кванторами. Змінні (а їх в S^4 один вид – предметні) зв'язуються кванторами. Вільні входження предметних змінних не є із змістовного погляду параметрами конкретних імен, а виконують, по суті, роль невизначених займенників, які можна замінювати різними іменами.

Приписування значень нелогічним константам у S^4 здійснюється за допомогою спеціальної семантичної функції, яку називають інтерпретаційною. Позначають її символом I .

Роль функції I полягає в зіставленні кожній нелогічній константі деякого об'єкта, що заданий на області інтерпретації U .

Причому константам різного виду мають зіставлятися об'єкти різних типів.

Будь-яка константа в S^4 повинна мати той самий тип значення, що й вираз відповідної категорії природної мови. Іншими словами, функцію I задають таким чином, що значення предметних констант виявляється однотипним зі значеннями імен, значення предметно-функціональних констант – зі значеннями предметних функторів, значення предикаторних констант – зі значеннями предикаторів.

Оскільки предметні константи є параметрами імен, а значеннями імен є окремі предмети, то предметним константам як значенням приписуються індивіди, але не будь-які, а ті, що містяться у множині U . Наприклад, якщо U – множина космічних об'єктів, то функція I може приписати як значення предметній константі a_i такий індивід як *Марс*, а константі a_j – *Венера*, або який-небудь інший космічний об'єкт.

Інтерпретація предметної константи

Функція I зіставляє кожній предметній константі

довільний елемент множини U , тобто $I(t_i) = d \in U$

(де d – фіксований елемент U , а $\in$ – знак належності до множини).

Як зазначалося, предикаторні константи є параметрами предикаторів природної мови. Звідси:

а) одномісній предикаторній константі функція I зіставляє довільну множину (можливо, порожню) елементів універсуму U . Іншими словами, значеннями одномісної предикаторної константи є деяка підмножина множини U ;

б) двомісній предикаторній константі функція I зіставляє довільну множину впорядкованих пар, які складаються із елементів U . Виходить, що значенням двомісної предикаторної константи за інтерпретації I є довільна підмножина (можливо, порожня) всіх пар складених із елементів множини U ;

в) тримісній предикаторній константі функція I зіставляє впорядковані трійки предметів із множини U , тобто значенням такої константи є довільна підмножина множини всіх трійок, складених із елементів множини U .

Проілюструємо сказане на конкретних прикладах.

Приклад 1. Маємо одномісну предикаторну константу P^1 та універсум U , що складається із множини космічних об'єктів. Функція I може приписати константі P^1 :

- 1) порожню множину;
- 2) множину планет;
- 3) множину зірок;
- 4) множину всіх космічних об'єктів (оскільки будь-яка множина є підмножиною самої себе).

Приклад 2. Універсальна множина є множиною людей. Тоді двомісній константі P^2 функція I зіставить:

- 1) множину таких (упорядкованих) пар людей, що є сучасниками,
- 2) множину таких пар людей, які є ровесниками.

Приклад 3. Маємо тримісний предикатор P^3 та універсальну множину U , яка є множиною всіх міст. Тоді функція I зіставить P^3 множину впорядкованих трійок міст, наприклад, перше з яких розташоване між другим і третім (Київ між Москвою й Одесою).

Інтерпретація предикатної константи

Кожній n -місній предикаторній константі P^n
інтерпретаційна функція I зіставляє як значення
довільну множину послідовностей,

які містять n таких об'єктів, що є елементами універсуму U .

Іншими словами, $I(P^n) \subseteq U^n$, де $\subseteq$ – знак включення однієї множини до іншої, U^n – довільна підмножина n -ок предметів.

Розглянемо інтерпретацію предметно-функціональних констант.

Предметно-функціональні константи –

це параметри предметних функторів природної мови,
які представляють функції, аргументами яких є індивіди.

За інтерпретації предметно-функціональних констант у S^4 їм також зіставлятимуться предметні функції відповідних місткостей, які релятивізовані щодо U . Аргументами та значеннями цих функцій є елементи U . Такі функції називають *операціями*, які задані на множині U .

Звернемося до прикладу. Якщо U – множина натуральних чисел, одномісній предметно-функціональній константі f^1 інтерпретаційна функція I може зіставити операцію піднесення у квадрат. А якщо взяти двомісну предметно-функціональну константу q^2 , то при тому самому універсумі їй може бути зіставлена операція додавання чи множення.

Інтерпретація предметно-функціональної константи

Кожній n -місній предметно-функціональній константі f^n
інтерпретаційна функція I зіставляє довільну n -місну функцію,
аргументами та значеннями якої є елементи
множини U , тобто $I(f^n) \in n$ -місна операція на універсумі U .

Пару $\langle U, I \rangle$, яка задає припустиму в S^4 інтерпретацію нелогічних констант, називають *моделлю*.

Моделлю називають будь-яку пару $\langle U, I \rangle$,

де U – непорожня множина, I – функція, що задовольняє умовам:

1. $I(t) \in U$;
2. $I(P^n) \subseteq U^n$;

3. $I(f^n)$ є n -місна операція, задана на U (де t – довільна предметна константа, P – довільна n -місна предикаторна константа, f – довільна n -місна предметно-функціональна константа).

Розглянемо тепер приписування значень предметним змінним. Значення для предметних змінних знаходять також в U . Кожній предметній змінній як значення приписують довільний елемент множини U . Слід зважати на те, що конкретною моделлю $\langle U, I \rangle$ можна пов'язати множину приписування значень предметним змінним. Це означає можливість перебирання значень змінних за фіксованої інтерпретації констант.

Можливими значеннями для термів є індивіди із U , а можливими значеннями формул є такі об'єкти, як істина та хиба. Отже, *терми є аналогами імен, а формули є аналогами висловлювань*.

Продемонструємо процес установлення значення довільного терму t у деякій моделі $\langle U, I \rangle$ за деякого приписування значень предметним змінним φ . Уживатимемо запис $|t|$ як скорочення для виразу значення t моделі $\langle U, I \rangle$ за приписування φ .

Згідно із наведеною дефініцією терму, t є:

- 1) деякою предметною константою a_i ; або
- 2) деякою предметною змінною x_i ; або
- 3) виразом вигляду $f^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Правила встановлення значень для кожного випадку

(Df₁)

Якщо терм t є предметною константою a_i ,
то його значенням у моделі $\langle U, I \rangle$ є той індивід d ,

який I зіставляє константі a_i

$$|a_i| = I(a_i) = d \in U.$$

(Df₂)

Якщо терм t є предметна змінна x_i ,
то його значенням в моделі $\langle U, I \rangle$ є той індивід d ,

який приписується змінній x_i

$$|x_i| = I(x_i) = d \in U.$$

(Df₃)

Якщо t є складним термом $f^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$,

то для встановлення його значення в моделі $\langle U, I \rangle$ необхідно:

1. Виділити операцію, яку функція I зіставляє предметно-функціональній константі f^n , тобто знайти $I(f^n)$;
 2. Знайти значення термів $t_1, t_2, \dots, t_n$ у тій самій моделі та за того самого приписування, тобто знайти $|t_1|, |t_2|, \dots, |t_n|$;
 3. Застосувати операцію $I(f^n)$ до аргументів $|t_1|, |t_2|, \dots, |t_n|$.
- Результат застосування даної операції до вказаних об'єктів і буде значенням терму $f^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ у моделі $M = \langle U, I \rangle$.
- $$|f^n(t_1, t_2, \dots, t_n)| = [I(f^n)](|t_1|, |t_2|, \dots, |t_n|).$$

Проілюструємо вищезазначене на прикладі. За U візьмемо множину цілих додатних чисел. Функція I зіставляє:

- 1) предметній константі a число 3;
- 2) одномісній предметно-функціональній константі f^1 – операцію піднесення до другого ступеня;
- 3) двомісній предметно-функціональній константі f^2 – операцію множення.

Нехай предметній змінній y приписується значення 2, тобто

$$|y| = I(y) = 2.$$

Тепер визначимо, якими значеннями в моделі $\langle U, I \rangle$ володіють терми:

- | | |
|------------------------|----------------------|
| 1. $-a$; | 2. $-y$; |
| 3. $-f^1(a)$; | 4. $-f^2(y, a)$; |
| 5. $-f^1(f^2(y, a))$; | 6. $-f^2(f^1(a))y$. |

1. Оскільки a – предметна константа, то, згідно з Df_1 , функція I зіставить їй такий об'єкт, як 3, що й буде її значенням

$$|a| = (a) = 3.$$

2. Оскільки y – предметна змінна, то, згідно із Df_2 , функція I припише їй число 2:

$$|y| = I(y) = 2.$$

3. Визначимо значення складного терму $f^1(a)$. Предметно-функціональній константі f^1 за нашою умовою відповідає дія піднесення до другої степені, а значенням терму a є число 3.

Тоді, відповідно до Df_3 , необхідно застосувати операцію $I(f)$ до аргументу a , тобто піднести до квадрату число 3. Отримане число 9 є значенням терму $f^1(a)$

$$f^1(a) = I[f^1] (|a|) = 3^2 = 9.$$

4. Визначимо значення складного терму $f^2(y, a)$. Згідно із нашою домовленістю, предметно-функціональній константі f^2 відповідає операція множення, значеннями термів y та a є відповідно числа 2 і 3. Щоб вирахувати значення терму $f^2(y, a)$, необхідно, згідно із Df_3 , застосувати операцію $I(f^2)$ до y та a , тобто помножити 2 на 3. Отже, число 6 є значенням терму $f^2(y, a)$.

$$|f^2(y, a)| = I[f^2](|y|, |a|) = 2 \times 3 = 6.$$

5. Для встановлення значення терму $f^1(f^2(y, a))$ необхідно застосувати операцію $I(f^1)^{15}$ до об'єкта $|f^2(y, a)|$. Оскільки ми встановили, що значенням $f^2(y, a)$ є число 6, то число 36 є значенням терму $f^1(f^2(y, a))$.

6. Для встановлення значення терму $f^2(f^1(a)y)$ необхідно перемножити значення термів $f^1(a)$ та y , тобто числа 9 і 2. Таким чином, значення $f^2(f^1(a)y)$ є 9×2 , тобто 18.

3.1.3. Процедури встановлення значень формулам S^4

Далі перейдемо до формулювання правил встановлення значень формул у довільній моделі $\langle U, I \rangle$.

Усю множину формул розіб'ємо на три підмножини:

1. Елементарні формули

$$P^n(t_1, t_2, \dots, t_n);$$

2. Складні формули, головним знаком яких є пропозиційна зв'язка

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B);$$

3. Складні формули, головним знаком яких є квантор

$$\forall x A \text{ та } \exists x A,$$

де x – предметна змінна, A – формула.

Розглянемо процедуру встановлення значення формули для кожної із цих груп. Введемо скорочений запис виразу значення формули A в моделі $M = \langle U, I \rangle$:

$$|A|_M.$$

¹⁵ $I(f)$ – операція піднесення до квадрату.

У той самий час указана процедура здійснюється у межах однієї і тієї самої моделі, тому її параметри U та I вказувати не обов'язково. Для зручності замість термінів *істина* та *хиба* введемо відповідно символи i та x .

Визначення умов істинності та хибності елементарних формул.

Для встановлення значення формули $P^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ у моделі

$$M = \langle U, I \rangle \text{ необхідно:}$$

а) з'ясувати, яку множину функція I зіставляє предикаторній константі P^n , тобто знайти $I(P^n)$;

б) визначити, яких значень набувають у цій моделі за даного приписування терми $t_1, t_2, \dots, t_n$, тобто знайти значення

$$|t_1|, |t_2|, \dots, |t_n|;$$

в) установити, чи є послідовність $\langle |t_1|, |t_2|, \dots, |t_n| \rangle$ елементом множини $I(P^n)$.

Якщо ця послідовність належить до $I(P^n)$, то формула

$$P^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

набуває значення i , а якщо ні, то її значенням буде x :

$$|P^n(t_1, t_2, \dots, t_n)|_M = i \Leftrightarrow \langle |t_1|, |t_2|, \dots, |t_n| \rangle \in I(P^n);$$

$$|P^n(t_1, t_2, \dots, t_n)|_M = x \Leftrightarrow \langle |t_1|, |t_2|, \dots, |t_n| \rangle \notin I(P^n).$$

Визначення умов істинності та хибності формул, де головним знаком є пропозиційна зв'язка. Для встановлення значення складних формул

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B)$$

у довільній моделі M необхідно з'ясувати, яких значень у тій самій моделі за того ж самого приписування набувають їх підформули A та B :

$$|\neg A|_M = i \Leftrightarrow |A|_M = x,$$

$$|\neg A|_M = x \Leftrightarrow |A|_M = i,$$

$$|A \wedge B|_M = i \Leftrightarrow |A|_M = i, |B|_M = i,$$

$$|A \wedge B|_M = x \Leftrightarrow |A|_M = x \text{ або } |B|_M = x,$$

$$|A \vee B|_M = i \Leftrightarrow |A|_M = i \text{ або } |B|_M = i,$$

$$|A \vee B|_M = x \Leftrightarrow |A|_M = x \text{ та } |B|_M = x,$$

$$|A \supset B|_M = i \Leftrightarrow |A|_M = x \text{ або } |B|_M = i,$$

$$|A \supset B|_M = x \Leftrightarrow |A|_M = i, \text{ а } |B|_M = x,$$

$$|A \equiv B|_M = i \Leftrightarrow |A|_M = i \text{ та } |B|_M = i \text{ або } |A|_M = x \text{ і } |B|_M = x,$$

$$|A \equiv B|_M = x \Leftrightarrow |A|_M = i \text{ та } |B|_M = x \text{ або } |A|_M = x \text{ і } |B|_M = i.$$

Визначення умов істинності та хибності формул, де головним знаком є квантор. У S^4 істинність або хибність формул $\forall xA$ та $\exists xA$ у моделі $M = \langle U, I \rangle$ здійснюються шляхом перегляду індивідів із U . Цей перегляд здійснюють перебиранням значень змінної x , тобто розглядають приписування, що зіставляють змінній x різні елементи із U , але зберігають при цьому значення інших змінних, що можуть міститися у формулі A . Здійснюючи різні приписування, установлюють, істинною чи хибною стає формула A у кожному із випадків.

Якщо A виявиться істинною, який би індивід із U ми не приписали змінній α , то формула $\forall \alpha A$ набуває значення i в моделі $M = \langle U, I \rangle$. Якщо ж в U знайдеться індивід, при приписуванні якого змінній α формули A виявиться хибною, то $\forall \alpha A$ набуває значення x .

Якщо при приписуванні α принаймні якого-небудь елементу U (значення інших змінних при цьому зберігаються) виявиться, що формула A набуває значення i , то й формула $\exists \alpha A$ буде істинною у моделі $M = \langle U, I \rangle$. Якщо ж A виявиться хибною, який би об'єкт не був приписаний α , то $\exists \alpha A$ набуде значення x .

Сформулюємо більш строго умови істинності та хибності формул $\forall \alpha A$ та $\exists \alpha A$. Виходитимемо із того, що $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – список усіх предметних змінних, що наявні у формулі $\forall \alpha A$ (або $\exists \alpha A$). Нехай φ приписує α індивід u із U , а змінним $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – відповідно індивіди $u_1, u_2, \dots, u_n$ із U .

$$\forall \alpha A$$

$$|\forall \alpha A|_M = i \Leftrightarrow, \text{ якщо для будь-якого } v \in U \text{ вірно, що } |A| = i \\ \text{ за приписування } \alpha \text{ значення } v,$$

$$\text{а змінним } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n - \text{значень } v_1, v_2, \dots, v_n.$$

$$|\forall \alpha A|_M = x \Leftrightarrow, \text{ якщо існує } v \in U \text{ такий, що } |A| = x \\ \text{ за приписування } \alpha \text{ значення } v,$$

$$\text{а змінним } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n - \text{значень } v_1, v_2, \dots, v_n.$$

$$\exists \alpha A$$

$$|\exists \alpha A|_M = i \Leftrightarrow, \text{ якщо існує } v \in U \text{ такий,} \\ \text{ що } |A| = i \text{ за приписування } \alpha \text{ значення}$$

$$v,$$

змінним $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — значень $v_1, v_2, \dots, v_n$.
 $|\exists \alpha A|_M = x \Leftrightarrow$, якщо для будь-якого $v \in U$ вірно $|A| = x$
 за приписування α значення v , а змінним $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ —
 значень $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Після аналізу умов істинності та хибності формул можна приступити до розгляду типології формул за семантичними ознаками.

3.1.4. Типологія формул S^4 за семантичними ознаками

Усю множину формул у S^4 за семантичними ознаками можна поділити на:

- закони класичної логіки предикатів;
- виконувані формули класичної логіки предикатів;
- невиконувані формули класичної логіки предикатів.

Відомо, що законом у логічній теорії є формула, яка є істинною за будь-яких прийнятих у цій теорії інтерпретацій нелогічних термінів, що входять до складу цієї формули.

У логіці предикатів інтерпретація нелогічних символів здійснюється вибором деякої моделі $M = \langle U, I \rangle$.

Логічний закон

Формула A є законом класичної логіки предикатів,
 якщо й тільки якщо A набуває значень i в кожній моделі
 та за будь-якого приписування — значень предметних змінних.

Закони логіки ще називають загальнозначимими формулами та позначають символом $\models A$. Прикладом загальнозначимої формули є вираз

$$\forall x P(x) \supset \exists x P(x).$$

Для обґрунтування загальнозначимості цієї формули застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що $\forall x P(x) \supset \exists x P(x)$ не є загальнозначимою. Це означає існування моделі

$$M = \langle U, I \rangle,$$

за якої $|\forall x P(x) \supset \exists x P(x)|_M = x$. Отже

$$|\forall x P(x)|_M = i \text{ та } |\exists x P(x)|_M = x.$$

Істинність $\forall xP(x)$ означає, що $|P(x)|_M = i$ за приписування змінній x будь-якого індивіду із U . Хибність $\exists xP(x)$ означає, що $|P(x)|_M = x$ за приписування змінній x будь-якого індивіду із U .

Візьмемо довільний елемент d із U . Згідно із вищезазначеним $|P(x)|_M = i$ за приписування змінній x індивіда d та одночасно $|P(x)|_M = x$ за такого самого приписування. Отже, ми дійшли протиріччя. Цим і встановлюється загальнозначимість формули

$$\forall x(x) \supset \exists xP(x).$$

Визначення незагальнозначимої формули

Формула A не є законом логіки предикатів тоді й тільки тоді, коли існує модель і приписування предметним змінним, за яких A набуває значень x .

Щоб указати на незагальнозначимість формули, необхідно вибрати модель $M = \langle U, I \rangle$, за якої ця формула набуває значення хибна. Візьмемо для прикладу формулу

$$\exists xP(x) \supset \forall xP(x)$$

і покажемо її незагальнозначимість. За область інтерпретації U візьмемо множину хімічних елементів. Нехай інтерпретаційна функція зіставляє предикаторній константі P множину металів. Приписування предметним змінним x може бути довільним, оскільки ця формула є замкненою.

Якщо змінній x приписати ім'я *Мідь*, то в моделі $M = \langle U, I \rangle$ формула $P(x)$ буде істинною. Якщо ж змінній x приписати ім'я *Кисень*, то $P(x)$ виявиться хибною формулою. Отже, існує приписування змінній x , за якого

$$|P(x)|_M = i,$$

звідки випливає, що

$$|\exists xP(x)|_M = i.$$

Разом із тим, існує й друге приписування x , за якого

$$|P(x)|_M = x,$$

а це означає, що

$$|\forall xP(x)|_M = x.$$

Істинність $\exists xP(x)$ і хибність $\forall xP(x)$ в $M = \langle U, I \rangle$ свідчать, що

$$|\exists xP(x) \supset \forall xP(x)|_M = x.$$

Отже, дана формула *незагальнозначима*.

Визначення виконуваної формули

Формула A мови логіки предикатів є виконуваною,
якщо й тільки якщо існує модель
і приписування значень предметним змінним,
за яких A набуває значення i .

Звернемося до прикладу. Ми встановили, що формула

$$\exists xP(x) \supset \forall xP(x)$$

є *незагальнозначимою*. Тепер покажемо, що вона є виконуваною. Для цього виберемо модель $M = \langle U, I \rangle$, за якої ця формула буде істинною. Функція I зіставляє предикаторній константі P порожню множину (напр., множину людей, які є жителями Місяця), ф-но-ву є довільним. Зрозуміло, що P не має жодного елементу. Тому $|P(x)|_M = x$ при приписуванні змінній x будь-якого об'єкту із U , а звідси випливає, що $|\exists xP(x)|_M = x$. Але якщо антецедент нашої формули хибний, то вся формула в цій моделі буде істинною

$$|\exists xP(x) \supset \forall xP(x)|_M = i.$$

Відповідно, формула є *виконуваною*.

Визначення невиконуваної формули

Формула є невиконуваною тоді й тільки тоді,
коли вона набуває значення x у кожній моделі
та за кожного приписування значень предметним змінним.

Візьмемо для прикладу формулу

$$\neg \exists xP(x) \wedge P(a).$$

Застосуємо міркування від супротивного. Стверджуватимемо, що дана формула виконувана. Тоді має існувати модель $M = \langle U, I \rangle$, за якої вона істинна. Наша формула є кон'юнкцією. А це означає, що

$$|\neg \exists xP(x)|_M = i \quad \text{та} \quad |P(a)|_M = i.$$

Істинність $P(a)$ свідчить про те, що $I(a) \in I(P)$.

А істинність $\neg \exists xP(x)$ означає хибність $\exists xP(x)$. Визнання цього факту означає, що $|P(x)|_M = x$ за приписування будь-якого елементу із U , до речі й того, який функція I зіставляє константі a . Отже, $|P(x)|_M = x$ за приписування x об'єкту $I(a)$. Тоді ми маємо визнати, що $I(a) \notin I(P)$. Але це суперечить прийнятому раніше твердженню $I(a) \in I(P)$. Таким чином, припущення про виконуваність формули $\neg \exists xP(x) \wedge P(a)$ неправильне. Ця *формула не є виконуваною*.

3.1.5. Логічні відношення між формулами в S^4

До *фундаментальних відношень* у класичній логіці предикатів належать:

- відношення сумісності за істинністю;
- відношення сумісності за хибністю;
- відношення логічного слідування.

Визначення 1

Формули Γ сумісні за істинністю, якщо й тільки якщо існує модель і приписування значень предметним змінним, за яких кожна формула із Γ набуває значень і.

У протилежному випадку ці формули несумісні за істинністю.

Визначення 2

Формули Γ сумісні за хибністю, якщо й тільки якщо існує модель і приписування змінним, за яких кожна формула із Γ набуває значення х.

У протилежному випадку ці формули несумісні за хибністю.

Проілюструємо наведені дефініції на прикладі. Візьмемо формули

$$\exists x P(x, y) \text{ та } \exists x \neg P(x, y)$$

і покажемо, що вони сумісні за істинністю. Для цього достатньо вибрати конкретну модель $M = \langle U, I \rangle$, за якої обидві формули разом будуть істинні.

За універсум розгляду приймемо множину міст U . Нехай функція I зіставляє двомісній предикаторній константі P множину таких пар міст, перше із яких розташоване південніше другого. Функція φ приписує вільній предметній змінній y місто $Ku\ddot{u}$, а решті змінним – довільні міста.

Розглянемо тепер приписування φ , яке у також зіставляє $Ku\ddot{u}$, а x – Одесу. Оскільки Одеса південніше Києва, то пара $\langle Одеса, Ku\ddot{u} \rangle$ наявна в $I(P)$ та означає $|P(x, y)|_M = i$. Звідси випливає, що

$$|\exists x P(x, y)|_M = i.$$

Розглянемо тепер приписування φ , яке знову зіставляє y – $Ku\ddot{u}$, а x – Львів. Оскільки Львів розташований не південніше Києва,

то пара $\langle \text{Львів}, \text{Київ} \rangle$ не міститься в $I(P)$, і в цьому випадку

$$|P(x, y)|_M = x.$$

Тоді $|\neg P(x, y)|_M = i$. Звідси випливає

$$\exists x \neg P(x, y)|_M = i.$$

Отже, формули $\exists x P(x, y)$ та $\exists x \neg P(x, y)$ у моделі $M = \langle U, I \rangle$ одночасно набувають значень істина, що свідчить про їхню сумісність за істинністю.

Візьмемо ту саму модель $M = \langle U, I \rangle$. Покажемо, що формули $\forall x \neg P(x, y)$ та $\forall x P(x, y)$ сумісні за хибністю.

У попередньому прикладі ми встановили, що $|P(x, y)|_M = i$. Звідси випливає, що $|\neg P(x, y)|_M = x$. Тоді $|\forall x \neg P(x, y)|_M = x$. Також було встановлено, що $|P(x, y)|_M = x$. А це означає, що

$$|\forall x P(x, y)|_M = x.$$

Виходить, що у цій моделі за даного приписування формули

$$\forall x \neg P(x, y) \text{ та } \forall x P(x, y)$$

сумісні за хибністю.

За допомогою досить простих міркувань можна показати, що формули:

а) $\forall x \neg P(x, y)$ та $\forall x P(x, y)$ є несумісними за істинністю;

б) $\exists x P(x, y)$ та $\exists x \neg P(x, y)$ є несумісними за хибністю.

Для доведення несумісності за істинністю формул

$$\forall x \neg P(x, y) \text{ та } \forall x P(x, y)$$

зробимо припущення про їх сумісність за істинністю. Тоді

$$|\neg P(x, y)|_M = i \text{ та } |P(x, y)|_M = i.$$

Але визнання істинності формули $\neg P(x, y)$ змушує вказати на хибність формули $P(x, y)$. Отже, маємо протиріччя.

Для встановлення несумісності за хибністю формул

$$\exists x P(x, y) \text{ та } \exists x \neg P(x, y)$$

зробимо припущення, що вони сумісні за хибністю за деякої моделі $M = \langle U, I \rangle$. Якщо це так, то

$$|P(x, y)|_M = x \text{ та } |\neg P(x, y)|_M = x.$$

Але визнання хибності формули $\neg P(x, y)$ змушує визнати істинність формули $P(x, y)$. Маємо протиріччя. Отже, вихідні формули за хибністю несумісні.

Виходить, що формули $\forall x \neg P(x, y)$ та $\forall x P(x, y)$ перебувають у відношенні протилежності, оскільки вони сумісні за хибністю та несумісні за істинністю, а формули $\exists x P(x, y)$ та $\exists x \neg P(x, y)$ – у відношенні підпротилежності, оскільки вони сумісні за істинністю та несумісні за хибністю.

Визначення 3

Із множини формул Γ логічно слідує формула B ($\Gamma \models B$),

якщо й тільки якщо не існує моделі
та приписування значень предметним змінним,
за яких кожна із формул Γ набуває значення і,
а формула B – значення х.

Проілюструємо наведену дефініцію на прикладі. Покажемо, що із $P(a)$ та $Q(a)$ логічно слідує $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

$$P(a), Q(a) \models \exists x(P(x) \wedge Q(x)).$$

Припустимо, що $P(a)$ та $Q(a)$ не слідує $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

$$P(a), Q(a) \not\models \exists x(P(x) \wedge Q(x)).$$

Якщо це так, то існує модель $M = \langle U, I \rangle$, за якої формули $P(a)$ та $Q(a)$ – істинні, а $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ – хибна.

Істинність $P(a)$ та $Q(a)$ означає, що $I(a) \in I(P)$ та $I(a) \in I(Q)$. Тому, якщо довільний предметний змінній x приписати значення $I(a)$, то

$$|P(x)|_M = i \text{ та } |Q(x)|_M = i.$$

Звідси випливає, що $|P(x) \wedge Q(x)|_M = i$ за приписування x значення $I(a)$. Виходить $|\exists x P(x) \wedge Q(x)|_M = i$, але це суперечить нашому припущенню.

Отже, із формул $P(a)$ та $Q(a)$ логічно випливає формула $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

3.1.6. Проблема розв'язання

Визначення поняття закону класичної логіки предикатів (загальнозначимої формули) і логічного слідування у логіці предикатів передбачає відповідь на такі запитання:

а) за допомогою якої процедури можна встановити, чи є деяка формула A законом?

б) за яких умов із формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ слідує формула B ?

У класичній логіці висловлювань самі визначення логічного закону та логічного слідування містять указівку на перевірочну процедуру, яка дозволяє встановити, чи є дана формула законом і чи слідує із формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ формула B .

Іншими словами, щоб встановити, чи є формула A законом, необхідно відповідно до визначення тотожно-істинної формули побудувати таблицю істинності для A та з'ясувати, чи набуває A значення i в усіх рядках таблиці.

А для відповіді на запитання, чи слідує формула B із $A_1, A_2, \dots, A_n$, необхідно, відповідно до визначення логічного слідування у класичній логіці висловлювань, побудувати спільну таблицю істинності для формул

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \text{ та } B$$

і з'ясувати, чи є у цій таблиці рядок, коли формула

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$$

набуває значення i , а для B – значення x .

Оскільки процес побудови таблиць істинності є алгоритмічним, то перевірити, чи є довільна формула логіки висловлювань її законом (а також, чи має місце відношення логічного слідування між формулами $A_1, A_2, \dots, A_n$ та B), можна кінцевою кількістю кроків. Ті логічні теорії, в яких це можна здійснити, називають *розв'язуваними*.

Логічну теорію називають **розв'язуваною**, якщо існує ефективна процедура (алгоритм), що дозволяє для будь-якої формули кінцевим числом кроків вирішити питання про те, чи є ця формула законом теорії.

Класична логіка висловлювань є розв'язуваною. Цього не можна сказати про класичну логіку предикатів. Визначення у ній закону та логічного слідування не є ефективним, тобто не містить алгоритму вирішення питання про загальнозначимість довільної формули A та наявності відношення логічного слідування між довільними формулами $A_1, A_2, \dots, A_n$ та B .

Справді, щоб установити загальнозначимість формули A , необхідно розглянути всі моделі та приписування значень предметним змінним і переконатися, що в кожному випадку A набуває значення

i. А для того, щоб показати, що $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, слід розглянути всі моделі та приписування їй переконатися у відсутності ситуації, за якої кон'юнкція формул $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ набуває значення *i*, а B – значення *x*.

Зрозуміло, що подібний підбір і перегляд усіх моделей і приписувань неможливий, адже цей процес нескінченний (на відміну від кількості рядків будь-якої таблиці істинності), оскільки у ньому відсутній алгоритм розв'язання питання про загальнозначимість формули та відношення слідування між формулами. Розв'язання цих питань у логіці предикатів є евристичним завданням.

Разом із тим, у класичній логіці предикатів розроблено низку процедур, які дозволяють стандартним і досить оптимальним способом підійти до проблеми розв'язування.

Зупинимося на процедурі, яка дістала назву *метод аналітичних таблиць*. Суть цього методу: теза про загальнозначимість формули A й теза про слідування формули B із $A_1, A_2, \dots, A_n$ обґрунтовують у спосіб міркування від супротивного. Наприклад, для обґрунтування тези $\models A$ показують, що припущення хибності A з необхідністю приводить до протиріччя. Для обґрунтування тези $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ показують, що припущення істинності $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ і хибності формули B приводить до протиріччя.

Введемо деякі пояснення *щодо побудови самої аналітичної таблиці*. Процес міркування від супротивного, який обґрунтовує одну із названих тез, оформлюють у вигляді деякої послідовності кроків, яку називають аналітичною таблицею, де:

- кожен крок в аналітичній таблиці відображає застосування відповідного аналітичного правила;

- кроки складаються із рядків, які є результатами дії відповідних аналітичних правил;

- кроки позначають римськими цифрами (I, II, III тощо); рядки – арабськими цифрами (1, 2, 3 тощо);

- нумерацію рядків починають з нуля. Цим підкреслюється, що ми починаємо будувати аналітичну таблицю із формулювання антитези;

- таблицю від нульового рядка до останнього розбивають на гілки;

■перехід від одного кроку до іншого здійснюють за допомогою спеціальних аналітичних правил, в основі яких лежать смисли пропозиційних зв'язок $\wedge, \vee, \supset, \equiv, \neg$ і кванторів $\forall$ та $\exists$;

■кожному із цих правил приписується індекси $T(i)$ та $F(x)$.

Мета побудови аналітичної таблиці – показати, що антитеза приводить до протиріччя.

Якщо у гілці наявна формула C з обома індексами T і F , то така гілка вважається *замкненою*. А якщо у кожній гілці зустрічається деяка формула з індексами, то *вся таблиця є замкненою*. При отриманні такого результату теза про загальнозначимість формули A або про слідування B із $A_1, A_2, \dots, A_n$ вважається *обґрунтованою*.

Визначення аналітичних правил.

$T \wedge$	$\frac{TA \wedge B}{TA}$	$F \wedge$	$\frac{FA \wedge B}{TA FB}$	$T \vee$	$\frac{TA \vee B}{TA TB}$
	TB				
$F \vee$	$\frac{FA \vee B}{FA}$	$T \supset$	$\frac{TA \supset B}{FA TB}$	$F \supset$	$\frac{FA \supset B}{FA}$
	FB				FB
$T \neg$	$\frac{T \neg A}{FA}$	$F \neg$	$\frac{F \neg A}{TA}$	$T \equiv$	$\frac{TA \equiv B}{TA FA}$
					$TB FB$
$F \equiv$	$\frac{FA \equiv B}{TA FA}$				
	$FB TB$				

Аналітичні правила для кванторів $\forall$ та $\exists$ супроводимо деякими поясненнями.

$$T\forall \quad \frac{T\forall xA(x)}{TA(t)},$$

де t – будь-яка предметна змінна.

Відповідно до логічного смислу квантора загальності формула $\forall xA(x)$ істинна, якщо й тільки якщо будь-який індивід предметної області задовольняє умову $A(x)$. Тому у випадку істинно-

сті $\forall xA(x)$ істинною виявляється будь-яка формула вигляду $A(t)$, що є результатом заміни всіх вільних входжень x до A на довільний замкнений терм t .

$$F\forall \quad \frac{F\forall xA(x)}{FA(t)}.$$

Тут t – предметна змінна, яка не зустрічається у жодній із попередніх формул гілки, де це правило застосовується. *Хибність* формули $\forall xA(x)$ означає існування об'єкта, який не задовольняє умову $A(x)$.

$$T\exists \quad \frac{T\exists xA(x)}{TA(t)}.$$

Відповідно до смислу квантора існування $\exists$ істинність $\exists xA(x)$ означає існування об'єкта, що задовольняє умову $A(x)$.

$$F\exists \quad \frac{F\exists xA(x)}{FA(t)}.$$

Хибність формули $\exists xA(x)$ означає, що будь-який індивід предметної області не задовольняє умову $A(x)$.

Сформулюємо як підсумок зазначеному критерію загальнозначимості та логічного слідування.

Формула A **загальнозначима** $\Vdash A$,

якщо й тільки якщо існує замкнена аналітична таблиця, нульовий рядок якої представлений антитезою $\bot A$.

Із формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ логічно слідує формула B , якщо й тільки якщо існує замкнена аналітична таблиця, нульовий рядок якої представлений виразом $\bot (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots A_n \supset B)$.

При побудові аналітичної таблиці необхідно дотримуватися певних *правил*, які полегшують її побудову.

1. Із множини аналітичних правил насамперед застосовують пропозиційні аналітичні правила, а потім – кванторні правила

$$T\forall, F\forall, T\exists, F\exists.$$

2. Із кванторних правил спочатку застосовують правила $F\forall$ та $T\exists$, які вимагають введення нових предметних констант, а потім – правила $T\forall$ та $F\exists$, які не містять обмежень на терм, що підставляють на місце підкванторної змінної.

Звернемося до прикладу.

I. Необхідно методом аналітичних таблиць обґрунтувати тезу:

		$P(x) \wedge Q(y), Q(y) \supset R(z) \Vdash R(z) \vee P(x)$	
	0	$F[(P(x) \wedge Q(y)) \wedge (Q(y) \supset R(z))] \supset (R(z) \vee P(x))^{16}$	
I	1	$T(P(x) \wedge Q(y)) \wedge (Q(y) \supset R(z))$	
	2	$F(R(z) \vee P(x))$	$F \supset$ до 0
II	3	$T(P(x) \wedge Q(y))$	
	4	$T(Q(y) \supset R(z))$	$T \wedge$ до 1
III	5	$FR(z)$	
	6	$FP(x)$	$F \vee$ до 2
IV	7	$TP(x)$	
	8	$TQ(y)$	$T \wedge$ до 3
	9	$FQ(y)$	$T \supset, 4$
		$9'. TR(z)$	
		$\quad \quad \quad + \quad \quad \quad +$	

Факт замкненості гілки позначають знаком +.

II. Установити, чи є логічним законом формула

$$[\forall x P(x) \supset \exists x P(x)] \equiv [\forall x \neg P(x) \supset \exists x \neg P(x)].$$

	0	$F[\forall x P(x) \supset \exists x P(x)] \equiv [\forall x \neg P(x) \supset \exists x \neg P(x)]$	
I	1	$T(\forall x P(x) \supset \exists x P(x))$	1'. $F(\forall x P(x) \supset \exists x P(x))$
	2	$F(\forall x \neg P(x) \supset \exists x \neg P(x))$	2'. $T(\forall x \neg P(x) \supset \exists x \neg P(x))$ $F \equiv$ до 0
II	3	$T(\forall x \neg P(x))$	3'. $T(\forall x P(x))$
	4	$F(\exists x \neg P(x))$	$F \supset \kappa 2$ 4'. $F(\exists x P(x))$ $F \supset$ до 1'
III	5	$F(\forall x P(x))$	5'. $T(\exists x P(x))$ $T \supset \kappa 1$ 5''. $F(\forall x \neg P(x))$
		5'''. $T(\exists x \neg P(x))$ $T \supset$ до 2'	
IV	6	$FP(t_1)F\forall \kappa 5$	6'. $TP(t_1)$ $T\exists \kappa 5'$ 6''. $F\neg P(t_1)F\forall$ до 5''
		6'''. $T(\neg P(t_1))$ $T\exists \kappa 5'''$ $P(b)$	
V	7	$F\neg P(t_1)F\exists \kappa 4$	7'. $T\neg P(t_1)$ $T\forall \kappa 3$ 7''. $FP(t_1)F\exists$ до 4'
		7'''. $TP(t_1)T\forall \kappa 3'$	
VI	8	$TP(t_1)F\neg \kappa 7$	8'. $FP(t_1)$ $T\neg \kappa 7'$ 8''. $TP(t_1)T\forall$ до
		3' 8''' $. FP(t_1)F\exists \kappa 4'$	
		$\quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad +$	

¹⁶ Як й у логіці висловлювань, у таких випадках засновки об'єднують через & і до них через $\supset$ приєднують висновок.

Очевидно, що ця аналітична таблиця замкнена, отже теза є загальноозначимим виразом.

Після того, як ми дали визначення логічного закону та описали одну із процедур його розв'язання, зупинимося на деяких змістовних міркуваннях щодо природи законів логіки предикатів і на характеристиці списку найбільш важливих законів логіки предикатів.

3.1.7. Закони логіки предикатів

При розгляді визначення закону логіки висловлювань указувалося, що це такий вираз, який за будь-якого розподілу значень істинності своїх пропозиційних змінних набуває значення i . Те саме за кінцевим результатом мається на увазі, коли йдеться про закон логіки предикатів.

Законом логіки предикатів

є вираз, із якого за будь-якої підстановки значень вільних змінних отримують істинне висловлювання.

Але тут ідеться про інші набори значень, ніж у логіці висловлювань. Візьмемо формулу $P(x)$ і перекладемо природною мовою: x є джерелом інформації. Від конкретного значення x залежить, чи перетвориться $P(x)$ на істинне висловлювання: $P(x) = i$.

Якщо за U візьмемо множину книг і ϕ буде приписувати x конкретного індивіда із U , то дістанемо істинне висловлювання.

Оскільки існує принаймні одне значення x , яке перетворює $P(x)$ на істинне висловлювання, то $|\exists x P(x)|_M = i$. Чи буде $\forall x P(x)$ істинним висловлюванням, залежить від того, чи перетворюватиметься $P(x)$ на істинне висловлювання за будь-якого значення x . Це безпосередньо підводить до питання, які ж імена індивідів необхідно підставляти замість x . Іншими словами, що має бути універсумом міркування U . Якщо за U (у нашому прикладі) взяти множину книг, то $\forall x P(x)$ буде істинним висловлюванням, а якщо взяти ширший клас, то істинність $\forall x P(x)$ буде проблематичною.

Залежність перетворення формули $P(x)$ на істинне висловлювання від предметної області U зумовлює те, що закони логіки

предикатів необхідно шукати серед таких виразів, які не залежать від спеціальної області індивідів, а є значимими для будь-яких непустих індивідних областей. Цим фактично закони логіки відрізняються від законів конкретних наук, істинність яких детермінована конкретними предметними областями.

Розглянута вище формула $P(x)$, крім предметної змінної, має предикаторну константу *джерело інформації*. Варто зважати на те, що логіка предикатів займається предикатами взагалі, тобто в ній також мало йдеться про конкретні висловлювання, як і в логіці висловлювань.

Логіку предикатів, головним чином, цікавлять структури висловлювань незалежно від їхнього конкретного змісту, тому в ній оперують предикаторними змінними. Зрозуміло, що у виразі Сократ є P від значення P залежить, чи буде цей вираз істинним висловлюванням. Якщо P замінити предикатором *філософ*, то отримаємо істинне висловлювання, а якщо P замінити предикатором *фізик*, то висловлювання буде хибним. Очевидно, що в цьому випадку істинність формули $P(x)$ залежить від інтерпретації предикатної змінної. Виходить, що закони логіки предикатів необхідно шукати серед таких виразів, які не залежать ні від конкретних індивідуальних областей, ні від конкретних значень предикатних змінних. Прикладом є вираз

$$\forall x(P(x) \vee \neg P(x)).$$

Тут за будь-якого значення індивідної змінної x і за будь-якого значення предикатної змінної P матимемо істинне висловлювання, оскільки для будь-якого індивіда вірно, що йому приналежить певна властивість. Цей вираз нагадує тавтологію із класичної логіки висловлювань

$$p \vee \neg p.$$

Підсумовуючи наведені вище загальні зауваження, можна дати таке визначення закону логіки предикатів.

Законом логіки предикатів

є вираз логіки предикатів,
який за будь-якого значення індивідних і предикатних змінних
набуває значення істина.

При цьому варто зважати на те, що коли індивідна область порожня, то не всі закони логіки предикатів дійсні.

Як й у логіці висловлювань, у логіці предикатів центральне місце посідають закони, процедури їх знаходження та отримання. Можна отримати нові закони, перетворюючи вже існуючі, можна отримувати закони логіки предикатів із законів логіки висловлювань шляхом підстановки.

Суть отримання законів логіки предикатів із законів логіки висловлювань шляхом підстановки полягає у заміщенні у законі логіки висловлювань пропозиційних змінних предикатами. Замість однієї і тієї самої пропозиційної змінної підставляють один і той самий предикат. Наприклад, візьмемо закон логіки висловлювань

$$((p \wedge q) \supset r) \equiv ((p \wedge \neg r) \supset \neg q).$$

Якщо замість p підставити $P(x)$, замість q — $Q(x)$, замість r — $R(x)$, то отримаємо закон логіки предикатів

$$((P(x) \wedge Q(x)) \supset R(x)) \equiv ((P(x) \wedge \neg R(x)) \supset \neg Q(x)).$$

Можна легко переконатися, що обидва вирази є законами.

Із кожного предиката $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ тощо підстановкою конкретних значень вільним предметним змінним отримаємо прості висловлювання, які є елементами даного складного висловлювання. Отримане складне висловлювання

$$((P(a) \wedge Q(a)) \supset R(a)) \equiv ((P(a) \wedge \neg R(a)) \supset \neg Q(a))$$

є істинним, що це впливає із того, що

$$((p \wedge q) \supset r) \equiv ((p \wedge \neg r) \supset \neg q)$$

є законом.

Із цього самого закону логіки висловлювань можна отримати також інші закони логіки предикатів, користуючись квантором $\forall x$. Для цього необхідно:

1) у законі логіки висловлювань *замість пропозиційних змінних підставити предикати* так, щоб замість кожного входження однієї і тієї самої пропозиційної змінної стояв один і той самий предикат;

2) *усі вільні предметні змінні зв'язувати квантором загальності*.

Отже, за тих самих підстановок, що й раніше, із

$$((p \wedge q) \supset r) \equiv ((p \wedge \neg r) \supset \neg q)$$

дістаємо закон логіки предикатів

$$\forall x [((P(x) \wedge Q(x)) \supset R(x)) \equiv ((P(x) \wedge \neg R(x)) \supset \neg Q(x))].$$

Смисл цієї процедури полягає у тому, що:

а) вирази у квадратних дужках за кожного набору значень вільних

предметних змінних перетворюються на істинні висловлювання;

б) при зв'язуванні вільних індивідних змінних квантором $\forall x$ і заміщенні вільних предметних змінних конкретними предикаторами отримують істинні висловлювання.

Це свідчить про те, що кожен вираз логіки предикатів, загальнонозначимий у логіці висловлювань, є загальнонозначимим і в логіці предикатів. Отже, якщо звести вираз логіки предикатів до виразу логіки висловлювань, то цим самим проблема розв'язання виразів логіки предикатів полегшиться.

Але не кожен загальнонозначимий вираз логіки предикатів буде загальнонозначимим виразом логіки висловлювань. У протилежному випадку проблему розв'язання у логіці предикатів можна було б звести до процедур розв'язання, характерних для логіки висловлювань.

Візьмемо виконуваний вираз логіки предикатів і логіки висловлювань і перевіримо, чи існує між ними однозначна відповідність як між тавтологіями логіки висловлювань і логіки предикатів. Виявляється, що такої відповідності немає. Унаслідок підстановки із виконуваного, але не загальнонозначимого виразу логіки висловлювань, можна отримати протиріччя логіки предикатів. Для прикладу візьмемо вираз логіки висловлювань

$$p \wedge q.$$

Підставимо замість p формулу $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$, а замість q — $\forall xQ(x)$. У результаті отримаємо протиріччя

$$\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \forall xQ(x).$$

Те, що даний вираз за будь-якого набору значень буде хибним, залежить від формули, яку підставляють замість p . Але та сама підстановка у законі логіки висловлювань знову приводить до закону.

Якщо до виразу $p \vee \neg p$ замість p підставити нашу формулу

$$\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)),$$

то отримаємо тавтологію

$$\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \vee \neg \exists x(P(x) \wedge \neg P(x)).$$

Загальнонозначимість цього виразу визначається тепер загальнонозначимістю формули $\neg \exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$.

Щодо такої характеристики формул, як *невиконуваність*, зауважимо, що кожна формула логіки предикатів, невиконувана в логіці висловлювань, у логіці предикатів буде також невикону-

ваною. Але невиконувана формула є протиріччям. Це дає змогу (як у випадку із тавтологіями) здійснювати розв'язання таких виразів засобами логіки висловлювань.

Крім законів логіки предикатів, які можна отримати із законів логіки висловлювань шляхом указаних перетворень, існує група своєрідних законів у цій логічній теорії, на перегляді яких ми й зупинимось.

1. Закон усунення $\forall$

$$\forall xP(x) \supset P(t).$$

Якщо кожен індивід x володіє властивістю P ,
то й конкретно визначений індивід t має цю властивість.

Тут $P(t)$ – результат заміни всіх вільних входжень змінної x на замкнений терм t .

2. Закон введення $\exists$

$$P(t) \supset \exists xP(x).$$

Якщо деякий конкретний індивід t має властивість P ,
то існує принаймні один індивід із такою властивістю.

Якщо взяти обидва ці закони як засновки, то отримаємо третій – закон підпорядкування:

$$\frac{\forall xP(x) \supset P(t) \quad P(t) \supset \exists xP(x)}{\forall xP(x) \supset \exists xP(x)}.$$

Тут застосовується правило транзитивності імплікації.

3. Закон підпорядкування

$$\forall xP(x) \supset \exists xP(x).$$

4. Закон введення квантора загальності для $\wedge$

$$\forall x[(P(x) \wedge Q(x))] \equiv [\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)].$$

Кожен індивід володіє певною властивістю P та Q тоді й тільки тоді,
коли кожен індивід має властивість P
і кожен індивід має властивість Q .

Наприклад, кожний квадрат має рівні сторони та прямі кути тоді й тільки тоді, коли кожний квадрат має рівні сторони та кожний квадрат має прямі кути.

5. Закон введення квантора існування для $\wedge$

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \supset [\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)].$$

Якщо існують об'єкти, які мають властивість P і Q ,
то існують об'єкти, які мають властивість P
та існують об'єкти, які мають властивість Q .

Наприклад, якщо є книги, які мають пізнавальний і методичний характер, то існують книги, які мають пізнавальний характер і книги, які мають методичний характер.

Очевидно, що у законі 4 головним є знак еквівалентності ($\equiv$), отже, ліву та праву сторони можна міняти місцями. У законі 5 головним знаком є $\supset$, отже члени імплікації не можна міняти місцями. У протилежному випадку отримаємо вираз, який не буде загальнозначимим. Наприклад, є книги художні та є книги – словники. Але немає жодної книги, яка була б і художньою, і словником одночасно.

6. Закон введення $\forall$ для $\vee$

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \equiv [\forall xP(x) \vee Q(x)].$$

7. Закон виведення $\forall$ для $\vee$

$$[\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)] \supset \forall x[P(x) \vee Q(x)].$$

Якщо всі індивіди мають властивість P або властивість Q ,
то всі індивіди мають властивість P або Q .

Для цього закону також невласлива оберненість, тобто можливість поміняти місцями члени імплікації, що веде до втрати загальнозначимості. Наприклад, правильно, що кожен депутат або прибічник реформ, або не прибічник реформ, але не правильно ні те, що кожен депутат прибічник реформ, ні те, що кожен депутат – не прибічник реформ.

8. Закон введення $\exists$ для $\vee$

$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \equiv [\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)].$$

Індивіди із властивістю P або Q існують тоді й тільки тоді,
коли існують індивіди із властивістю P або індивіди із властивістю Q .

Оскільки диз'юнкція істинна, коли один із її членів істинний, то для істинності $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ не має значення, буде істинним $\exists xP(x)$ чи $\exists xQ(x)$, або обидва будуть істинними.

9. Закон введення $\forall$ для $\supset$

$$\forall x[P(x) \supset Q(x)] \supset [\forall xP(x) \supset \forall x Q(x)].$$

Якщо всі x мають властивість $P(x)$, то вони мають властивість $Q(x)$,
тоді вірно, якщо кожен x має властивість $P(x)$,
то кожен x має властивість $Q(x)$.

Конкретизувати зазначене можна так: *Якщо для кожного студента, який успішно складе сесію, вірно, що він отримає стипендію, то вірно, якщо кожен студент складе сесію, то кожен отримає стипендію. У законах 1-9 використовуються лише одномісні предикатори.*

Але так само, як шляхом підстановки ми із законів логіки висловлювань отримували закони логіки предикатів, *можна отримувати закони багатомісної логіки предикатів.* Для цього необхідно замість одномісних предикатів поставити багатомісні та ввести стільки кванторів, щоб всі предметні змінні були зв'язані. Наприклад, із 9 закону можна отримати закон 9'.

$$9'. \forall x \forall y [K(x, y) \supset S(x, y)] \supset [\forall x \forall y K(x, y) \supset \forall x \forall y S(x, y)].$$

Закони перестановки кванторів

- 10 $\forall x \forall y R(x, y) \equiv \forall y \forall x R(x, y)$
- 11 $\exists x \exists y R(x, y) \equiv \exists y \exists x R(x, y)$
- 12 $\exists x \forall y R(x, y) \supset \forall y \exists x R(x, y)$

Закони заперечення кванторів

- 13 $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- 14 $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Закони взаємовираженості кванторів

- 15 $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$
- 16 $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

Названі закони використовують при побудові доведень у логіці предикатів, а також при здійсненні процедур розв'язання для виразів логіки предикатів.

Одна із процедур розв'язання у логіці предикатів розглядалася вище. Вона зводилася до застосування методу аналітичних таблиць. А тепер зупинимося на інших процедурах.

3.1.8. Процедури для розв'язання виразів логіки предикатів

У логіці предикатів, на відміну від логіки висловлювань, немає універсального способу для розв'язання будь-яких виразів логіки предикатів. Тому один зі способів розв'язання полягає у тому, щоб вираз, який потрібно розв'язати, звести до виразу логіки висловлювань, і вже до нього застосувати процедури розв'язання із логіки висловлювань.

Для досить великої групи виразів логіки предикатів можна встановити їх загальнозначимість за допомогою засобів процедури розв'язання логіки висловлювань.

Основна ідея тут та сама, що й при розв'язанні виразів логіки висловлювань. Спочатку припускаємо, що вираз, який потрібно розв'язати, – не загальнозначимий. Здійснюємо відповідні кроки для знаходження такого розподілу значень істинності або інтерпретацію, за якої даний вираз буде хибним. Якщо з'ясовується, що такого розподілу значень або такої інтерпретації не існує, то вираз вважається загальнозначимим.

Наприклад, візьмемо вираз:

$$[\forall x(M(x) \supset \neg P(x)) \wedge \forall x(S(x) \supset M(x))] \supset \forall x(S(x) \supset \neg P(x))$$

і перевіримо, чи є він загальнозначимим.

Застосуємо закон 9:

$$[(\forall x M(x) \supset \forall x \neg P(x)) \wedge (\forall x S(x) \supset \forall x M(x))] \supset (\forall x S(x) \supset \forall x \neg P(x)).$$

Цим досягається, що в області квантора $\forall$ розташовані не складні предикати, а прості.

$$[(\forall x M(x) \supset \forall x \neg P(x)) \wedge (\forall x S(x) \supset \forall x M(x))] \supset (\forall x S(x) \supset \forall x \neg P(x)).$$

Наша формула має вид імплікації. Припустимо, що вона не загальнозначима, тобто принаймні за одного набору значень вона хибна. Але це можливо тоді, коли *антецедент* – істинний, а *консеквент* – хибний.

Консеквент буде хибним, коли висловлювання $\forall x S(x)$ – істинне, а $\forall x \neg P(x)$ – хибне. Нехай буде так. Тоді ці вирази в антецеденті набувають значень

$$[(\forall x M(x) \supset \forall x \top P(x)) \wedge (\forall x S(x) \supset \forall x M(x))]$$

$$\begin{array}{cc} \text{б} & \text{б} \\ x & i \end{array}$$

Оскільки *антецедент* є істинною кон'юнкцією, то обидва кон'юнкти мають бути істинними. Тому у першому кон'юнкті висловлюванню $\forall x M(x)$ необхідно надати значення x , інакше

$$(\forall x M(x) \supset \forall x \top P(x))$$

буде хибним, а у другому кон'юнкті висловлюванню $\forall x M(x)$ необхідно надати значення i , інакше вираз

$$(\forall x S(x) \supset \forall x M(x))$$

буде хибним.

Але зрозуміло, що одному й тому самому елементарному висловлюванню у межах конкретного складного висловлювання не можна одночасно приписувати значення i та x . Отже, припущення, що вихідний вираз є не загальнозначимий, не вірне.

Візьмемо наступний приклад

$$[\forall x (P(x) \supset \top M(x)) \wedge \exists x (S(x) \wedge M(x))] \supset \exists x (S(x) \wedge \top P(x)).$$

Застосуємо, крім закону 9, ще й закон 5

$$([\exists x (P(x) \wedge Q(x))] \equiv [\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)]),$$

$$[(\forall x P(x) \supset \forall x \top M(x)) \wedge \exists x S(x) \wedge \exists x M(x)] \supset (\exists x S(x) \wedge \exists x \top P(x)).$$

Спробуємо знайти інтерпретацію, за якої антецедент був би істинним, а консеквент – хибним. Відомо, що консеквент буде хибним, якщо принаймні один із кон'юнтів хибний. Неможливо припустити, що висловлювання $\exists x S(x)$ хибне, інакше весь антецедент буде хибним.

Залишається висловлювання $\exists x \neg P(x)$. Розглянемо імплікацію в антецеденті. Згідно із припущенням висловлювання $\exists x \neg P(x)$ – *хибне*. Відповідно до закону 14 воно еквівалентне $\neg \forall x P(x)$. Це означає, що висловлювання $\forall x P(x)$ – *істинне*. Тоді висловлювання $\forall x \neg M(x)$ також має бути істинним, оскільки за припущенням імплікація $(\forall x P(x) \supset \forall x \top M(x))$ – *істинна*. Але $\forall x \top M(x)$ еквівалентне $\top \exists x M(x)$. Тоді *хибним* є $\exists x M(x)$.

Отже, не існує такого набору значень істинності, за якого дана імплікація *хибна*, тобто *вихідний вираз* є загальнозначимим.

Але ця процедура не є ефективною для всіх формул логіки предикатів. Розглянемо формулу

$$[\forall x(M(x) \supset \neg P(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge M(x))] \supset \exists x(S(x) \wedge \neg P(x)).$$

Застосуємо до цього виразу закони 9 і 5:

$$[(\forall x M(x) \supset \forall x \neg P(x)) \wedge \exists x S(x) \wedge \exists x M(x)] \supset (\exists x S(x) \wedge \exists x \neg P(x)).$$

Щоб проінтерпретувати цю формулу таким чином, коли антецедент буде *істинним*, а консеквент – *хибним*, необхідно припустити, що обидва екзистенційні висловлювання в антецеденті – *істинні* й цим самим $\exists x S(x)$ *істинне* в консеквенті, а $\exists x \neg P(x)$ – *хибне* в ньому.

Із хибності $\exists x \neg P(x)$ випливає хибність $\forall x \neg P(x)$. Із попередніх припущень нічого не випливає щодо значення висловлювання $\forall x M(x)$

$$[(\forall x M(x) \supset \forall x \neg P(x)) \wedge \exists x S(x) \wedge \exists x M(x)]$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ? & x & i & i \end{array}$$

Із передбачуваною істинністю $\exists x M(x)$ сумісна як істинність, так і хибність $\forall x M(x)$. За *істинності* $\forall x M(x)$ імплікація буде *хибною*, а за *хибності* $\forall x M(x)$ – вона буде *істинною*.

Процедуру розв'язання, яку ми щойно застосували до наведених виразів (позначимо її літерою *A*), можна описати так:

1) *перетворити за допомогою законів введення кванторів вихідний вираз* так, щоб кожне висловлювання утримувало тільки один предикат;

2) *знайти інтерпретацію для отриманого виразу*, виходячи із припущення про те, що цей вираз *хибний*.

Розглянемо ще одну процедуру розв'язання (позначимо її літерою *B*). Процедура *A*, як і процедура *B*, спрямовані на розв'язання виразів, що у традиційній логіці є різновидами умовиводів. Тому ці вирази мають вид імплікації, де антецедентом є кон'юнкція засновків, а консеквентом – висновок. Ця процедура складається із таких кроків:

1) використовуючи відповідні закони, *перетворити* всі наявні у вихідній формулі *загальні висловлювання на екзистенційні*;

2) *перетворити екзистенційні висловлювання так, щоб в області дії квантора були тільки кон'юнкція та заперечення, яке б належало до простих предикатів;*

3) *замінити консеквент вихідного виразу його запереченням, а імплікацію – кон'юнкцією;*

4) *перевірити, чи немає в отриманій кон'юнкції принаймні одного кон'юнкта із запереченням і без нього;*

5) *Якщо в цьому виразі є висловлювання із запереченням і без нього, тоді необхідно виконати такі дії:*

а) *виписати всі висловлювання без заперечення;*

б) *приєднати до них через імплікацію диз'юнкцію висловлювань, які мають заперечення;*

в) *зняти заперечення перед кванторами;*

6) *зняти квантори та предметні змінні;*

7) *отриманий вираз перевірити або за допомогою таблиці істинності, або зведенням до КНФ.*

Звернемося до прикладу. Маємо вираз

$$[\forall x M(x) \supset \neg P(x)] \wedge \exists x (S(x) \wedge M(x)) \supset \exists x (S(x) \wedge \neg P(x)).$$

Перевіримо його на загальнозначимість.

$$[\neg \exists x (M(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x (S(x) \wedge M(x))] \supset \exists x (S(x) \wedge \neg P(x)).$$

За законом 14 у вихідному виразі загальне висловлювання замінимо екзистенційним.

$$\neg \exists x (M(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x (S(x) \wedge M(x)) \wedge \neg \exists x (S(x) \wedge \neg P(x)).$$

Замінімо консеквент його запереченням, а імплікацію – кон'юнкцією.

$$\exists x (S(x) \wedge M(x)) \supset [\exists x (M(x) \wedge P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge \neg P(x))].$$

До висловлювання без заперечення через імплікацію приєднаємо диз'юнкцію висловлювань із запереченням, але при цьому знімаємо заперечення над кванторами.

$$(S \wedge M) \supset [(M \wedge P) \vee (S \wedge \neg P)].$$

Усуваємо квантори та предметні змінні.

Фактично ми звели вихідний вираз до виразу логіки висловлювань, тому є можливість привести його до КНФ:

$$а) (S \wedge M) \vee [(M \wedge P) \vee (S \wedge \neg P)],$$

$$б) \neg S \vee \neg M \vee [(M \vee S) \wedge (M \vee \neg P) \wedge (P \vee S) \wedge (P \vee \neg P)],$$

$$в) (\neg S \vee \neg M \vee M \vee S) \wedge (\neg S \vee \neg M \vee M \vee \neg P) \wedge (\neg S \vee \neg M \vee P \vee S) \wedge (\neg S \vee \neg M \vee P \vee \neg P).$$

Отже, вихідний вираз є загальнозначимим.

Як уже зазначалося, універсальної процедури розв'язання для всієї області логіки предикатів не існує. Частковою областю логіки предикатів, для якої, так би мовити, ця проблема розв'язана, є одномісна логіка предикатів. Тому, звертаючись до розглянутих процедур розв'язання, необхідно зважати на цю обставину.

Запитання для самоконтролю

1. Особливості логіки предикатів.
2. Поняття алгебраїчної системи логіки предикатів S^4 .
3. Структура мови S^4 .
4. Синтаксис метамови S^4 .
5. Дефініція терму.
6. Дефініція формули.
7. Поняття зв'язаної змінної та вільної змінної.
8. Поняття конгруентної формули.
9. Структура семантики метамови S^4 .
10. Універсум розгляду U .
11. Інтерпретаційна функція I .
12. Дефініція інтерпретації предметної константи.
13. Дефініція інтерпретації предикаторної константи.
14. Дефініція інтерпретації предметно-функціональної константи.
15. Поняття моделі.
16. Процедури встановлення значень для формул.
17. Дефініція умов істинності та хибності елементарних формул.
18. Дефініція умов істинності та хибності формул, в яких головним законом є пропозиційні знаки.
19. Дефініція умов істинності та хибності, в яких головним знаком є квантор.
20. Типологія формул в S^4 за семантичними ознаками.
21. Поняття логічного закону.
22. Дефініція незагальнозначимої формули.
23. Дефініція виконуваної формули.
24. Дефініція невиконуваної формули.
25. Логічні відношення між формулами в S^4 .

26. Відношення сумісності за істинністю.
27. Відношення сумісності за хибністю.
28. Відношення логічного слідування.
29. Проблема розв'язання.
30. Метод аналітичних таблиць у логіці предикатів.
31. Закони логіки предикатів.
32. Процедури розв'язання в логіці предикатів.
33. Перевірити за допомогою аналітичних таблиць, чи є загальноозначеними формули:
 - а) $\exists xP(x) \supset \forall yP(y)$;
 - б) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$;
 - в) $\forall x(P(x) \vee Q(a)) \supset (\forall xP(x) \vee Q(a))$;
 - г) $[\forall x(M(x) \supset \neg P(x)) \wedge \exists x(M(x) \wedge (S(x)))] \supset \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$;
 - д) $[\forall x(P(x) \supset M(x)) \wedge \forall x(M(x) \supset (S(x)))] \supset \exists x(S(x) \wedge P(x))$.
34. Застосувати процедури розв'язання *A* та *B* до виразів:
 - а) $[\forall x(P(x) \supset M(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge \neg M(x))] \supset \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$;
 - б) $[\forall x(M(x) \supset \neg P(x)) \wedge \forall x(M(x) \supset S(x))] \supset \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$;
 - в) $[\exists x(P(x) \wedge M(x)) \wedge \forall x(M(x) \supset S(x))] \supset \exists x(S(x) \wedge P(x))$;
 - г) $[\forall x(M(x) \supset \neg P(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge M(x))] \supset \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$.

3.2. Числення логіки предикатів

Відомо, що основним змістом логіки є побудова та аналіз числень. Як у традиційній, так і у сучасній логіці предметом вивчення є форми правильних міркувань. Щоправда, існує принципова відмінність у підході до числень у традиційній і сучасній логіці.

У традиційній логіці числення зводилися, в основному, до емпіричного виділення та опису деяких форм правильних міркувань. У сучасній же логіці числення або теорія дедукції здійснюється як теоретична систематизація правильних міркувань на основі чітких визначень логічного закону, відношення логічного слідування та інших суттєвих відношень між висловлюваннями, які складають логіку відповідної мови.

Виходячи із досвіду розгляду числень логіки висловлювань, зазначимо, що основою побудови теорії дедукції у вигляді логічних числень є наявність зв'язку між законами та правилами ви-

снровку. Саме цей зв'язок забезпечує можливість обґрунтування одних законів і правил за допомогою інших.

При побудові числень необхідно виділити:

- а) *оптимальну кількість законів і правил висновку*;
- б) *дефініцію висновку та доведення*.

Важливим при цьому є те, що за коректної побудови числення формула A може бути доведена $\vdash A$ тільки у тому випадку, коли вона є тавтологією $\models A$, а вивідність деякої формули B із множини законів $\Gamma \vdash B$ матиме місце лише тоді, коли B є логічним наслідком із Γ . Якщо це так, то числення є несуперечливим.

Побудова логічних числень переслідує фактично дві мети:

1) *власне теоретичну* для самої логіки, оскільки у процесі та в результаті побудови числень виявляються зв'язки між самими законами, правилами висновку. Із множини тих та інших виділяється множина вихідних, які є достатніми для доведення всіх формул (тавтологій), для відтворення всіх можливих відношень слідування, для обґрунтування правил міркувань;

2) *можливість використання побудови логічних числень як логічного апарату для здійснення висновків і доведень у нелогічних теоріях*, побудованих на базі відповідної прикладної формалізованої мови.

3.2.1. Аксиоматичне числення предикатів

Аксиоматичне числення логіки предикатів –
це така формально-логічна теорія,
що є розширенням числення висловлювань.

Мається на увазі, що аксіоми S^2 та правила висновку аксіоматичного числення висловлювань зберігаються в аксіоматичному численні предикатів. Позначають *аксіоматичне числення предикатів* як своєрідну формально-логічну теорію символом S^5 .

До аксіом S^5 належать такі вирази:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;
- 2 а. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;
3. $(A \wedge B) \supset A$;
4. $(A \wedge B) \supset B$;
5. $(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B \wedge C))$;
6. $A \supset (A \vee B)$;
7. $B \supset (A \vee B)$;
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B) \supset C)$;
9. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$;
10. $A \supset \neg \neg A$;
11. $\neg \neg A \supset A$;
12. $\forall x F(x) \supset F(y)$;
13. $F(y) \supset \exists x F(x)$.

Із переліку аксіом очевидно, що до списку аксіом S^5 включаються всі 11 аксіом S^2 , і до них додаються ще дві аксіоми 12 і 13, де $F(x)$ – будь-яка формула логіки предикатів, в якій наявні вільні входження предметної змінної x . Формула $F(y)$ отримана із $F(x)$ заміною всіх вільних входжень x на y .

Металітери A, B, C у запису аксіомних схем представляють будь-яку формулу логіки предикатів. Наприклад, аксіому 1 можна записати мовою логіки предикатів

$$P(x) \supset (Q(x) \supset P(x)).$$

До правил висновку S^5 належить правило висновку або правило модус поненс, що застосовується і в S^2 :

Якщо A та $A \supset B$ – вивідні формули, B – також вивідна формула.

Крім цього правила тут застосовуються правила введення та усунення кванторів, на яких ми й зупинимось.

Але до формулювання цих правил надамо деякі пояснення. Введемо поняття *правильної підстановки*.

Правильною є підстановка, у результаті якої із істинних формул отримують тільки істинні формули.

Щоб досягти цієї мети, необхідно дотримуватися таких вимог:

а) вираз, який підставляють, має належати до тієї самої предметної області, на якій визначена змінна x . Наприклад, не можна до виразу *Існує x , який є ровесником у* замість змінної $у$ підставляти ім'я предмету із області хімічних елементів;

б) підстановка значень замість змінної x можлива лише там, де вона вільна. Неможливо, наприклад, у виразі *Для будь-якого x , якщо x – планета, то x має природний супутник* зв'язану змінну x замінити іменем конкретної планети. Порушення цієї вимоги веде до нісенітничі. Наприклад, замість x візьмемо ім'я *Юнітер*. Дістанемо вираз *Для будь-якого Юнітера*, який не має смислу;

в) підстановка деякого значення замість вільної змінної x здійснюється скрізь, де зустрічається змінна x у даному виразі;

г) у результаті підстановки жодна вільна змінна не має виявитися зв'язаною¹⁷.

Пояснимо це на прикладах. Нехай вираз $\exists xR(x, y)$ означає фразу *Існує ціле число x , яке не дорівнює довільному числу $у$* . Це висловлювання залишатиметься істинним за будь-якої підстановки, крім випадку, коли замість змінної $у$ підставимо зв'язану предметну змінну x

$$\exists xR(x, x).$$

Дістанемо недоречне висловлювання. *Існує таке ціле число x , яке не дорівнює самому собі*.

Або ж візьмемо цю формулу, але R представлятиме двомісний предикатор *батько*, а x та $у$ – змінні, визначені на області людей. Формула $\exists xR(x, y)$ представлятиме істинне висловлювання, доки замість вільної змінної $у$ не підставимо зв'язану змінну x . Така підстановка призводить до недоречного висловлювання: *Існує людина, яка є батьком самого себе*.

Після цих зауважень перейдемо до формулювання правил введення та усунення кванторів.

¹⁷ До виразу A із вільною змінною x не можна підставляти вираз t із вільною змінною $у$, якщо в A є зв'язаною змінною. І якщо вираз t підставити замість вільної змінної x , то цей факт записують у вигляді виразу $A(x/t)$.

Правило усунення квантора загальності ($\forall\forall$)

$$\frac{\forall x F \ A(x / t)}{}$$

якщо всі предмети універсуму міркування мають певну ознаку, то із цього можна зробити висновок, що будь-який довільний або визначений предмет даної області має цю ознаку.

Правило введення квантора загальності ($B\forall$)

Якщо у формулі $B(x)$ є вільні входження предметної змінної x , а формула A не містить вільних входжень x , то із формули $A \supset B(x)$ вивідною буде формула $A \supset \forall x B(x)$.

$$A \supset B(x) \vdash A \supset \forall x B(x)$$

або

$$\frac{A \supset B(x) \ A \supset}{\forall x B(x)}$$

якщо із деяких засновків і додаткових припущень A зі зв'язаною змінною x виводиться пропозиційна функція (предикат) $B(x)$, то із A виводиться $\forall x B(x)$

або

якщо у процесі виведення отримуємо твердження про те, що довільний предмет із якоїсь області має певну ознаку, то можна стверджувати, що всі предмети цієї області мають цю ознаку.

Зауважимо, що правило $B\forall$ застосовують лише у випадку, коли x в A є зв'язаною змінною. У тому ж випадку, коли x не зв'язана в A , то $B(x)$, будучи виведеною із A , перетвориться на істинне висловлювання лише для тих значень x , для яких A – істинне. Однак, такою властивістю можуть володіти не всі значення змінної x , і пропозиційна функція $B(x)$ не перетворюватиметься на істинне висловлювання для довільного значення змінної x . У цьому випадку висловлювання $\forall x B(x)$ виявиться хибним.

Правило введення квантора існування ($B\exists$)

$$\frac{A(x / t)}{\$xA}$$

якщо будь-який довільно взятий або визначений предмет має якусь ознаку, то це означає, що існує принаймні один предмет, що має цю ознаку.

Правило усунення квантора існування (УЄ)

$$\frac{\$xA}{A(x/t)}$$

із істинності екзистенційного висловлювання $\exists xA$
 слідує істинність висловлювання $A(t)$,
 яке є результатом підстановки постійної t замість вільної змінної x .

Правила $U\forall$ та $B\exists$ є сильнішими, порівняно із правилами $B\forall$ та $U\exists$, оскільки в їх основі лежить відношення логічного слідування. Справа в тому, що перехід від формули $\forall xA$ до формули $A(x/t)$ і від формули $A(x/t)$ – до формули $\forall xA$ виправданий тим, що між ними є відношення слідування.

$$\forall x A \Vdash A(x, t), A(x/t) \Vdash \exists x A.$$

Іншою є ситуація для правил $B\forall$ та $U\exists$. В їх основі відсутнє відношення логічного слідування. Незважаючи на це, у численні логіки предикатів ці правила все ж таки є прийнятними.

Але щоб не допустити можливості виведення із істинних засновків хибних висновків, необхідно дотримуватися двох формальних вимог:

1) *жодна індивідна змінна не має обмежувати себе у висновку*. Наприклад, ця вимога дозволяє виключити переходи такого вигляду:

$$y = y \vdash \forall x(x = y); \exists x(x < y) \vdash y < y,$$

тобто переходи від істинних (виконуваних) тверджень до хибних;

2) *необхідність розрізнення понять висновку та завершеного висновку*. Тільки при здійсненні завершеного висновку гарантується, що між засновками та висновком має місце відношення логічного слідування.

Правило перейменування вільних змінних

Якщо формула числення предикатів $A(x)$
 містить вільні входження предметної змінної x ,
 і жодне із цих входжень не перебуває в області дії квантора із
 предметної змінної y , то із $\vdash A(x)$ слідує $\vdash A(y)$,
 де $A(y)$ отримана заміною в $A(x)$ усіх вільних входжень x на y .

Правило перейменування зв'язаних змінних

Якщо формула числення предикатів $A(x)$
 не містить вільних входжень предметної змінної y ,
 а містить вільні входження предметної змінної x ,
 жодне з яких не перебуває в області дії квантора зі змінною y ,
 то із $\vdash \sigma x A(x)$ слідує $\vdash \sigma y A(y)$,
 де σ – будь-який із кванторів $\forall, \exists$,
 а формула $A(y)$ отримана із $A(x)$ заміною всіх вільних входжень x на y .

Визначення процедури доведення й доведеної формули.

Доведенням формули B

називають послідовність формул $B_1, B_2, \dots, B_n$,
 в якій $B_n = B$ і кожна із формул послідовності B_i ($i = 1, \dots, n$)
 є або аксіомою, або отримана
 за яким-небудь із правил висновку із попередніх формул.

При цьому число n називають довжиною доведення.

Формулу B у численні предикатів називають доказовою
 або теоремою, якщо для неї існує доведення.

Зауважимо, що множина всіх доказових формул у численні предикатів не розшириться, якщо для побудови доведення ми використовуватимемо не тільки аксіоми, але й будь-які доказові формули. Урахування цього факту часто дозволяє значно спрощувати доведення формул. Цій самій меті служить багато допоміжних правил висновку.

Побудуємо доведення формул логіки предикатів.

$$I. \vdash \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$$

Доведення

- | | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall y A(x, y) \supset A(x, z)$ | – Акс. 12, де z - змінна, яка не входить до формули $A(x, y)$ |
| 2 | $A(x, z) \supset \exists v A(v, z)$ | – Акс. 13, де v змінна, яка не входить до формули $A(x, z)$ |
| 3 | $\exists v A(v, z) \supset \exists x A(x, z)$ | – за правилом перейменування зв'язаної змінної |
| 4 | $A(x, z) \supset \exists x A(x, z)$ | – за правилом транзитивності імплікації (2, 3) |
| 5 | $\forall y A(x, y) \supset \exists x A(x, z)$ | – за правилом транзитивності імплікації (1, 4) |

- 6 $\exists x \forall y (x, y) \supset \exists x A(x, z)$ — $B\exists$ до (5)
 7 $\exists x \forall y (x, y) \supset \forall z \exists x (x, z)$ — $B\forall$ до (6)
 8 $\forall z \exists x (x, z) \supset \forall y \exists x (x, y)$ — за правилом заміни зв'язаної змінної
 9 $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$ — за правилом транзитивності (7, 8)

$$\text{II. } \vdash \neg \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$$

Доведення

1. $A(y) \supset \exists x A(x)$ — Акс. 13
 2. $\neg \exists x A(x) \supset \neg A(y)$ — за правилом контрапозиції до (1)
 3. $\neg \exists x A(x) \supset \forall y \neg A(y)$ — $B\forall$ до (2)
 4. $\forall y \neg A(y) \supset \forall x \neg A(x)$ за правилом заміни зв'язаної змінної
 5. $\vdash \neg \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$ — за (3, 4) правилом транзитивності імплікації

Поняття доведення в аксіоматичному численні предикатів можна розширити за рахунок введення поняття висновку.

Висновком в S^5

називають послідовність формул $B_1, B_2, \dots, B_n$, кожна із яких є або аксіомою, або припущенням (гіпотезою), або виведена із попередніх формул за правилами висновку.

Отже при побудові висновку в S^5 використовують, поряд із аксіомами, гіпотези (припущення). Це вносить певну своєрідність до отримання наслідку у такий спосіб.

Побудуємо висновок формули $B \supset \forall x P(x)$ із формули $\forall y (B \supset P(y))$.

Висновок

1. $\forall y P(y) \supset P(x)$ — Акс. 13
 2. $\forall y P(y) \supset \forall x P(x)$ — $(B\forall)$ до (1)
 3. $\forall y (B \supset P(y))$ — припущення
 4. $\forall y (B \supset P(y)) \supset (B \supset P(y))$ — Акс. 13
 5. $B \supset P(y)$ — (MP) до (3, 4)
 6. $B \supset \forall y P(y)$ — $(B\forall)$ до (5)
 7. $(\forall y P(y) \supset \forall x P(x)) \supset ((B \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))) \supset \forall x P(x))$ — Акс. 1

8. $B \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))$ — (MP) до (2, 7)
9. $(B \supset \forall y P(y)) \supset ((B \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))) \supset (B \supset \forall x P(x)))$ — Акс. 2a
10. $(B \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))) \supset \supset (B \supset \forall x P(x))$ — (MP) до (6, 9)
11. $B \supset \forall x P(x)$ — (MP) до (8, 10)

Оскільки у припущенні $\forall y(B \supset P(y))$ немає вільних змінних, то це означає, що $\forall y(B \supset P(y)) \vdash (B \supset \forall x P(x))$.

Після характеристики аксіоматичного числення предикатів розглянемо теорему дедукції.

3.2.2. Теорема про дедукцію в S^5

Теорему про дедукцію у численні предикатів записують як

$$\frac{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B}{A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B}$$

(усі вільні змінні у припущеннях зв'язані).

Представимо дедукцію у вигляді послідовності $B_1, \dots, B_n$, де $B_n = B$.

Доведення

Зазначимо для початку, що тут можливі випадки, як і в аксіоматичному численні висловлювань:

- а) B є аксіомою;
- б) B є одним із припущень $A_1, \dots, A_{n-1}$;
- в) B є припущенням A_n .

Випадок а)

Якщо B – аксіома, то:

1. $\vdash B$
2. $\vdash B \supset (A \supset B)$ — Акс. 1
3. $\vdash B \supset (A_n \supset B)$ — п/п до 2, A/A_n
4. $\vdash A_n \supset B$ — MP до (1, 3)
5. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ — згідно із властивостями $\vdash$

Випадок б)

B є одним із припущень $A_1, \dots, A_n$, тоді, $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash B$, згідно із властивостями знака $\vdash$. Звідси $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$.

Випадок в)

B є припущенням A_n , тоді $\vdash A_n \supset B$, оскільки $A_n \supset B \in B \supset B$. Звідси $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ – згідно із властивостями знака $\vdash$.

Розглянемо ще два випадки.

1. B отримують із B_i завдяки правилу $B\forall$.

2. B отримують із B_i завдяки правилу $B\exists$ (при цьому $i < n$).

Випадок 1

B отримують із B_i завдяки правилу $B\forall$, тоді $B_i \in C \supset A(x)$, а $B \in C \supset \forall x A(x)$, причому C не містить x вільно. Отже:

1. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (C \supset A(x))$.

Якщо x не входить вільно ні до A_n , ні до C , то x не входить вільно до $(A_n \wedge C)$.

2. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \wedge C \supset A(x)$ – згідно із рівносильністю:
 $A \supset (B \supset C) \equiv A \wedge B \supset C$.

3. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \wedge C \supset \forall x A(x)$ – $(B\forall)$ до (2)
 – згідно із рівносильністю:

4. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (C \supset \forall x A(x))$ $A \supset (B \supset C) \equiv A \wedge B \supset C$

Випадок 2

B отримують із B_i завдяки правилу $B\exists$, тоді $B_i \in A(x) \supset C$, $B \in \exists x A(x) \supset C$. Необхідно мати на увазі, що C не утримує x вільно. Ураховуючи, що $i < n$, маємо:

1. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (A(x) \supset C)$.

Тут, як і у випадку 1, x не входить в A_n вільно. Використаємо рівносильність $A \supset (B \supset C) \equiv B \supset (A \supset C)$:

2. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A(x) \supset (A_n \supset C)$

3. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash \exists x A(x) \supset (A_n \supset C)$ – $B\exists$ до 2

Скористаємося наведеною вище рівносильністю:

4. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (\exists x A(x) \supset C)$

Але 4 рядок є дедукцією $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ для випадку

2. Отже, для всіх випадків показано побудову дедукції

$A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ із дедукції $A_1, \dots, A_n \vdash B$.

3.2.3. Металогічні принципи аксіоматичного числення логіки предикатів

Металогічні принципи у S^5 описують основні властивості процесу логічного виведення. До металогічних принципів у S^5 належать:

- а) *несуперечливість*;
- б) *незалежність*;
- в) *повнота*.

Несуперечливість аксіом. Введемо поняття *інтерпретованої* і *неінтерпретованої* систем.

Під *інтерпретованістю* формальної системи розуміють наявність області предметів, із яких можна скласти множини та визначати на них предикати так, щоб за допомогою цих множин і предикатів можна було знаходити інтерпретації для досліджуваної системи аксіом. Якщо це неможливо здійснити, то формальну систему вважають неінтерпретованою.

Систему аксіом називають **змістовно несуперечливою** або **інтерпретованою**, якщо для неї існує інтерпретація.

У протилежному випадку систему аксіом називають **змістовно суперечливою** або **не інтерпретованою** або

Систему аксіом називають **несуперечливою**, якщо із неї неможливо вивести одночасно істинність і хибність одного й того самого твердження.

Несуперечливість у цьому смислі називають *внутрішньою*.

Якщо порівнювати змістовну та внутрішню несуперечливість, то стає очевидним, що коли область теоретико-множинних понять, із якої ми беремо інтерпретацію для системи аксіом, є внутрішньо несуперечливою, то й сама система аксіом буде внутрішньо несуперечливою. Отже, наявність інтерпретації системи аксіом зводить питання про несуперечливість цієї системи до несуперечливості системи понять, що використовуються в цій інтерпретації. Якщо ми впевнені, що ця система понять внут-

рішньо несуперечлива, то факт наявності інтерпретації установлює внутрішню несуперечливість досліджуваної системи аксіом.

Незалежність аксіом так само, як і несуперечливість, має два визначення. Незалежність також представлена двома дефініціями. Введемо поняття *зовнішньої незалежності*. Для цього візьмемо довільну систему аксіом і надамо щодо неї визначення зовнішньої незалежності.

Отже, маємо систему аксіом: $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Тоді

Аксіому A_i називають **незалежною** від решти аксіом цієї системи, якщо існує область M із предикатами $F\gamma$, яка задовольняє систему аксіом $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$, але не задовольняє систему (I).

Аксіома A_i **внутрішньо незалежна** від решти аксіом, якщо вона не може бути виведена із інших аксіом системи.

Порівняємо ці дефініції.

Припустимо, що аксіома A_i незалежна від решти аксіом у першому розумінні. У такому випадку для системи аксіом

$$A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n \quad (\text{II})$$

існує інтерпретація, яка не задовольняє системі аксіом II разом із аксіомою A_i . Це означає, що формула A_i не може бути логічно виведена із решти аксіом. Якщо б вона була вивідною, то цей висновок був би справедливим для будь-якої інтерпретації. Отже, для будь-якої області із будь-якими предикатами із істинності аксіом II випливала б аксіома A_i . Але за нашим припущенням у тій інтерпретації, де *істинні аксіоми II аксіома A_i – хибна*. Звідси випливає висновок:

Якщо будь-яка аксіома незалежна в першому сенсі, то вона має бути незалежною й у другому сенсі.

Аксіома A_i **залежна** від решти аксіом $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$, якщо будь-яка інтерпретація цієї системи задовольняє також і системі з аксіомою A_i .

Поняття несуперечливості та незалежності системи аксіом мають велике значення для теорій із високим ступенем абстрактності. Насамперед це стосується математичних теорій.

Якщо ми користуємося певною системою аксіом, то критерієм її надійності виступають саме несуперечливість і незалежність. Оскільки відомо, що в суперечливій системі немає вододілу між істиною та хибою, то в ній можливо довести будь-яке твердження. До внутрішньої незалежності звертаються у тому випадку, коли потрібно вилучити із системи зайві аксіоми.

В історії методології науки відомі факти застосування принципу незалежності. Досить відомою є ситуація з п'ятим постулатом *геометрії Евкліда* або з *аксіомою про паралельність*. Розв'язання ситуації із п'ятим постулатом протягом багатьох віків відбувалось у руслі виведення його із інших принципів геометрії Евкліда. Усі спроби на цьому шляху були безрезультатними. І лише Лобачевському вдалося знайти правильний вихід із даної ситуації. Він висловив думку про незалежність п'ятого постулату та обґрунтував її. Ним була побудована така система об'єктів, що задовольняла кожному аксіому геометрії, але не задовольняла аксіому про паралельність.

Отже, металогічні принципи, крім суто спеціального змісту, важливого для побудови аксіоматичного числення логіки предикатів, мають ще й загальнометодологічний зміст.

Принцип повноти. Повноту у численні предикатів розглядають у двох смислах: *вузькому* та *широкому*.

Питання про повноту аксіоматичного числення предикатів у вузькому смислі вирішується негативно.

Логічну систему називають **повною у вузькому смислі**, якщо не можна без суперечності приєднати до її аксіом як нову аксіому жодну невивідну у ній формулу так,

щоб отримана при цьому система була несуперечливою.

Якщо аксіоматичне числення висловлювань є повним у вузькому смислі, то цього не можна сказати про аксіоматичне числення предикатів. *Якщо приєднати до системи аксіом S^5 формулу, яка не доводиться в ній, то суперечності не отримаємо.* Наприклад, такою формулою є вираз

$$\exists xP(x) \supset \forall xP(x). \quad (I)$$

Здійснимо доведення принципу повноти у вузькому смислі. Доведення базується на основі відповідності формул числення

предикатів формулам числення висловлювань, тобто вивідним формулам числення предикатів відповідають певні формули числення висловлювань¹⁸.

Формулі (I) у численні висловлювань відповідає формула $p \supset p$, яка є вивідною у численні висловлювань. Отже, формула (I) може бути приєднана до аксіом числення предикатів.

На перший погляд, може здатися дивним, що таку, явно невірну, формулу можна без суперечності приєднати до аксіом числення предикатів. Для пояснення ситуації скористаємося зверненням до змістовного смислу логіки предикатів.

Відомо, що із загальних логічних аксіом нічого не впливає відносно того, які саме предмети та скільки існує в області M , до якої належать наші висловлювання та предикати. Іншими словами, із загальних логічних положень неможливо зробити висновки, що область M містить більше одного елементу.

Якщо ж область M містить тільки один елемент, то формула (I) є для неї істинною. До речі, коли ми обґрунтовували несуперечливість аксіом, то застосовували інтерпретацію формул на предметній області з одного елементу.

Щоб довести, що числення предикатів неповне у вузькому смислі, необхідно показати, що формула (I) не є вивідною із аксіом числення предикатів. Із погляду змісту це очевидно. Адже із загальної істинності формули (I) випливала б неможливість існування в області M більше одного елементу. І якщо із загальнологічних положень не можна довести існування більше одного предмету, то існування тільки одного предмету також довести неможливо.

Однак можна побудувати строге доведення того, що формула (I) не може бути формально виведена із аксіом числення предикатів. Центральна ідея цього доведення: для інтерпретації формул числення предикатів береться предметна область M , яка складається лише із двох елементів (напр., a та b).

¹⁸ Обґрунтувати зазначене можна у такий спосіб: аксіомам 1-11 відповідають вивідні формули числення висловлювань; аксіомам 12 і 13 відповідає формула $p \supset p$, яка є вивідною формулою числення висловлювань.

Тепер поставимо у відповідність кожній формулі числення предикатів таку формулу A^* , в якій операція зв'язування квантором замінюється:

$$\begin{aligned}\forall x A(x); \\ A(a) \wedge A(b); \\ \exists x A(x); \\ A(a) \vee A(b).\end{aligned}$$

Формулу числення предикатів, яка не утримує кванторів, називають **правильною**, якщо за будь-яких заміन вільних змінних предметами a та b вона є вивідною формулою числення висловлювань.

Покажемо, що для кожної вивідної формули A у численні предикатів відповідна їй формула A^* є вивідною у численні висловлювань. Для аксіом 1-11 це можна перевірити безпосередньо. Аксіоми 1-11 не містять ні змінних, ні кванторів, тому відповідними їм формулами є вони самі, тобто вивідні формули числення висловлювань.

Розглянемо аксіому 12:

$$\forall x F(x) \supset F(y).$$

Замінімо засновок кон'юнкцією

$$F(a) \wedge F(b) \supset F(y).$$

Ця формула правильна, оскільки вона стає вивідною формулою числення висловлювань за заміни змінної x предметами a та b .

У такий самий спосіб можна переконаватися, що й аксіомі 13 ставиться у відповідність правильна формула.

Тепер покажемо, що правила отримання вивідних формул числення предикатів для відповідних формул без кванторів переходять у правила, завдяки яким із правильних формул отримують правильні формули числення предикатів. Візьмемо для прикладу правило зв'язування квантором. Припустимо, що формула $A \supset B(x)$, де A – не утримує змінної x , – вивідна, а відповідна їй формула є правильною формулою числення предикатів

$$A^* \supset B^*(x), \tag{II}$$

де A^* та B^* – формули, які відповідають A та B . Оскільки формула (II) за припущенням правильна, то формули

$$A^* \supset B^*(a) \text{ та } A^* \supset B^*(b)$$

також правильні. Але тоді слід визнати правильною формулу

$$A^* \supset B^*(a) \wedge B^*(b),$$

а це й є формула, що відповідає

$$A \supset \forall x B(x).$$

Якщо провести доведення для всіх правил числення предикатів, то стає очевидним, що кожній вивідній формулі числення предикатів відповідає правильна формула.

Розглянемо тепер формулу, яка відповідає (I).

$$P(a) \vee P(b) \supset P(a) \wedge P(b). \quad (\text{III})$$

Оскільки формула (I) не має вільних змінних, то формула (III), якщо вона правильна, має бути вивідною формулою числення висловлювань. Однак легко переконатися, що формула (III) не є вивідною. Дійсно, для предиката P , для якого $P(a)$ має значення i , а $P(b)$ – значення x , формула (III) перейде в $i \vee x \supset i \wedge x$, тобто набуде значення x . Звідси випливає не вивідність формули (I) у численні предикатів, що й потрібно було довести.

Відомо, що будь-яка вивідна формула у численні предикатів буде тотожно-істинною. Звідси випливає питання: *чи буде будь-яка тотожно-істинна формула вивідною в численні предикатів?* У такій постановці це питання має назву *проблеми повноти у широкому сенсі*. При розв'язанні проблеми повноти числення предикатів у широкому сенсі не можна обмежуватися лише засобами міркування фінітної металогіки. Справа у тім, що до самої постановки проблеми входить поняття *тотожно-істинної формули*, яке включає розгляд усіх інтерпретацій.

Урахуємо ще одну обставину технічного порядку. Ідеться про співвідношення дедуктивної еквівалентності¹⁹ й тотожної істинності формул. Із дедуктивної еквівалентності випливає така залежність:

Якщо дві формули дедуктивно еквівалентні
то із того, що одна із них тотожно-істинна,
слідуює, що й друга також тотожно-істинна.

¹⁹ Формули A^* та B^* називають *дедуктивно еквівалентними* у численні предикатів, якщо із аксіом цього числення й формули A^* завдяки правилам числення можна вивести формулу B^* , і навпаки, із аксіом числення та формули B^* за допомогою правил числення можна вивести формулу A^* .

Дійсно, нехай A^* та B^* – дедуктивно еквівалентні формули та A^* – *тотожно-істинна*. А правила числення є такими, що забезпечують отримання тотожно-істинних формул із тотожно-істинних формул. Завдяки дедуктивній еквівалентності B^* вивідна із аксіом числення предикатів і формули A^* . Це означає, що B^* є *тотожно-істинною формулою*.

Крім того, якщо A^* та B^* – дедуктивно еквівалентні та A^* – *вивідна формула у численні предикатів*, B^* також є *вивідною формулою*.

Отже, проблема повноти числення предикатів у широкому сенсі розв'язується позитивно.

Розглядом металогічних принципів завершується ознайомлення із побудовою аксіоматичного числення предикатів.

3.2.4. Натуральне числення предикатів

Поряд із аксіоматичним численням у логіці предикатів застосовують і такий засіб дослідження, як натуральне числення або система натурального висновку. На відміну від аксіоматичного числення, в якому разом із деяким необхідним мінімумом правил висновку у числі вивідних постулатів містяться аксіоми, *натуральне числення містить тільки правила висновку*.

Усю множину правил висновку у натуральному численні предикатів $(S^6)^{20}$ поділяють на дві підмножини:

- *прямі правила*, що дозволяють із одних виразів виводити нові;

- *непрямі правила*, що регламентують виведення із тверджень про логічне слідування нових тверджень про логічне слідування. За цими підмножинами правил зберігаються визначення, які їм давалися при формулюванні натурального числення висловлювань.

²⁰ Натуральне числення логіки предикатів позначають символом S^6 .

Прямі правила висновку в S^6 :

$\frac{A, B}{A \wedge B}$ (BK)	$\frac{A \wedge B}{A}$ (УК, 1)	$\frac{A \wedge B}{B}$ (УК, 2)
$\frac{}{\neg(A \wedge B)}$ (ЗК)	$\frac{A}{A \vee B}$ (ВД, 1)	$\frac{B}{A \vee B}$ (ВД, 2)
$\frac{}{\neg A \vee \neg B}$	$\frac{A \vee B}{A \vee B \neg B}$ (УД, 2)	$\frac{}{\neg(A \vee B)}$ (ЗД)
$\frac{A \vee B \neg A}{B}$ (УД, 1)	$\frac{A \vee B \neg B}{A}$ (УД, 2)	$\frac{}{\neg \neg A \wedge \neg B}$
$\frac{A \supset B, A}{B}$ (УІ, 1)	$\frac{A \supset B, \neg B}{A}$ (УІ, 2)	$\frac{}{\neg(A \supset B)}$ (ЗІ)
$\frac{B}{A \supset B, B \supset A}$ (BE)	$\frac{\neg A}{A}$ (УЕ, 1)	$\frac{A \wedge \bar{B}}{A \equiv B}$ (УЕ,
$\frac{A \equiv B}{A \equiv B}$	$\frac{A}{A}$	$\frac{B \supset A}{\neg \forall x A(x)}$
$\frac{A}{\neg \neg A}$ (ВІЗ)	$\frac{\supset}{A}$ (УІЗ)	$\frac{\neg \forall x A(x)}{\$x \neg A(x)}$
$\frac{}{\neg \forall x A(x)}$ (З $\forall$)	$\frac{}{\neg \$x A(x)}$ (З $\$$)	
$\frac{}{\$x \neg A(x)}$	$\frac{}{\forall x \neg A(x)}$	
$\frac{A(\alpha / \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)}{\forall \alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)}$ (B $\forall$)	де β – абс. обмежена	
$\frac{\forall \alpha A(\alpha)}{A(\alpha / t)}$ (У $\forall$)	$\frac{A(\alpha / t)}{\$ \alpha A(\alpha)}$ (B $\$$)	
$\frac{\$ \alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)}{A(\alpha / \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)}$ (У $\$$)	де β – абс. обмежена	

Правила введення пропозиційних зв'язок зрозумілі із пояснень у попередніх розділах. Дамо деякі пояснення до кванторних правил висновку. Це, перш за все, стосується виразу $A(\alpha/t)$ і його часткового випадку

$$A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Під виразом $A(\alpha/t)$ мається на увазі результат правильної підстановки до формули $A(\alpha)$ замість усіх вільних входжень пред-

метної змінної α терму t . Наприклад, нехай $A(x)$ представляє формулу

$$\exists y(x < y \wedge x = z).$$

Тут змінна x має два вільних входження. Замість x підставляти-мемо один із наступних термів: 5 , z або $(x + z) \cdot 5$. Унаслідок підстановки вираз $A(x/t)$ у кожному конкретному випадку набуде вигляду

1. $\exists y(5 < y \wedge 5 = z) - x/5$;
2. $\exists y(z < y \wedge z = z) - x/z$;
3. $\exists y((x + z) \cdot 5 < y \wedge (x + z) \cdot 5 = z) - x/(x + z) \cdot 5$.

В усіх трьох випадках підстановку здійснено правильно, оскільки жодна змінна, яка входить до терму t , не стала зв'язаною на місцях, де з'явився у результаті підстановки терм t . Порушення цієї вимоги веде до некоректних семантичних наслідків.

Візьмемо той самий вираз

$$\exists y(x < y \wedge x = z).$$

За семантичною типологією виразів логіки предикатів вираз є виконуваним. Приймемо за область визначення для змінних, що входять до даного виразу, універсум натуральних чисел. При $x/y + 2$ отримаємо

$$\exists y(y' + 2 < y \wedge y' + 2 = z).$$

Оскільки терм t містить змінну y , то після підстановки вона виявилася зв'язаною $\exists$ на тих місцях, де t з'явився у результаті підстановки. Графічно це подано штрихом.

Із погляду семантики даний вираз є тотожно-хибним. Дійсно, які б значення не вибиралися для індивідних змінних із множини натуральних чисел, вираз $x + 2 < y$ ніколи не буде істинним. А це означає, що вся кон'юнкція буде завжди хибною.

Отже, ми порушили правило підстановки, яке (як і всі правила висновку) гарантує отримання із істинних тверджень знову ж таки істинні твердження.

Вираз $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, який фігурує в правилах $\forall\text{I}$ і $\exists\text{E}$, є метамовним записом часткового випадку результату правильної підстановки до виразу $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ замість усіх вільних входжень індивідної змінної α та індивідної змінної β .

Тепер опишемо правила $\forall\text{E}$ та $\exists\text{I}$.

Правило $\forall\text{E}$ являє собою дозвіл

перейти від формули $\forall\alpha A(\alpha)$ до формули $A(\alpha/t)$.

Щоб здійснити цей перехід, необхідно усунути $\forall$, а в залишковій формулі $A(\alpha)$ зробити правильну підстановку замість α терму t . Оскільки до $A(\alpha)$ можуть входити квантори, то необхідно бути уважними при здійсненні процедури підстановки.

Наприклад, маємо вираз $\forall x \exists y (x < y)$. Якщо за область визначення для змінних x та y береться множина натуральних чисел, то даний вираз свідчить про відсутність найбільшого числа. За значенням *цей вираз є істинним*. Але якщо підставити замість x терм y , то отримаємо із цього істинного *хибне* твердження:

$$\exists y (y < y).$$

Тут терм y виявився зв'язаним $\exists$ на тому місці, де він був підставлений замість x .

Правило введення квантора існування

дозволяє перейти від формули $A(\alpha/t)$ до формули $\exists \alpha A(\alpha)$.

Тут також необхідно дотримуватися вимог правильної підстановки. У протилежному випадку матимемо хибний висновок.

Візьмемо предикат $6 < y$. Якщо невірно застосувати правило В $\exists$, то отримаємо хибне твердження $\exists y (y < y)$. Що ж тут насправді відбулося? Справа у тім, що у цьому застосуванні В $\exists$ предикат $6 < y$ трактувався як нібито результат вірної підстановки терму 6 замість змінної y . Але результатом такої підстановки має бути вираз $6 < 6$, а не $6 < y$, оскільки підстановка завжди здійснюється замість усіх входжень вільної індивідної змінної. Отже, вираз $6 < y$ не можна розуміти як $A(y/6)$, а тому *перехід до $\exists y A(y)$ невірний*.

З іншого боку, $6 < y$ можна розуміти як $A(x/6)$, тобто результат тепер вірної підстановки $y: x < y$ замість усіх вільних входжень змінної x терму 6 . У цьому випадку дістанемо $\exists x (x < y)$.

При запису правил В $\forall$ та У $\exists$ фігурує додаткова інформація у вигляді скорочених указівок β – *абс. обм.*; $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – *обм.* Розглянемо смисл цієї інформації.

Із семантичного погляду змінні трактуються як такі, що пробігають деякою предметною областю та набувають тут будь-яких значень. Саме в цьому полягає суть вільних змінних. Але у складі формул вільні змінні не завжди виконують цю роль, тобто не завжди розглядаються як знаки, що можуть позначати

будь-який (довільний) об'єкт області визначення. Тут можливі варіанти.

У випадку, коли вільна предметна змінна у складі формули позначає будь-який об'єкт із універсуму розгляду, вважається, що вона застосована у цій формулі в інтерпретації всезагальності. Наприклад, у виразі

$$x \cdot y = y \cdot x$$

змінні y та x застосовуються в інтерпретації всезагальності, адже їх співвідношення за будь-яких значень x та y буде істинним.

У випадку, коли твердження справедливе для якогось (фіксованого), можливо й невідомого предмету із області значень x , то маємо умовну інтерпретацію. Наприклад, у виразі

$$3x + 6 = 0$$

змінна x уже не використовується в інтерпретації всезагальності, оскільки не позначає довільний об'єкт із універсуму. Навпаки, можливі значення для x строго фіксовані, тобто обмежені умовою даного твердження. А це означає, що x використана в умовній інтерпретації.

Звернемося ще до прикладу. У виразі

$$x + 6 < y$$

нехай x та y взяті в умовній інтерпретації. Виберемо для x значення 2. Вибір значення для x відразу ж накладає обмеження на вибір можливих значень для y . Дійсно, змінна y не може тепер набути як значень чисел, менших від 9. Але вибір числа 2 як значення x довільний. Нам нічого не завадило б вибрати як значення для x число 23. Цей вибір одразу по-новому обмежить множину можливих значень для y . Тепер значенням для y має бути число, не менше від 30.

Отже, у випадку умовної інтерпретації змінних вибір значення для однієї змінної обмежує вибір значення для інших вільних змінних, які входять до конкретного виразу.

Проілюструємо правила $\forall$ та $\exists$. Відповідно до правила $\exists$ дозволяється перехід від формули

$$\exists \alpha(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

до формули

$$A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Зрозуміло, цей перехід регламентується вимогами правильної підстановки. Засновок даного правила

$$\exists \alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

стверджує, що в універсумі розгляду існує деякий об'єкт, що задовольняє вимозі

$$A(\alpha/\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Тоді *правило* УЗ дозволяє вважати цим об'єктом предмет, що позначається змінною β . Буквально це звучить так:

Якщо існує предмет, що задовольняє умові A ,
то нехай ним буде предмет β .

Цим самим здійснюється такий вибір значення для β , за якого предикат $A(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ стає істинним висловлюванням. У цьому випадку β береться в умовній інтерпретації, а це означає, що вона *абсолютно обмежена*, тобто виступає іменем якогось чітко визначеного предмету, що задовольняє умові

$$A(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Але цим самим вибір значення для β обмежує можливість вибору значення для решти вільних змінних $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Саме ця інформація й фіксується у правилі усунення квантора існування вказівкою на те, що β – *абсолютно обмежена змінна* (абс. обм.), а $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – *обмежені змінні* (обм.)²¹. При цьому у *правилі* УЗ змінні $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – це вільні змінні, які входять до виразу

$$\exists \alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Проілюструємо дію УЗ на прикладі. Маємо вираз

$$\exists x(x + 6 = 9),$$

який свідчить про наявність у множині натуральних чисел такого числа, яке задовольняє умові $x + 6 = 9$.

Припустимо, що таким числом буде значення змінної y . У цьому випадку відповідно до правила УЗ отримаємо вираз

$$y + 6 = 9,$$

де y є абсолютно обмеженою змінною, оскільки y позначає тепер вибраний об'єкт із універсуму (у даному випадку він єдиний).

²¹ Тут необхідно зробити зауваження. Коли вживають термін *абсолютно обмежена змінна*, то не у розумінні *неповноцінна*, а обмежена у розумінні визначення, установлення межі, відділення одного предмету від іншого. Іншими словами, обмежити предметну змінну означає визначити для неї характер інтерпретації.

Розглянемо ще вираз $\exists x(x + 6 < y)$. Виберемо у множині натуральних чисел предмет, який задовольняє умові $x + 6 < y$. Про наявність такого об'єкту свідчить висловлювання

$$\exists x(x + 6 < y).$$

Нехай таким об'єктом буде предмет, позначений індивідною змінною x . Застосовуючи тепер правило $\exists\text{E}$, отримаємо вираз

$$x + 6 < y,$$

де змінна x *абсолютно обмежена*, змінна y – *відносно обмежена* або *просто обмежена*.

Подібну інформацію несе й вираз

$$\beta - \text{абс. обм.}; \gamma_1, \dots, \gamma_n - \text{обм.},$$

що є приміткою до правила $\forall\text{I}$, суть якого полягає в дозволі переходу від виразу $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ до виразу $\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Прокоментуємо цей перехід. У даному випадку є *дві можливості*. Вираз $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ може:

1) за деяких фіксованих значень $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ набувати значень i на певній області визначення за будь-яких значень β . Іншими словами, змінна β за відповідних фіксованих значень $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ входить до виразу $A(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ в інтерпретації *всезагальності*. У даному випадку перехід від цього виразу за правилом $\forall\text{I}$ до виразу $\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ є цілком правомірним;

2) вираз $A(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ може виявитися й таким, що за певних фіксованих значень $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ на відповідній області міркувань буде за деяких значень β набувати валентності x .

Тоді виберемо це значення для β . Унаслідок цього β стає *абсолютно обмеженою змінною*, а решта вільних змінних – *обмеженими*. Зрозуміло, що вираз $A(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ за такого вибору значень для змінних *буде хибним*. Але із хибного висловлювання слідує все, що завгодно. Тому *правомірним є вираз*

$$\forall\alpha(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Після того, як ми виписали прямі правила висновку в S^6 з їх короткою характеристикою, ознайомимося з *непрямими правилами висновку* S^6 .

До непрямих правил висновку S^6 належать:

а) *правило введення імплікації* (BI)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B},$$

б) *правило введення заперечення, або правило спростування шляхом зведення до абсурду (ВЗ) або (Зв.А)*

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \perp B}{\Gamma \vdash \perp A};$$

в) *правило доведення від протилежного (ДВП)*

$$\frac{\Gamma, \perp A \vdash B, \perp B}{\Gamma \vdash A}.$$

Крім правил висновку, дедуктика або дедуктивна логіка S^6 включає ще низку дефініцій.

Висновком в S^6

називають непорожню кінцеву послідовність формул $C_1, \dots, C_n$, яка задовольняє таким вимогам:

- а) кожна $C_i \in$ або засновком, або отримана із попередніх формул за правилами висновку;
- б) якщо у висновку застосовувалися правила ВІ або ВЗ, то всі формули, починаючи з останнього засновку аж до результату застосування даного правила, виключаються із подальших кроків побудови висновку²²;
- в) жодна індивідна змінна у висновку не обмежується абсолютно більше одного разу;
- г) жодна індивідна змінна не обмежує у висновку сама себе.

²² Властивість виключення деяких формул із подальшої побудови висновку означає, що до формул у подальших кроках уже не можна більше застосовувати будь-які правила. Формули нібито ізолюються із процесу побудови висновку. У подальшому називатимемо їх *виключеними формулами* або *виключеними засновками*. Графічно їх позначають вертикальною рисою. Звернемося до прикладів. Нехай потрібно обґрунтувати метатвердження про вивідність формули R із засновків $P \supset Q$, $Q \supset R$ і P . Для цього необхідно побудувати висновок, де остання формула графічно збігалася би із формулою R , а засновками були б формули – $P \supset Q$, $Q \supset R$ і P . Ідеться про послідовність:

1. $P \supset Q$ – засновок;
2. $Q \supset R$ – засновок;
3. P – засновок;
4. Q – УІ до 1,3;
5. R – УІ до 2,4.

Дійсно, ми отримали висновок, де остання формула послідовності збігається графічно з R , а формули $P \supset Q$, $Q \supset R$ і P є невиключеними засновками. Цим самим побудовано висновок, який обґрунтовує метатвердження про вивідність

$$\vdash P \supset Q, Q \supset R, P \vdash R.$$

Розглянемо ще одне метатвердження: $\vdash (P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$, яке фіксує той факт, що формула праворуч від знаку $\vdash$ є теоремою. Побудуємо послідовність, яка обґрунтовує дане метатвердження:

1. $P \supset Q$ – засновок;
2. $Q \supset R$ – засновок;
3. P – засновок;
4. Q – УІ, до 1,
- 3; 5. R – УІ, до 2,
- 4;
6. $P \supset R$ – ВІ, до 3, 5;
7. $(Q \supset R) \supset (P \supset R)$ – ВІ, до 2, 6;
8. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$ – ВІ, до 1, 7.

Отже, оскільки рядок 8 послідовності графічно збігається із формулою, яку потрібно було отримати, то ми маємо висновок. Крім того, усі засновки включені, тому множина невиключених засновків порожня. Отже, дана послідовність, згідно із дефініцією доведення, є доведенням формули

$$(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R)),$$

тобто є теоремою.

Якщо порівняти цю послідовність із попередньою, то з'ясується подібність їх п'яти кроків. Якщо б ми призупинили доведення формули

$$(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$$

на п'ятому кроці, то мали б вивідність вигляду

$$(P \supset Q), (Q \supset R), P \vdash R.$$

Однак побудова послідовності була продовжена 6 кроком, де застосовано правило ВІ до 3,5 рядків. Відповідно до цього правила дозволяється отримати формулу $P \supset R$, де P – останній засновок, а R – 5 формула. Саме ця формула й записана на 6 кроці.

У дефініції висновку зазначено, що при застосуванні правила ВІ із подальших кроків висновку виключаються всі формули, починаючи з останнього засновку аж до результату застосування цього правила, тобто у нашому випадку із 3 до 6 формули. Якщо висновок був би обірваний на кроці 6, то цим самим була б обґрунтована вивідність $P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R$. Але, оскільки процес виведення був продовжений унаслідок застосування правила ВІ до кроку 6, то на кроці 7 була отримана формула $(Q \supset R) \supset (P \supset R)$ і тому були виключені рядки із 2 по 7.

Якщо б виведення закінчилося на 7 кроці, то була б обґрунтована вивідність

$$(P \supset Q) \vdash ((Q \supset R) \supset (P \supset R)).$$

Застосувавши до 7 кроку правило ВІ, отримуємо на 8 кроці обґрунтування вивідності із порожньої множини засновків формули

$$(P \supset Q) \vdash ((Q \supset R) \supset (P \supset R)).$$

Доведенням в S^6

є висновок із порожньої множини невиключених засновків.

Завершеним називають

висновок, в якому жодна змінна,
що абсолютно обмежувалася у процесі висновку,
не зустрічається вільно ні у не виключених засновках, ні у наслідку.

Завершеним доведенням

у численні предикатів є завершений висновок
із порожньої множини невиключених засновків.

Якщо проаналізувати всі наведені дефініції, то очевидно, що основною є дефініція висновку.

Порівняно із поняттям висновку у численні висловлювань в S^6 поняття висновку збагачується ще двома вимогами.

1. Позначка про абсолютну обмеженість деякої змінної означає, що в процесі побудови висновку вона стає знаком якогось конкретного предмету, а тому друге її абсолютне обмеження може вказувати на те, що вона стала знаком якогось іншого предмету. Така ситуація має бути заборонена, оскільки веде до протиріччя;

2. В основі кванторних правил $U\forall$ і $V\exists$ лежить відношення логічного слідування. Іншими словами, для $U\forall$ це означає, що перехід від формули $\forall\alpha A(\alpha)$ до $A(\alpha/t)$ виправданий відношенням логічного слідування

$$\forall\alpha A(\alpha) \models A(\alpha/t),$$

а для $V\exists$ перехід від $A(\alpha/t)$ до $\exists\alpha A(\alpha)$ виправданий відношенням логічного слідування типу

$$A(\alpha/t) \models \exists\alpha A(\alpha).$$

Інша ситуація виникає із правилами $B\forall$ та $U\exists$, оскільки в їх основі не лежить відношення логічного слідування

$$A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \not\models \forall\alpha(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

$$\exists\alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \not\models A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Незважаючи на цю обставину, у численні предикатів все ж таки приймаються ці правила, але із певними умовами.

Для того, щоб не допустити можливості виведення із істинних тверджень хибних наслідків, необхідно виключити негативний вплив відсутності логічного слідування. Це досягається завдяки *двом формальним умовам*:

1) *перша формальна умова представлена пунктом г) дефініції висновку.*

Необхідно зважати на те, що ситуація, за якої змінна обмежує сама себе, може виникнути не тільки прямим чином, а й опосередковано. Відношення x обмежує y є транзитивним, тобто для нього вірним є співвідношення

Якщо α обмежує β , а β обмежує γ , то α обмежує γ .

Це пояснює ситуацію самообмеження деякої змінної y у процесі побудови висновку, скажімо змінної x , таким чином: *в одному кроці висновку змінна x , будучи абсолютно обмеженою, обмежує змінну y , а на другому кроці – змінна y , будучи абсолютно обмеженою, обмежує x .* Тоді, згідно із відношення транзитивності, змінна x обмежуватиме сама себе;

2) *друга формальна умова* – розрізнення понять висновку та завершеного висновку. Наявність завершеного висновку гарантує відношення логічного слідування між засновками та наслідком.

До того, як розглянути конкретні варіанти побудови висновку та доведення в S^6 , зупинимось ще на одному питанні.

Побудова висновків і доведень є творчою проблемою – це знаходження потрібної послідовності формул, зокрема засновків. Звичайно, як засновки можна брати будь-які формули, але обов'язково варто враховувати, що застосовуючи до вибраних засновків відповідне правило, необхідно мати можливість виключити із висновку всі зайві засновки.

Для того, щоб вибір потрібних засновків для побудови висновку не мав випадкового характеру й не був простим перебиранням різних можливостей, необхідно описати деякі способи або прийоми вибору засновків.

Назвемо прийом вибору засновків для побудови процедури висновку *методикою вибору засновків* – МЗ. Розглянемо основні з них. Нехай шляхом побудови висновку необхідно обґрунтувати метатвердження про вивідність

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset \dots \supset (C_n \supset B))).$$

Спочатку як засновки беремо формули, які стоять до знаку $\vdash$. Подальший вибір засновків здійснюється за такими методиками:

МЗ 1

Якщо формула, що стоїть після знаку $\vdash$, є імплікацією, то антецедент даної імплікації береться за засновок,

а метою виведення стає консеквент,
тобто до вже вибраних засновків $A_1, A_2, \dots, A_n$ додається новий – C_1 .

Застосування МЗ1 здійснюють, доки метою побудови висновку не стане формула, яка не має вигляду імплікації. У нашому випадку це формула B

$$A_1, A_2, \dots, A_n, C_1, C_2, \dots, C_n \vdash B.$$

Якщо побудова висновку відбувається, то послідовно застосовуючи правило ВІ для виключення додаткових засновків, можна отримати обґрунтування даного висновку

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset \dots \supset (C_n \supset B) \dots)).$$

МЗ 2

Якщо послідовне застосування МЗ 1 привело до формули B як мети побудови висновку, але висновок не вдається побудувати, то варто взяти як додатковий засновок заперечення формули $\neg B$

$$A_1, A_2, \dots, A_n, C_1, C_2, \dots, C_n, \neg B.$$

Метою висновку тепер стає отримання в його складі протиріччя.

МЗ 3

Якщо у процесі побудови висновку зустрічається диз'юнктивна формула $A \vee B$ (вона може входити до складу складнішого виразу), то є кілька варіантів вибору частин цієї формули як додаткових засновків:
або A , або B ; або A та B , або $\neg A$, або $\neg B$; або $\neg A$ та $\neg B$.

МЗ 4

Після того, як завдяки застосуванню МЗ 1 вдалося отримати формулу B , яка має вигляд $\forall \alpha A$ або $\exists \alpha A$, дозволяється продовжити вибір засновків із формули за МЗ1 і МЗ2, незважаючи на квантори.

Розглянемо кілька варіантів побудови висновків і доведень в S^6 .

I. $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$

1. $\exists x \forall y P(x, y)$ – засновок
2. $\forall y P(x, y) - \forall \exists, 1, x$ – абс. обм.
3. $P(x, y)$ – $\forall \forall, 2$
4. $\exists x P(x, y)$ – $\exists \exists, 3$
5. $\forall y \exists x P(x, y) - \forall \forall, 4, y$ – абс. обм.

У цьому висновку змінні x та y *абсолютно обмежені*, але, оскільки вони не входять вільно ні до засновку, ні до наслідку, то дана послідовність являє собою завершений висновок.

Побудуємо висновок для виразу

II. $\forall x \exists y P(x, y) \vdash \exists y \forall x P(x, y)$.

1. $\forall x \exists y P(x, y)$ – засновок
2. $\exists y P(x, y)$ – $\forall \exists, 1$
3. $P(x, y)$ – $\forall \exists, 2 \ z$ – абс. обм.; x – обм.
4. $\forall x P(x, y)$ – $\forall \forall, 3, x$ – абс. обм.; z – обм.

На четвертому кроці висновок має бути призупинений, оскільки послідовність 1-4 суперечить пункту г) *дефініції висновку*, згідно із яким жодна змінна не має обмежувати сама себе. У нашому прикладі на кроці 3 z *обмежує* x , а на кроці 4 x – *обмежує* z . Тому, згідно із відношенням транзитивності, виходить, що z *обмежує* z .

Обійти цю ситуацію неможливо навіть за заміни змінної при застосуванні *правила* $\forall \exists$. Отже, дана вивідність не може бути обґрунтована.

Побудуємо доведення виразу:

III. $\vdash (\forall x (S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x (P(x) \supset Q(x))) \supset \forall x (S(x) \supset Q(x))$

1. $\forall x (S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x (P(x) \supset Q(x))$ – засновок (МЗ-1)
2. $S(x)$ – засновок (МЗ-4)
3. $\forall x (S(x) \supset P(x))$ – УК, 1
4. $\forall x (P(x) \supset Q(x))$ – УК, 1
5. $S(x) \supset P(x)$ – $\forall \forall, 3$
6. $P(x)$ – $\forall \text{I}, 2, 5$
7. $P(x) \supset Q(x)$ – $\forall \forall, 4$
8. $Q(x)$ – $\forall \text{I}, 6, 7$
9. $S(x) \supset Q(x)$ – $\forall \text{I}, 8$

10. $\forall x(S(x) \supset Q(x))$ – В $\forall$, 9, x-
 абс.обм 11. $(\forall x(S(x) \supset P(x)))$
 $\wedge \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \forall x(S(x) \supset Q(x))$.

Цей висновок є завершеним доведенням, тому це метатвердження є обґрунтованим.

Розглянемо наступний варіант побудови доведення.

IV. $\vdash \neg \exists x \neg P(x, y, a) \supset \forall x P(x, y, a)$

- | | | |
|---------|---|---------------------------------------|
| 1. | $\neg \exists \neg P(x, y, a)$ | – засновок (МЗ-1) |
| 2. | $\neg P(x, y, a)$ | – засновок (МЗ-4) |
| 3. | $\exists x \neg P(x, y, a)$ | – В $\exists$, 2 |
| 4. | $\neg P(x, y, a)$ | – ВЗ, 1, 3 |
| 5. | $P(x, y, a)$ | – УЗ, 4 |
| 6. | $\forall x P(x, y, a)$ | – В $\forall$, 5, x – абс. обм., y – |
| обм. 7. | $\neg \exists x \neg P(x, y, a) \supset \forall x P(x, y, a)$ | – ВІ, 6 |

Ця послідовність – завершене доведення, оскільки наявна єдина x , що обмежується. На кроці 6 висновку змінна x не входить вільно до наслідку (множина невиключених засновків порожня).

Суть застосування МЗ 4 на кроці 2 полягала в тому, що був розглянутий предикат $P(x, y, a)$, який не мав вигляду імплікації, а тому згідно із МЗ 2 для переходу від побудови висновку від протинного було взято як засновок заперечення цієї формули.

Наведені варіанти побудови висновків технічно розкривають специфіку натурального числення предикатів, порівняно з аксіоматичним численням.

Запитання для самоконтролю

1. Загальна характеристика числень логіки предикатів.
2. Поняття аксіоматичного числення логіки предикатів.
3. Структура аксіоматичного числення логіки предикатів S^5 .
4. Характеристика списку аксіом S^5 .
5. Загальна характеристика правил висновку в S^5 .
6. Поняття правильної підстановки.
7. Правило усунення квантору загальності.

8. Правило введення квантору загальності.
9. Правило введення квантору існування.
10. Правило усунення квантору існування.
11. Правило перейменування вільних змінних.
12. Правило перейменування зв'язаних змінних.
13. Характеристика дефініції доведення.
14. Характеристика доказової формули.
15. Дефініція висновку.
16. Теорія дедукції.
17. Доведення теореми дедукції.
18. Загальна характеристика металогічних принципів в S^5 .
19. Принцип несуперечливості аксіом.
20. Принцип незалежності аксіом.
21. Принцип повноти.
22. Загальна характеристика натурального числення предикатів S^6 .
23. Типологія правил висновку в S^6 .
24. Характеристика кванторних правил в S^6 .
25. Поняття умовної інтерпретації змінної.
26. Поняття інтерпретації всезагальності для змінної.
27. Поняття абсолютно обмежена змінна та обмежена змінна.
28. Дефініція висновку в S^6 .
29. Дефініція доведення в S^6 .
30. Дефініція завершеного висновку.
31. Дефініція завершеного доведення.
32. Процедура побудови висновків і доведень в S^6 .
33. Поняття методики вибору засновків.
34. Побудувати обґрунтування виразів S^6 : а)
 $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$; б)
 $\exists x(S(x) \supset P(x)) \vdash \forall x(S(x) \supset \exists xP(x))$;
 в) $\forall x(M(x) \supset P(x)); \forall x(S(x) \supset M(x)) \vdash \forall x(S(x) \supset P(x))$; г)
 $\forall x(M(x) \supset \neg P(x)), (S(x) \supset M(x)) \vdash \forall x(S(x) \supset \neg P(x))$.

ЧАСТИНА ДРУГА

НЕКЛАСИЧНА ЛОГІКА

Вступ

Некласична логіка – це розділ сучасної логіки, в основі якого лежить опозиція до класичної логіки. Хронологічно некласична логіка виникає *в кінці XIX ст. на початку XX ст.*

Умовно, в процесі становлення некласичної логіки, можна виділити три основні напрямки:

- 1) критика принципу двозначності;*
- 2) нове тлумачення смислу логічних сполучників;*
- 3) перегляд розділів традиційної логіки засобами некласичної логіки та розширення виразних можливостей логіки.*

Критика принципу двозначності класичної логіки, за яким висловлювання може мати одну із двох оцінок "істина" або "хиба", приводить до появи систем багатозначної логіки. Незалежно один від одного і, майже одночасно, засновниками багатозначної логіки стають **Я.Лукасевич (1920 р.)** та **Е.Пост (1921 р.)**.

Нове тлумачення смислу логічних сполучників (а саме матеріальної імплікації) приводить до виникнення систем "*строгої імплікації*" **К.Льюїса** та "*сильної імплікації*" **В.Аккермана**.

Перегляд розділів традиційної логіки засобами некласичної логіки став поштовхом до появи цілої низки зовсім нових розділів сучасної логіки. При цьому виявляється, що у багатьох випадках ці розділи є, по суті, реалізацією тих ідей, які були у центрі уваги логіків античності та середньовіччя.

Відомий голандський математик, логік **Лейтзен Брауер** звертає увагу на неуніверсальність дії закону виключеного третього ($A \vee \bar{A}$), закону подвійного заперечення ($\bar{\bar{A}} \supset A$), закону непрямого доведення

$$(\bar{A} \supset (B \wedge \bar{B})) \supset A$$

У 1930 р. учень Л.Брауера **А.Гейтінг** виходячи із такої позиції

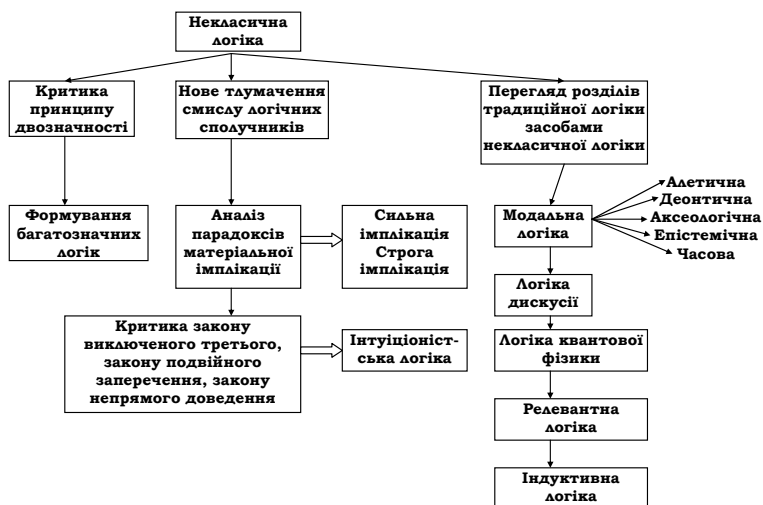
свого вчителя формулює інтуїціоністську логіку.

У 1912 р. *К.Льюїс* досліджуючи парадокси матеріальної імплікації, ревізує класичну теорію логічного слідування і розробляє неklasичну теорію логічного слідування, яка покладена в основу релевантної логіки.

На межі 20-х років XX ст. зусиллями *Я.Лукасевича* та *К.Льюїса* почала розроблятися модальна логіка, яка своїми витоками йде до *Аристотеля* та логіків середньовіччя.

Характеризуючи в цілому неklasичну логіку, треба зазначити, що між її розділами існують складні і неоднозначні відношення. Йдеться про те, що різні розділи можуть мати єдину оцінку (наприклад, інтуїціоністська і модальна логіка можуть вважатися багатозначними), це, *по-перше*, а, *по-друге*, засобами одного розділу можна визначати фундаментальні поняття другого розділу (так, наприклад, засобами модальної логіки можна визначити поняття логічного слідування, а засобами неklasичної імплікації уточнити модальні поняття).

Все вищезазначене можна проілюструвати такою схемою:



Зрозуміло, ця таблиця дуже приблизно відображає ті багатогранні і складні процеси, які притаманні неklasичній логіці. Вона скоріше виконує методичну функцію, що дає нам підстави розглядати у підручнику найбільш суттєві властивості багатозначної логіки, а потім проаналізувати їх застосування в різних розділах неklasичної логіки.

РОЗДІЛ I

БАГАТОЗНАЧНА ЛОГІКА

Виникнення багатозначної логіки можна було б порівняти (за своєю епохальністю), хіба що із появою неевклідової геометрії. Тому що був зроблений напад на "святую святих", **принцип класичної логіки: "Кожне висловлювання або істинне, або хибне"** (так само, як у свій час, був зроблений замах на V постулат геометрії Евкліда).

Сумніви відносно принципу двозначності мали підґрунття, оскільки постійно виникали труднощі при оцінці значень істинності висловлювань про майбутні події, висловлювань, у яких не зазначався час чи місце подій, висловлювань, які отримували за результатами дослідів, що взаємно виключають одне одного тощо.

У загальних рисах розвиток багатозначної логіки здійснюється за трьома основними напрямками:

- а) розробка власного апарату багатозначної логіки;*
- б) застосування засобів багатозначної логіки для вирішення задач конкретних наукових досліджень;*
- в) розробка загальної теорії багатозначної логіки, яка передбачає типологію систем багатозначної логіки, характеристику її суттєвих ознак, прогностування основних тенденцій розвитку багатозначної логіки.*

Дамо дефініцію багатозначної логіки:

Багатозначна логіка – це сукупність логічних числень, у яких висловлюванням приписується більше двох істиннісних значень".

З цього визначення випливає, що традиційні оцінки "істинно" або "хибно" є лише окремими випадками значень, які вводить багатозначна логіка для оцінювання висловлювань.

1.1. Система багатозначної логіки Я.Лукасевича

1.1.1. Трьохзначна логіка Я.Лукасевича

Відомий польський логік *Я.Лукасевич*, досліджуючи природу модальних висловлювань, прийшов до висновку, що для оцінки модальних висловлювань засобів класичної логіки недостатньо. У зв'язку з цим він вводить третю оцінку *"нейтрально"*, яка може розглядатися як *"можливо"*. Треба мати на увазі, що оцінка *"можливо"* це не модальний оператор $\Diamond$, а оцінка висловлювання, яка знаходиться за межами самого висловлювання, подібно до оцінок *"істинно"* або *"хибно"*.

При цьому, необхідно підкреслити, що навіть у тих випадках коли, поняття *"істинно"*, *"хибно"*, *"можливо"* виконують роль предикатів (наприклад, *"висловлювання p – істинне"*, *"висловлювання p – хибне"*, *"висловлювання p – можливе"*), суть справи не змінюється. Тобто, у цих випадках відбувається утворення нового висловлювання, де назва *"висловлювання p "* є суб'єктом, а оцінка *"істинно"* (*"хибно"*, *"можливо"*) – предикатом.

Якщо прийняти трактовку принципу багатозначності як поділ усієї множини висловлювань на *"істинні"*, *"хибні"*, *"можливі"* (*"нейтральні"*), то справедливим буде положення:

Для будь-якого висловлювання вірно, що воно або "істинне", або "хибне", або "нейтральне" – четвертого не дано.

При побудові трьохзначної логіки *Лукасевич* істинністні значення позначає таким чином:

- ✓ *"істинно"* – 1;
- ✓ *"хибно"* – 0;
- ✓ *"нейтрально"* – $\frac{1}{2}$.

Третє значення *"нейтрально"* може тлумачитися у вигляді положення: *"може бути істинним, а може бути хибним"*.

Враховуючи значення $\frac{1}{2}$ і визначення пропозиційних зв'язок у двозначній логіці *Лукасевич* задає нове табличне визначення логічних сполучників: **q**

I	p	$\bar{p}$
	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1

II	q			
	$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	0	0	0

III	q			
	$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
	1	1	1	1
	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1	$\frac{1}{2}$	0

IV	q			
	$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
	0	1	1	1

V	q			
	∞	1	$\frac{1}{2}$	0
	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Наведене табличне визначення логічних сполучників *Лукасевичем* базується на своєрідній трактовці третього значення "нейтрально" ("невизначено", або $\frac{1}{2}$).

Третє занчення "невизначено" розглядається як дві рівноможливі ситуації:

а) "висловлювання p " може мати значення "істинно" (1), і

б) "висловлювання p " може мати значення "хибно" (0).

У такому випадку коли розглядаємо диз'юнктивне висловлювання " $p \vee q$ ", де $p = 1$, а $q = \frac{1}{2}$, треба припустити дві можливості:

$$\text{I} - 1 \vee 1 = 1 \text{ і}$$

$$\text{II} - 1 \vee 0 = 1.$$

Виходить, що значенням $p \vee q$ буде "1".

Або ж візьмемо імплікацію $p \supset q$, де знову $p = 1$, а $q = \frac{1}{2}$.

Тут матимемо таку ситуацію:

$$\text{I} - 1 \supset 1 = 1;$$

$$\text{II} - 1 \supset 0 = 0.$$

Отже, імплікація при такому наборі значень, де **антецедент істинний** (1), а **консеквент невизначений** ($\frac{1}{2}$) матиме значення " $\frac{1}{2}$ ". Таким способом встановлюється значення для будь-якої формули в трьохзначній логіці.

Якщо побудува таблиці істинності в двохзначній логіці здійснюється за формулою 2^n , то в трьохзначній логіці – за формулою 3^n .

У цій формулі число 3 вказує на кількість істиннісних значень (1, 0, $\frac{1}{2}$), а буква "n" на кількість простих висловлювань, що входять до складу вихідного висловлювання.

Звернемося до прикладу і побудуємо таблицю істинності для висловлювання:

$$(p \wedge \bar{q}) \supset r.$$

Виходячи із формули побудови таблиці істинності в трьохзначній логіці, така таблиця матиме **27 рядків**:

№	p	q	r	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \wedge \bar{q}) \supset r$
1	1	1	1	0	0	1
2	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1
3	1	1	0	0	0	1
4	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
5	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
6	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
7	1	0	1	1	1	1
8	1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
9	1	0	0	1	1	0
10	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	1
11	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1
12	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	1
13	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
14	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
15	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
16	$\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	1
17	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
18	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
19	0	1	1	0	0	1
20	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1

№	p	q	r	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \wedge \bar{q}) \supset r$
21	0	1	0	0	0	1
22	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1
23	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
24	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1
25	0	0	1	1	0	1
26	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	1
27	0	0	0	1	0	1

Окрім табличного способу визначення пропозиційних сполучників існує ще спосіб визначення даних сполучників у формі рівностей.

Скористаємося позначенням логічних сполучників, яке вживає Лукасевич:

- ✓ N – заперечення;
- ✓ C – імплікація;
- ✓ K – кон'юнкція;
- ✓ A – диз'юнкція.

Тепер логічні сполучники, як пропозиційні функції можна записати у вигляді таких рівностей:

- а) $Nx = 1 - x$.
- б) $Kx, y = \min(x, y)$.
- в) $Ax, y = \max(x, y)$.
- г) $Cx, y = \min(1, 1 - x + y)$.

Прокоментуємо кожну із наведених рівностей:

- а) $Nx = 1 - x$ (тобто $Nx = 0$ при $x = 1$, $Nx = 1$, при $x = 0$, $Nx = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{1}{2}$);

- г) $Cx, y = \min(1, 1 - x + y)$.

Читається ця рівність: "значення істинності імплікації висловлювань x та y дорівнює меншому із чисел "1"; " $1 - x + y$ ".

Розглянемо всі варіанти:

$$\begin{aligned}
 C\ 1, 0 &= \min(1, 1 - 1 + 0) = 1, 0 = 0 \\
 C\ 0, 1 &= \min(1, 1 - 0 + 1) = 1, 2 = 1 \\
 C\ 1, 1 &= \min(1, 1 - 1 + 1) = 1, 1 = 1 \\
 C\ 0, 0 &= \min(1, 1 - 0 + 0) = 1, 1 = 1 \\
 C\ \frac{1}{2}, 1 &= \min(1, 1 - \frac{1}{2} + 1) = 1, 1\frac{1}{2} = 1 \\
 C\ 1, \frac{1}{2} &= \min(1, 1 - 1 + \frac{1}{2}) = 1, \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
 C\ 0, \frac{1}{2} &= \min(1, 1 - 0 + \frac{1}{2}) = 1, \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$C \frac{1}{2}, 0 = \min(1, 1 - \frac{1}{2} + 0) = 1, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$C \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \min(1, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1, 1 = 1$$

б) $Kx, y = \min(x, y)$ – (тобто значення істинності кон'юнкції x та y дорівнює у меншому із значень істинності x та y).

Розгорнемо цю дефініцію:

$$1. K 1, 0 = \min(1, 0) = 0$$

$$2. K 0, 1 = \min(0, 1) = 0$$

$$3. K 0, 0 = \min(0, 0) = 0$$

$$4. K 1, 1 = \min(1, 1) = 1$$

$$5. K \frac{1}{2}, 1 = \min(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$$

$$6. K 1, \frac{1}{2} = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$7. K \frac{1}{2}, 0 = \min(\frac{1}{2}, 0) = 0$$

$$8. K 0, \frac{1}{2} = \min(0, \frac{1}{2}) = 0$$

$$K \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

в) $Ax, y = \max(x, y)$ – (тобто значення істинності диз'юнкції x та y дорівнює більшому із значень істинності x і y).

Наведемо можливі варіанти.

$$A 1, 0 = \max(1, 0) = 1$$

$$A 0, 1 = \max(0, 1) = 1$$

$$A 1, 1 = \max(1, 1) = 1$$

$$A 0, 0 = \max(0, 0) = 0$$

$$A \frac{1}{2}, 1 = \max(\frac{1}{2}, 1) = 1$$

$$A 1, \frac{1}{2} = \max(1, \frac{1}{2}) = 1$$

$$A \frac{1}{2}, 0 = \max(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}$$

$$A 0, \frac{1}{2} = \max(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$A \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Якщо співставити табличне визначення пропозиційних зв'язок (яке наводилося вище), із визначенням їх у формі рівностей, то їх ідентичність буде очевидною.

Як і у двозначній логіці, в якості тавтологій (стверджуваних, доказових, завжди істинних тощо висловлювань) вважаються ті, які набувають лише значення "і", так і в трьохзначній логіці Лукасевича законом є формула, яка при будь-яких наборах значень пропозиційних змінних набуває значення "1".

У зв'язку з цим, виникає, закономірне питання: **"Чи співпадає клас тавтологій двозначної логіки із класом тавтологій трьохзначної логіки?"**

Виявляється, що не всі тавтології двозначної логіки є тавтологіями у трьохзначній.

Візьмемо такі принципи формули як закон виключеного третього і закон протиріччя: $A \vee \bar{A}$, $\neg(A \wedge \bar{A})$.

При значенні $\frac{1}{2}$ вони перестають бути тавтологіями:

$$A \vee \bar{A} = \frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\neg(A \wedge \bar{A}) = \neg(\frac{1}{2} \wedge \neg \frac{1}{2}) = \neg(\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}) \neq \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Не відноситься до числа тавтологій і правило зведення до абсурду:

$$(\bar{A} \supset (B \wedge \bar{B})) \supset A$$

оскільки

$$(\neg \frac{1}{2} \supset (\frac{1}{2} \wedge \neg \frac{1}{2})) \supset \frac{1}{2} = (\frac{1}{2} \supset (\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2})) \supset \frac{1}{2} = (\frac{1}{2} \supset \frac{1}{2}) \supset \frac{1}{2} = 1 \supset \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Як ми вже переконалися закон виключеного третього і закон протиріччя не є тавтологіями в трьохзначній логіці, але й такими не є їх заперечення.

Переконаємося у цьому здійснивши заперечення даних законів.

Візьмемо спочатку заперечення закону виключеного третього:

$$\neg(A \vee \bar{A})$$

$$\neg(1 \vee \bar{1}) = \neg(1 \vee 0) = \neg(1) = 0$$

$$\neg(0 \vee \bar{0}) = \neg(0 \vee 1) = \neg(1) = 0$$

$$\neg(\frac{1}{2} \vee \bar{\frac{1}{2}}) = \neg(\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}) = \neg(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Із наведених фактів випливає, що багатозначна логіка не є запереченням (відкиданням) двозначної логіки, (подібно до того як поява фізики Енштейна не була запереченням, в негативному розумінні, фізики Ньютона), а багатозначна логіка є узагальненням двозначної. Адже при значеннях "1" та "0" коли виключати проміжні значення, то двозначна логіка виступає як граничний (частковий) випадок багатозначної.

1.1.2. Чотирьохзначна логіка Я.Лукаsevича

У творі "Арістотелівська силогістика з точки зору сучасної формальної логіки" Я.Лукаsevич розробляє чотирьохзначну логіку.

Для цього він бере два вихідні значення "1" та "0" і утворює з них чотири впорядковані пари: $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$. Які розглядаються як елементи нової таблиці істинності. Значення істинності для вихідних (в його логіці) логічних зв'язок імплікації та заперечення Я.Лукасевич задає відповідними рівностями:

$$C(a, b)(c, d) = (Cac, Cbd);$$

$$N(a, b) = (Na, Nb).$$

Впорядковані пари відповідно позначимо:

$$(1, 1) = 1.$$

$$(1, 0) = 2.$$

$$(0, 1) = 3.$$

$$(0, 0) = 0.$$

Побудуємо таблицю істинності для імплікації із урахуванням введених рівностей:

		q			
p	C	1,1	1,0	0,1	0,0
	1,1	1,1	1,0	0,1	0,0
	1,0	1,1	1,1	0,1	0,1
	0,1	1,1	1,0	1,1	1,0
	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1

Перепишемо дану таблицю застосовуючи введені раніше скорочення:

		q			
p	C	1	2	3	0
	1	1	2	3	0
	2	1	1	3	3
	3	1	2	1	2
	4	1	1	1	1

Дано табличне визначення *заперчення* (N):

p	Np
$1,1$	$0,0$
$1,0$	$0,1$
$0,1$	$1,0$
$0,0$	$1,1$

Враховуючи скорочення, дана таблиця набуде вигляду:

p	Np
1	0
2	3
3	2
0	1

Задамо значення для кон'юнкції, диз'юнкції та еквіваленції:

$$K(a,b)(c,d) = (K(a,c) K(b,d))$$

$$A(a,b)(c,d) = (A(a,c) A(b,d))$$

$$Q(a,b)(c,d) = (Q(a,c) Q(b,d))$$

Введемо табличне визначення для кон'юнкції (K), диз'юнкції (A) та еквіваленції (Q).

		q			
p	K	$1,1$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
	$1,1$	$1,1$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$0,0$	$0,0$
	$0,1$	$0,1$	$0,0$	$0,1$	$0,0$
	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0$

У скороченому варіанті дана таблиця матиме вигляд:

		q			
p	K	1	2	3	0
	1	1	2	3	0
	2	2	2	0	0
	3	3	0	3	0
	0	0	0	0	0

Таблиця для диз'юнкції виглядатиме так:

		q			
p	A	1,1	1,0	0,1	0,0
	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
	1,0	1,1	1,0	1,1	1,0
	0,1	1,1	1,1	0,1	0,1
	0,0	1,1	1,0	0,1	0,0

Скорочений варіант таблиці:

		q			
	A	1	2	3	0
	1	1	1	1	1
p	2	1	2	1	2
	3	1	1	3	3
	0	1	2	3	0

Запишемо таблицю для еквіваленції:

		q			
p	Q	1,1	1,0	0,1	0,0
	1,1	1,1	1,0	0,1	0,0
	1,0	1,0	1,0	0,0	0,1
	0,1	0,1	0,0	1,1	1,0
	0,0	0,0	0,1	1,0	1,1

Скорочений варіант таблиці для еквіваленції:

		q			
	Q	1	2	3	0
	1	1	2	3	0
p	2	2	2	0	3
	3	3	0	1	2
	0	0	3	2	1

Нові символи, які введені для таблиць істинності "2" і "3" можна тлумачити: "2" – *"ближче до істини"*, "3" – *"ближче до хиб"*. Оскільки "2" і "3" взяті як додаткові істинні значення, то їх можна ототожнювати з "1" і "0" байдуже як саме.

Візьмемо, *наприклад*, таблицю для імплікації і приймемо умову: $2 = 1$, а $3 = 0$.

Таблиця № 1

		q				
p	C	1	1	0	0	
	1	1	1	0	0	
	1	1	1	0	0	
	0	1	1	1	1	
	0	1	1	1	1	

А тепер перепишемо дану таблицю за умови $2 = 0$, а $3 = 1$.

Таблиця № 2

p		q				
		<i>C</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>0</i>
		<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>0</i>
		<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
		<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>0</i>
		<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

Аналізуючи **таблицю № 1**, ми бачимо, що:

- а)** другий рядок ідентичний першому, а третій — четвертому;
- б)** друга колонка ідентична першій, а третя — четвертій.

Якщо викреслити менші проміжні рядки і колонки, то отримаємо таблицю істинності для імплікації в двозначній логіці. Це ж саме можна спостерігати аналізуючи **таблицю № 2**.

Отже, як і у випадку із трьохзначною логікою, чотирьохзначна логіка так само є узагальненням двозначної логіки. Все це дає право стверджувати, що будь-яке числення неklasичної логіки, у своїй основі як базову утримує двозначну логіку.

Наприкінці знайомства з чотирьохзначною логікою задамо алгоритм побудови таблиці істинності і знайдемо значення для довільного виразу.

Таблиця істинності будується тут за формулою "4ⁿ", де "4" — це кількість значень, що приймає одне висловлювання, а "n" — це кількість простих висловлювань, що входять до складу вихідного висловлювання.

Наприклад, маємо вираз:

$$(p \supset \bar{q}) \vee p.$$

Побудуємо для нього таблицю істинності. У відповідності до формули 4^n вона буде мати **16 рядків**.

№	p	q	$\bar{q}$	$p \supset \bar{q}$	$(p \supset \bar{q}) \vee p$	$(p \supset \bar{q}) \vee p$
1	1,1	1,1	0,0	0,0	1,1	1
2	1,1	1,0	0,1	0,1	1,1	1
3	1,1	0,1	1,0	1,0	1,1	1
4	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1
5	1,0	1,1	0,0	0,1	1,1	1
6	1,0	1,0	0,1	0,1	1,1	1
7	1,0	0,1	1,0	1,1	1,1	1
8	1,0	0,0	1,1	1,1	1,1	1
9	0,1	1,1	0,0	1,0	1,1	1
10	0,1	1,0	0,1	1,1	1,1	1
11	0,1	0,1	1,0	1,0	1,1	1
12	0,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1
13	0,0	1,1	0,0	1,1	1,1	1
14	0,0	1,0	0,1	1,1	1,1	1
15	0,0	0,1	1,0	1,1	1,1	1
16	0,0	0,0	1,1	1,1	1,1	1

Отже, даний вираз є доказуваним у чотирьохзначній логіці.

Перевіримо чи будуть тавтологіями в чотирьохзначній логіці закони виключеного третього і закон протиріччя: $(A \vee \bar{A})$ та $\neg(A \wedge \bar{A})$.

№	A	$\bar{A}$	$A \vee \bar{A}$	$A \wedge \bar{A}$	$\neg(A \wedge \bar{A})$	$\neg(A \wedge \bar{A})$
1	1,1	0,0	1,1	1	0,0	1,1
2	1,0	0,1	1,1	1	0,0	1,1
3	0,1	1,0	1,1	1	0,0	1,1
4	0,0	1,1	1,1	1	0,0	1,1

Виходить, що закон виключеного третього і протиріччя залишаються тавтологіями і в чотирьохзначній логіці.

Це означає, що багатозначна логіка не завжди відкидає закони класичної логіки, тому більш коректним буде все ж таки визначення багатозначної логіки як такої, що визнає за висловлюванням більш ніж дві оцінки.

Критика законів виключеного третього та протиріччя є лише зовнішнім виявом тих процесів, які визначають відношення між класичною та некласичною логікою. І це потрібно мати на увазі даючи дефініцію класичної логіки.

Прокоментуємо дане положення.

Враховуючи факт існування класичної та неklasичної логіки закон виключеного третього матиме три різні за формою дефініції:

а) "Будь-яке висловлювання або істинне, або хибне".

б) "Будь-якому висловлюванню або притаманне деяке значення істинності, або ні".

в) $A \vee \bar{A}$.

У наведених дефініціях закону виключеного третього визначальними є характеристики диз'юнкції та заперечення. В усіх цих дефініціях диз'юнкція та заперечення виступають в узагальнюючому вигляді. Це означає, що для одних визначень $A \vee \bar{A}$ залишається законом (чотирьохзначна логіка Лукасевича), а для інших – ні (трьохзначна логіка Луксевича). Якщо ми прийняли, що тавтологією є висловлювання, яке завжди приймає одне з двох значень "1" або "1/2", то $A \vee \bar{A}$ виявиться тавтологією:

$$A \vee \bar{A} = 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1$$

$$A \vee \bar{A} = 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1$$

$$A \vee \bar{A} = \frac{1}{2} \vee \overline{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Третя дефініція закону виключеного третього $A \vee \bar{A}$ (як і закону протиріччя $\neg(A \wedge \bar{A})$) є приблизним позначенням цього закону (тобто цей закон не можна зводити до відповідної тотожньо-істинної формули, це лише певна експлікація цього закону). І коли в підручниках з логіки в розділі "Закони логіки висловлювань" приводять закони тотожності, виключеного третього, протиріччя як відповідні тавтології ($A \supset A$, $A \vee \bar{A}$, $\neg(A \wedge \bar{A})$), то це не зовсім коректно.

Особливо це відчутно, коли задається інтерпретація диз'юнкції та заперечення в багатозначній логіці, при цьому, вираз $A \vee \bar{A}$ є законом (наприклад, в чотирьохзначній логіці), то формула $A \vee \bar{A}$ не буде законом виключеного третього у тризначній логіці.

Виходячи з цього, завжди треба підходити прискіпливо до тези: **"закон виключеного третього в даній системі не діє".**

Якщо взяти чотирьохзначну логіку Лукасевича, то заява, що "кожне висловлювання або істинне, або хибне" буде

некоректною. Тут прийнятним є твердження: "Будь-яке висловлювання має значення "1", або "2", або "3", або "0". В іншому формулюванні: "Будь-яке висловлювання або має значення істинності, або не має його (має якесь інше з чотирьох можливих)".

Це ж саме стосується і закону протиріччя, але тут із трьох можливих дефініцій перша зберігає силу і в багатозначній логіці:

1. *"Не може бути, щоб висловлювання було істинним і одночасно хибним"*.

2. *"Не може бути, щоб висловлювання мало і одночасно не мало хоча б одне значення із числа можливих"*.

3. $\neg(A \wedge \bar{A})$.

Такі основні риси багатозначної логіки Я.Лукасевича.

1.2. Багатозначна логіка Брауера Гейтінга

Як у розвитку будь-якої науки, так і у розвитку логіки визначальними є два види причин:

- а) внутрішні;
- б) зовнішні.

Для логіки внутрішніми стимулами розвитку є розробка та вдосконалення її апарату, а зовнішніми ті процеси в науковому пізнанні, для аналізу яких потрібні засоби логіки.

Якщо для формування багатозначної логіки Лукасевича, таким зовнішнім поштовхом був аналіз модальних висловлювань, то для багатозначної логіки Брауера – Гейтінга – потреба обґрунтування математики на базі принципів інтуїціонізму.

Брауер виходить із положення: *"Якщо закон виключеного третього діє в кінцевій математичній системі, то в системі з нескінченними величинами він втрачає свою абсолютність"*.

Гейтінг вводить таке табличне визначення для заперечення (N) та імплікації (C):

x	Nx
1	0
0	1
$\frac{1}{2}$	0

				y
	C	1	0	$\frac{1}{2}$
x	1	1	0	$\frac{1}{2}$
	0	1	1	1
	$\frac{1}{2}$	1	0	1

У формі рівностей Гейтінг так задає імплікацію:

1) $C x, y = 1$, якщо $x \leq y$.

- а) $C x, y = C 0, 1 = 1$
- б) $C x, y = C 0, \frac{1}{2} = 1$
- в) $C x, y = C \frac{1}{2}, 1 = 1$
- г) $C x, y = C 0, 0 = 1$
- д) $C x, y = C 1, 1 = 1$
- е) $C x, y = C \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = 1$

2) $C x, y = y$, якщо $x > y$.

- а) $C x, y = C 1, 0 = 0$
- б) $C x, y = C 1, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- в) $C x, y = C \frac{1}{2}, 0 = 0$

Якщо скласти результати двох рівностей, то отримаємо наведену вище таблицю істинності для імплікації.

Порівняємо імплікацію трьохзначної логіки Лукасевича і Гейтінга:

Лукасевич:

$$C x, y = C \frac{1}{2}, 0 = 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$C x, y = C 1, \frac{1}{2} = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Гейтінг:

$$C x, y = C \frac{1}{2}, 0 = 0$$

$$C x, y = 1, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Отже, повної подібності немає.

Кон'юнкцію і диз'юнкцію Гейтінг визначає відповідно за рівностями:

а) $K x, y = \min(x, y)$

б) $A x, y = \max(x, y)$

а)

		N			
		$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
P	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	0	0	0	0

б)

		q			
		$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
p	1	1	1	1	1
	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0

За допомогою таблиць істинності перевіримо, чи є тавтологіями вирази: $CNNxx$ та $AxNx$

$$CNNxx = CNN\frac{1}{2}\frac{1}{2} = CN\ 0\ \frac{1}{2} = C1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AxNx = A\frac{1}{2}\ N\frac{1}{2} = A\frac{1}{2}\ 0 = \frac{1}{2}.$$

Отже, закон подвійного заперечення і виключеного третього в системі Брауера – Гейтінга не є доказовим.

В той час як вирази $CxNNx$ і $AAxNxNNx$ є тавтологіями:

$$CxNNx = C\frac{1}{2}\ NN\frac{1}{2} = C\frac{1}{2}\ N0 = C\ \frac{1}{2}1 = 1$$

$$CxNNx = C0\ NN0 = C\ 00 = 1$$

$$CxNNx = C1\ NN1 = C11 = 1$$

Розглянемо вираз $AAxNxNNx$:

$$1. AAxNxNNx = AA1\ N1\ NN1 = AA101 = A11 = 1$$

$$2. AAxNxNNx = AA00\ N0\ NN0 = AA\ 010 = A01 = 1$$

$$3. AAxNxNNx = AA\frac{1}{2}\ N\frac{1}{2}\ NN\frac{1}{2} = AAN\frac{1}{2}\ N0 = A\frac{1}{2}1 = 1$$

Даний вираз є своєрідним узагальненням закону виключеного третього: $(p \vee \bar{p}) \vee \bar{p}$ (враховуючи те, що в логіці Гейтінга подвійне заперечення не дорівнює ствердженню). *Все це свідчить про те, що багатозначна логіка Гейтінга є доповненням, узагальненням двозначної логіки.*

Для доведення формул у даній системі будуються таблиці істинності. Оскільки дана логіка трьохзначна, то таблиця істинності будується за формулою " 3^n ".

Візьмемо два вирази і побудуємо відповідні їм таблиці істинності.

a) $(p \supset \bar{q}) \vee q$;

№	p	q	$\bar{q}$	$p \supset \bar{q}$	$(p \supset \bar{q}) \vee q$
1	1	1	0	0	1
2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
3	1	0	1	1	1
4	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1
7	0	1	0	1	1
8	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1
9	0	0	1	1	1

б) $\bar{p} \supset (p \supset q)$.

№	p	q	$\bar{p}$	$p \supset q$	$\bar{p} \supset (p \supset q)$
1	1	1	0	1	1
2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
3	1	0	0	0	1
4	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1
6	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
7	0	1	1	1	1
8	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1
9	0	0	1	1	1

1.3. Багатозначна логіка Е.Поста

Як вже зазначалося незалежно і майже одночасно з **Я.Лукасе-вичем** почав розробляти систему багатозначної логіки **Е.Пост**.

Він виходить із того, що висловлювання може мати не декілька фіксованих значень, а відповідну множину " n " (1, 2, 3, ..., n). При чому ці значення можуть бути різної природи (а *не тільки {істина ... хиба}*). *Це можуть бути оцінки: {добро, ... зло}; {включено, ... виключено}; {прекрасне,... потворне}* тощо. Головне тут це логічні відношення, у які вступають аргументи (висловлювання).

При побудові своєї системи **Пост** вводить два заперечення.

Перше заперечення він називає "циклічним" поетапним, а друге заперечення збігається із запереченням Лукасевича.

Перше заперечення позначимо $\overline{}$, а друге – $\sim x$.

Дамо табличне визначення цих заперечень:

x	$\overline{x}$
1	2
2	3
...	...
$n-1$	n
n	1

x	$\sim x$
1	n
2	$n-1$
...	...
$n-1$	2
n	1

У формі рівностей **Пост** ще так визначав заперечення. **Перше заперечення (циклічне) визначається двома рівностями:**

$$\begin{aligned} \neg x &= \neg x + 1 \\ \text{при } \neg x &\leq n-1 \\ \neg n &= 1 \end{aligned}$$

Друге заперечення визначається однією рівністю:

$$\sim x = n - \neg x + 1$$

Прокоментуємо дані дефініції заперечення.

Візьмемо циклільне заперечення (1). Припустимо, що наша система багатозначної логіки (у варіанті Поста) має **6 значень** для одного висловлювання: **1, 2, 3, 4, 5, 6 (тобто "6 = n", а "5 = n-1")**.

Маємо висловлювання **p**, яке "пробігає" по множині даних значень. Знайдемо його значення впродовж всієї шкали (від **1** до **6**).

$$\begin{aligned} \neg p &= 1+1 = 2 \\ \neg p &= 2+1 = 3 \\ \neg p &= 3+1 = 4 \\ \neg p &= 4+1 = 5 \\ \neg p &= 5+1 = 6 \text{ (n)} \\ \neg p &= 6+1 = 1 \text{ (x = 1)} \end{aligned}$$

В табличному варіанті ця зв'язка матиме вигляд:

<i>p</i>	$\neg p$
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	1

Тепер розглянемо другий варіант заперечення ($\sim x$) **Поста**. Знову припустимо, що в нашій системі **6 значень (1, 2, 3, 4, 5, 6)** для довільного висловлювання.

$$\begin{aligned} \sim p &= 6 - 1 + 1 = 6 \text{ при } n=6 \\ \sim p &= 6 - 2 + 1 = 5 \\ \sim p &= 6 - 3 + 1 = 4 \\ \sim p &= 6 - 5 + 1 = 3 \\ \sim p &= 6 - 5 + 1 = 2 \\ \sim p &= 6 - 6 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Табличний варіант для ($\sim x$):

p	$\sim p$
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Диз'юнкція і кон'юнкція визначаються відповідними рівностями:

а) $A \vee x y = \min(x, y)$;

б) $K x y = \max(x, y)$.

Тут необхідно мати на увазі, що в системі Поста більш стверджувальним (враховуючи те, що ми маємо справу не з двозначною логікою, то за терміном "стверджувальне" не треба розуміти "більш істинне") є те заперчення, яке ближче по порядку до вихідного.

Наприклад, в системі із 6 значень (1, 2, 3, 4, 5, 6) більш стверджувальним буде "2", а не "3".

Розглянемо наведені приклади диз'юнкції та кон'юнкції:

1. $A \vee x y = \min(1, 2) = 1$

2. $A \vee x y = \min(2, 3) = 2$

3. $A \vee x y = \min(3, 4) = 3$

4. $A \vee x y = \min(4, 5) = 4$

5. $A \vee x y = \min(5, 6) = 5$

Табличний варіант:

		q					
p	$\vee$	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2
	3	1	2	3	3	3	3
	4	1	2	3	4	4	4
	5	1	2	3	4	5	5
	6	1	2	3	4	5	6

Визначимо таким самим способом кон'юнкцію:

1. $Kxy = \max(1,2) = 2$

2. $Kxy = \max(2,3) = 3$

3. $Kxy = \max(3,4) = 4$

4. $Kxy = \max(4,5) = 5$

5. $Kxy = \max(5,6) = 5$

Табличне визначення:

		q					
p	$\wedge$	1	2	3	4	5	6
	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6	6

Використовуючи введені Постом обидва варіанти заперечення, диз'юнкцію та кон'юнкцію визначимо вирази:

$$p \vee \bar{p}, \neg(p \wedge \bar{p}).$$

Припустимо, що в нашій системі $n = 6$:

p	$\neg p$	$\sim p$	$p \vee \neg p$	$\neg(p \vee \neg p)$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
1	2	6	1	2	6	1
2	3	5	2	3	5	2
3	4	4	3	4	4	3
4	5	3	4	5	4	3
5	6	2	5	6	5	2
6	1	1	1	1	6	1

1.4. Трьохзначна логіка Д.Бочвара

Відомий математик, логік *Д.Бочвар в 1938 році* запропонував трьохзначну систему логіки, яка розповсюджується не лише на істинні та хибні висловлювання, а й на висловлювання, які не мають смислу.

Відповідно до цього він вводить три значення:

- ✓ "1" – істинно;
- ✓ "2" – хибно;
- ✓ "3" – беззмістовно.

Вихідним положенням логіки Бочвара є теза:

"Якщо до складу висловлювання "A" входить беззмістовне висловлювання "B", то висловлювання "A" треба визнати беззмістовним".

Ця теза покладена в основу визначення логічних сполучників Бочваром. Дамо послідовно табличне визначення заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції та імплікації.

Заперечення:

A	$\sim A$
1	2
2	1
3	3

Кон'юнкція:

		B			
		$\wedge$	1	2	3
A	1	1	1	2	3
	2	2	2	2	3
	3	3	3	3	3

Диз'юнкція:

		B			
		$\vee$	1	2	3
A	1	1	1	1	3
	2	1	1	2	3
	3	3	3	3	3

Імплікація:

		B			
		$\supset$	1	2	3
A	1	1	1	1	3
	2	1	1	1	3
	3	3	3	3	3

Доказовою формулою у Бочвара є вираз, який приймає значення "1" при будь-яких значеннях аргументів.

Доведення здійснюється табличним шляхом.

Протестуємо декілька формул: $\bar{p} \supset (p \supset q)$, $p \supset (q \supset p)$, $p \vee \bar{p}$.

p	q	$\bar{p}$	$p \supset \bar{q}$	$\bar{p} \supset (p \supset q)$	$q \supset p$	$p \supset (q \supset p)$	$p \vee \bar{p}$
1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1	1	1
1	3	2	3	3	3	3	1
2	1	1	1	1	2	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1
2	3	1	3	3	3	3	1
3	1	3	3	3	3	3	3
3	2	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3

Свою багатозначну логіку Д. Бочвар задумав як запобіжний засіб проти парадоксів. Він дає свою типологію висловлювань, розрізняючи висловлювання у власному розумінні від речення (тобто висловлювання зі смислом).

І знову, як і у попередніх багатозначних системах переконуємося, що логіка Бочвара є узагальненням класичної логіки.

Запитання для самоконтролю

1. Визначення неklasичної логіки.
2. Передумови виникнення неklasичної логіки.
3. Визначення багатозначної логіки.
4. Обставини виникнення трьохзначної логіки Я.Лукасевича.
5. Види оцінок висловлювання в трьохзначній логіці Я.Лукасевича.
6. Табличне визначення логічних сполучників в трьохзначній логіці Я.Лукасевича.
7. Визначення логічних сполучників у формі рівностей.
8. Співвідношення тавтологій класичної логіки з класом тавтологій трьохзначної логіки Я.Лукасевича.
9. Багатозначна логіка як узагальнення двозначної логіки.
10. Принципи побудови чотирьохзначної логіки Я.Лукасевича.
11. Визначення логічних сполучників в чотирьохзначній логіці Я.Лукасевича.
12. Побудова таблиці істинності в чотирьохзначній логіці Я.Лукасевича.

-
13. Вихідні умови побудови багатозначної логіки Брауера – Гейтінга.
 14. Визначення заперечення (N) та імплікації (C).
 15. Передумови побудови багатозначної логіки Е.Поста.
 16. Два види заперечення у Е.Поста.
 17. Визначення кон'юнкції та диз'юнкції у Е.Поста.
 18. Вихідні принципи логіки Д.Бочвара

Розділ 2

МОДАЛЬНА ЛОГІКА НА ПОЧАТКУ ХХ СТОЛІТТЯ

Модальна логіка – це розділ неklasичної логіки, де досліджуються логічні відношення між висловлюваннями, в яких дається їх оцінка з тої чи іншої точки зору.

Ці оцінки називаються модальними і позначаються вони відповідно поняттями: "необхідно", "можливо", "доведено", "обов'язково", "заборонено", "добре" тощо.

Свої витоки модальна логіка бере в логіці античності та середньовіччя, але систематичні її розробки припадають на *початок ХХ ст.*

Перші дослідження в галузі модальної логіки здійснюють **К.Льюїс, Я.Лукасевич, В.Аккерман**. і характерним є те, що ні Льюїс, ні Лукасевич не починають з безпосередніх досліджень проблем модальної логіки, а до ідеї модальної логіки вони приходять через аналіз проблем класичної логіки, які на їх думку не можна розв'язати засобами класичної логіки.

Льюїс переглядає класичне поняття логічного слідування, а **Лукасевич** звертає увагу на недостатність засобів двозначної логіки при аналізі висловлювань, в яких не просто щось стверджується або заперечується, а в яких висловлюється думка про неможливість чогось, про майбутні події, про неминучість чогось і т.д.

Здійснимо послідовно короткий огляд цих пошуків.

2.1. Критика К.І.Льюїсом класичної теорії логічного слідування

Після виходу в світ праці **Б.Рассела** та **В.Уайтхеда** "**Принципи математики**" громадянство отримала класична теорія логічного слідування, в основу якої було покладено відношення матеріальної імплікації. Дана теорія логічного слідування дала позитивні результати і в певних межах була

досить адекватною, але вже зразу після своєї появи виявила до себе прискіпливий інтерес, який часто межував із спробами її ревізії.

Матеріальна імплікація є абстракцією, узагальненням відношення між умовою і результатом, причиною і наслідком, підставою і висновком, попереднім і наступним, а також узагальненням, абстракцією смислового, змістовного зв'язку між антецедентом і консеквентом.

Така абстракція дозволяє зв'язувати не лише причину і наслідок, істинні висловлювання, які зв'язані за змістом, а й протилежні їм.

Це зафіксовано у дефініції імплікації:

"Імплікація хибна тоді і тільки тоді, коли антецедент істинний, а консеквент хибний, в решті випадків вона істинна".

Використовуючи в теорії логічного слідування матеріальну імплікацію, ми можемо досліджувати найрізноманітніші предметні області, зв'язки та відношення, які існують між ними: чи йдеться про числа, чи про історичні події, чи про астрономічні об'єкти тощо.

Така універсальність теорії логічного слідування є її значним досягненням, але вона має низку небажаних наслідків, за якими в логіці закріпилася назва **"парадокси матеріальної імплікації"**. Образність цієї назви полягає в тому, що у відношеннях матеріальної імплікації немає того, що в логіці прийнято називати парадоксами, тобто внутрішньої суперечності. Тут є інше: **не відповідність логічного слідування звичайному умовному зв'язку ("якщо..., то...")**.

У численні матеріальної імплікації істинними будуть:

- 1. "Якщо через провідник пропустити електричний струм, то він нагріється".**
- 2. "Якщо Земля – планета, то Париж – столиця Франції".**
- 3. "Якщо $2 \times 2 = 5$, то число планет 9".**
- 4. "Якщо $2 \times 2 = 5$, то число планет 5".**

Лише в першому випадку антецедент і консеквент істинні і змістовно зв'язані. В решті прикладів антецедент з консеквентом або одночасно не істинні і не пов'язані за змістом, а якщо і істинні, то не мають смислового зв'язку, хоча і в цих випадках імплікація істинна.

Звідси випливають дві залежності:

1. "Істина слідує з будь-чого" $p \supset (q \supset p)$

2. "Із хибі слідує будь-що" $\bar{p} \supset (p \supset q)$

Таблиця істинності для імплікації дуже виразно це ілюструє:

№	p	q	$p \supset q$
1	i	i	i
2	i	x	x
3	x	i	i
4	x	x	i

З таблиці видно, що дефініція імплікації забороняє 2-й рядок, решту все дозволяє. Це відбувається за принципом *"все, що не заборонено, те дозволяється"*. Тому, виходячи із даної дефініції ніяких "парадоксів" не виникає.

Дискомфорт виникає тоді, коли ми виходимо за межі цієї дефініції і мимоволі забуваємо, що вона є абстракцією умовного зв'язку і, що таблиця істинності для імплікації не є ізоморфним зліпком зображення умовного зв'язку.

Тоді 1-й та 3-й рядки таблиці є ілюстрацією *першого формулювання "парадоксу"*, а 3 і 4 – *другого*. У зв'язку з цим пошуки моделі логічного слідування, яке було б адекватне змістовному, смислового тлумаченню полягають не в тому, щоб знайти ще якусь імплікацію поряд з матеріальною, чимось схожу на матеріальну, але щоб вона не мала названих недоліків. Строга, сильна імплікації не є такими.

К. Льюїс спеціально підкреслює, що всі функції від p та q , які властиві системі класичного слідування: $\bar{p}, p \wedge q, p \vee q, p \supset q, p \equiv q$ є функціями істинності, в той час в системі строгої імплікації відношення $p \prec q, p = q$ не є функціями істинності.

У зв'язку з цим Льюїс, перед тим як описати свою систему строгої імплікації, вводить низку попередніх понять. *До таких понять відносяться: "породжує", "сумісно", "незалежно", "вивідне судження", "стверджуване судження"*.

Роглянемо по порядку.

Термін *"p породжує q"* означає *"із p вивідним є q"* (*"із p випливає q"*). Тут не просто "голе" співставлення істиннісних значень

(екстенціоналів) антецедента та консеквента (якщо це має місце у відношенні матеріальної імплікації), а тут натяк на внутрішній, змістовний зв'язок p і q .

Наступний термін " p сумісне з q " означає " p не породжує хибності q " (" $із p$ не випливає не- q ", або " $із p$ не випливає хибність q "), а термін " q незалежне від p " означає " p не породжує q ", або " $із p$ не випливає q ".

Іншими словами, коли " p сумісне з q ", то це означає, що " p " може породити, з нього може слідувати лише істинне " q ", а коли " q незалежне, незв'язане з p ", то " p " ніяким чином не може породити " q ".

Термін "**вивідне судження**" еквівалентне терміну "**істинне судження**", а вираз "**стверджувати p** " означає "**стверджувати істинність p** ", в той час "**стверджувати заперечення p** " означає "**стверджувати хибність p** ".

Розглянемо складові системи строгої імплікації:

1. $p, q, r, \dots, p, q, r, \dots$ – висловлювання;
2. $\sim p$ – заперечення (читається " p – хибне", або "не – p ");
3. (pq) – логічний добуток (читається: " p – істинне і q – істинне", " p і q ");
4. $\Diamond p$ – (читається: " p можливо", "можливо, щоб p було істинним", " p самосумісне");
5. $p = q$ – логічна еквівалентність.

Пункти 1 – 5 складають **вихідні елементи алфавіту**.

Крім вихідних елементів система містить низку дефініцій:

Df 1: $p \vee q = \sim(\sim p \wedge \sim q)$ – читається: "**в крайньому випадку одне із двох, p або q , істинне, разом хибними вони не можуть бути**".

Df 2: $p \prec q = \sim\Diamond(p \wedge \sim q)$. Ця дефініція є визначенням строгої імплікації. Читається: "**Хибно, що можливо, щоб p було істинним і одноразово q було хибним**"; "**Не може бути, щоб p було істинним, а q хибним**"; "**Забороняється, щоб p було істинним, а q – хибним**".

Іншими словами наведена дефініція звучить так:

"Якщо забороняється, щоб p було істинним, а q – хибним, то це означає, дозволяється лише, щоб при істинності p обов'язково істинним було q ".

З поверхової точки зору це може означати, що строга імплікація зводиться до першого рядка таблиці істинності для імплікації:

№	p	q	$p \supset q$
1	I	I	I
2	I	x	x
3	x	I	I
4	x	x	I

Тобто дозволяється перший рядок таблиці і забороняється решта рядків. Якщо це витримати, то небажані ситуації, які отримали назву "*парадокси матеріальної імплікації*" виключені самі собою.

Проти такого поспішного погляду застережує *К.Льюїс*, і тоді, коли підкреслюється, що сторога імплікація і строга еквіваленція не є функціями істинності, і тоді, коли вводять в дефініцію матеріальної імплікації модальні поняття.

Отже, у відношенні строгої імплікації має місце не екстенціональна комбінація істиннісних значень, а – інтенціональний зв'язок попереднього і наступного.

Наступна дефініція характеризує строгу еквіваленцію:

Df 3: $(p = q) = (p \prec q) \wedge (q \prec p)$ – читається: "p строго еквівалентне q тоді і тільки тоді, коли p строго імплікує q, а q строго імплікує p".

Льюїс визначає аксіоми своєї системи, в структурі яких фігурують лише логічний добуток, заперечення і строга імплікація.

$$pq \prec qr$$

$$pq \prec p$$

$$p \prec pp$$

$$(pq)r \prec p(qr)$$

$$p \prec \sim(\sim p)$$

$$((p \prec q)(q \prec r)) \prec p \prec r$$

$$(p(p \prec q)) \prec q$$

У дедуктику системи Льюїса входить три правила:

- ✓ підстановки;
- ✓ адьюнкції;
- ✓ інференції.

Правило підстановки. Це правило має два формулювання:

1. *"Будь-які два еквівалентні один одному вирази взаємозамінювані".*
2. *"Кожен вираз, який значимий у термінах системи, може бути підставлений замість p , або q , або r і т.д. в будь-якому реченні чи теоремі".*

Правило ад'юнкції: *"Будь-які два вирази, що стверджуються окремо, можуть стверджуватися разом".*

Правило інференції: *"Якщо стверджується p і стверджується $(p \prec q)$, то стверджуваним є q ".*

Льюїс проводить порівняння матеріальної і строгої імплікації. В зв'язку з цим він до наведених вище трьох дефініцій додає ще дві:

Df 4. $p \supset q = \sim(p \wedge \sim q)$ – читається: *"невірно, що p – істинне, а q – хибне".*

Df 5. $(p \equiv q) = \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)$ – читається: *" p та q або обидва істинні, або обидва хибні".*

Дефініції 4, 5 є відповідно визначенням матеріальної імплікації і матеріальної еквіваленції.

Порівнюючи матеріальну імплікацію зі строгою, Льюїс приходить до висновку, що строга імплікація за обсягом поняття вужче, ніж матеріальна, тому, за законом оберненого відношення має місце залежність:

"Якщо приймається строга імплікація, то приймається і матеріальна, але не навпаки" – $(p \prec q) \prec (p \supset q)$.

За допомогою правила строгої імплікації і **Df 2** із наведених аксіом доводять аксіоми класичної системи логічного висновку і, що саме головне, доводиться теорема: $[p \wedge (p \supset q)] \prec q$.

Застосовуємо **правило ад'юнкції:** *"Якщо стверджується p і стверджується $(p \supset q)$, то q приймається згідно строгої імплікації".* Виходить, що вся система матеріальної імплікації утримується в системі строгої імплікації при наявності **Df 4** в останній.

І ще один важливий висновок, який випливає з факту порівняння " $\prec$ ", " $\supset$ ".

"Якщо в будь-якій теорії матеріальної імплікації виду $A \supset B$, де A і B будь-які складні формули, замінити знак стверджувальної матеріальної імплікації знаком строгої імплікації, то отримана формула буде доказовою в системі строгої імплікації."

Оскільки, як було встановлено вище, не будь-яка теорема матеріальної імплікації є теоремою в системі строгої імплікації, то Льюїс розглядає теореми матеріальної імплікації, які не мають аналогів у системі строгої імплікації.

Із Df 2 випливає дві формули:

$$1. \underline{(p \supset q) = \sim(p \wedge \sim q)}$$

$$(p \supset q) \prec \sim(p \wedge \sim q)$$

$$2. \underline{(p \supset q) = \sim(p \wedge \sim q)}$$

$$\sim(p \wedge \sim q) \prec (p \supset q)$$

Згідно третього висновку, що випливає із порівняння " $\vee$ " і " $\supset$ ", аналог першої формули приймається в системі строгої імплікації:

$(p \prec q) \prec \sim(p \wedge \sim q)$ – читається: **"істинне висловлювання не породжує хибного ні строго, ні матеріально"**.

Аналог другої формули, що випливає із Df 4, не приймається:

$$\sim(p \wedge \sim q) \prec (p \prec q).$$

Це обумовлено тим, що немає гарантії в змістовному зв'язку " p " і " q ".

Льюїс вважає, що наслідок (2) із Df 4 є джерелом "парадоксів" матеріальної імплікації.

Якщо $p \prec (q \prec p)$, то $p \supset (q \supset p)$. Значить, **коли " p " істинне, то будь-яке висловлювання матеріально породжує " p ".** Але аналог зі строгою нестверджувальною імплікацією не приймається:

$$p \prec (q \prec p)$$

Якщо $\sim p \prec (p \supset q)$, то $\sim p \supset (p \supset q)$. Отже, **при хибності " p " з нього випливає матеріально будь-яке " q ".** І знову аналог зі строгою імплікацією не приймається: $\sim p \prec (p \prec q)$.

Візьмемо наступну низку теорем:

$$a) \sim(p \supset q) \prec (p \supset \sim q) - \text{аналогом є } \sim(p \supset q) \supset (p \supset \sim q);$$

$$б) \sim(p \supset \sim q) \prec (p \supset q) - \text{аналогом є } \sim(p \supset \sim q) \supset (p \supset q).$$

Виходить, що коли ми маємо висловлювання " p " і " q ", то " p " повинно імплікувати матеріально істинність " q ", в протилежному

випадку " p " буде імплікувати хибність " q ".

Оскільки, якщо б " $p \supset q$ " була прийнята за еквівалент виразу "*із p вивідним є q* ", то ні одна пара висловлювань не могла б бути одночасно сумісною і незалежною. Тому що відомо, коли " p " і " q " сумісні, то " p " не може імплікувати хибність " q ", а коли " q " незалежне від " p ", то " p " не може імплікувати істинність " q ". Цей факт є основним проти того, щоб ототожнювати змістовне логічне слідування з матеріальною імплікацією. Для більш повного опису змістовного логічного слідування Льюїс вводить ще дві дефініції:

Df 6. $p \circ q = \sim(p \prec \sim q)$.

Це визначення відношення сумісності: *" p і q сумісні, тоді і тільки тоді, коли не може бути такого, щоб із p строго імплікувалася хибність q ".*

Df 7. $\Diamond p = p \circ p = \sim(p \prec \sim p)$ – " $\Diamond$ "де модальний оператор "*можливо*". $\Diamond p$ читається: *" p самосумісно", або " p не породжує свого заперечення", або " p можливо"*. Якщо ми введемо заперечення, то отримаємо низку похідних операторів:

- ✓ $\sim \Diamond p$ – *" p неможливе", або "хибно, що p можливе"*;
- ✓ $\Diamond \sim p$ – *"можливо, що p хибне", або " p не необхідно істинне"*;
- ✓ $\sim \Diamond \sim p$ – *"неможливо, що p хибне", або " p необхідно істинне"*.

Льюїс тлумачить так модальні оператори "*можливо*", "*неможливо*", "*необхідно*":

- ✓ $\Diamond p$ – *розуміється як логічно можливе, як відсутність самосуперечки, як логічно мислиме*;
- ✓ $\sim \Diamond p$ – *розуміється як логічна неможливість, як логічно немислиме*;
- ✓ $\sim \Diamond \sim p$ – *розуміється як логічна необхідність, як логічна немисливість того, щоб " p " було хибним*.

Використовуючи модальні оператори Льюїс вводить низку теорем, серед яких:

- 1) $p \prec \Diamond p$;
- 2) $\sim \Diamond \sim p \prec p$;
- 3) $\sim \Diamond \sim p \prec \Diamond p$.

Застосовуючи аксіоматику Льюїса, теореми 1, 2 і правила доведення *побудуємо доведення теореми 3.*

Візьмемо аксіому VI

$$1. [(p \prec q) \wedge (q \prec r)] \prec (p \prec r)$$

2. $[(\sim\Diamond p \prec p) \wedge (p \prec \Diamond p)] \prec (\sim\Diamond p \prec \Diamond p)$ – за правилом підстановки до 1

$$p/\sim\Diamond p, q/p, r/\Diamond p$$

3. $(\sim\Diamond p \prec p) \wedge (p \prec \Diamond p)$ – за принципом логічного добутку

4. $\sim\Diamond p \prec \Diamond p$ – за правилом інференції

До семи аксіом своєї системи Льюїс додає аксіому VIII, яка іменується "*постулат сумісності*":

$$VIII. \Diamond(pq) \prec \Diamond p.$$

За допомогою цієї аксіоми Льюїс виводить низку теорем, серед яких вирази, що співзвучні з "парадоксами" матеріальної імплікації, але тепер вони отримані в системі строгої імплікації:

1. *"Неможливе висловлювання породжує будь-яке висловлювання"*

$$\sim\Diamond p \prec (p \prec q).$$

2. *"Необхідно істинне висловлювання породжує будь-яке висловлювання"*

$$\sim\Diamond p \prec (q \prec p).$$

Льюїс не вважає ці формули за парадокси, оскільки вони не суперечать змістовному тлумаченню логічного слідування, як це відбувається з подібними виразами в системі матеріальної імплікації.

В цілому концепція Льюїса є значимим внеском у розвиток сучасної модальної логіки.

2.2. Концепція модальної логіки

Я.Лукасевича

2.2.1. Трьохзначна система Лукасевича

Ідею появи *модальної логіки Лукасевича* спричинили його дослідження модальної логіки *Арістотеля*. Який у своїх працях "Про витлумачення" та в "Першій аналітиці" використовує

модальні терміни: *"необхідно"*, *"можливо"*, *"неможливо"*, *"випадково"*.

Терміни *"необхідно"* і *"можливо"* беруться за основні. Позначимо їх відповідно *"М"* і *"L"*.

У творі "Про тлумачення" *Арістотель* стверджує, що *"можливість розуміється як відсутність необхідності"*.

Лукасевич фіксує цей факт у вигляді залежностей:

1. *"Якщо можливо, що "р", то не необхідно "р"*.

Але з цієї залежності випливає, що необхідність утримує в собі можливість.

2. *"Якщо необхідно, що "р", то можливо, що "р"*.

Тоді за правилом гіпотетичного силогізму отримуємо із 2-го 1-ше.

3. *"Якщо необхідно, що "р", то не необхідно, що "р"*.

Виходить нісенітниця. Пізніше, у "Першій аналітиці" *Арістотель* виправляє ситуацію за допомогою введення такої еквівалентності:

4. *"Можливо, що "р", якщо і тільки якщо не необхідно, що не "р"*.

А відношення необхідності до можливості, про яке говорить *Арістотель* в роботі "Про тлумачення", *Лукасевич* формулює у вигляді такої залежності:

5. *"Необхідно, що "р", якщо і тільки якщо не можливо, що не "р"*.

Використовуючи символіку *Лукасевича* 4 і 5 залежності можна виразити таким способом:

QMrNLNr –

читається: *Mr* – якщо і тільки якщо – *NLNr*.

QLpNMNr –

читається: *Lp* – якщо і тільки якщо – *NMNr*.

Лукасевич вбачав основний недолік попередніх досліджень у галузі модальних логік – це відсутність ефективних логічних засобів для фіксації модальних понять. Таким інструментом, на його думку, може стати логіка, яка приписує одному висловлюванню більше ніж два значення.

Першою його пропозицією була трьохзначна пропозиційна логіка.

Запропонована Лукасевичем система складається із немодальної і модальної частин.

Немодальна частина включає в себе:

1. Список пропозиційних змінних: $p, q, r, \dots$
2. Список пропозиційних зв'язок: N, K, A, C, Q , (відповідно: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \leftrightarrow$).
3. Дефініцію формули.
4. Дефініцію пропозиційних зв'язок.
5. Дефініцію доказової формули.

До модальної частини відносяться:

1. Список модальних функторів: M, L, NM, D .
2. Дефініція формули.
3. Дефініція модальних функторів.
4. Дефініція доказової формули.

Кількість можливих значень, яке може мати довільне висловлювання дорівнює трьом ($1, 0, \frac{1}{2}$).

- ✓ 1 ставиться у відповідність оцінка "істинно";
- ✓ 0 – "хибно";
- ✓ $\frac{1}{2}$ – "невизначено".

Пропозиційні зв'язки заперечення та імплікація задаються табличним способом:

		q				
		C	<i>1</i>	<i>½</i>	<i>0</i>	Np
p	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>½</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
	<i>½</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>½</i>	<i>½</i>
	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

Пропозиційні зв'язки кон'юнкції, диз'юнкції, еквіваленції задаються відповідними дефініціями.

Розглянемо їх послідовно.

$$pAq = Df pCqCq$$

1. $pAq = 1A1 = 1C1C1 = 1C1 = 1$
2. $pAq = 0A0 = 0C0C0 = 1C0 = 0$
3. $pAq = 1A0 = 1C0C0 = 0C0 = 1$
4. $pAq = 0A1 = 0C1C1 = 1C1 = 1$
5. $pAq = \frac{1}{2}A\frac{1}{2} = \frac{1}{2}C\frac{1}{2}C\frac{1}{2} = 1C\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
6. $pAq = \frac{1}{2}A1 = \frac{1}{2}C1C1 = 1C1 = 1$

$$7. pAq = 1A\frac{1}{2} = 1C\frac{1}{2} \quad C\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad C\frac{1}{2} = 1$$

$$8. pAq = \frac{1}{2} A0 = \frac{1}{2} C0C0 = \frac{1}{2} C0 = \frac{1}{2}$$

$$9. pAq = 0A\frac{1}{2} = 0C\frac{1}{2} \quad C\frac{1}{2} = 1C\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$pKq = Df N(NpANq)$$

$$1. pKq = 1K1 = N(N1AN1) = N(0A0) = N0 = 1$$

$$2. pKq = 1K0 = N(N1AN0) = N(0A1) = N1 = 0$$

$$3. pKq = 0K1 = N(N0AN1) = N(1A0) = N1 = 0$$

$$4. pKq = 0K0 = N(N0AN0) = N(1A1) = N1 = 0$$

$$5. pKq = \frac{1}{2} K\frac{1}{2} = N(N\frac{1}{2} AN\frac{1}{2}) = N(\frac{1}{2} A\frac{1}{2}) = N\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$6. pKq = \frac{1}{2} K1 = N(N\frac{1}{2} AN1) = N(\frac{1}{2} AN0) = N\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$7. pKq = 1K\frac{1}{2} = N(N1AN) = N(0A\frac{1}{2}) = N\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$8. pKq = 0K\frac{1}{2} = N(N0AN\frac{1}{2}) = N(1A\frac{1}{2}) = N1 = 0$$

$$9. pKq = \frac{1}{2} K0 = N(N\frac{1}{2} AN0) = N(\frac{1}{2} A1) = N1 = 0$$

$$pQq = Df pCqKqCp$$

$$1. pQq = 1Q1 = 1C1K1C1 = 1K1 = 1$$

$$2. pQq = 1Q0 = 1C0K0C1 = 0K1 = 0$$

$$3. pQq = 0Q1 = 0C1K1C0 = 1K0 = 0$$

$$4. pQq = 0Q0 = 0C0K0C0 = 1K1 = 1$$

$$5. pQq = \frac{1}{2} Q\frac{1}{2} = \frac{1}{2} C\frac{1}{2} K\frac{1}{2} C\frac{1}{2} = 1K1 = 1$$

$$6. pQq = \frac{1}{2} Q1 = \frac{1}{2} C1K1C\frac{1}{2} = 1K\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$7. pQq = 1Q\frac{1}{2} = 1C\frac{1}{2} K\frac{1}{2} C1 = \frac{1}{2} K1 = \frac{1}{2}$$

$$8. pQq = \frac{1}{2} Q0 = \frac{1}{2} C0K0C\frac{1}{2} = K1 = \frac{1}{2}$$

$$9. pQq = 0Q\frac{1}{2} = 0C\frac{1}{2} K\frac{1}{2} C0 = 1K0 = 0$$

Модальні функції в трьохзначній системі Лукасевича є функціями від трьох значень істинності (1, 0, $\frac{1}{2}$).

Вихідною модальною функцією є можливість (M). Через можливість визначаються неможливість і необхідність.

Змістовна трактовка можливості передбачає зв'язок існування і можливого стану, дії, результату тощо. Іншимим словами, *існування чогось передбачає його можливість, але не навпаки*. Виходячи із цього Лукасевич тлумачить істиннісну функцію можливості в аспекті трьох істиннісних оцінок таким способом:

1) p, q, r – це змінні висловлювань, в яких відбувається констатація чогось;

2) $Mr, Mq, Mr, \dots$ – це змінні висловлювання, в яких висловлюється оцінка з тієї чи іншої точки зору стосовно змісту висловлювання: "Можливо, що p ", "Можливо, що q ".

Тоді, якщо висловлювання " p " має оцінку "1" (підтверджено факт існування), то висловлювання " Mr " те ж матиме оцінку "1". Це означає, що *якщо дещо існує, то воно можливе*.

Якщо висловлювання " p " має оцінку "0" (факт існування не підтверджено), то висловлювання " Mr " має оцінку "0", і цим самим *підкреслюється відсутність реалізації якоїсь можливості*.

За певних умов деякий факт може мати місце, а може й ні. Ця ситуація фіксується висловлюванням, яке має оцінку " $\frac{1}{2}$ " ("невизначено"). Модальне висловлювання, яке утворене від нього матиме оцінку "1", цим самим *вказуючи на здатність чогось реалізуватися*.

За допомогою таблиць зазначене можна відобразити так:

p	Mr
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Як уже зазначалося " M " є вихідною модальністю у Лукасевича. Тому табличне визначення можливості є базовим для визначення інших модальностей.

p	Mr	NMr	MNr	$NMNp$
1	1	0	0	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Таким чином, ми будували таблиці для "неможливості" (NMr) і для "необхідності" ($NMNp$).

Лукасевич задає модальну функцію "випадковість" (D) за допомогою дефініції:

$$Dp = Df pQNp.$$

$$1. Dp = 1QN1 = 1Q0 = 0$$

$$2. Dp = 0QN0 = 0Q1 = 0$$

$$3. Dp = \frac{1}{2} QN\frac{1}{2} = \frac{1}{2} Q\frac{1}{2} = 1$$

У вигляді таблиці це можна представити так:

p	Dp	NDp
1	0	1
$\frac{1}{2}$	1	0
0	0	1

NDp – це значення випадковості.

Прокоментуємо визначення випадковості.

З чисто змістовної точки зору, *якщо у висловлюванні "р" однозначно фіксується наявність якогось факту, або його відсутність, то це означає виключення будь-якої випадковості. Іншими словами, якщо висловлювання "р" має оцінку "1" або "0", то модальне висловлювання "Dp" матиме оцінку "0". А коли у висловлюванні "р" фіксується рівноцінність як того, що може мати місце, так і того, що не може мати місця (це відображається оцінкою " $\frac{1}{2}$ "), то модальне висловлювання "Dp" оцінюється "1".*

У запропонованій Лукасевичем системі вивідними (доказовими) є тільки ті формули, які при будь-якій комбінації значень приймають значення "1".

Візьмемо дві формули:

$pCMp$ і $MpCp$ перевіримо їх на доказовість.

p	Mp	$pCMp$	$MpCp$
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1	1

Отже, формула $pCMp$ є *доказовою* і вона приймається в системі Лукасевича, а формула $MpCp$ не є *доказовою* і вона відкидається у цій системі.

2.2.2. Чотирьохзначна система Я.Лукасевича

У роботі *"Арістотелівська силогістика з точки зору сучасної формальної логіки"* Я.Лукасевич розробляє систему модальної логіки, яку називає *"Основна модальна логіка"*.

До основної модальної логіки він відносить вісім залежностей, які повинна обов'язково мати будь-яка система, що претендує бути модальною:

1. $QMrNLNr$, тобто Mr – тоді і тільки тоді, якщо $NLNr$ (можливо, що " r " тоді і тільки тоді, якщо не необхідно " $не-r$ ");
2. $QLpNMNr$, тобто Lp – тоді і тільки тоді, якщо $NMNr$ (необхідно, що " r " тоді і тільки тоді, якщо не можливо, що " $не-r$ ");
3. $CLpp$, тобто, якщо Lp , то " p " (якщо необхідно, що " p ", то " p ");
4. $CpMr$, тобто, якщо " p ", то Mr (якщо наявне (існує) " p ", то можливо, що " p ");
5. $CMpp$, тобто, якщо Mr , то " p " (якщо можливо, що " p ", то наявне (існує) " p ");
6. $CpLp$, тобто якщо " p ", то Lp (якщо наявне (існує) " p ", то необхідно, що " p ");
7. Mr , тобто можливо, що " p ";
8. NLp , тобто не необхідно, що " p ".

Посилаючись на дослідника творчості Арістотеля Александра Афродизійського, Лукасевич підкреслює, що існування (наявність) передбачає можливість, але не навпаки, а необхідність – існування (наявність), але не навпаки. Ті залежності, де порушуються ці вимоги повинні бути відкинуті.

Отже, формули 5 – 8 відкидаються в будь-якій системі.

Чотирьохзначна модальна логіка Лукасевича включає в себе немодальну частину і модальну. Немодальну частину складає чотирьохзначна логіка Лукасевича, яка розглянута вище.

Модальну частину Лукасевич задає у вигляді двох альтернатив. В залежності від того, чи береться за вихідний функтор можливість (M), чи необхідність (L) приймаються

відповідні основні принципи модальної логіки:

I. $CpMp$, $CMpp$, Mp ;

II. $CLpp$, $CpLp$, NLp .

Характерною особливістю модальної логіки Лукасевича є те, що тут модальності є функціями істинності.

Дамо визначення модальних функцій.

Визначимо можливість (M) на підставі рівності і таблиці:

$$M(a,b) = (a, Cbb)$$

$$1. M(1,1) = (1, C11) = (1,1) = 1$$

$$2. M(1,0) = (1, C00) = (1,1) = 1$$

$$3. M(0,1) = (0, C11) = (0,1) = 3$$

$$4. M(0,0) = (0, C00) = (0,1) = 3$$

У табличному варіанті можливість (M) має такий вигляд:

p	Mp
1	1
2	1
3	3
4	3

Оскільки функтор M є вихідним, то через нього визначається функтор L :

$$Lp = Df NMNp$$

Дамо табличне визначення Lp :

p	Np	MNp	$NMNp$
1	4	3	2
2	3	3	2
3	2	1	4
4	1	1	4

В даній системі доказовою є формула, яка при будь-яких підстановках значень приймає значення "1".

За допомогою введених визначень модальних функторів спробуємо верифікувати декілька формул:

I) $CLpp$; II) $CpMp$; III) $CMpp$; IV) $CpLp$.

$$I) 1. CLpp = CL11 = C21 = 1$$

$$2. CLpp = CL22 = C22 = 1$$

$$3. CLpp = CL33 = C43 = 1$$

$$4. CLpp = CL44 = C44 = 1$$

$$\text{II) } 1. CpMp = C1M1 = C11 = 1$$

$$2. CpMp = C2M2 = C21 = 1$$

$$3. CpMp = C3M3 = C33 = 1$$

$$4. CpMp = C4M4 = C43 = 1$$

$$\text{III) } 1. CMpp = CM11 = C11 = 1$$

$$2. CMpp = CM22 = C12 = 2$$

$$3. CMpp = CM33 = C33 = 1$$

$$4. CMpp = CM = 44 = C34 = 2$$

$$\text{IV) } 1. CpLp = C1L1 = C12 = 2$$

$$2. CpLp = C2L2 = C22 = 1$$

$$3. CpLp = C3L3 = C24 = 3$$

$$4. CpLp = C4L4 = C44 = 1$$

Таким чином, формули I, II, є *доказовими*, а III, IV – *ні*, а це означає, що за термінологією Лукасевича, вони повинні бути відкинуті.

Окрім функтора (*M*) для модальності "*можливість*", Лукасевич вводить для цієї модальності ще один функтор (*W*). Позначення для цього функтора виглядає як перевернута "*M*". Визначає він цей функтор за допомогою рівності:

$$W(a,b) = (Ca a, b).$$

$$1. W(a,b) = (C11,1) = (1,1) = 1$$

$$2. W(1,0) = (C11,0) = (1,0) = 2$$

$$3. W(0,1) = (C00,1) = (1,1) = 1$$

$$4. W(0,0) = (C00,0) = (1,0) = 2$$

У табличному варіанті:

<i>p</i>	<i>W</i>
(1,1)	1
(1,0)	2
(0,1)	1
(0,0)	2

Незважаючи на те, що функтор "*W*" відмінний від функтора "*M*", він верифікує формули тієї ж структури, що і "*M*". Тобто, якщо вираз *CpMp* приймається, то приймається і вираз *CpWp*, а

якщо вираз $CMpp$ відкидається, то й відкидається вираз $CWpp$ тощо.

Переконаємося в цьому:

I) $CpWp$

1. $CpWp = C1W1 = C11 = 1$
2. $CpWp = C2W2 = C22 = 1$
3. $CpWp = C3W3 = C31 = 1$
4. $CpWp = C4W4 = C42 = 1$

II) $CWpp$

1. $CWpp = CW11 = C11 = 1$
2. $CWpp = CW22 = C22 = 1$
3. $CWpp = CW33 = C13 = 3$
4. $Cwpp = Cw44 = C24 = 3$

Отже, другий (II) вираз повинен бути відкинутим. " W " і " M " представляють один і той самий функтор, тому вони повинні мати спільні властивості. Але не дивлячись на їх тотожність, вони поведуть себе по-різному входячи до структури єдиної формули.

Для ілюстрації зазначеного доведемо декілька формул:

I) MWp

p	Wp	MWp
1	1	1
2	2	1
3	1	1
4	2	1

II) WMp

p	Mp	WMp
1	1	1
2	1	1
3	3	1
4	3	1

III) MMp

p	Mp	MMp
1	1	1
2	1	1
3	3	3
4	3	3

IV) WWp

p	Wp	WWp
1	1	1
2	2	2
3	1	1
4	2	2

Наведені таблиці показують, що ми не можемо замінити у формулах I і II M на W і W на M , оскільки отримаємо формули які треба буде відкинути.

Лукаsevич звертає увагу на проблему випадкових висловлювань в логіці Аристотеля. Коротко ця проблема зводилася до встановлення факту: *"Чи можуть бути істинними деякі випадкові висловлювання?"*

Визначимо випадковість як модальний функтор. Позначимо його літерою " D ": $CKMpMNpDp$ – читається: *"Якщо можливо, що r і можливо, що $не-r$, то випадково, що r ".*

З цього визначення випливає, що неможливим є існування істинного випадкового висловлювання, оскільки, не можуть бути разом істинними висловлювання Mp і MNp :

1. $KMpMNp = KM1MN1 = K1M0 = K13 = 3$
2. $KMpMNp = KM2MN2 = K1M3 = K13 = 3$
3. $KMpMNp = KM3MN3 = K3M2 = K31 = 3$
4. $KMpMNp = KM4MN4 = K3M1 = K31 = 3$

Якщо наведена кон'юнкція постійно має значення "3", то вона ніколи не буде істинною, а звідси $Dp = 3$, і тому не може бути істинного випадкового висловлювання, згідно наведеного визначення " D ".

Аналогічно можна продемонструвати, що $KpWpWNp$ має значення "2":

$$1. KWpWNp = KW1WN1 = K1W1 = K12 = 2$$

$$2. KWpWNp = KW2WN2 = K2W3 = K21 = 2$$

$$3. KWpWNp = KW3WN3 = K1W2 = K12 = 2$$

$$4. KWpWNp = KW4WN4 = K2W1 = K21 = 2$$

Арістотель наполягає, що висловлювання "Можливо, що завтра буде морський бій" і "Можливо, що завтра не буде морського бою", які висловлені напередодні, можуть бути обидва істинними.

Лукаsevич використовуючи свої парні можливості "М" і "W", намагається уточнити арістотелівське розуміння випадковості. Він звертається до прикладу з монетою.

При підкиданні монети ми можемо мати в результаті випадання герба або – цифри. Обидва результати ми схильні оцінити як істинні, але вони не можуть бути разом істинними, якщо перший результат позначити тим же функтором, що і другий. Тут ми маємо ситуацію, коли випадання герба є можливістю, що відмінна від його невинання.

Першу можливість ми позначимо "Mp" ("Можливо, що "р", тут ми маємо ствердження), а другий – WNr ("Можливо, що "не-р", тут ми маємо заперечення). Ми можемо за домовленістю поміняти їх місцями. Першу можливість позначимо Wp, а другу – MNp. Ситуація від цього не зміниться.

Позначимо введені функтори символами X та Y:

$$Mp - X,$$

$$WNp - Y.$$

Функтори X та Y є функторами випадковості, тобто "X – випадкове" і "Y – випадкове". Визначимо їх таким чином:

1. SKMpWNpXp – читається "р є X- випадкове" означає, що "р є M – можливе і Nr є W- можливе".

2. SKWpMNPpYp – читається "р є Y – випадкове" означає, що "р є W – можливе і Nr є M – можливе".

Із наведених визначень X та Y виведемо їх матриці.

$$a) X1 = KM1WN1 = K1W4 = K12 = 2$$

$$X2 = KM2WN2 = K1W3 = K11 = 1$$

$$X3 = KM3WN3 = K3W2 = K32 = 4$$

$$X4 = KM4WN4 = K3W1 = K31 = 3$$

$$6) Y1 = KW1MN1 = K1M4 = K13 = 3$$

$$Y1 = KW2MN2 = K2M3 = K23 = 4$$

$$Y3 = KW3MN3 = K1M2 = K11 = 1$$

$$Y4 = KW4MN4 = K2M1 = K21 = 2$$

В табличному варіанті функтори X та Y виглядають так:

p	X	Y
1	2	3
2	1	4
3	4	1
4	3	2

Із даної таблиці видно, що Xp та Yp повинні бути істинними відповідно при $p = 2$ і при $p = 3$. Раніше було доведено, що $KMpMNp$ має постійне значення "3", а $KWpWNp$ – "2".

Таким чином, вивідними є дві формули:

а) $XKWpWNp$;

б) $YKMPMNp$.

Цим самим визначається існування істинних випадкових висловлювань:

1) "істинне X – випадкове висловлювання";

2) "істинне Y – випадкове висловлювання".

Необхідно зауважити, що X – *винаковість* та Y – *винаковість* є *двійниками*. Мається на увазі, якщо в таблиці істинності для X та Y поміняти 2 на 3, а 3 на 2, то X стане Y , а Y стане X :

p	X	Y	p'	X'	Y'
1	2	3	1	3	2
2	1	4	3	4	1
3	4	1	2	1	4
4	3	2	4	2	3

Разом з тим X відрізняється від Y і ця відмінність більша навіть як між M і W , тому що висловлювання Xp та Yp є суперечливими.

Використовуючи дефініцію X та Y перевіримо наступні рівності:

$$a) Xp = YNp = NYp$$

$$б) Yp = XNp = NXp$$

$$a) 1. X1 = YN1 = Y4 = 2 = NY2 = N4 = 1$$

$$2. X2 = YN2 = Y3 = 1 = NY1 = N3 = 2$$

$$3. X3 = YN3 = Y2 = 4 = NY4 = N2 = 3$$

$$4. X4 = YN4 = Y1 = 3 = NY3 = N1 = 4$$

$$б) 1. Y1 = XN1 = X4 = 3 = NX3 = N4 = 1$$

$$2. Y2 = XN2 = X3 = 4 = NX4 = N3 = 2$$

$$3. Y3 = XN3 = X2 = 1 = NX1 = N2 = 3$$

$$4. Y4 = XN4 = X1 = 2 = NX2 = N1 = 4$$

Таким чином, дані рівності приймаються.

Тепер перевіримо закони протиріччя та виключеного третього для Xp та Yp :

I) $NKXpYp$

$$1. NKX1Y1 = NK23 = N4 = 1$$

$$2. NKX2Y2 = NK14 = N4 = 1$$

$$3. NKX3Y3 = NK41 = N4 = 1$$

$$4. NKX4Y4 = NK32 = N4 = 1$$

II) $AXpYp$

$$1. AX1Y1 = A23 = 1$$

$$2. AX2Y2 = A14 = 1$$

$$3. AX3Y3 = A41 = 1$$

$$4. AX4Y4 = A32 = 1$$

Оскільки закони протиріччя ($NKXpYp$) та виключеного третього ($AXpYp$) істинні, то це означає, що жодне висловлювання не може бути одночасно і X – випадкове, і Y – випадкове, це, по-перше, а, по-друге, будь-яке висловлювання є або X – випадковим, або Y – випадковим. Заперечення X – випадкового висловлювання є Y – випадковим висловлюванням.

Тобто: $NXp = Yp$ і $NYp = Xp$. В цьому ми могли переконатися, коли доказували рівності: а) $Xp = YNp = NYp$ і б) $Yp = XNp = NXp$.

Таким чином, вводячи парні модальні функтори Лукасевич розкриває суть модального функтора " D ". Традиційно прийнятною була точка зору, що те, що не є випадковим, або неможливе, або необхідне. При цьому NM і L співвідносили з єдиним видом

можливості M . Але коли з'явилися парні можливості M і W , то невірно стверджувати, що те, що не є X – випадковим, є або M – неможливим, або M – необхідним. В цьому випадку доречніше буде сказати, що те, що не є X – випадковим, є або M – неможливим, або W – необхідним. Іншими словами, випадковість не може бути визначеною за допомогою кон'юнкції Mp і MNp , а лише за допомогою кон'юнкції Mp і WNp , або $WpMNp$.

Арістотель досліджуючи природу випадковості прийшов до ідеї багатозначної логіки, яку реалізував у XX ст. Я.Лукасевич. Створивши апарат трьохзначної, а потім чотирьохзначної логіки, Лукасевич почав досліджувати засобами створених систем модальні функтори. Це сприяло проясненню і чіткому визначенню понять, категорій, які були перевантажені інтуїтивним змістом, елементами здорового глузду, психологізмами.

Наприклад, довгий час слідуючи Арістотелю вважали, що судження, яке описує суттєві ознаки предметів не тільки фактично, але й необхідно істинне. Ця теза послужила потім основою для поділу наук на аподиктичні (логіка, математика) і емпіричні (зміст яких фіксується асерторичними судженнями). Лукасевич справедливо вказує на хибність такої точки зору.

У 70-80-х р. минулого століття у вітчизняній літературі з'явилася критика такої позиції Лукасевича. Його звинувачували в тому, він стає на позиції крайнього номіналізму, не визнає існування істинних необхідних суджень.

Справа в тому, що Лукасевич створюючи свою багатозначну логіку, розкрив зовсім іншу природу терміну "істина" в логіці. А якщо це так, то тодішня критика наших вітчизняних філософів є безпредметною.

Як уже зазначалося вище, логіка ніколи, особливо сучасна, не порівнювала істинне висловлювання з вірним відображенням дійсності, а хибне висловлювання з помилковим відображенням дійсності. **В сучасній логіці істинне висловлювання співставляється з непорожньою множиною елементів, а хибне висловлювання ототожнюється з порожньою множиною елементів. При цьому природа елементів, що складають множину (чи то фізична, чи етична, чи правова, чи математична і т.д.) не приймається до уваги.**

Виходячи з цього Лукасевич зауважував, що справжніх аподиктичних висловлювань немає. І в ніякому разі він не зазіхав на прерогативу філософії стосовно: теоретичного та емпіричного рівнів пізнання, співвідношення категорій можливості – дійсності, необхідності – випадковості, основних критеріїв типології наук, вихідних моментів процесу пізнання і тощо. Хоча це може здатися, коли він заявляє, що не має різниці між математичною істиною і емпіричною, що істина завжди синтетична, що закон причинності повинен розглядатися як гіпотеза і т.д.

Але на цьому він наголошує лише з однією метою, щоб вказати на особливий, специфічний характер досліджень сучасної логіки.

Запитання для самоконтролю

1. Передумови виникнення модальної логіки.
2. Матеріальна імплікація і теорія логічного слідування.
3. Строга імплікація К.Льюїса.
4. Аксиоми строгої імплікації К.Льюїса.
5. Порівняння матеріальної та строгої імплікації.
6. Тлумачення К.Льюїсом модальних операторів.
7. Вихідні принципи концепції модальної логіки Я.Лукасевича.
8. Характерні особливості трьохзначної модальної логіки Я.Лукасевича.
9. Визначення модальних функцій в трьохзначній системі Я.Лукасевича.
10. Витоки чотирьохзначної модальної логіки Я.Лукасевича.
11. Визначення модальних функцій в чотирьохзначній системі Я.Лукасевича.
12. Визначення доказової формули в чотирьохзначній системі Я.Лукасевича.
13. Два функтори для модальності "можливість" в чотирьохзначній системі Я.Лукасевича.
14. Характерні риси модального функтора "випадковість" в чотирьохзначній системі Я.Лукасевича.

РОЗДІЛ 3.

СИСТЕМА МОДАЛЬНОЇ ЛОГІКИ

3.1. Алетична логіка

У попередньому розділі розглядалися результати досліджень в галузі модальної логіки, що належать її засновникам **К.Льюїсу** та **Я.Лукасевичу**. Результати цих досліджень є своєрідною новітньою історією модальної логіки, з одного боку, а з іншого – вони послугували сильним поштовхом для сучасних досліджень модальної логіки.

Роботи **К.Льюїса** та **Я.Лукасевича** були пов'язані, в основному, *із синтаксичною побудовою модальної логіки.*

Семантика модальних логік починає розроблятися лише в 50 – 60-х роках ХХст. завдяки працям Р.Карнапа, С.Кріпке, Я.Хінтікки. Кожен із цих вчених зробив вагомий внесок у розробку сучасної модальної логіки.

Так, **Р.Карнап**, досліджуючи модальності розробляє концепцію "опису станів".

С.Кріпке та **Я.Хінтікка** формулюють метод семантики можливих світів. Тобто, фактично на сьогоднішній день модальна логіка знаходиться в стані систематичного дослідження та вивчення.

Виходячи із типології модальних операторів виділяють різні види модальних логік.

Серед найбільш канонічних є такі види модальних логік:

- ✓ алетична;
- ✓ темпоральна;
- ✓ деонтична;
- ✓ епістемічна.

Знайомство з цими системами розпочнемо з алетичної логіки.

3.1.1. Мова алетичної логіки висловлювань

Назва *"алетична логіка"* походить від грецького слова – *"aletheia"* (що означає *істина*).

Алетичною логікою називають розділ модальної логіки, яка досліджує модальності: "необхідно", "можливо", "випадково".

Ці модальності трактуються як близькі до істини, тому ця логіка отримала назву *"алетична"*.

Дослідження алетичних модальностей починається ще за часів античності, що значною мірою, сприяло розгляду алетичної логіки як бази для всієї модальної логіки.

Для того, щоб утворити мову алетичної логіки висловлювань необхідно до мови класичної пропозиційної логіки додати знаки алетичних модальностей:

1. $p, q, r, \dots$ – пропозиційні змінні;
2. $\wedge, \vee, \supset, \rightarrow, \infty$ – логічні зв'язки;
3. $\Box$ – "необхідно";
4. $\Diamond$ – "можливо";
5. ∇ – "випадково";
6. $\{, [, (,),], \}, \dots$ – допоміжні символи.

Дефініція формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна – $p, q, r \dots$ – формули;
2. Якщо A і B формули, то $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \supset B, A \infty B, \Box A, \Diamond A, \nabla A$ – формули;

3. Ніщо крім визначених у пунктах Df 1, 2 не є формулою.

Опишемо основні алетичні модальності.

I. $\Box$

Виділяють два види необхідності:

- а) логічну;
- б) фізичну.

Логічною називається необхідність, яка впливає із законів логіки і, заперечення якої, є несумісною з ними.

Істинність логічно необхідного висловлювання обґрунтовується лише логічними підставами.

Фізична необхідність обумовлюється законами природи, і не суперечить їм.

Відношення між логічною і фізичною необхідністю можна сформулювати у вигляді наступної залежності:

"Все, що логічно необхідно є і фізично необхідно, але не все, що фізично необхідно є логічно необхідно".

Схематично це записується у вигляді такої формули:

$$[\forall x \Box L A \supset \forall x \Box \Phi A] \wedge [\neg \forall x \Box \Phi A \supset \neg \forall x \Box L A]$$

де $\Box L$ – знак логічної необхідності, а $\Box \Phi$ – знак фізичної необхідності.

Наприклад, відповідно до закону тотожності істинним є висловлювання: "Якщо метал – електропровідник, тоді він завжди проводитиме електричний струм". Цей логічний наслідок є також істиною фізики. Але те, що у металу є певна кількість вільних електронів на зовнішній орбіті регламентується законом фізики, а не логіки.

II. $\Diamond$

Існує два види можливості:

а) логічна;

б) фізична.

Логічна можливість пов'язана із внутрішньою несуперечливістю висловлювання. Логічно можливим є те, що не суперечить законам логіки, є сумісним із ними і, заперечення якого не впливає з них.

Фізично можливим є те, що узгоджується із законами природи, не суперечить їм і, заперечення якого не впливає з них.

Зв'язок між логічною можливістю ($\Diamond L$) і фізичною ($\Diamond \Phi$) можливістю можна зафіксувати у вигляді такої залежності:

"Все, що можливо фізично, те можливо і логічно, але не все, що можливо логічно є можливим фізично".

Схематично це записується у вигляді такої формули:

$$[\forall x \Diamond \Phi A \supset \forall x \Diamond L A] \wedge [\neg \forall x \Diamond L A \supset \neg \forall x \Diamond \Phi A]$$

Наприклад,

а) якщо фізично можливо побудувати міст через певну річку, то й теоретично можливо здійснити проектування цієї дії;

б) якщо теоретично можна спроектувати вічний двигун, то фізично це неможливо.

III. ∇

Випадковість визначають через можливість. якщо можливість це те, що може бути, то випадковість це те, що може бути, а може й не бути.

Випадковість теж поділяють на:

- а) логічну;**
- б) фізичну.**

Логічно випадковим є висловлювання, якщо ні воно саме, ні його заперечення не містить внутрішньої суперечності.

Фізично випадковим є те, наявність чого чи його відсутність не регламентована природними законами.

Введемо дефініції $\Box$, $\Diamond$, ∇ .

1. $\Box p \equiv \text{Df } \neg \Diamond \neg p$ ("p є необхідним, якщо і тільки, якщо неможливим є заперечення p");
2. $\Diamond p \equiv \text{Df } \neg \Box \neg p$ ("p є можливим, якщо і тільки, якщо не є необхідним заперечення p");
3. $\nabla p \equiv \text{Df } \Diamond p \wedge \Box p$ ("p є випадковим, якщо і тільки, якщо можливим є p і його заперечення").

3.1.2. Алетична логіка і теорія можливих світів

Щоб встановити логічне значення дескриптивного висловлювання ми співставляємо дане висловлювання з тим, про що в ньому йдеться (або з дійсністю).

Якщо маємо відповідність висловлювання з дійсністю, то фіксуємо за ним значення "істина", а якщо ні – значення "хиба".

Так, *наприклад, "Варшава столиця Польщі"* – це висловлювання відповідає дійсності, отже воно є істинним, а висловлювання *"Авраам Лінкольн відкрив Америку"* не відповідає дійсності, отже є хибним.

А як себе поведуть в такій ситуації модальні висловлювання? **Виявляється, що модальні висловлювання не є ні категорично істинними, ні категорично хибними, а є істинними або хибними в деяких або усіх випадках.**

Проілюструємо зазначене на прикладах.

Візьмемо дескриптивне висловлювання:

1) *"Всі планети мають атмосферу"* (p). Утворимо від нього модальне висловлювання:

2) *"Необхідно, що всі планети мають атмосферу"* ($\Box p$).

Отже, можемо сформулювати відповідний постулат:

"Якщо дескриптивне висловлювання хибне, то утворене від нього необхідне висловлювання буде хибним":

$$\begin{array}{ccc} p \rightarrow \Box p & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & x \end{array}$$

Маємо висловлювання:

- 1) "Будь-яка планета є космічним об'єктом" (p); і
- 2) "Необхідно, що будь-яка планета є космічним об'єктом" ($\Box p$);
- 1') "Всі мої приятелі мають вищу освіту" (p) і
- 2') "Необхідно, що всі мої приятелі мають вищу освіту" ($\Box p$).

Якщо в ситуації (1,2) ми із істинного дескриптивного висловлювання отримуємо істинне модальне висловлювання, то у ситуації (1',2') – сумнів, що висловлювання " $\Box p$ " фіксує безумовність і неминучість даного факту.

Звідси випливає постулат: **"Якщо дескриптивне висловлювання істинне, то утворене від нього необхідне висловлювання може бути будь-яким (як істинним, так і хибним)":**

$$\begin{array}{ccc} p \rightarrow \Box p & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ i & & (\approx i, x) \end{array}$$

Подібним чином, але тільки у зворотньому розумінні, поводить себе оператор можливості ($\Diamond$).

Звернемося до прикладу:

- 1) "Всі учасники конференції підготували змістовні доповіді" (p);
- 2) "Можливо, що всі учасники конференції підготували доповіді" ($\Diamond p$).

"Якщо дескриптивне висловлювання істинне, то утворене від нього можливе висловлювання також буде істинним":

$$\begin{array}{ccc} p \rightarrow \Diamond p & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ i & & i \end{array}$$

Наведемо ще такий приклад:

- 1) "Природні супутники мають атмосферу" (p);
- 2) "Можливо, що природні супутники мають атмосферу" ($\Diamond p$).
- 1') "Метали – рідини" (p);

2') "Можливо, що метали рідини" ($\Diamond p$).

Якщо у ситуації (1,2) із хибності дескриптивного висловлювання ми отримуємо хибність модального висловлювання, то у випадку (1', 2') із хибності дескриптивного висловлювання ми маємо істинне модальне висловлювання.

Отже, якщо дескриптивне висловлювання хибне, то утворене від нього можливе висловлювання може бути будь-яким (як хибним, так і істинним).

$$\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & \Diamond p \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & (\approx x, i) \end{array}$$

Із наведених прикладів випливає, що для встановлення логічного значення модальних висловлювань не достатньо лише співставити його із реальною дійсністю, а треба мати на увазі всю множину варіантів ситуації, з якими є смисл співставляти дане висловлювання. При цьому необхідно враховувати ці ситуації стосовно минулого, майбутнього, просторової координати прийнятих моральних, правових норм системи оцінок, стандартів пізнавальної діяльності тощо.

У пізнавальній, практичній діяльності у нас постійно виникає потреба оцінювати свої дії, поведінку інших людей, прогнозувати події, виражати своє ставлення до результатів як своєї діяльності, так і оточуючих. Іншими словами, ми постійно вимушені припускати стосовно певного факту, події довільне число можливостей, альтернатив, підходів, які забезпечують їх інтерпретацію.

В зв'язку з цим множину альтернативних підходів, множину припустимих варіантів пояснення ситуацій, розв'язання проблем, прогнозування подій, оцінки результатів діяльності тощо, прийнято називати можливими світами.

Фундатором теорії можливих світів є *Г.Лейбніц*. Саме він, досліджуючи природу істини розуму та істини факту, звертається до поняття "*можливий світ*". Трактівка *Лейбніцем* "*можливого світу*" переобтяжена гносеологічним змістом. Це наклало відповідний відбиток при визначенні необхідного висловлювання, як істинного у всіх можливих світах, а можливого – хоча б в одному.

У сучасній логіці "*можливий світ*" розглядається як теоретико-множинне поняття. Навіть тоді, коли ми говоримо, що дескриптивне

висловлювання співставляється для визначення його значення з дійсністю, реальним станом справ, то мається на увазі не реальна дійсність, яка є незалежною від суб'єкта, що пізнає, а "істина" не як тотожність мислення і буття, а "хиба" як спотворене відображення дійсності, а маються на увазі теоретико-множинні поняття "належності", чи "не належності" елементу до множини, "включення" чи "не включення" однієї множини в іншу. Тим більше це стосується **"можливого світу"**.

Оскільки, можливі світи моделюють різні обставини, альтернативні стани справ, різноманітні гносеологічні стандарти, припустимі і неприпустимі норми, оцінки відносно якогось випадку чи умови, то кожен можливий світ розглядається як елемент деякої множини можливих світів.

Між можливими світами існує відношення досяжності, яке також має теоретико-множинний смисл. Це не відношення співставлення, яке має місце між дескриптивними висловлюваннями і реальним (дійсним) світом, а відношення обстеження перегляду множини можливих світів, які якимось чином зв'язані, стосуються реального світу.

Відношенню досяжності (альтернативності) притаманні такі властивості, як:

- ✓ рефлексивність;
- ✓ симетричність;
- ✓ транзитивність.

Якщо позначити можливі світи символами $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$, а відношення досяжності – R , то названі властивості можна записати таким чином:

1. $w R w$ – рефлексивність;
2. $w R w_1 \rightarrow w_1 R w$ – симетричність;
3. $(w R w_1 \wedge w_1 R w_2) \rightarrow w R w_2$ – транзитивність.

Р.Карнап конкретизує поняття можливий світ через термін **"опис стану"**.

Опис стану це один з можливих розподілів істиннісних значень для елементарних висловлювань.

Так для висловлювання $p \wedge q$ можливими є чотири комбінації розподілу істиннісних значень:

1. $p - i, q - i$;
2. $p - i, q - x$;

3. $p - x, q - i$;

4. $p - x, q - x$.

Кожна з цих комбінацій є описом стану.

Можливий світ – це саме той світ, який є заданим певним описом стану. Ми маємо чотири можливих світи. У нашому прикладі лише перший опис стану відповідає реальному світові. Карнап використовує поняття "опис стану" для дефініції логічної і фактичної істинності висловлювання.

Логічно істинним є висловлювання, яке істинне в усіх описах світів, а **фактично істинним** – яке лише в деяких описах станів істинне.

Враховуючи вище зазначене, визначимо основні алетичні модальності і аналітичні правила для них.

Визначення $\Box, \Diamond$ у термінах можливих світів:

а) висловлювання A буде необхідним у деякому можливому світі w , якщо воно буде істинним в усіх можливих світах досяжних із w :

	$\frac{Tw \ \Upsilon A}{Tw' A}$	
$T\Upsilon$	$Tw' A$	при Rww'

(де w' є будь-який можливий світ, який є досяжним із w).

б) висловлювання A не буде необхідним у деякому можливому світі w , якщо воно буде хибним хоча б в одному можливому світі w , який є досяжним із w :

	$\frac{F\Upsilon w A}{Fw' A}$	
$F\Upsilon$	$Fw' A$	при Rww'

(де w' – є деякий можливий світ, якого ще не було в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовується це правило, і який є досяжним із w).

в) висловлювання A буде можливим у деякому можливому світі w , якщо воно буде істинним хоча б в одному можливому світі w' , який є досяжним із w :

	$\frac{T \Diamond w A}{Tw' A}$	
$T\Diamond$	$Tw' A$	при Rww'

(де w' є деякий можливий світ, якого ще не було в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося це правило, і який є досяжним із w).

г) висловлювання A не буде можливим у деякому можливому світі w , якщо воно буде хибним у будь-якому можливому світі

w' , який є досяжним із w :

$$\begin{array}{ccc} F\Diamond & \frac{F\Diamond wA}{Fw'A} & \text{при } Rww' \end{array}$$

(де w' є будь-який можливий світ, який є досяжним із w).

Застосування аналітичних правил є ефективним для здійснення проблеми розв'язання в алетичній логіці.

При побудові аналітичних таблиць для формул алетичної логіки, треба мати на увазі, що таблиця вважається замкненою лише тоді, коли одна і та сама пропозиційна змінна буде з індексом T і F у тому самому можливому світі.

Здійснимо побудову аналітичної таблиці для формули:

$$\gamma A \supset A$$

$$0. \underline{Fw \gamma A \supset A}$$

$$1. Tw \gamma A$$

$$\text{I} \quad \frac{2. \underline{Fw A} \quad \text{-----} \quad F\supset, 0}{\text{-----} \quad F\gamma, 0}$$

$$\text{II} \quad \frac{3. \underline{Tw A} \quad \text{-----} \quad T\gamma, 1}{\text{-----} \quad +}$$

+

Аналітична таблиця є замкненою. Отже, дана формула є законом алетичної логіки і при цьому **відношення досяжності R є рефлексивним: "Все необхідне є реальним".**

Наведений закон відображає фундаментальне відношення між необхідністю і дійсністю. Буквально він засвідчує те, що при істинності $\Box A$ A буде завжди істинним в усіх можливих світах і в дійсному також.

Ця залежність іноді може провокувати невірне обмежене твердження: **"Все дійсне є необхідним"**. Але не завжди із дійсності випливає необхідність чогось. Для цього дійсність повинна мати атрибут необхідності.

Наприклад, із того, що **"Всі мешканці нашого будинку знають англійську мову"**, не випливає необхідність цього факту.

Наведемо ще один приклад.

Маємо формулу $\gamma\gamma(A \supset A)$.

Побудуємо для неї аналітичну таблицю:

$$0. \underline{Fw \gamma\gamma(A \supset A)}$$

$$\text{I} \quad \frac{1. \underline{Fw' \gamma(A \supset A)} \quad \text{-----} \quad F\gamma, 0}{\text{-----} \quad F\gamma, 0}$$

$$\text{II} \quad \frac{2. \underline{Fw'' \gamma(A \supset A)} \quad \text{-----} \quad F\Box, 1}{\text{-----} \quad F\Box, 1}$$

$$\text{III} \quad \frac{3. \underline{Fw''(A \supset A)} \quad \text{-----} \quad F\Diamond, 2}{\text{-----} \quad F\Diamond, 2}$$

IV 4. $Tw''A$ 5. $Fw''A$

+

"Все необхідне є реальним"

Отже, формула є законом алетичної логіки, а **відношення досяжності R є транзитивним і рефлексивним.**

Розглянемо ще два закони алетичної логіки.

 $A \supset \Diamond A$ **"Все дійсне є можливим".**

Аналітична таблиця цього закону матиме вигляд:

0. $Fw(A \supset \Box A)$ 1. TwA $F \supset, 0$ I 2. $Fw \Diamond A$ 3. Fw $F \Diamond, 2$

+

Даний закон регламентує той аспект відношення між реальним і можливим, коли визнання висловлювання можливим означає його істинність хоча б, в одному з можливих світів, але не виключено, що ним може бути дійсний світ.

Зрозуміло, що обернена залежність буде невірною: **"Із того, що можливо, не випливає його дійсність".**

Наприклад, із того, що "Київське Динамо" може виграти у черговому турі, не впливає його перемога.

 $\Box A \supset \Diamond A$ **"Все необхідне є можливим".**

Цей закон є наслідком із попередніх двох законів:

 $\Box A \supset A$ $A \supset \Diamond A$ $\Box A \supset \Diamond A$

У цьому законі зафіксована залежність: **"Якщо $\Box A$ істинне, то A буде істинним в усіх можливих світах, в тому числі і в дійсному, а, отже, і $\Diamond A$ буде істинним".**

Даний закон перевіримо за допомогою аналітичної таблиці:

0. $Fw \Box A \supset \Diamond A$ 1. $Tw \Box A$ I 2. $Fw \Diamond A$ $F \supset, 0$ II 3. $Tw'A$ $T \Box, 1$ III 4. $Fw'A$ $F \Diamond, 2$

+

3.2. Темпоральна логіка

Темпоральною, або часовою, логікою називають розділ модальної логіки, який досліджує природу, ознаки, логічні зв'язки часових висловлювань.

Дамо визначення часового висловлювання.

Часовим висловлюванням називається висловлювання, в якому часовий параметр включається до його логічної форми.

Тобто до складу темпорального висловлювання входять модальності Р, F, H, G (відповідно "було так, що ...", "буде так, що ...", "завжди було так, що ...", "завжди буде так, що ...").

Темпорально логіка, як самостійний розділ, починає формуватися в ХХст. Фундаторами темпоральної логіки є *А.Прайор, Г.Х. фон Врігт, М.Решер, Х. Укварт* та інші. Але перші дослідження в галузі темпоральної логіки знаходимо в *часи античності у Арістотеля, у середньовіччі у Діодора Кроноса, У.Оккама, Ж.Бурідана, Альберта Саксонського.*

Темпорально логіка розробляє апарат, за допомогою якого можна було б більш адекватно дослідити міркування про предмети і явища, які залежні від часу. Звідси і поділ часових логік по часових рядах. *Часові ряди незалежні один від одного, вони не зводяться один до одного, вони не повторюють один одного, нарешті, вони не перетинаються один з одним.* Завдяки цьому часові ряди охоплюють, характеризують речі, явища, події, які відбувалися, відбуваються і будуть відбуватися у світі. Чи це буде світ описуваний гуманітарними науками, чи – природничими.

Таких рядів існує два.

Один з них позначають буквою А, а другий – В.

Ряд А охоплює часовий простір з оцінками "буде", "було", "завжди буде", "завжди було".

Ряд В відображає часовий простір з оцінками "раніше", "пізніше", "одночасно".

Той розділ темпоральної логіки, який описує ряд А називають А-логіка, а той розділ темпоральної логіки, який описує ряд В – часовою В-логікою.

3.2.1. Мова темпоральної логіки висловлювань

Мова темпоральної логіки висловлювань складається із засобів мови класичної логіки висловлювань і доданих до них знаків темпоральних модальностей.

Алфавіт.

1. Пропозиційні змінні для позначення дескриптивних висловлювань: $p, q, r, \dots$

2. Пропозиційні зв'язки (константи): $\neg, \wedge, \vee, \supset, \leftrightarrow$

3. Знаки темпоральних модальностей:

P – "було так, що ..."

F – "буде так, що ..."

H – "завжди було так, що ..."

G – "завжди буде так, що ..."

4. технічні знаки, якимиє ліва та права дужка, кома, кома з крапкою, двокрапка, тире: $(,), ;, -$

Дефініція формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна – формула.

2. Якщо A і B формули, то $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \supset B, A \leftrightarrow B, PA, FA, HA, GA$ – формули.

3. Ніщо крім вказаного в пунктах 1, 2 дефініції не є формулою.

Наведена дефініція є ефективною.

Так, вирази $Hr \supset p, p \supset Fr, HFr \supset p, H(p \supset q) \leftrightarrow (Hp \supset Hq)$ є формулами, а вирази $p \supset H \vee F, Pq \supset, pH \vee p$ формулами не будуть.

Використовуючи мову темпоральної пропозиційної логіки запишемо **основні закони часової логіки**.

1. $Gp \supset Fr$

("Якщо після зими завжди наступатиме весна, то так воно і буде".)

2. $Hr \supset Pr$

("Якщо завжди гіпотеза, яка підтверджувалася практично, перетворювалася в теорію, то так воно і було".)

3. $\neg(Fp \wedge F \bar{p})$

("Невірно, що буде ясна погода і хмарна".)

4. $\neg(Pp \wedge P \bar{p})$

("Невірно, що вирок був обґрунтованим і необґрунтованим".)

5. $FFp \supset Fp$

("Якщо буде, що буде позитивний результат, то він буде".)

6. $\neg H \neg Gp \supset p$

7. $FPp \equiv p \vee Fp \vee Pp$

("Буде так, що був успіх "Київського Динамо", тільки якщо він є, або буде, або уже був".)

8. $HGp \equiv p \wedge Hp \wedge Gp$

("Завжди було, що завжди в цю пору року, в цій місцевості настане гарна погода, тоді і тільки тоді, якщо вона є, завжди була і завжди буде".)

Застосовуючи засоби мови темпоральної логіки висловлювань, визначимо темпоральні модальності одну через іншу.

а) $Gp \equiv \neg F \bar{p}$

("Завжди буде "p", тоді і тільки тоді, коли не буде "не-p".
"Завжди в цю пору року, в цій місцевості буде ясна погода, тоді і тільки тоді, коли в цю пору року в цій місцевості не буде хмарної погоди".)

б) $Fp \equiv \neg G \bar{p}$

("Буде "p", тоді і тільки тоді, коли не завжди буде "не-p".
"Буде ясна погода, тоді і тільки тоді, коли не завжди буде хмарна погода".)

в) $H \bar{p} \equiv \neg P p$

("Завжди була "p", тоді і тільки тоді, коли не було "не-p".
"Завжди був позитивний результат чемпіонату, тоді і тільки тоді, коли не було жодного випадку негативного результату".)

г) $Pp \equiv \neg H \bar{p}$

("Було "p", тоді і тільки тоді, коли не завжди було "не-p".
"Був позитивний результат експерименту, тоді і тільки тоді, коли не завжди був негативний".)

За допомогою темпоральних модальностей можна визначити алетичні модальності:

а) $\Box p \equiv p \wedge Gp$

("p" є необхідним, тоді і тільки тоді, коли "p" є і завжди буде". "Необхідною ознакою металу є електропровідність, тоді і тільки тоді, коли вона є і завжди буде".)

$$a') \Box p \equiv Hp \wedge p \wedge Gp$$

("p" є необхідним, тоді і тільки тоді, коли "p" завжди було, є і завжди буде". "Необхідно, що студенти повинні скласти іспити, тоді і тільки тоді, коли завжди так було, є і завжди так буде".)

$$б) \Diamond p \equiv p \vee Fp$$

("p" є можливим, тоді і тільки тоді, коли "p" є або буде". "Перемага нашої команди в чемпіонаті можлива, тоді і тільки тоді, коли вона є або буде".)

$$б') \Diamond p \equiv Pp \vee p \vee Fp$$

("p" можливо, тоді і тільки тоді, коли було "p", або є, або буде". "Можливо є поїздка до Варшави, тоді і тільки тоді, коли це було, або є, або буде".)

3.2.2. Темпоральна логіка і теорія можливих світів

Відомо, що класична логіка описувала ситуації, які відбувалися в статичному світі. Тут висловлювання розглядалися як незмінно істинні і незмінно хибні, а предмети або володіли певними ознаками, або ні.

Але існує і інший світ, який знаходиться в постійному русі і зміні. Тому для опису цього динамічного світу потрібна нова логіка, засобами якої можна було б охопити концептуальну структуру мінливого світу.

Візьмемо для прикладу декілька висловлювань:

1) $2 + 3 = 5$;

2) Бібліотека ім. Максимовича більша за Парламентську бібліотеку;

3) йде дощ.

Висловлювання 1 істинне раз і назавжди. Висловлювання 2 також істинне, але потрібно враховувати той факт, що фонди бібліотеки змінюються. Нарешті, висловлювання 3 має оцінку "істина" лише відносно локалізованого простору і часу. В один і той же час дощ може йти і може не йти. Наприклад: "Йде в Києві, але не йде в Одесі". Також в одному й тому ж місці дощ може йти, а може не йти: "Йти ранком, але не вдень".

Наведені приклади показують, що істинна оцінка висловлювання змінюється залежно від просторово-часової локалізації. *Але треба мати на увазі, що не простір і час сам по собі змушують змінюватися істиннісні оцінки висловлювання, а відмінність між різними частинами світу і змінами в одній і тій же частині світу.*

Іншими словами, існує тісний зв'язок між часом і зміною, між простором і відмінністю. Зміна має місце, коли дещо збільшується або зменшується у розмірах, або змінює свій колір чи температуру. Зміна включає в себе стан справ, подію і процес.

Стан справ, як один із видів факту, виражає інваріантність знання (з точки зору логіки і методології науки) і фіксується висловлюваннями (пропозиціями). Стани справ це ті цеглинки, із яких будуються події, процеси, зміни.

Для більш ефективного аналізу поняття "зміна" введемо темпоральну логічну зв'язку "*і потім*". Цей сполучник є бінарним. Позначається він символом *T*.

Оскільки ми домовилися, що стани справ представляють пропозиції, то аргументами *T* як і для істиннісних сполучників виступають пропозиційні змінні – *p, q, r, ...* *Проте, необхідно враховувати, що аргумент, який стоїть зліва від T – це стан, який існує в даний момент (існує зараз), а аргумент, який зправа – це стан, який описує наступний момент часу.*

Сполучник *T* нагадує кон'юнкцію, тому його можна називати *темпоральною кон'юнкцією*. Але на відміну від звичайної кон'юнкції *темпоральна кон'юнкція асиметрична і не асоціативна*.

Використовуючи сполучник *T* ми можемо спостерігати, що відбуватиметься з елементарним станом справ.

Тут можливі чотири варіанти стану справ:

- 1) *має місце стан "r" і він продовжує залишатися – "rTr";*
- 2) *"r" є, але зникає (перестає існувати) – "rT~r";*
- 3) *"r" немає місця, але виникає (стає існуючим) – "~rTr";*
- 4) *"r" немає і продовжує бути відсутнім – "~rT~r".*

Випадок 2 і 3 свідчать про наявність зміни, а 1 і 4 про її відсутність. Будемо називати 2 і 3 варіанти *елементарними змінами*.

Подія це одноразовий перехід від одного стану справ до іншого. Процес це багаторазовий прехід від станів до станів.

Таким чином, подія і процес це різновиди зміни, яле якщо подія трапляється, то процес триває.

Подію треба розглядати як таку зміну, яка є парою станів, справ (початкового і кінцевого), що упорядковані у часі. Але будь-яка подія відбувається у часі. Мірилом перебування подій у часі (одиницею виміру) є момент часу. Саме момент часу детермінує істиннісні оцінки темпоральних висловлювань.

Момент часу це множина подій, які одночасно відбуваються.

Момент часу можна порівняти із математичною точкою на часовій прямій, але скоріше це проміжок часу, самототожність якого гарантована тим, що ніяка заміна не може відбутися протягом нього. Фактично момент часу фіксує конкретну подію, що пов'язана з ним, або множину подій, які знаходяться у відношенні часової координати.

Момент часу в темпоральній логіці є аналогом поняття "можливий світ". В зв'язку з цим відношення досяжності між можливими світами ***R*** розглядається тут як часове відношення між моментами часу. Звідси й характерні властивості відношення досяжності в темпоральній логіці.

Відношення R може бути:

- ✓ транзитивним;
- ✓ лінійним;
- ✓ дискретним;
- ✓ безкінечним;
- ✓ скінченним;
- ✓ циклічним.

Під часовою координатою розуміють співставлення частин подій на основі відношень "раніше", "пізніше" або "одночасно".

Наприклад, вираз "Битва при Бородіно відбувалася раніше битви при Ватерлоо" означає, будь-яка частина першої події відбувалася раніше, ніж будь-яка частина другої.

У тому випадку, коли події не можуть координуватися говорять, що вони належать до різних часових потоків. Дамо визначення часового потоку.

Часовий потік це множина моментів часу, які фіксують події, що можна порівнювати за часом.

Самий простий часовий потік складається з одного моменту часу. А оскільки, ми прийняли, що момент часу це є можливий

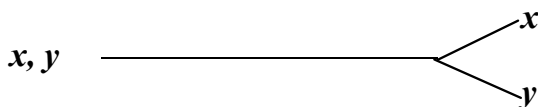
світ, то будь-який часовий потік ми можемо вважати певним можливим світом.

Комбінації часових потоків утворюють часові структури. Найбільш характерними є такі:

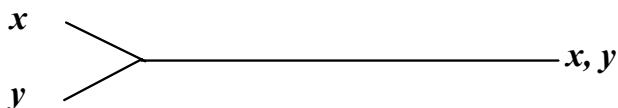
I. Лінійний час.

x, y —————

II. Лінійний час із розгалуженням у майбутньому.



III. Лінійний час із розгалуженням у минулому.



IV. Лінійний час із розгалуженням у минулому і майбутньому.

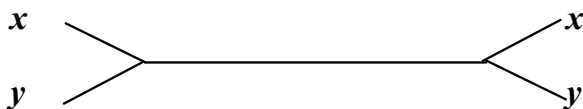


Схема I відповідає найпростішій часовій структурі, що є реальним курсом подій.

Схема II представляє таке відношення між потоками, коли усі події потоків x і y до певного моменту часу співпадають, а потім ні. З цього моменту часу відбувається розгалуження потоків, виникають можливі напрямки, за якими піде курс подій. Таке відношення між потоками називається **розгалуженням**.

Схема III фіксує відношення між потоками, коли події потоків x та y до певного моменту не мають нічого спільного, а потім із цього моменту співпадають. Іншими словами, схема III представляє можливості, які були в минулому.

Схема IV показує, що час, який розгалужувався в минулому, із певного моменту розгалужується в майбутньому.

Наведені схеми співвідношення часових потоків свідчать про те, коли потоки x та y мають спільну подію, то це дає можливість порівнювати решту подій цих потоків.

3.2.3. Метод аналітичних таблиць в темпоральній логіці

Введемо аналітичні правила для темпоральних модальностей. Всього цих правил вісім у відповідності до кількості модальних операторів (P, F, H, G).

$$\text{I.} \quad \frac{TG}{\frac{Tt \ GA}{Tt' \ A}}$$

– читається: подія A завжди буде в деякий момент часу t' , якщо A буде істинним у будь-який наступний момент часу, який є досяжним із t (tRt' , t' – будь-який наступний момент часу, який є досяжним із t)

$$\text{II.} \quad \frac{FG}{\frac{Ft \ GA}{Ft' \ A}}$$

– читається: подія A ніколи не буде в деякий момент часу t , якщо A буде хибним хоча б в один наступний момент часу t' , який є досяжним із t (tRt' , де t' – деякий наступний момент часу, який ще не зустрічався в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовується правило FG , і який є досяжним із t)

$$\text{III.} \quad \frac{TH}{\frac{Tt \ HA}{Tt' \ A}}$$

– читається: подія A завжди була в деякий момент часу t , якщо A було істинним в будь-якому попередньому моменті часу, який є досяжним із t (tRt' , де t' – будь-який попередній момент часу, який є досяжним із t)

$$\text{IV.} \quad \frac{FH}{\frac{Ft \ HA}{Ft' \ A}}$$

– читається: події A ніколи не було в деякий момент часу t , якщо A було хибним хоча б в одному попередньому моменті часу t' , який є досяжним із t (tRt' , де t' – деякий попередній момент часу, який ще не зустрічався в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило FH , і який є досяжним із t)

$$\text{V.} \quad \frac{TF}{\frac{Tt \ FA}{Tt' \ A}}$$

– читається: подія A буде в деякий момент часу t , якщо A буде істинним хоча б в один наступний момент часу, який є досяжним

із t' (tRt' , де t' – деякий наступний момент часу, якого ще не було в рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило TF , і який є досяжним із t)

$$\begin{array}{ll} \text{VI.} & \underline{Ft\ FA} \\ FF & Ft' A \end{array}$$

– читається: події A не було в деякий момент часу t , якщо A буде хибним у будь-який наступний момент часу t' , який ж досяжним із t (tRt' , де t' – будь-який момент часу, який є досяжним із t)

$$\begin{array}{ll} \text{VII.} & \underline{Tt\ PA} \\ TP & Tt' A \end{array}$$

– читається: подія A була в деякий момент часу t , якщо A було істинним хоча б в один попередній момент часу t' , який є досяжним із t (tRt' , де t' – деякий попередній момент часу, якого ще не було в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило TP , і який є досяжним із t)

$$\begin{array}{ll} \text{VIII.} & \underline{Ft\ PA} \\ FP & Ft' A \end{array}$$

– читається: події A не було в деякий момент часу t , якщо A було хибним у будь-який попередній момент часу t' , який є досяжним із t (tRt' , де t' – будь-який попередній момент часу, який є досяжним із t)

За допомогою наведених аналітичних правил можна побудувати аналітичні таблиці для будь-яких формул темпоральної логіки з метою встановлення їх семантичного статусу.

Звернемося до ілюстрації. Маємо формулу $p \supset Gpp$.

Шляхом побудови аналітичної таблиці з'ясуємо, чи є ця формула логічним законом, чи протиріччям, чи виконуваною:

$$\begin{array}{ll} & \underline{0. Ft\ (p \supset Gpp)} \\ \text{I} & 1. Tt\ p \\ & 2. Ft\ Gpp \text{-----} F\supset \\ \text{II} & 3. Ft' Pp \text{-----} FG, 2 \\ \text{III} & 4. Ft\ p \\ & + \end{array}$$

3.3. Деонтична логіка

Назва *"деонтична логіка"* походить від грецького слова *deon*, що в перекладі означає *"обов'язок"*, *"правильність"*.

Деонтичну логіку можна визначити, як розділ модальної логіки, що досліджує природу, властивості, відношення деонтичних висловлювань та їх функціонування в структурі міркування.

До деонтичних висловлювань ми відносимо ті висловлювання, які є носіями різноманітних норм. *Зовнішньою ознакою деонтичного висловлювання є терміни "дозволено", "заборонено", "обов'язково" та їх різновиди.*

Наприклад, "Заборонено їхати на червоне світло", "Середній термін повинен бути розподілений у простому категоричному силогізмі", "Дозволено користуватися кредитною карткою".

У повсякденному житті, в теоритичних дослідженнях, в практиці міркувань ми стикаємося з різноманітними нормами. Це і закони, які регулюють правові відносини між людьми в державі, це і технічні норми, які використовують в різних видах діяльності людини, це і команди різних рангів та ступенів, це і правила граматики, логіки, правила гри, це і моральні принципи, це і ідеали, звичаї тощо.

Але при всьому розмаїтті норм, для них властива спільна структура.

До структури норм входить чотири складові частини:

- а) характер;*
- б) зміст;*
- в) умови застосування;*
- г) суб'єкт.*

Дамо визначення кожного структурного елементу норми.

Характером норми є вказівка на дозвіл, заборону, зобов'язання певної дії.

Змістом норми називається вчинок, намір, прагнення, дія, яка повинна бути, може або не повинна бути виконана.

Умовою застосування норми є вказана в нормі ситуація, з настанням якої реалізується або може бути реалізованою дія, що не передбачається даною нормою.

Нарешті, *суб'єктом норми є особа, або група осіб, яким адресована норма.*

Поділ норм на види носить позалогічний характер. Деонтична логіка складається із множини пов'язаних між собою систем, *відмінність між якими полягає в засобах аналізу деонтичних висловлювань.* Це означає, що тут немає особливої "логіки імперативів" і спеціальної "логіки, власне, норм".

Отже, одна і та сама нормальна система може використовуватися для аналізу логічної поведінки будь-якого змісту.

Деонтична логіка має свою історію. Перші систематичні спроби дослідження деонтичних висловлювань належать *Готфріду Лейбніцу*. Саме він намагається дослідити природу деонтичних висловлювань та логічні відношення між ними. Результати досліджень *Г.Лейбніца* не справили особливого враження на його сучасників. І лише у *XVIII ст.* англійський вчений *І. Бентам* звертається до проблематики, якою займався *Г. Лейбніц*, і висуває ідею створення логіки повелінь, або логіки волі.

Справжня історія деонтичної логіки починається в *XX ст.* завдяки працям *Е. Малі*. Він зробив спробу аксіоматично описати деонтичні поняття і створити систему деонтичної логіки. Через чверть століття, в *1951 р.* завдяки праці *Г. фон Врігта* "*Деонтична логіка*" розпочинається власне сучасна деонтична логіка. Тут описуються її основні проблеми, формулюються напрямки їх розв'язання, систематизуються основні деонтичні категорії, закладаються підвалини розробки мови деонтичної логіки.

3.3.1. Характеристика деонтичного висловлювання

Починаючи з перших спроб дослідити деонтичні висловлювання, серед логіків і філософів панували сумніви щодо можливості побудови деонтичної логіки. Фактично це і було причиною того, що результати дослідження *Лейбніцем* понять "*дозволено*", "*обов'язково*", "*заборонено*", "*байдуже*" та його

спроби пов'язати ці поняття з основними положеннями логічного вчення *Арістотеля* були скептично сприйняті тогочасними вченими.

Вважалося, що логіка має справу з висловлюваннями, які є істинними або хибними, а відношення логічного слідування передбачає саме систематизацію таких висловлювань. Деонтичним же висловлюванням не притаманні оцінки "істина" і "хиба" (вони представляють світ належного), а тому із них будувати міркування, в основі яких лежить відношення логічного слідування, неможливо. Фактично йшлося про можливість створення деонтичної логіки.

В історії логіки дана проблема отримала назву *"ділема Йоргенсена"* за ім'ям датського філософа і логіка *Й. Йоргенсена*.

Незважаючи на те, що деонтичні висловлювання не володіють оцінками "істина", "хиба" в практиці міркувань можна зустріти ситуації, коли формулюються висновки, елементами яких є імперативи.

Наприклад:

1. *"Виконуйте правила гри в шахи".*
2. *"Ви учасник шахового турніру".*
3. *"Поступайде згідно правил гри в шахи".*

Виходить, що висновок в імперативній відміні може бути отриманий із засновків, серед яких є імперативи. Дискусії навколо *"дилеми Йоргенсена"* присвячена досить солідна література. В розмаїтті точок зору з цього приводу можна вивести деяку синтезуючу, згідно якої суперечність між звичайною дефініцією логічного слідування в термінах істини і дозволом будувати міркування із використанням деонтичних висловлювань, які не є носіями істини, розв'язується або шляхом встановлення зв'язку деонтичних висловлювань з дескриптивними, або шляхом розширення поняття логічного слідування.

"Дилема Йоргенсена" і дискусія навколо неї показали, що деонтичні висловлювання мають своєрідну природу (на відміну від дескриптивних) і вони поводять себе самотньо в логічному процесі. І це цілком природньо. Але між ними є внутрішній зв'язок, який забезпечує, визначає логічний аналіз деонтичних висловлювань і побудову деонтичної логіки.

Будь-якому деонтичному висловлюванню можна співставити паралельне йому дескриптивне висловлювання, яке виражає зміст бажання або команди. **У зв'язку з цим за кожним деонтичним висловлюванням треба вбачати два фактори:**

- ✓ імперативний;
- ✓ дескриптивний.

Імперативний фактор демонструє, що деяка подія чи річ бажается або наказується, а дескриптивний характеризує бажану або наказувану дію чи річ. Саме дескриптивний фактор може бути виділений із імператива і представлений асерторичним висловлюванням. Це дає змогу оцінити його як істинне, коли команда виконується, і хибним, коли цього немає.

Іншими словами, необхідно враховувати різницю між нормою та її описом.

Якщо норма нічого не описує, оскільки вона містить лише регулятиви людської поведінки і тому не може бути носієм оцінок "істина", "хиба", то опис норми оцінюється саме як істинний, або хибний.

Наприклад, візьмемо деонтичне висловлювання, яке впливає із "Правил гри в шахи": "Королева повинна *"ходити"* таким-то чином". В цьому висловлюванні нічого не говориться про дійсність, а лише вказується як себе повинна поводити конкретна шахова фігура на шаховому полі (тому воно не може бути оцінене як істинне чи хибне). Але, якщо підійти до цього висловлювання з іншого боку і вбачити в цьому твердження, що певна шахова фігура повинна діяти належним чином відповідно до існуючих правил, то ця ситуація може бути оцінена в термінах "істина", "хиба". І тут йдеться не про норму, а про її опис. Фактично це висловлювання треба читати так: "Істинно, що згідно правилам гри в шахи, королева повинна *"ходити"* таким-то чином."

Отже, якщо враховувати ту обставину, що деонтична логіка аналізує не лише самі норми, а й висловлювання про них, то цілком слушно буде представляти її як відповідний розділ модальної логіки.

3.3.2. Мова деонтичної пропозиційної логіки

До алфавіту мови деонтичної пропозиційної логіки входить:

- ✓ множина пропозиційних змінних;
- ✓ список пропозиційних сполучників;
- ✓ перелік деонтичних операторів (O, P, I, F).

Опишемо деонтичні оператори.

Op – обов'язкова дія, яка веде до стану, що описується висловлюванням " p ".

Pp – дозволена дія, яка веде до стану, що описується висловлюванням " p ".

Ip – байдужа дія, яка веде до стану, що описується висловлюванням " p ".

Fp – заборонена дія, яка веде до стану, що описаний висловлюванням " p ".

Введемо визначення деонтичних операторів:

$Op =_{df} \sim P \sim p$ ("обов'язковим є " p ", якщо не дозволено " $\sim p$ ")

$Pp =_{df} \sim O \sim p$ ("дозволим є " p ", якщо не обов'язковим є " $\sim p$ ")

$Fp =_{df} O \sim p$ ("забороненим є " p ", якщо обов'язковим є " $\sim p$ ")

$Ip =_{df} Pp \vee P \sim p$ ("байдужим є " p ", якщо дозволеним є " p " і дозволеним є " $\sim p$ ")

Дамо визначення формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є формулою.
2. Якщо p і q формули, то $\sim p, p \wedge q, p \supset q, p \vee q, Op, Pp, Fp, Ip$ є формулами.
3. Ніщо крім вказаного в пунктах 1 і 2 даної дефініції не є формулами.

Згідно цього визначення вирази $Fp, O \sim p, \sim Fp \wedge Ip$ є формулами деонтичної логіки, а вирази $pF, Ip(p \wedge O)$ такими не є.

Використовуючи засоби мови деонтичної пропозиційної логіки задамо аксіоматичну побудову деонтичної логіки.

До алфавіту цієї системи включимо два деонтичні оператори O та I , як базові і на їх основі визначимо решту:

$Fp =_{df} O \sim p$ (" p " є забороненим, " $\sim p$ " є обов'язковим")

$Pp = Df Op \vee Ip$ (" p " є дозволеним, якщо " p " є обов'язковим або байдужим)

Наведені дефініції можна прочитати ще й так: "Заборонені дії, від виконання яких треба утримуватися"; і "Дозволені дії, які є обов'язковими або байдужими".

За аксіоми візьмемо наступні тавтології:

Ax 1. $Op \wedge Oq \supset O(p \wedge q)$

Ax 2. $O(p \vee q) \vee I(p \vee q) \equiv Op \vee Oq \vee Ip \vee Iq$

Ax 3. $Ip \supset I\sim p \wedge \sim Op$

До правил перетворення віднесемо такі положення:

R1 – правило підстановки (П/п)

R2 – правило відділення (Mp)

R3 – правило екстенсiональностi

R4 – правило перетворення тавтологій класичної пропозиційної логіки в теореми деонтичної логіки.

Дана аксіоматична система містить низку цікавих положень про логічні зв'язки нормативних тверджень:

I. $O(p \wedge q) \equiv Op \wedge Oq$

II. $I(p \vee q) \supset Ip \vee Iq$

III. $F(p \vee q) \equiv Fp \vee Fq$

IV. $P(p \vee q) \equiv Pp \vee Pq$

V. $Ip \supset \sim Op \wedge \sim Fp$

VI. $Ip \supset Pp \wedge P\sim p$

VII. $Ip \equiv I\sim p$

VIII. $Op \supset Pp$

IX. $O(p \supset q) \wedge Op \supset Oq$

X. $O(p \supset q) \wedge Fq \supset Fp$

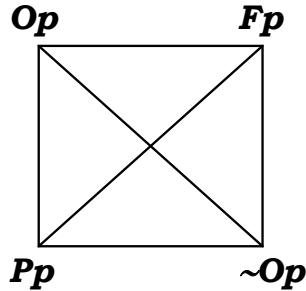
XI. $O(p \supset q) \supset (Pp \supset Pq)$

XII. $O(p \supset q) \supset (O\sim q \supset O\sim p)$

XIII. $Op \supset \sim Ip$

XIV. $Fp \supset \sim Ip$

Крізь наведені тавтології проглядаються логічні залежності O , P , F , які можна зобразити схемою, що носить назву *квадрату протилежностей*.



Із цієї схеми випливають такі твердження:

"Якщо дія обов'язкова, то вона дозволена" – $(Op \supset Pr)$.

"Якщо дія заборонена, то вона необов'язкова" – $(Fp \supset \sim Op)$.

"Ніяка дія не є обов'язковою і заборонею одночасно" – $\sim (Op \wedge Fp)$.

"Будь-яка дія або обов'язкова, або необов'язкова" – $(Op \vee \sim Op)$.

"Будь-яка дія або дозволена, або заборонена" – $(Pr \vee Fp)$.

"Якщо дія заборонена, то вона не дозволена" – $(Fp \supset \sim Pr)$.

"Якщо дія дозволена, то вона не заборонена" – $(Pr \supset \sim Fp)$.

"Все, що не заборонено, те дозволено" – $(\sim Fp \supset Pr)$.

Логічні відношення між O , P , F за квадратом протилежностей фокусують в собі принципи деонтичної повноти і деонтичної несуперечності, завдяки яким можливим є розширення нашої аксіоматичної системи.

Принцип деонтичної повноти можна сформулювати наступним чином: "Будь-яка дія або обов'язкова, або байдужа, або заборонена":

$Op \vee Ip \vee Fp$.

Використовуючи оператор " P ", принцип деонтичної повноти можна сформулювати у вигляді декількох еквівалентних положень:

а) $\sim O \sim p \supset Pr$ – ("дія дозволена, якщо утримання від неї не є обов'язковим");

б) $\sim Fp \supset Pr$ – ("якщо дія не заборонена, то вона дозволена");

в) $Pr \vee P \sim p$ – ("будь-яка дія або дозволена, або дозволено утримання від її виконання").

Принцип деонтичної повноти передбачає, що в будь-якому зібранні норм або в кодексі, охоплюються різноманітні людські дії. Вони детермінуються явними або імпліцитними (неявними) нормами, які вкажуть на обов'язковість, дозволенність,

забороненість, байдужість виконання якихось норм. Відомо, що реальні кодекси мають справу лише з чітко визначеним колом дій і не визначають нормативний статус не тільки поки що невідомих або неможливих способів поведінки, але й тих дій, виконання чи не виконання яких не має сенсу робити об'єктом будь-яких норм.

Отже, включення в деонтичну логіку принципу повноти визначає межі класу нормативних систем, для дослідження яких може бути застосована логіка.

Введемо дефініцію принципу деонтичної несуперечливості: "Виконання дії і утримання від неї не можуть бути обов'язковими одночасно"

$\neg(O_p \wedge O_{\neg p})$.

Аналогами принципу деонтичної несуперечливості є вирази:

а) "Ніяка дія не є обов'язковою і забороненою одночасно" – $\neg(O_p \wedge F_p)$.

б) "Якщо дія обов'язкова, то не дозволено не виконувати її" – $(O_p \supset \neg P_{\neg p})$.

Принцип деонтичної несуперечливості є критерієм поділу кодексів на *досконалі і недосконалі*. Адже наявність в нормативному кодексі суперечності ставить носія нормативних актів або суб'єкта в ситуацію, коли будь-який його вчинок веде з необхідністю до порушення одного із своїх обов'язків. Цим і визначається недосконалість кодексу.

У реальному житті зустрічаються кодекси, які містять конфлікти моральних, правових та інших обов'язків. Часто існуючі нормативні системи до певної міри недосконалі. Ця непослідовність обумовлюється тим, що нові права і обов'язки не узгоджуються зі старими.

Але треба мати на увазі, що *деонтична логіка не просто описує нормативні міркування і реальні кодекси, а формулює (і це саме головне) критерії раціонального міркування в середовищі норм, які надають розумні підстави для дії. Звідси міркування не може бути назване раціональним, якщо воно дозволяє обов'язковість виконання забороненої дії.*

Таким чином, принцип деонтичної несуперечливості (як і принцип деонтичної повноти) відноситься до фундаментальних положень деонтичної логіки.

3.3.3. Деонтична логіка і теорія можливих світів

Фундатором деонтично можливих світів є *І. Кант*. Досліджуючи у *"Критиці практичного розуму"* проблеми моралі, він приходить до висновку, що світ, який утворений за законами моралі є одним із варіантів можливого світу, де все ідеально діє і взаємодіє. Це світ, який би нам хотілось бачити. Іншими словами, це світ, який є конкретизацією можливого світу у вигляді нормативного тлумачення реальності.

Виходячи за рамки кантівського розуміння деонтичного можливого світу, можна сказати, що деонтичний світ це і сукупність культурних зразків народних звичаїв, досвіду, кодекс, правила гри тощо. В цьому розумінні конституція – це такий деонтично можливий світ, який є описом ідеальної держави, якою їй потрібно бути, описом належних вчинків і дій рядових громадян, урядовців усіх рівнів і самого президента.

Прокоментувати вище зазначене можна ще й таким чином.

Якщо в світі, що описується правилами гри в шахи, є наявні норми, то передбачається, що ці норми виконуються в усіх варіантах шахових партій. Варіанти шахових партій – це сукупність можливих світів.

Особливістю деонтичного можливого світу є те, що він детермінується духом належного. Іншими словами, сказане в реальному світі про належне означає, що в деякому деонтично можливому світі зміст належного є істинним. Тобто, тут ми співставляємо сказане не з дійсним світом, а з прийнятими правилами, нормами.

Наприклад, поведінка шахових фігур на шаховій дошці відповідає правилам, а результат партії є істинним, тому що він узгоджується в даній партії (в даному деонтично можливому світі) з існуючими правилами.

Деонтично можливі світи це альтернативи у вигляді варіантів шахових партій, проектів конституцій, спроб виходу держави із кризових ситуацій, проектів бюджету поданих на розгляд парламенту (тобто це всі ті ситуації, поява, існування яких на цьому світі регламентується правилами гри, законами держави, економіки, ринку).

Звідси, якщо Верховна Рада ухвалила проект бюджету, то це означає, що створено ідеальний шлях розвитку держави у певному історичному проміжку.

Сам факт ухвалення бюджету назвемо реальним, дійсним світом w , а функціонування держави відповідно до прийнятого бюджету – деонтично можливим світом w' .

Або, якщо в конституції описано, як повинні функціонувати органи влади, то припускається, що це дійсно так і відбувається. Між світом, в якому створюється деонтичний світ, і цим деонтичним світом існує відношення досяжності R .

В *алетичній логіці* відношення досяжності R – це огляд, співставлення з можливими комбінаціями логічних значень із множини i , x , в *темпоральній логіці* R – це злиття з часовим потоком, в *деонтичній логіці* R – це узгодження з правилами, кодексами, приписами тощо.

Характерною рисою відношення досяжності R в деонтичній логіці є те, що воно не може бути рефлексивним, але воно при будь-яких варіантах обов'язково детермінується наступною умовою:

"Для будь-якого реального світу w існує деонтичний світ w' , який є досяжним із w ".

Прийmemo модальності P і O за основні і введемо *дефініції відповідних аналітичних правил.*

$$\text{I.} \quad \begin{array}{l} To \\ Tw\ OA \\ Tw' A \end{array}$$

за умови wRw' , де w' – будь-який деонтичний світ, який є досяжним із деякого реального світу w .

Прочитати це правило можна так: *"Те, що є обов'язковим у реальному світі $TwOA$, є істинним у деонтичному світі $Tw'A$ "; або "Якщо у реальному світі w істинним є OA , то у будь-якому деонтичному світі w' істинним є A ".*

$$\text{II.} \quad \begin{array}{l} Fo \\ Fw\ OA \\ Fw' A \end{array}$$

при умові wRw' , де w' – деонтичний світ, який ще не зустрічався в рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило Fo і який є досяжним із w .

Прочитати це правило можна так: *"Якщо у реальному світі w хибним є OA , то існує хоча б один деонтичний світ w' , де*

хибним є A"; або *"Те, що не є обов'язковим у реальному світі w, може бути хибним у деонтичному світі w'"*.

$$\text{III.} \quad \begin{array}{c} \text{Tw PA} \\ \hline \text{Tw' A} \\ \text{Tp} \end{array}$$

при умові wRw' , де w' – один із деонтичних світів, який ще не зустрічався в рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило Tr і який є досяжним із w .

Прочитати це правило можна так: *"Якщо у реальному світі w істинним є PA, то хоча б в одному деонтичному світі w' істинним буде A"*; або *"Те, що є дозволим у реальному світі може виявитися істинним у деонтичному світі"*.

$$\text{IV.} \quad \begin{array}{c} \text{Fw PA} \\ \hline \text{Fw' A} \\ \text{Fp} \end{array}$$

при умові wRw' , де w' – будь-який деонтичний світ, який є досяжним із w .

Прочитати це правило можна так: *"Якщо у реальному світі w хибне PA, то у будь-якому деонтичному світі w' хибним є A"*; або *"Те, що не є дозволим у реальному світі є хибним у деонтичному світі"*.

Застосуємо наведені аналітичні правила для здійснення проблеми розв'язання в деонтичній логіці.

Маємо вираз: $Op \supset \sim O \sim p$.

Побудуємо для нього аналітичну таблицю:

<u>0. Fw Op $\supset \sim O \sim p$</u>	
1. Tw Op	
2. Fw $\sim O \sim p$	F $\supset$ 0
3. Tw' p	T 0,1
4. Tw O $\sim p$	F $\sim$ 2
5. Tw' $\sim p$	T 0,4
6. Fw' p	T $\sim$
+	

Із таблиці видно, що рядки 3 і 6 вступають в суперечність, а, отже, даний вираз є логічним законом.

Візьмемо ще один приклад: $\sim P(Op \wedge \sim Pp)$

<u>0. Fw $\sim P(Op \wedge \sim Pp)$</u>	
1. Tw P(Op $\wedge \sim Pp)$	F $\sim$ 0
2. Tw' (Op $\wedge \sim Pp)$	Tr 1
3. Tw' Op	

4. $Tw' \sim Pp$	$T \wedge 2$
5. $Tw' p$	$T 0,3$
6. $Fw' Pp$	$T \sim 4$
7. $Fw' p$	$Fp,6$
+	

Таким чином, дана формула також є тавтологією.

Таким способом можна дослідити будь-який вираз деонтичної логіки.

3.4. Епістемічна логіка

3.4.1. Визначення епістемічної логіки

Епістемічною логікою називається розділ модальної логіки, який досліджує природу, властивості, відношення епістемічних висловлювань в структурі міркування.

Назва "*епістемічна логіка*" походить від грецького слова *episteme* – що означає *знання*. Саме епістемічне висловлювання можна визначити як особливий вид висловлювання, що містить *модальні оцінки "знаю", "думаю", "вважаю", "передбачаю", "припускаю", "доведено", "вірю" та їх аналоги у особистісній і безособистісній формі.*

Наприклад,

1. *"Відомо, що Колумб відкрив Америку".*
2. *"Доведено, що квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів".*
3. *"На мою думку, в цій місцевості є джерела мінеральної води".*

Особливістю епістемічних модальностей є те, що вони характеризують різні періоди, стани формування знання як результату пізнавального процесу. Тому терміни "*знаю*", "*вірю*", "*гадаю*", "*доведено*" з одного боку фіксують етапи, періоди формування знання, а з другого (стосовно суб'єкту пізнання, яким виступає людина як родова істота) – це оцінки станів формування знання, які проходять, вживаються в особистісний духовний світ людини, що виступає виразником, носієм конкретних висловлювань.

Це впливає із природи знання, як результату розв'язання протиріччя між суб'єктом і об'єктом пізнання, як результату пізнавального процесу, що знаходить своє підтвердження в практиці. Знання в цьому розумінні виступає протилежністю неутвту. Але знання як результат пізнавального процесу не є чимось готовим, закам'янілим, раз і назавжди даним, що протистойть своєму антиподу – неутвту. Інакше можна прийти до тієї точки зору, що існує знання і неутвто. В той час як в реальному пізнавальному процесі існують ступені, стани знання, а саме: переконання, непевна думка², віра, припущення, передбачання, сумнів. Кожен із названих епістемічних станів може набути форми знання за певних умов того контексту, в якому здійснюється пізнавальний процес. А до цього моменту перераховані стани відображають рухливість, неспокій, життя того, що ми називаємо знанням і досягнення чого є найвищою винагородою будь-якого дослідника.

Дамо визначення основних епістемічних модальностей стосовно нашого предмету розгляду.

Переконанням, або суб'єктивною достатністю є свідоме визнання істинним якогось положення стосовно особи, яка його висловлює, або до якої воно відноситься, або якій воно адресується. Іншими словами, переконання є свідоме визнання чогось істинним для самого себе.

Наприклад, коли вчитель пояснює учневі теорему Піфагора, то вона постає для нього не просто істиною, яку відкрив багато віків тому для людської цивілізації давньогрецький мислитель, а стає істиною для нього, яку він відкриває слідом за вчителем, усвідомлюючи його пояснення доведення знаменитої теореми.

Достовірність, або об'єктивна достатність є свідоме визнання чогось істинним для будь-кого.

Наприклад, "Після літа настає осінь", "Найкоротша відстань між двома точками – пряма лінія" тощо.

Непевною думкою є визнання чогось істинним, при відсутності суб'єктивної і об'єктивної достатності.

Наприклад, "На мою думку в цьому лісі є білі гриби".

² Переклад від російського слова "мнение".

Віра є свідоме визнання істинним якогось положення з точки зору суб'єктивної достатності, при чіткому усвідомленні відсутності об'єктивної достатності.

Це часто призводить до того, що ми вимушені приймати деякі положення без доведення, без перевірки, оскільки вони на даний момент неможуть бути обгрунтованими. В цьому розумінні віра¹ є потиляжністю знанню, як єдності суб'єктивної та об'єктивної достатності.

Сумнівом називається оцінка інформації, коли суб'єкт не переконаний ні в її істинності, ні в її хибності.

Переконання, віра, припущення можуть бути будь-якими, в той час як знання завжди істинне.

Це і зумовило два основні напрями епістемічної логіки:

а) логіка знання;

б) логіка переконання.

Є два варіанти логіки знання в залежності від того, яка оцінка береться за вихідну "доведено" чи "істинно".

Система логіки де вихідним є термін "доведено" має наступні закони:

а) "Якщо висловлювання доведено, то воно істинне" (оскільки довести можна лише істину).

Наприклад, якщо висловлювання "Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180 градусів" доведено, то воно істинне.

б) "Логічний наслідок доведеного є також доведеним".

Наприклад, якщо положення "Будь-яка планета є космічним об'єктом" доведено, то і його наслідок "Земля є космічним об'єктом" також є доведеним.

в) "Якщо дещо доведено, то доведено, що воно доведено".

г) "Логічне протиріччя не доводиться" (тобто доведення хибного висловлювання не існує).

Наприклад, не можна побудувати доведення для висловлювань: "Камінь проводить електричний струм", "Місяць має атмосферу" тощо.

Коли ми за вихідний термін візьмемо поняття "істини" то матимемо логіку істини, де законами є наступні положення:

¹ На відміну від наукової віри, релігійна віра намагається бути основою знання: "Я знаю тому, що вірю".

а) "Якщо висловлювання істинне, то не вірно, що його заперечення також істинне".

Наприклад, якщо істинно, що "О. Дюма є автором роману "Три мушкетери"", то не вірно, що істинно, "Ніби-то йому не належить авторство цього роману"".

б) Кон'юнкція істинна, якщо і тільки якщо обидва кон'юнкти істинні".

Наприклад, істинно що Земля має природній супутник і атмосферу, тільки якщо істинно, що Земля має природній супутник і істинно що вона має атмосферу.

У логіці переконання вихідним є термін "переконаний" ("вірить").

До законів логіки переконання відносять такі положення:

а) "S вірить, що перше і друге, якщо і тільки якщо він вірить, що перше і вірить, що друге".

б) "Не можна одночасно вірити і сумніватися, бути переконаним і заперечувати; сумніватися і заперечувати".

в) "S або переконаний у чомусь, або сумнівається в цьому, або відкидає це".

Наприклад, суб'єкт або переконаний в тому, що на Марсі є життя, або відкидає це.

г) "Неможливо бути переконаним одночасно в чомусь і в протилежному йому".

Наприклад, не можна одночасно вірити в те, що єгипетські піраміди створили люди і прибульці із космосу.

Для вихідних понять логіки знання "**знає**", "**істинно**", "**доказувано**", "**вірно**", що логічний наслідок відомого є відомий, істинного – істинний, доказуваного – доведений.

У логіці переконання ця залежність має свою специфіку. Мається на увазі така ситуація: Чи буде суб'єкт переконаний в усіх логічних наслідках, що випливатимуть із прийнятих ним вихідних положень?

Наприклад, якщо суб'єкт переконаний в надійності правил гри в шахи, то він приймає все, що відбувається на шаховій дошці, як наслідок дії цих правил. Але погоджуючись з правилами гри як вихідними принципами, людина може не знати розв'язку конкретної шахової задачі.

Отже, якщо людина в чомусь переконана, то вона не завжди буде переконана в наслідках цього.

Підсумовуючи попередні міркування необхідно звернути увагу на той факт, що хоча в епістемічній логіці є логіка знання і логіка переконання, але в назві цього розділу модальної логіки зберігається словосполучення "*епістемічна логіка*" (від грецького слова *episteme*), бо в цьому розділі логічними засобами досліджуються саме знання як рухливий процес, як процес взаємодії названих епістемічних станів, між якими існують різноманітні зв'язки, переходи, відношення.

3.4.2. Мова епістемічної пропозиційної логіки

Алфавіт мови епістемічної пропозиційної логіки включає:

1. *Список пропозиційних змінних: (p, r, q та інші)*
2. *Список пропозиційних зв'язок: ($\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ та інші)*
3. *Список епістемічних операторів:*

$K^1 a$ – a знає, що.....

$B a$ – a вірить, що.....

$S a$ – a сумнівається, що.....

$O a$ – a спростовує, що.....

Введемо визначення формули:

1. *Будь – яка пропозиційна змінна є формулою;*
2. *Якщо p і q формули, то $\sim p, p \vee q, p \wedge q, p \supset q, K a p, B a p, S a p, O a p$*
3. *Ніщо крім вказаного в пунктах 1 і 2 даної дефініції не є формулами.*

Відповідно до цього визначення вирази *$K a p, p \supset K a p, \sim O a p, B a \sim p$* , є формулами, а вирази *$K a, K \sim a \supset, O B a \supset p$* такими не є.

Використовуючи засоби мови пропозиційної епістемічної логіки опишемо характерні особливості логіки знання, як одного з напрямків епістемічної логіки.

Дамо визначення епістемічних модальностей логіки знання $K a, S a, O a$ у вигляді правил редуції. Такий підхід з одного боку

¹ Позначною для цього оператора є перша буква в англійському слові Knowledge (знання).

розкриє своєрідність кожного оператора, а з другого – вкаже на специфічні зв'язки з іншими операторами.

$$\frac{Ka \sim p}{Oap}$$

– "Якщо, *a* знає, що на Місяці не має земного тяжіння, то *a* спростовує наявність земного тяжіння на Місяці", або "із знання *не-р* впливає спростування *р*".

$$\frac{Oa \sim p}{Kap}$$

– "Із спростування *не-р*, впливає знання *р*".

$$\frac{Ca \sim p}{Cap}$$

– "Із сумніву *не-р*, впливає сумнів *р*".

$$\frac{\sim Kap}{Cap | Oap}$$

– "Якщо *a* не знає *р*, то або *a* сумнівається в *р*, або *a* спростовує *р*".

$$\frac{\sim Cap}{Kap | Oap}$$

– "Якщо *a* не сумнівається в *р*, то або *a* знає *р*, або *a* спростовує *р*".

$$\frac{\sim Oap}{Kap | Cap}$$

– "Якщо *a* не спростовує *р*, то або *a* знає *р*, або сумнівається в *р*".

$$\frac{Ka (p \vee q)}{Kap}$$

$$Ka q$$

$$\frac{Ca (p \wedge q)}{Cap | Cap | Kap}$$

$$Ca q | Ka q | Ca q$$

$$\frac{Oa (p \wedge q)}{Oap | Oap | Kap | Oap | Cap | Cap}$$

$$Oaq | Ka q | Oaq | Ca q | Ka q | Ca q$$

$$\frac{Ka (p \vee q)}{Kap | Kap | Oap | Kap | Cap | Cap}$$

$$Ka q | Oaq | Ka q | Ca q | Ka q | Ca q$$

$$\frac{Ca (p \vee q)}{}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Cар} \mid \text{Cар} \mid \text{Oар} \\
 \text{Саq} \mid \text{Oаq} \mid \text{Саq} \\
 \hline
 \text{Ка} (p \supset q) \\
 \hline
 \text{Кар} \mid \text{Oар} \mid \text{Oар} \mid \text{Oар} \mid \text{Cар} \mid \text{Cар} \\
 \text{Каq} \mid \text{Каq} \mid \text{Oаq} \mid \text{Саq} \mid \text{Каq} \mid \text{Саq} \\
 \hline
 \text{Са} (p \supset q) \\
 \hline
 \text{Cар} \mid \text{Cар} \mid \text{Кар} \\
 \text{Саq} \mid \text{Oаq} \mid \text{Саq} \\
 \hline
 \text{Оа} (p \supset q) \\
 \hline
 \text{Кар} \\
 \text{Оаq}
 \end{array}$$

Якщо стовпчик таблиці містить хоча б одну пару формул (Кар, Cар), (Cар, Oар), (Кар, Oар) то вважається замкненим.

Пропозиційному численні логіки знання притаманні такі положення:

1. $\vdash \text{Кар} \supset p$
2. $\vdash \text{Ка} (p \supset p)$
3. $\vdash \sim (\text{Кар} \wedge \text{Ка} \sim p)$
4. $\vdash \sim \text{Ка} (p \wedge \sim p)$
5. $\vdash \text{Оа} (p \wedge \sim p)$
6. $\vdash \sim \text{Кар} \vee \sim \text{Oар}$
7. $\vdash \text{Кар} \vee \text{Oар}$
8. $\vdash \text{Ка} (p \wedge \sim p) \supset \text{Каq}$
9. $\vdash \text{Ка} (p \wedge q) \equiv \text{Кар} \wedge \text{Каq}$
10. $\vdash (\text{Кар} \vee \text{Каq}) \supset \text{Ка} (p \vee q)$
11. $\vdash \text{Ка} (p \vee q) \supset \text{Кар}$
12. $\vdash \text{Ка} (p \supset q) \supset (\text{Кар} \supset \text{Каq})$
13. $\vdash \text{Ка} (p \supset q) \supset (\text{Oаq} \supset \text{Oар})$
14. $\vdash \text{Са} (p \wedge q) \supset (\text{Cар} \supset \text{Саq})$
15. $\vdash \text{Кар} \vee \text{Cар} \vee \text{Oар}$

Твердження 1-15 є характеристиками знання в даному численні.

Твердження 1 вказує на те, що тут не визнається правило: **"Знання p спонукає істинність p ".** Визнання цього правила передбачає граничну ідеалізацію пізнавального процесу. **"Якщо я знаю, що p , то я неявно заперечую, що яка – небудь нова**

інформація змусить мене змінити свою точку зору". А це означає відкинути прогрес в науці.

Твердження **2** і **5** показують, що ті характеристики знання, які вони описують не передбачають "логічного беззаконня".

Твердження **3** зазначає, що формальне протиріччя не входить до складу знання.

Твердження **6** показує, що незнання, на відміну від знання, повне: *"Для будь-якого p вірно, що a або не знає p , або не спростовує p ".*

Згідно твердженню **7** знання не повне в наступному розумінні: *"Для довільного p не можна довести, що будь-який або знає p , або спростовує p ".* Фактично це є своєрідне формулювання знаменитої теореми *К. Геделя*: *"Якщо система S не суперечлива, то в ній існує таке висловлювання p , що ні само p , ні його заперечення не можуть бути доведені засобами S ".*

Твердження **8** фіксує, що із знання формального протиріччя випливає знання будь-якого висловлювання.

Твердження **12** і **13** є епістемічними варіантами правил модус поненс і модус толленс.

Згідно твердженню **15** набір епістемічних операторів *Ка, Са, Оа* є повним, тобто для будь-якого p *a* або знає p , або сумнівається в p , або спростовує p .

Важливу роль в дослідженні процесу пізнання відіграє *логіка віри*. Цікавим є об'єднання в рамках епістемічної логіки *"логіки знання"* і *"логіки віри"*.

Співставлення в операторів віри і знання дає наступні, важливі своїми наслідками, правила:

$$\frac{Каp}{Вар} \quad i \quad \frac{Каp}{ВаКаp}$$

Ці правила показують, що наукова віра є наслідком знання, тобто знання і істинною вірою, оскільки суб'єкт знає щось, якщо і тільки якщо він вірить у нього і предмет віри має місце:

$$Каp \sim \equiv Вар \supset p$$

Звідси випливає наступне твердження:

$$Каp \supset ВаКаp$$

– *a* вірить в те, що знає p , (або суб'єкт вірить у свої знання).

У логіці віри приймається залежність $В\sim p \supset \sim ВВар$, але не приймаються залежності:

$$\sim \text{Var} \supset \text{Ba} \sim p \text{ і } \text{Var} \wedge (p \equiv q) \supset \text{Ba}q.$$

Другу залежність можна прокоментувати таким чином.

Нехай "*p*" означає "бачить Вальтера Скотта", а "*q*" – "бачить автора Веверлея". Але сучасники Вальтера Скотта не вірили, що Вальтер Скотт і автор Веверлея це імена однієї і тієї самої людини. Тому із віри в те, що суб'єкт бачить Вальтера Скотта не слідує, що бачить автора Веверлея:

$$\text{Var} \wedge (p \equiv q) \text{ не впливає } \text{Ba}q.$$

Сучасні дослідження епістемічної логіки направлені на дослідження реального процесу пізнання, тому ефективно застосування результатів цих досліджень лежить на шляху поєднання епістемічних модальностей з алетичними, деонтичними та темпоральними.

3.4.3. Епістемічна логіка і теорія можливих світів

В епістемічній логіці для аналізу її висловлювань використовується семантика можливих світів. Тут вводиться **поняття "епістемічно можливий світ"**. Якщо співставити алетично можливі світи з епістемічно можливими, то епістемічно можливий світ є лише фрагментом логічно можливого світу. Це пояснюється тим, що епістемічно можливі світи співставляються і є сумісними з тим, що знає носій, виразник епістемічного висловлювання. Це співставлення і визначає відношення досяжності *R*.

Епістемічно можливий світ специфікується, співвідноситься із носієм епістемічного висловлювання. Тому у кожного суб'єкта своя множина епістемічно можливих світів. Не існує такої множини можливих світів, які є спільними для різних суб'єктів. Іншими словами, множини епістемічно можливих світів різних суб'єктів повністю не співпадають.

Засобами семантики можливих світів оператор "*Ka*" має наступну дефініцію:

"Якщо $Ka p \in w$, де $w \in W$, то для усіх $w' \in W$, таких, що $R(w, w')$, має місце $p \in w'$ ", або "*Ka* p є істинним у світі w , якщо тільки в альтернативному епістемічному світі w' p є істинним".

У вигляді аналітичного правила модальність знання можна записати так:

$$\text{TK} \quad \frac{\text{TwKap}}{\text{Tw}'p}$$

– за умови $R(w, w')$, де w' – будь-який епістемічний світ який є досяжним із w .

Приймаємо, що заперечення модальності знання $\sim Ka$ трактується як сумнів. А саме, якщо суб'єкт в чомусь сумнівається то це означає, що воно може не мати місця, тобто буде хибним, аналітичне правило в цьому випадку матиме вигляд:

$$\text{Fk} \quad \frac{\text{FwKap}}{\text{Fw}'p}$$

– за умови $R(w, w')$, де w' – деякий епістемічний світ, який ще не зустрічався в попередніх рядках тієї гілки таблиці де застосовувалося це правило, який є досяжним із w .

Побудуємо аналітичну таблицю для формул

$$\text{Kap} \supset p, \sim (\text{Kap} \wedge \text{Ka} \sim p)$$

а) <u>0. FwKap $\supset p$</u>		
	1. TwKap	– F $\supset, 0$
I	<u>2. Fp</u>	
II	<u>3. Tp</u>	– Tk, 1
	+	
б) <u>0. Fw $\sim (\text{Kap} \wedge \text{Ka} \sim p)$</u>		
I	<u>1. Tw ($\text{Kap} \wedge \text{Ka} \sim p$)</u>	F $\sim, 0$
II	2. TwKap	
	<u>3. TwKa $\sim p$</u>	– T $\wedge, 1$
III	<u>4. FwKap</u>	F ~ 3
IV	<u>5. Fw'p</u>	Fk, 4
V	<u>6. Tw'p</u>	Tk, 2
	+	

Таким способом можна будувати аналітичні таблиці для будь-яких формул в епістемічній логіці.

Сучасні досягнення епістемічної логіки є багатогалузевими, тому їх ефективність передбачає залучення засобів із інших розділів модальної логіки.

Запитання для самоконтролю

1. Визначення алетичної логіки.
2. Характеристика основних логічних модальностей.
3. Алфавіт мови пропозиційної модальної логіки.
4. Поняття "можливий світ".
5. Алетично можливі світи.
6. Відношення досяжності.
7. Поняття "опис стану".
8. Визначення модальних операторів через аналітичні правила.
9. Побудова аналітичних таблиць.
10. Чи є наведені вирази формулами алетичної пропозиційної логіки?
 - а) $\Diamond p \supset \Diamond \Diamond p$;
 - б) $\Box p \supset \Box \Box p$;
 - в) $\Diamond \Box p \wedge \Box p$;
 - г) $\Box \Diamond p$.
11. Наведіть приклади висловлювань, які відповідають наведеним формулам:
 - а) $\Box(p \supset q) \supset \Box p \supset \Box q$;
 - б) $\Diamond p \wedge \Box q$;
 - в) $(\Box p \vee \Box q) \supset \Box(\Diamond p \wedge \Diamond q)$;
 - г) $\Box p \supset p$;
 - д) $\Box(\Diamond p \supset p)$;
 - е) $\Box(\Box p \supset \Box p)$.
12. Побудуйте аналітичні таблиці для наступних виразів:
 - а) $\Box p \supset \Box p$;
 - б) $\Box p \supset \Box \Diamond p$;
 - в) $\Diamond \Box p \supset \Diamond p$;
 - г) $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$;
 - д) $\Box q \supset (p \supset \Box q)$;
 - е) $\Box \Box q \supset (p \supset \Box q)$.
13. Передумови виникнення темпоральної логіки.
14. Алфавіт мови темпоральної логіки висловлювань.
15. Дефініція часових модальностей.
16. Основні закони часової логіки.
17. Взаємовизначення темпоральних модальностей.
18. Поняття темпорально можливого світу.
19. Поняття зміни.
20. Дефініція моменту часу.
21. Характеристика часового потоку.
22. Аналітичні правила для темпоральних модальностей.
23. Чи є наступні вирази формулами темпоральної пропозиційної логіки?

- а) $Gp \supset Ghp$;
- б) $FpH \supset F\overline{F}p$;
- в) $Fp \supset F\overline{F}p$;
- г) $pqF \wedge pH$;
- д) $p \wedge pH$;
- е) $G \supset p\overline{H}$.

24. Наведіть приклади висловлювань, які відповідають наступним формулам:

- а) $Gp \supset GGp$;
- б) $Hp \supset Fp$;
- в) $Gp \supset Fp$;
- г) $p \supset Pp$;
- д) $Fp \supset F\overline{F}p$.

25. Побудуйте аналітичні таблиці для наступних виразів:

- а) $p \supset Hp$;
- б) $(p \supset q) \supset (Gp \supset Gq)$;
- в) $Hp \supset HHp$;
- г) $Hp \supset Pp$;
- д) $Pp \supset p\overline{P}p$.

26. Дефініція деонтичної логіки.

27. Структура норми.

28. Види норм.

29. Характеристика деонтичного висловлювання.

30. Суть дискусії навколо "ділеми Йоргенсена".

31. Алфавіт мови пропозиційної деонтичної логіки.

32. Визначення деонтичних операторів.

33. Поняття деонтично можливого світу.

34. Аналітичні правила в аналітичній деонтичній логіці.

35. Встановіть чи є наведені вирази формулами деонтичної логіки:

- а) $G(p \wedge q) \supset (Gp \wedge Gq)$;
- б) $O(p \wedge q) \equiv (Op \wedge Oq)$;
- в) $Op \supset (Pq \wedge Fq)$;
- д) $OO\overline{p} \supset \overline{P}Pp$;
- е) $Fp \supset P\overline{P}p$;
- ж) $q \supset pOq$;
- з) $p \supset Op\overline{p}$.

36. Побудуйте аналітичні правила для наступних виразів:

- а) $Op \supset \overline{O}\overline{p}$;
- б) $O(p \vee q) \supset (Op \vee Oq)$;
- в) $O(p \vee q) \supset (Op \vee Oq)$;
- г) $Op \supset OOp$;
- д) $p \supset O\overline{P}p$;
- е) $OO\overline{p} \supset \overline{P}Pp$.

37. Характерні особливості епістемічних модальностей.

38. Визначення епістемічних модальностей.

39. Логіка знання і логіка переконання.

40. Алфавіт пропозиційної епістемічної логіки.

41. Поняття епістемічно можливого світу.

42. Вкажіть чи є наступні вирази формулами пропозиційної епістемічної

логіки:

а) $\neg Oa \supset Oap$;

б) $\neg Ka \supset Kap$;

в) $OKa \supset Cap$;

г) $Kap \supset p$;

д) $Kap \supset Vap$;

е) $apC \wedge Vap$;

ж) $aVp \supset Kap$.

43. Наведіть приклади висловлювань які відповідають наступним формулам:

а) $Kap \supset p$;

б) $Ka (p \supset q) \supset (Kap \supset Kaq)$;

в) $(p \supset q) \supset (Kap \supset Kaq)$;

г) $Kap \vee Cap \vee Oap$.

44. Побудуйте аналітичні таблиці для наступних формул:

а) $Ka (p \supset p)$;

б) $\neg Ka (p \vee \neg p)$;

в) $\neg Ka (p \wedge q) \supset (\neg Kap \wedge Kaq)$;

г) $Ka (p \wedge \neg p) \supset Kaq$.

Список літератури

1. *Анисов А.М.* Современная логика / А.М. Анисов. – М., 2002.
2. *Бочаров В.А.* Основы логики / В.А. Бочаров, В.И. Маркин. – М., 1994.
3. *Войшвилло Е.К.* Понятие / Е.К. Войшвилло. – М., 1967.
4. *Гильберт Д.* Основы теоретической логики / Д. Гильберт, В. Аккерман. – М., 1977.
5. *Жоль К.К.* – Логика / К.К. Жоль. – М., 2004.
6. *Ивин А.А.* Словарь по логике / А.А. Ивин, А.Л. Никифоров. – М., 1998.
7. *Ивлев Ю.В.* Логика / Ю.В. Ивлев. – М., 2006.
8. *Клини С.* Математическая логика / С. Клини. – М., 1973.
9. *Колотилова Н.А.* Риторика / Н.А. Колотилова. – К., 2007.
10. *Комаха Л.Г.* Логічні засади аргументації у філософському знанні / Л.Г. Комаха. – К., 2015.
11. *Маковельский А.О.* История логики / А.О. Маковельский. – М., 1967.
12. *Смирнова Е.Д.* Основы логической семантики / Е.Д. Смирнова. – М., 1990.
13. *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики / Н.И. Стяжкин. – М., 1967.
14. *Тарский А.* Введение в логику и методологию дедуктивных наук / А. Тарский. – М., 1948.
15. *Хоменко І.В.* Логіка / І.В. Хоменко. – К., 2004.
16. *Щербина О.Ю.* Логіка та юридична аргументація / О.Ю. Щербина. – К., 2013.

[illegible]

[illegible]

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Анатолій Євгенович КОНВЕРСЬКИЙ

СУЧАСНА ЛОГІКА

(КЛАСИЧНА ТА НЕКЛАСИЧНА)

*2-ге видання,
перероблене та доповнене*

ПІДРУЧНИК

*На першій сторінці обкладинки
картина Рафаеля Санті «Диспут про Євхаристію»*

Оригінал-макет підготовлено
ТОВ «Видавництво «Центр учбової літератури»

Підписано до друку 09.10.2017. Формат 70х100 1/16.
Друк офсетний. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Умовн. друк. арк. 22,5. Тираж – 500 прим.

ТОВ «Видавництво «Центр учбової літератури»
вул. Електриків, 23 м. Київ 04176
тел./факс 044-425-01-34

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4162 від 21.09.2011 р.