Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Конспект лекцій

Чернівці
Чернівецький національний університет
2010

УДК 528.1 (07)
ББК 26.104.4я7
М 34

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

М 34 **Математична** обробка геодезичних вимірів : конспект лекцій / укл. Л.М. Крупела. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 120с.

У запропонованому виданні розглянуто основи теорії похибок вимірів та основні методи математичної обробки геодезичних вимірів, їх застосування для обробки результатів виконаних геодезичних робіт й отримання найбільш надійних результатів та ймовірної оцінки їх точності.

Для студентів вищих навчальних закладів різних рівнів акредитації базового напряму «Геодезія та землеустрій», а також для фахівців, які вивчають і викладають дисципліни топографо-геодезичного спрямування.

УДК 528.1 (07)
ББК 26.104.4я7

РОЗДІЛ І. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ

§ 1. Основні поняття теорії похибок

1. Основні завдання теорії похибок

У теорії похибок на основі положень теорії ймовірностей та математичної статистики вивчають причини виникнення та закони розподілення похибок вимірювань, а також властивості різних видів похибок і розроблюють методику спостережень, що дозволяє утримувати ці похибки в завданих межах.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає кількісні закономірності випадкових явищ.

Математична статистика – наука, що займається методами обробки досліджених даних, отриманих у результаті вимірювань (спостережень) над випадковими явищами.

При виконанні геодезичних робіт одну й ту ж саму величину вимірюють кілька разів. Тому необхідно вибрати з усіх цих результатів найкращий. Звичайно, найкращий той, який найбільше приближений до істинного (точного), тобто серед всіх вимірювань це значення буде ймовірним.

Завдання теорії похибок можна записати так:

1. Знаходження найбільш надійного (ймовірного) значення величин, що визначаються та характеристика точності.
2. Оцінка точності безпосередньо виконаних вимірювань та їхніх функцій.
3. Визначення законів розподілу похибок вимірювань.
4. Встановлення допусків, що обмежують використання результатів вимірювань у заданих межах точності.

2. Класифікація похибок, їх види та властивості

Виконуючи геодезичні роботи в більшості випадків вимірюють ті або інші величини (площі ділянок, кути горизонтальні та вертикальні, лінії, перевищення точок і т.п.).

Виміряти величину X – це порівняти її з однорідною їй величиною q, прийнятою за одиницю міри. Результатом вимірювання є число (*l*), яке показує, скільки разів одиниця міри поміститься у вимірюваній величині. Це число може бути цілим або дробовим. Вимірювання бувають безпосередні (або прямі) та опосередковані (непрямі). Коли виконуються безпосередні вимірювання, то вимірюваний об'єкт порівнюють зі своєю одиницею міри. (Напр., лінійкою можна виміряти відстань на карті між двома точками, розмір кімнати, столу і т.п.)

При опосередкованих (непрямих) вимірюваннях результат отримуємо шляхом обчислень за допомогою інших безпосередньо виміряних величин (зокрема, можна визначити площу трикутника, вимірявши безпосередньо його основу та висоту; вимірявши радіус кола, можна обчислити його довжину та площу). В цих прикладах довжина кола, площа кола, площа трикутника – результати опосередкованих (непрямих) вимірювань. Результати вимірювань поділяються на необхідні та додаткові (або надлишкові). Якщо одна й та ж величина (наприклад, довжина лінії, кут і т.п.), виміряна (n) разів, то один із результатів вимірювань є необхідним, а решта (n – 1) – додатковими (надлишковими). Додаткові вимірювання мають дуже велике значення: їхня збіжність виступає засобом контролю і дозволяє робити висновок про якість результатів вимірювань; вони сприяють отриманню найбільш надійних значень шуканої величини, порівняно з окремо взятим результатом вимірювань.

Практика показує, що наскільки би ми старанно та багаторазово не виконували вимірювання однієї і тієї ж величини, окремі результати відрізняються від дійсного значення (в той чи інший бік). Це відбувається тому, що процес вимірювання неминуче супроводжується помилками.

Якщо вимірювання виконуються більш досконалими приладами та методами дуже досвідченими фахівцями, тоді результат містить менші за абсолютною величиною похибки. Але уникнути повністю впливу похибок вимірювань і в цьому випадку неможливо.

Під похибкою результату вимірювання (x_i) розуміють різницю між цим результатом та точним значенням X – виміряної величини, тобто

$$x_i - X = \Delta. \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

прийнято казати, що *похибка* дорівнює різниці між тим, що є, і тим, що повинно бути. Аналогічно обчислюють нев'язки отриманих результатів.

Нев'язка – це невідповідність між виміряними (або обчисленими) значеннями тої чи іншої величини та її теоретичним (істинним) значенням. Наприклад, якщо кути в трикутнику виміряні транспортиром і сума їх дорівнює $179^{o}00'$, то різниця між теоретичною 180^{o} і дійсною величинами становить 1^{o}, що і є нев'язкою (f) суми виміряних кутів:

$$f = 179^{o}00' - 180^{o} = 1^{o}.$$

Відповідно похибка (Δ) та нев'язка (f) результату обчислюються за однією і тією ж формулою (1.1.1).

Розрізняють похибки 3 видів:

а) Грубі похибки. До них відносять промахи у вимірюванні, викликані неуважністю спостерігача, несправністю приладу або неврахуванням впливу зовнішнього середовища, яке не є таким, що ним можна знехтувати.

Тобто груба похибка пов'язана з різким порушенням умов випробовування при окремому спостереженні. Завдання спостерігача полягає в організації контролю робіт, що дає можливість своєчасно вивчити та усунути грубі похибки із результатів вимірювань. (Приклад грубих похибок: неправильно записано в журнал на 20΄ при вимірюванні теодолітом із ціною поділки 20΄; прорахунок на 20 м у довжині лінії при вимірюванні 20 метровою стрічкою і т.д.).

б) Систематичні похибки – повторювані похибки одинакові в усій серії спостережень.

Вони є результатом дії одного або групи факторів і можуть бути виражені функціональною залежністю між факторами та результатом вимірювання.

Завдання спостерігача – знайти цю функціональну залежність і з її допомогою визначити та виключити основну частину систематичної похибки з результатів спостережень, а залишковий їхній вплив звести до нехтовно малих величин. (Приклад систематичних похибок: похибка щодо неправильності загальної довжини стальної стрічки входить у результат вимірювання довжини лінії стільки разів, скільки разів проведено вимірювання цією стрічкою; при нівелюванні вперед горизонтальний візирний промінь, відхиляючись від візирної поверхні вверх, збільшує відлік по рейці тим більше, чим далі від нівеліра знаходиться рейка; строго кажучи, кожен спостерігач вносить у результат вимірювання свою особисту систематичну помилку. Так, відліки по оптичному мікрометру, при суміщенні діаметрально протилежних штрихів, різними виконавцями будуть різні).

Таким чином, систематичні похибки можуть виникати не тільки через несправність приладів, а також унаслідок впливу середовища й вини самого спостерігача. Їх необхідно виявити, вивчити та виключити з результатів вимірювань за рахунок уведення відповідних поправок та за рахунок продуманої програми спостережень.

в) Випадкові похибки. Похибки вимірювань, закономірність яких проявляється в масі і які зумовлені точністю приладу, кваліфікацією виконавця, неврахуванням коливань зовнішніх умов, називаються випадковими.

Тому, якщо систематична похибка може бути виключена з поодинокого вимірювання, то випадкова похибка невідома для конкретного результату вимірювання і не може бути усунена з поодинокого вимірювання, оскільки її закономірність виявляється тільки в масовому прояві.

Їхній вплив можна тільки послабити, підвищуючи якість приладів і збільшивши кількість вимірювань, а також правильною математичною обробкою результатів вимірювань, але істинні значення вимірюваних величин залишаються невідомими.

Випадкові похибки мають такі властивості:

1) випадкові похибки за абсолютною величиною не перевищують визначеної межі;
2) додатні та від’ємні їх значення – рівноможливі;
3) малі за абсолютною величиною випадкові похибки зустрічаються частіше, ніж великі;
4) середнє арифметичне зі значень випадкових похибок при обмеженому збільшенні кількості вимірювань

прямує до 0 (властивість компенсації). Систематичні похибки цієї властивості не мають.

Тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0.$$

Ці властивості випадкових похибок випливають із прийнятих у теорії похибок постулатів:

1) похибки Δ_i підпорядковуються нормальному закону розподілення;
2) математичне сподівання

$$M(\Delta_i)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i p_i=0,$$

де p_i – ймовірність появи випадкової похибки Δ_i, що можливо при відсутності систематичних похибок.

Крива похибок (крива Гаусса) та її властивості

Якщо на осі абсцис відкласти величини випадкових похибок Δ, а на осі ординат – їх кількість (φ(Δ) – щільність нормального розподілення похибки), то отримаємо криву похибок, або криву Гаусса (рис. 1.1).

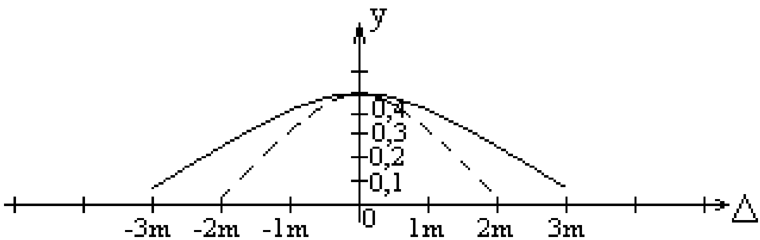

Рис. 1.1. Крива похибок (крива Гаусса)

Рівняння кривої має вигляд:

$$\varphi(\Delta_i)=y=\frac{h}{\sqrt{\Pi}}e^{-h^2\Delta^2}, \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

де $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ – міра точності; σ – середньоквадратичне відхилення.

Якщо щільність формули 1.1.2 отримана за результатами вимірювань, то h = $\frac{1}{m\sqrt{2}}$, де (m) – середня квадратична похибка.

Прийнявши $\frac{\Delta}{m} = t$, замість 1.1.2 отримаємо

$$Y = \frac{\Delta}{m\sqrt{2\pi n}} e^{-t^2/2}. \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

Приклад: побудувати криву нормального розподілення, якщо Δ=0, m, 2m, 3m; m = 1,00".

Рішення. Підставляємо у формулу 1.2 m = 1,00" ,отримуємо

$$y = 0{,}3989e^{-t^2/2} = 0{,}3989e^{-\Delta^2/2m^2}.$$

Приведеним значенням (Δ) і (m) відповідають:

t = $\frac{\Delta}{m}$	……………...	0	1	2	3
$-t^2/_2 = -\Delta^2/_{2m^2}$	………………	0	-0,5	-2,0	-4,5
y	……………….	0,399	0,242	0,054	0,0044

Побудована за значеннями (Δ) та (y) крива має такі властивості:

- крива лежить над віссю абсцис, оскільки не має значень y ≤ 0;
- крива розподілення симетрична відносно осі OY, бо функція $e^{-h^2\Delta^2}$ парна і значення ординат для додатних та від'ємних (Δ), рівних за абсолютною величиною, однакові;
- при Δ = 0 величина (y) набуває максимальне значення;
- крива має 2 точки перегину : Δ = m та Δ = -m;
- дотичні до кривої в точках перегину перетинаються з віссю абсцис у точках (2m) і (-2m).

3. Критерії точності вимірювань

Практика показує що, виконавши вимірювання, завжди прагнуть визначити точність отриманого результату. Тому в теорії похибок вимірювань установлюються різні критерії для оцінки точності результатів вимірювань. Оскільки результати вимірювань унаслідок впливу похибок різняться між собою, то *виникає задача: як із ряду вимірювань однієї і тієї ж величини отримати найбільш надійне кінцеве значення її та як оцінити точність цього результату*. Розв'язування цієї задачі здійснюється на основі вивчення властивостей похибок вимірювань.

У багатьох випадках геодезичної практики за результатами вимірювань обчислюють інші величини, що нас цікавлять. Наприклад, вимірявши сторону трикутника та два його кути, можна за відомими формулами обчислити третій кут та дві другі його сторони. В таких випадках результати обчислень являються функціями виміряних величин. Очевидно, що для розв'язування цієї задачі необхідно знати похибки результатів вимірювань, з допомогою яких виконуються дані обчислення.

Середня похибка (v). Середнє арифметичне абсолютних значень випадкових похибок називається середньою похибкою

$$v = \frac{[|\Delta|]}{n}, \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

де $[|\Delta|] = |\Delta_1| + |\Delta_2| + \ldots + |\Delta_n|$; знак $[|\Delta|]$ введений Гауссом і називається Гауссовою сумою.

Ймовірна похибка (r) (або серединна). Ймовірною похибкою називається таке значення випадкової похибки, при якому рівноможливі похибки, більші або менші від нього за абсолютною величиною.

Із визначення ймовірної похибки випливає спосіб її відшукування: якщо всі похибки розмістити в ряд по зменшенню чи збільшенню значень абсолютних величин, то ймовірна похибка буде розміщена в середині цього ряду. Тому ймовірну похибку часто називають серединною.

Середня квадратична похибка (m). Середньою квадратичною похибкою називається величина, що обчислюється за формулою Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

$[\Delta^2] = \Delta^2_1 + \Delta^2_2 + \ldots + \Delta^2_n$, $\Delta_i = x_i - X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; x_i – результати вимірювання величини, істинне значення якої дорівнює X. Зазвичай середній квадратичній похибці віддають більшу перевагу, ніж середній та ймовірній, позаяк на її величину істотно впливають великі за абсолютною величиною похибки і вона більш стійка, тобто досить надійно визначається при невеликій кількості (n) похибок.

Надійність середньої квадратичної похибки характеризується середньою квадратичною похибкою самої середньоквадратичної похибки, яка визначається за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

Якщо похибки вимірювань підлягають перерахованим вище властивостям випадкових похибок, то за величиною середньої квадратичної похибки можна визначити граничну похибку $\Delta_{гр.}$, а саме при достатньо великій кількості вимірювань (n):

$$\Delta_{гр} \leq 3m. \qquad \textbf{(1.1.7)}$$

У технічних інструкціях із виконання геодезичних вимірювань часто установлюють більш жорсткий допуск, а саме:

$$\Delta_{гр} \leq 2m. \qquad \textbf{(1.1.8)}$$

Середня квадратична похибка (m) пов’язана зі середньою похибкою (v) та ймовірною похибкою r приблизними формулами

$$m \approx 1{,}25v; \qquad m \approx 1{,}48r. \qquad \textbf{(1.1.9)}$$

Абсолютні та відносні похибки.

Усі наведені вище похибки називаються абсолютними (середня, ймовірна, середня квадратична похибка, гранична похибка).

Окрім абсолютних, існують відносні похибки $f_{від.}$ Відносною похибкою називають відношення абсолютної похибки до середнього значення вимірювана величини.

Відносні похибки виражають дріб, чисельник якого дорівнює одиниці, а знаменник – відношенню середнього значення до абсолютної похибки.

Залежно від того, яка абсолютна похибка використовується, відносні похибки називають: середньою квадратичною відносною, середньою відносною, ймовірною відносною, граничною відносною. Наприклад, довжина ліній S = 285,00 м виміряна із середньоквадратичною похибкою m_S = 0,15 м. Середня квадратична відносна похибка:

$$f_{відн.} = \frac{m_S}{S} = \frac{1}{S/m_S} = \frac{1}{285{,}00/0{,}15} = \frac{1}{1900}.$$

Знаменник відносної похибки рекомендується заокруглювати зі збереженням двох перших значущих цифр. Якщо ряд рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини має випадкові (Δ_i) та систематичні (δ_i) похибки, то сумарні похибки будуть дорівнювати:

$\sigma_i = \Delta_i + \delta_i$.

Піднесемо ліву і праву частину цього рівняння до квадрата, після підсумування та ділення на (n) отримаємо:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\delta^2]}{n} + 2\frac{[\Delta \cdot \delta]}{n}.$$

При великій кількості (n) вимірювань остання складова на основі четвертої властивості випадкових похибок буде близькою до нуля.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0.$$

З урахуванням цього, сумарна середня квадратична похибка буде дорівнювати:

$$m^2_\sigma = m^2_\Delta + m^2_\delta,$$

де m_Δ – середня квадратична похибка випадкова; m_δ – середня квадратична похибка систематична.

§ 2. Середні квадратичні похибки результатів вимірювань і ваги вимірювань

1. Середні квадратичні похибки вимірювань. Методи їх обчислень. Формули Гаусса та Бесселя

В першій темі ми розглянули критерії точності вимірювань і знаємо: якщо будь-яка величина (а) (наприклад, лінія або кут) виміряна (n) разів, то отримано (n) близьких між собою чисел x_1, x_2, … x_n.

За кінцевий результат беруть середнє арифметичне, тобто результат ділення суми всіх отриманих чисел на кількість вимірювань (позначимо його через x_0).

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad . \qquad (1.2.1)$$

Практика показує, що середнє арифметичне x_0 ближче до істинного (Х), ніж кожне із отриманих вимірювань x_1, x_2, … x_n, і воно дорівнювало би істинному значенню, якщо б кількість вимірювань була безкінечно великою. При кінцевій кількості вимірювань середнє арифметично (x_0) відрізняється від істинного (Х) на невелику величину, що називається похибкою арифметичної середини.

Якщо відоме істинне значення (Х) то, порівнюючи кожний вимір з істинним значенням, отримаємо ряд істинних похибок :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_1 - X; \\ \Delta_2 &= x_2 - X; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_n &= x_n - X. \end{aligned} \qquad (1.2.2)$$

Кожна із цих похибок має більшу або меншу величину, тому судити про точність вимірювань необхідно не за окремими похибками, а за званою середньою квадратичною похибкою (m), яку визначають за середнім із квадратів всіх похибок. А саме :

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}$$

або, позначивши суму $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2$ через $[\Delta^2]$, отримаємо:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

Величина (m) є середньою квадратичною похибкою одного вимірювання.

Подивимось тепер чому дорівнює середня квадратична похибка результату вимірювань. Результатом всіх вимірювань називається середнім арифметичним. Тому середня похибка результату (M) дорівнює різниці між істинною величиною (X) та середнім арифметичним значенням (x_0)

$$M = X - x_0.$$

Якщо скласти всі істинні похибки із (2.2) та розділити на кількість вимірювань (n) то отримаємо:

$$\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n} = X - x_0 = M \quad . \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

Щоб позбутися різних знаків окремих (Δ), піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрату, тоді

$$M^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots + \Delta_n^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + 2\Delta_1\Delta_3 + \cdots + 2\Delta_n - 1\Delta_n}{n^2}$$

Оскільки за властивістю випадкових похибок, подвоєний добуток $2\Delta_1\Delta_2$, $2\Delta_1\Delta_3$… мають взагалі різні знаки, то при достатньо великій кількості вимірювань сума їх неодмінно прямує до нуля, якщо б цього не було, то величини Δ_1, Δ_2… не були б випадковими величинами, а носили б характер постійних похибок. Тому, відкинувши подвоєний добуток та користуючись попередніми позначеннями, отримуємо для середньої квадратичної похибки результату величину :

$$M = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n^2}}. \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

Порівнявши формулу 1.2.5 та 1.2.3 легко побачити зв'язок середньої квадратичної похибки результату вимірювань із середньою квадратичною похибкою одного вимірювання

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

Середня квадратична похибка простої арифметичної середини (або результату вимірювань) у $\sqrt{n}$ разів менша від середньої квадратичної похибки одного вимірювання.

Отже, точність середнього арифметичного (результату вимірювання) збільшується зі збільшенням кількості вимірювань (n), але при n = 15 – 20 переважний вплив на величину (М) будуть справляти залишкові систематичні похибки, тому практично виконувати більше 15-20 вимірювань недоречно. Для істотного підвищення точності результатів вимірювань необхідно використовувати більш точні прилади, більш досконалу методику вимірювань.

Визначення середньої квадратичної похибки
за ймовірнішими. Формула Бесселя

У багатьох випадках істинне значення (Х) виміряної величини невідомо, тому не можуть бути обчислені невідомі (Δ) у формулі 1.1 ($x_i - x = \Delta$), рівно як і неможливо знайти середню квадратичну похибку одного вимірювання за формулою 1.2.3 ($m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$). У таких випадках оцінку точності вимірювань виконують за відхиленнями (v) окремих вимірювань від простої арифметичної середини.

Якщо отримано ряд вимірювань $x_1, x_2, \dots x_n$ однієї і тієї ж величини, то найбільш надійним значенням, як відомо, буде проста арифметична середина (x_0).

Напишемо різниці

$$x_0 - x_i = v_i \ (i – 1,2, \dots, n). \qquad \textbf{(1.2.7)}$$

Для виявлення властивості відхилень (v) додамо всі ці рівняння.

Отримаємо

$$nx_0 - [x] = [v]. \qquad \textbf{(1.2.8)}$$

але із 2.1 $x_0 = \frac{[x]}{n}$ випливає $nx_0 = [x]$, тому формула 1.2.8 набуде такого вигляду :

[v] = 0. **(1.2.9)**

Сума відхилень окремих результатів вимірювань від простої арифметичної середини дорівнює нулю. За відхиленнями (v) можна обчислити середню квадратичну похибку одного виміру. В теорії похибок доводиться, що

$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$ – формула Бесселя. **(1.2.10)**

Середня квадратична похибка самої середньої квадратичної похибки обчислюється за формулою :

$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$. **(1.2.11)**

Середня квадратична похибка середньої квадратичної похибки результату обчислюється за формулою :

$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}$. **(1.2.12)**

2. Середня квадратична похибка функцій виміряних величин

Дуже часто виникає необхідність визначення середньої квадратичної похибки величин, не безпосередньо виміряних, а отриманих шляхом обчислень із інших виміряних величин. Тобто шукана величина визначається шляхом обчислень функції виміряних величин. Похибка функції залежить від похибок аргументів, що входять до неї. Припустимо що у функції загального виду:

$F = f(x_1, x_2, \dots x_n)$. **(1.2.13)**

аргументи $x_1, x_2, \dots x_n$ незалежно виміряні із середньою квадратичною похибкою $mx_1, mx_2, \dots mx_n$. Якщо X, Y, … U – істинні значення (точні) аргументів, то їхні істинні похибки дорівнюють :

$$\Delta x = x - X$$

$\Delta y = y - Y$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Delta u = u - U$,

а істинна похибка функції :

$$\Delta F = f(x, y, \ldots u) - f(x - \Delta x, y - \Delta y, \ldots, u - \Delta u).$$

Розклавши другий доданок у ряд Тейлора з урахуванням перших двох членів ряду знаходимо :

$$\Delta F = f(x, y, ..u) - f(x, y, ..u) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u + R$$

,

де R – залишковий член розкладання, дорівнює сумі всіх нелінійних членів ряду Тейлора, його значенням у геодезії в більшості випадків можна знехтувати.

$$\Delta F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u.$$

При багаторазових вимірюваннях отримаємо :

$$\Delta F_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u_1$$

$$\Delta F_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u_2$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\Delta F_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x_n + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y_n + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u_n.$$

Піднесемо ліву та праву частини до квадрата, підсумувавши та розділивши на (n) з врахуванням формули Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, отримуємо :

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 m_u^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_2 + \ldots + \Delta x_n \Delta y_n)\frac{1}{n} + \ldots$$

Згідно із формулою визначення коефіцієнта кореляції :

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{nm_x m_y},$$

де $\overline{x}=\frac{[x]}{n}$; $\overline{y}=\frac{[y]}{n}$; $m_x=\sqrt{\frac{[(x_i-\overline{x})^2]}{n}}$; $m_y=\sqrt{\frac{[(y_i-y)^2]}{n}}$.

Запишемо

$$\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \Delta y_i=rnm_x m_y.$$

Для попарно корельованих аргументів знаходимо :

$$m_F=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 mx^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 my^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 mu^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)r_{xy}m_x m_y+\ldots+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)r_{xu}m_x m_u} \quad \textbf{(1.2.14)}$$

Значення часткових похідних зазвичай визначають за приблизними значеннями аргументів. При обчисленнях за даною формулою похідні обчислюються зі збереженням трьох значущих цифр, у кінцевому результаті отримують дві значущі цифри. Коефіцієнти кореляції $r_{xy},\ldots,r_{xu}$ попередньо визначають із спеціальних досліджень.

Якщо аргументи функції 1.2.13 некорельовані (r_{xixj}=0), то замість 1.2.14 отримуємо формулу :

$$m_u=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 m_{xi}^2}. \quad \textbf{(1.2.15)}$$

Квадрат середньої квадратичної похибки функції загального виду дорівнює сумі добутку квадратів похідних від функції по кожному аргументу на квадрати середніх квадратичних похибок відповідних аргументів.

Приклад : у трикутнику виміряно дві сторони і кут між ними; а = 30 м ± 0,10 м, b = 40 м ± 0,15 м; α = 45^0 ± 10′.

Визначити відносну середню квадратичну похибку площі трикутника.

Розв'язування: $\boldsymbol{P=\frac{1}{2}ab\cdot sin\alpha=424{,}3м^3}$.

Знайдемо похідні від цієї функції за аргументами a, b і α. Отримаємо:

$$\frac{\partial p}{\partial a}=\frac{1}{2}b\sin\alpha; \qquad \frac{\partial p}{\partial b}=\frac{1}{2}a\sin\alpha; \qquad \frac{\partial p}{\partial \alpha}=\frac{1}{2}a\cos\alpha.$$

Потім, згідно з 1.2.15, отримаємо :

$$m^2\rho=\frac{1}{4}b^2\sin^2\alpha m_a^2+\frac{1}{4}a^2\sin^2\alpha m_b^2+\frac{1}{4}a^2b^2\cos^2\alpha\frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

Примітка: якщо m_α надано в секундах або мінутах, то завжди m_α ділимо на ρ

Підставивши в цей вираз числові значення відповідних величин отримаємо:

$$\boldsymbol{m_p=\pm 2{,}5\text{м}^2} \qquad \text{та} \qquad \boldsymbol{\frac{m_p}{p}\approx\pm\frac{1}{170}}$$

<u>Лінійні функції</u>

Дана функція виду $\boldsymbol{u=\pm k_1x_1\pm k_2x_2\pm,\dots,\pm k_nx_n}$,

(*)

де якій $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$, … $\boldsymbol{k_n}$ - постійні числа, а $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$…$\boldsymbol{x_n}$ - незалежні аргументи виміряні з середніми квадратичними похибками $\boldsymbol{m_{x_1}}$, $\boldsymbol{m_{x_2}}$, … $\boldsymbol{m_{x_n}}$.

Необхідно визначити середню квадратичну похибку ($\boldsymbol{m_u}$) функції (u).

Для лінійної функції (*) часткові похідні $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=k_i$, а

$$\boldsymbol{m_u=\sqrt{k_1^2m_{x_1}^2+k_2^2m_{x_2}^2+\dots+k_n^2m_{x_n}^2}}.$$

Квадрат середньоквадратичної похибки функції (u) дорівнює сумі добутку сталих на квадрат середньої квадратичної похибки відповідних аргументів.

Для функції $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm, ..., \pm x_n$ часткові похідні $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 1$. Тоді:

$$m_u = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \cdots + m_{x_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} m_{x_i}^2}.$$

Квадрат середньої квадратичної похибки алгебраїчної суми будь-якої кількості аргументів, отриманих із незалежних вимірювань, дорівнює сумі середніх квадратичних похибок доданків. В окремому випадку при $m_{x_1} = m_{x_2} = \cdots = m_{x_n} = m$, тобто коли всі аргументи виміряні з однаковою точністю,

$$m_u = m\sqrt{n}.$$

Для функції **u = kx** множення виміряної величини на постійний множник

k – безпомилкове постійне число;

x – аргумент, отриманий із вимірювань.

$$m_u = km_x.$$

Середня квадратична похибка добутку постійного (k) на аргумент (x), отриманий із вимірювань, дорівнює добутку постійного на середню квадратичну похибку вимірювання аргументу.

Якщо функція має вигляд

$$u = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{y_1 y_2 \cdots y_n},$$

то спочатку необхідно зробити її логарифмування

$$\ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n - \ln y_1 - \ln y_2 - \ldots - \ln y_n.$$

Використовуючи формулу 1.2.15 отримаємо $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i}$,

$\frac{\partial u}{\partial y_i} = \frac{1}{y_i}$ та

$$\frac{m_u}{u} = \sqrt{\left(\frac{m_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{m_{x_2}}{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{m_{x_n}}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{m_{y_1}}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m_{y_2}}{y_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{m_{y_n}}{y_n}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_{xi}}{x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_{yi}}{y_i}\right)^2} \,. \qquad \textbf{(1.2.16)}$$

У деяких випадках оцінюють не самі величини, а десятинні логарифми цих величин. Для визначення зв'язку між середньоквадратичною похибкою величини та середньоквадратичною похибкою десятинного логарифма цієї ж величини використовуємо зв'язок між десятинними та натуральними логарифмами $lgu = M\, lnu$, тоді :

$$m_{\lg u} = M\left(\frac{m_u}{u}\right), \qquad \textbf{(1.2.17)}$$

$$m_u = \left(\frac{u}{M}\right) m_{\lg u} \,. \qquad \textbf{(1.2.18)}$$

Значення $m_{\lg u}$ зазвичай визначають в одиницях шостого знака логарифма, тому помноживши ліву та праву частину формули 2.17 на 10^6, отримаємо :

$$m_{\lg u} \cdot 10^6 = m_{\lg u} = 10^6 M({}^{m_u}/_u);$$

$$m_u = \frac{u}{10^6 M} m_{\lg u} \,,$$

звідки, враховуючи M ≈ 0,434,

$$\frac{m_u}{u} = \frac{m_{\lg u}}{10^6 M} = \frac{m_{\lg u}}{434000}. \qquad \textbf{(1.2.19)}$$

Приклад: визначити відносну середню квадратичну похибку сторони $\frac{m_S}{S}$, якщо середня квадратична похибка логарифма цієї сторони $m_{\lg S}$ = 3,7 одиниці шостого знака логарифма.

Рішення: підставляємо в 1.2.19 замість значення $m_{\lg u}$ = 3,7 знаходимо :

$$m_S/S = \frac{3{,}7}{343000} = 1/117000$$

.

При виконанні різних розрахунків часто виникає необхідність за відомою точністю функції знайти точність визначення кожного аргументу. При розв’язуванні цієї задачі зазвичай використовують принцип рівного впливу, згідно якому вважають

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) m_{x_2}^2 = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 .$$

Тоді замість виразу 1.2.15 отримаємо

$$m_u = \sqrt{n\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2} = \left|\frac{\partial f}{\partial x} m_x\right| \sqrt{n} ,$$

звідки

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1} m_{x_1}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2} m_{x_2}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n} m_n\right| = \frac{m_u}{\sqrt{n}} . \qquad \textbf{(1.2.20)}$$

Приклад: перевищення між точками отримано методом тригонометричного нівелювання за формулою h = S tg*v*.

З якою точністю необхідно визначити горизонтальне прокладення S = 145,00м і кут нахилу *v* = $4^0$30’, щоб перевищення h було отримано з середньою квадратичною похибкою m_h = 0,05 м.

Розв’язування: за формулою 1.2.15 знаходимо $m_h^2 = tg^2 v m^2 s + \frac{S^2}{cos4v}\frac{m^2 v}{p^2}$.

Згідно з 2.20 :

$$m_s = \frac{0{,}0354}{tgv} = \frac{0{,}0354}{tg4^0 30'} = 0{,}45м$$

$$\frac{m_S}{S} = \frac{0{,}45}{145} = \frac{1}{320};$$

$$mv = \frac{\rho cos^2 v}{S} = 0{,}354 = \frac{34^0 38' cos^2 4^0 30'}{145} 0{,}0354 = 0{,}8'.$$

3. *Вага вимірювання. Поняття ваги нерівноточного вимірювання та одиниці ваги*

Якщо для деякої величини маємо не один, а декілька рядів вимірювань, виконаних одним і тим самим приладом за однакових умов, і для кожного ряду вже виведено його середнє арифметичне, то замість звичайного підсумування всіх вимірювань та ділення суми на загальну їх кількість, кінцеве середнє можна отримати простіше: множенням результату кожного ряду на відповідне кількість вимірювань та ділення суми цих добутків на суму чисел вимірювань у кожному ряді.

Якщо зроблено декілька рядів вимірювань та отримано :

$$x_1 \text{ в середньому із } (n_1) \text{вимірювань}$$

$$x_2 \text{ в середньому із } (n_2) \text{вимірювань}$$

$$x_3 \text{ в середньому із } (n_3) \text{вимірювань}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$x_k \text{ в середньому із } (n_k) \text{вимірювань},$$

Тоді кінцеве середнє буде

$$X_0 = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}. \qquad (*)$$

Приклад: виміряно деяку лінію та отримано:

1-й ряд	2-й ряд	3-й ряд
3723,3м	3722,6м	3722,0м
3721,6м	3723,4м	3721,2м
3720,2м	**x_2=3723,0м**	3720,4м
x_1=3721,7м		3720,7м
		3722,7м
		x_3=3721,4м

Для отримання кінцевого середнього можна безпосередньо додати всі вимірювання і розділити на їхню кількість (десять)

$$x_0 = \frac{3723{,}3+\cdots+3722{,}7}{10} = 3721{,}81м,$$

або значно простіше, використавши формулу (*); результат отримаємо такий самий :

$$x_0 = \frac{3721{,}7\cdot 3 + 3723{,}0\cdot 2 + 3721{,}4\cdot 5}{3+2+5} = 3721{,}81м$$

Якщо вимірювання однієї ж і тієї ж величини виконувалися різними приладами або одним приладом, але різними способами, неоднакову кількість разів або при неоднакових умовах, вони мають різні середні квадратичні похибки і називаються нерівноточними. Оскільки в них неодинакові середні квадратичні похибки, то і ступінь довіри до цих нерівноточних вимірювань не може бути однаковим.

Про цінність результатів ми судимо за похибками: чим похибка менше, тим результат цінніший.

При сумісній обробці нерівноточних вимірювань їхню неоднакову точність враховують за допомогою **ваг**, які показують ступінь надійності виконаних вимірювань. Тобто ваги застосовують там, де неможливо взяти арифметичну середину. Ступінь довіри до результату спостережень називають його вагою

$$P_i = \frac{\mu^2}{m^2}, \qquad \textbf{(1.2.21)}$$

де $\mu^2 = c = const$ (будь-яка величина постійна для всіх його вимірювань, найчастіше це одиниця).

Чим більша кількість вимірювань, в даному ряді спостережень, тим більший ступінь довіри, або тим більшу вагу, має результат цього ряду. Тому прийнято вважати, що **вага результату пропорційна кількості вимірювань та обернено пропорційна середній квадратичній похибці.**

Із попереднього випливає: якщо маємо декілька результатів вимірювань однієї і тієї ж величини із декількох рядів із різними вагами, то загальне або вагове середнє дорівнює сумі добутку окремих середніх на відповідні ваги, поділеній на суму ваг.

Загальне середнє із всіх рядів вимірювань, очевидно, точніше кожного окремого середнього з окремих рядів, а вага загального середнього дорівнює сумі ваг цих окремих рядів. Так, якщо для величини (x) отримані середні значення

x_1 з вагою P_1

x_2 з вагою P_2

………………. ,

x_n з вагою P_n

то ймовірніша величина (x_0) буде

$$x_o = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots p_n} \qquad \mathbf{(1.2.22)}$$

з вагою $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Приклад: для деякого кута маємо такі результати вимірювань

$32^o41'20''$ з вагою 2

$32^o41'30''$ з вагою 4

$32^o41'40''$ з вагою 10

Ймовірніше значення $\alpha_o = \frac{20''.2+30''.4+40''.10}{2+4+10} = \frac{560}{10} = 32^o41'35''$ із ваг 16, тобто ймовірніше або вагове середнє.

Ми вже установили, що вага обернено пропорційна квадрату середньої квадратичної похибки.

Приклад: для деякого кута отримано 2 висновки:

1) $\alpha_1 = 51^0 14'10''$ зі середньою квадратичною похибкою m1 = ±6";

2) $\alpha_2 = 51_0 14'07''$ зі середньою квадратичною похибкою m2 = ±2”.

Другий висновок, очевидно, точніше від першого і тому для кінцевого, середнього необхідно взяти до уваги їх ваги, які в даному випадку, внаслідок невідомої кількості вимірювань, можна визначити тільки із середньоквадратичної похибки, а інакше:

- для першого висновку р = $1/m_1^2 = 0{,}03$;
- для другого висновку р = $1/m_2^2 = 0{,}25$.

$$p = p_1 + p_2 = 0{,}28$$.

Відповідно вагове середнє із секунд кута буде:

$$\frac{10'' \cdot 0{,}03 + 7'' \cdot 0{,}25}{0{,}28} = 7{,}3''$$,

а кінцевий результат для кута $\alpha_0 = 51^0 14'73''\pm1{,}9''$, де середня квадратична похибка вирахувана за формулою

$$m = \pm\frac{1''}{\sqrt{0{,}28}} = \pm1{,}9''$$.

Ваги є відносними величинами, тому формула 2.22 показує, що результат не зміниться, якщо всі ваги помножити або розділити на одне і те ж саме число.

Тому дуже часто, для простоти обчислень, беруть вагу одного ряду вимірювань за одиницю, а ваги інших виражають відповідними, якомога простішими числами.

Приклад: із трьох рядів вимірювань лінії отримані наступні результати:

Довжина лінії, l	Середня квадратична помилка	Вага	
2456,3 м	±0,1 м	100	4
2457,7 м	±0,2 м	25	1
2457,0 м	±0,05 м	400	16

Для цих трьох рядів за даними середньої квадратичної похибки, знаходять ваги:

$$\frac{1}{(0{,}1^2)} = 100; \qquad \frac{1}{(0{,}2^2)} = 25;$$

$$\frac{1}{(0{,}05^2)} = 400$$

Замість них можна при розділенні на 25 взяти ваги: 4, 1 і 16; тоді за формулою 2.22 вагове середнє буде:

$$l = 2456{,}9\ метра \pm 0{,}04м.$$

Якщо ми маємо тільки два результати з відповідними середніми квадратичними похибками, то вагове середнє можна отримати більш коротким шляхом, не визначаючи самих ваг. Нехай дані результати α_1 і α_2 зі середніми квадратичними похибками $\pm m_1$ та $\pm m_2$; на підставі формули 1.2.21 будемо мати

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1\left(\frac{1}{m_1}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{1}{m_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{m_1}\right) + \left(\frac{1}{m_2}\right)}$$ або після простого зведення

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1 m_2^2 + \alpha_2 m_1^2}{m_1^2 + m_2^2}. \qquad \textbf{(1.2.23)}$$

Вага цього результату буде $P = p_1 + p_2 = \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}$,

а його середня квадратична похибка

$$m = \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 \cdot m_2^2}}}$$

або

$$m = \frac{m_1 m_1}{m_1^2 + m_2^2}. \qquad \textbf{(1.2.24)}$$

Для прикладу (*) $\alpha_0 = \frac{10 \cdot 2^2 + 7 \cdot 6^2}{2^2 + 6^2} = 7{,}3''$

$$m = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \pm 1{,}9''$$

У формулі 1.2.21 при р = 1 отримуємо $\mu = m$, тобто μ – середня квадратична похибка вимірювання, вага якого дорівнює одиниці (або середня квадратична похибка одиниці ваги).

Якщо невідомі істинні значення похибок, а визначаються (для оцінки точності) відхилення від імовірнішого значення, то середня квадратична похибка одиниці ваги визначаються за формулою

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\sum pv^2}{n-1}}, \qquad \textbf{(1.2.25)}$$

де $v_i = x_i - x_0$ (I = 1, 2, 3, … n).

Середню квадратичну похибку (m) вимірювання, що має вагу (p), знаходять за формулою

$$m = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p}}. \qquad \textbf{(1.2.26)}$$

Якщо відомі істинні випадкові похибки Δ_1, Δ_2, … Δ_n результатів вимірювань, то середні квадратичні похибки визначають за формулами

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta^2}{n}} \text{ – для рівноточних вимірювань;} \qquad \textbf{(1.2.27)}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}p\Delta^2}{n}} \text{ – для нерівноточних вимірювань.} \qquad \textbf{(1.2.28)}$$

Точність величини (m) за формулою 1.2.27

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}.$$

У практиці геодезичних робіт за одиницю ваги беруть:

1) при обробці результатів кутових вимірювань одним і тим же приладом:

- величини пропорційні кількості кожного кута;
- для суми кутів у ході, що має (n_i) вершин, $p_i = \frac{1}{n_i}$,

2) при обробці лінійних вимірювань, одним і тим самим вимірювальним приладом $p_i = \frac{1}{S_i}$, S_i – довжина лінії;

3) при визначенні перевищень із геометричного нівелювання – величини обернено пропорційні довжині ходів або кількості станцій;

4) при тригонометричному нівелюванні $p_i = \frac{1}{S_i^2}$, де S_i, – відстань між пунктами.

4. Ваги функцій виміряних величин

У геодезичній практиці часто доводиться визначати ваги величин, які не вимірювались, а є функціями виміряних величин.

Формули для ваг таких величин легко можна отримати із формул для середніх квадратичних похибок функцій.

Нам відомо, що $P = \frac{k}{m^2}$,звідки $m^2 = \frac{k}{P}$.

Припустимо, що k = 1, отримаємо $m^2 = \frac{1}{P}$.

Величину $\frac{1}{P}$ називають оберненою вагою.

Для визначення оберненої ваги функції загального виду $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ з урахуванням формули 1.2.15 знаходимо обернену вагу

$$\frac{1}{P_u} = \left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 \frac{1}{P_{x_1}} + \left(\frac{df}{dx_2}\right)^2 \frac{1}{P_{x_2}} + \cdots + \left(\frac{df}{dx_n}\right)^2 \frac{1}{P_{x_n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 \frac{1}{P_{x_i}}$$

. **(1.2.29)**

Приклад: визначити вагу функції u = $x\sqrt{px}$.

$$\frac{1}{P_u} = \left(\sqrt{P_x}\right)^2 \frac{1}{P_x} = 1, \qquad \textbf{(1.2.30)}$$

звідки P = 1.

Цей приклад показує, що якщо результат вимірювань помножити на корінь квадратний із його ваги, то вага добутку $x\sqrt{P_x}$ буде дорівнювати одиниці. Цей висновок використовують для переходу від нерівноточних вимірювань до рівноточних.

Маючи отримане співвідношення між вагою і відповідною середньою квадратичною похибкою, виведемо формули для ваг деяких функцій:

1. Лінійні функції. Функція $u = kx + c$

Для цієї функції маємо формулу

$$m_u^2 = k^2 m_x^2.$$

Замінивши в цій формулі квадрати похибок m_u^2 і m_x^2 відповідними оберненими вагами $\frac{1}{P_u}, \frac{1}{P_x}$, отримаємо

$$\frac{1}{P_u} = k^2 \frac{1}{P_x}$$

2. Функція $u = k_1 x + k_2 y + c$.

Для цієї функції $m^2 = k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_y^2$.

Аналогічно попередньому отримаємо $\frac{1}{P_u} = k_1^2 \frac{1}{P_x} + k_2^2 \frac{1}{P_y}$.

3. Функція $u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n + c$.

Підставимо у формулу $m_u{}^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \dots + k_n^2 m_n^2$:

$$\frac{1}{P_u} = k_1^2 \frac{1}{P_1} + k_2^2 \frac{1}{P_2} + \dots + k_n^2 \frac{1}{P_n} \qquad \textbf{(*)}$$

Окремий випадок

$$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n + c$$

На підставі (*) напишемо $\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P_1} + \frac{2}{P_2} + \dots + \frac{1}{P_n}$

Якщо всі вимірювання рівноточні, то

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P} + \frac{2}{P} + \dots + \frac{1}{P} = \frac{n}{P}.$$

§ 3. Обробка рядів вимірювань

1. *Обробка ряду рівноточних вимірювань однієї величини*

Припустимо, що деяка величина, істинне значення якої дорівнює (X), виміряна (n) разів; у результаті вимірювань отримано значення x_1, x_2, … , x_n, вільні від систематичних похибок. Випадкові похибки результатів вимірювань дорівнюють:

$$\boldsymbol{\Delta_1 = x_1 - X}$$

$$\boldsymbol{\Delta_2 = x_2 - X}$$

……………

$$\boldsymbol{\Delta_n = x_n - X}$$

Підсумуючи ліві та праві частини цих виразів, знаходимо $[\Delta] = [x] - nX$, звідки

$$X = \frac{[x]}{n} - \frac{[\Delta]}{n},$$

Останній доданок при великій кількості (n), на підставі 4-ї властивості, прямує до 0, тому:

$$X \approx \bar{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{x' + \varepsilon_1 + x' + \varepsilon_2 + \ldots + x' + \varepsilon_2}{n} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n}, \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

де, $\bar{x}$ − значення арифметичної середини;

x' − приблизне значення виміряної величини (зазвичай саме min);

ε_i– відхилення x_i від x', тобто $\varepsilon_i = x_i - x$, i = 1, 2, … n;

n – кількість вимірювань.

Формула 3.1 показує, що ймовірнішим є середнє арифметичне з результатів рівноточних вимірювань. Для визначення середньої квадратичної похибки арифметичної середини використовуємо формулу 2.15 :

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 m_{x_i}^2}\ .$$

Для більшої наочності перепишемо формулу 3.1 у вигляді виразу

$$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n};$$

$$M = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \ldots m_{x_n}^2\right)}.$$

Для рівноточних вимірювань $m_{x_1} = m_{x_2} = \cdots = m_{x_n}$, тому середня квадратична похибка арифметичної середини:

$$M = \sqrt{\frac{nm_x^2}{n^2}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}}. \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

Висновок: точність середнього арифметичного зростає зі збільшенням кількості вимірювань (n).

Для визначення за формулою 1.3.2 середньої квадратичної похибки (m_x) одного вимірювання за формулою Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$ виразимо $[\Delta^2]$ через $[v^2]$, де

$v_i = x_i - \bar{x}$ – відхилення виміряної величини від арифметичної середини $\bar{x}$. Підставимо в $\Delta_i = x_i - X$ замість x_i його значення $x_i = \bar{x} + v_i$, знаходимо $\Delta_i = \bar{x} - X - v_i$.

Підносимо до квадрата ліву та праву частини, після підсумування отримаємо:

$$\left[\Delta^2\right] = n\left(\bar{x} - X\right)^2 + \left[v^2\right] - 2\left(\bar{x} - X\right)[v] \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

Підсумуючи ліву і праву частини виразів

$v_1 = x_2 - \bar{x}$

$v_2 = x_2 - \bar{x}$

…………… , отримуємо $[v] = [x] - n\bar{x}$.

$v_n = x_n - \bar{x}$

Підставляємо замість $\bar{X}$ його значення із 1.3.1, маємо:

$$[v] = [x] - n\frac{[x]}{n} = 0,$$

тобто сума відхилень (v) дорівнює нулю при будь-якій кількості вимірювань (перша властивість похибок). Якщо при визначенні середнього арифметичного (x) має місце похибка заокруглення $\beta = \bar{x}_{заокруг} - x_{точн}$, то [v] = -nβ.

Після ділення лівої і правої частини рівняння 1.3.3 на (n) отримуємо:

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = (\bar{x} - X)^2 + \frac{[v^2]}{n}.$$

При великій кількості (n) значення істинної похибки арифметичної середини можна вважати рівним значенню M (формула 1.3.2). Враховуючи формулу Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, отримаємо:

$$m^2 = \left(\frac{m^2}{n}\right) + \left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right),$$

звідки знаходимо формулу Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

Для контролю обчислень $[v^2]$ використовують формулу $[v^2] = [\Sigma^2] - \frac{[\Sigma]^2}{n}$, де $\Sigma_1 = x_i - x'$; x' – приблизне значення вимірюваної величини (x).

Середні квадратичні похибки величини (m) і (M) визначають за формулами

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}. \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

Дано: результати десяти рівноточних вимірювань ліній.

Таблиця 1.3.1

i	l_i,м	$\varepsilon i = l_i -$ –110,385, мм	ε_i^2	ν_i, мм	ν_i^2	Обчислення
1	110,388	+3	9	+2	4	x'=110,385м; x=110,385+14/10=110,386м; m=218/9=4,9мм; $m_m=4,9/\sqrt{18}$=1,2мм $M=4,9/\sqrt{10}$=1,56мм; $m_M=1,5/\sqrt{20}$=0,3мм; $\bar{x}$=110,386м±1,6мм; Контроль: $\beta=\bar{x}_{закругл} - x_{точн}$= =110386−110386,4=−0,4мм; $[\nu]=-n\beta$=+4мм $[\nu^2]=[\Sigma^2]-[\Sigma]^2/n=236-14^2/10=216$
2	381	-4	16	-5	25	
3	394	+9	81	+8	64	
4	387	+2	4	+1	1	
5	385	0	0	-1	1	
6	110,379	-6	36	-7	49	
7	393	+8	64	+7	49	
8	386	+1	1	0	0	
9	382	-3	9	-4	16	
10	389	+4	16	+3	9	
	Σ	14	236	+4	218	

2. ***Оцінка точності за різницями подвійних рівноточних вимірювань***

Для контролю та підвищення точності кожну величину вимірюють декілька разів; часто обмежуються двома незалежними вимірами. В цьому випадку, обчисливши різниці по кожній парі вимірювань, знаходять:

$$d_1 = x_1 - x_1'$$

$$d_2 = x_2 - x_2'$$

…………….

$$d_n = x_n - x_n'$$

Значення (d_i) є істинними похибками різниць подвійних вимірювань, тому, використовуючи формулу Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, отримаємо :

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

де n – кількість усіх різниць.

Середня квадратична похибка одного вимірювання :

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

Кінцевим, більш надійним, вважають значення

$$\bar{x}_i = \frac{(x_i + x_i')}{2}.$$

При $m_{x_i} = m'_{x_i}$ маємо

$$m_{x_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \qquad . \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

Формули 1.3.6 – 1.3.8 застосовують, коли ряд подвійних вимірювань не має систематичних похибок. Якщо в результаті вимірювань є систематичні похибки, то в значеннях різниці d_i вони значно послаблюються, і в d_i увійдуть залишкові систематичні похибки. Враховуючи 4-ту властивість, величину залишкової систематичної похибки визначають як середнє арифметичне за формулою :

$$\theta = \frac{[d]}{n}. \qquad \textbf{(1.3.9)}$$

Критерієм допустимості θ є нерівність: $|[d]| \leq 0{,}25[|d|]$.

Розглянувши різницю $d_i' = d_i - \theta$ як відхилення від арифметичної середини, за формулою Бесселя 1.3.4 знаходимо

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \qquad \textbf{(1.3.10)}$$

Контролем обчислень служить формула [d’] = - nβ, де $\beta = \theta_{окр} - \theta$

Середні квадратичні похибки m_{x_i} (одного вимірювання) і $m_{\bar{x}_i}$ (арифметичної середини) визначається за формулами :

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}; \quad m_{\bar{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d^2]}{n-1}}. \qquad \textbf{(1.3.11)}$$

Приклад: у таблиці наведені перевищення між точками, визначені по чорній та червоній сторонах рейок. Обчислити середню квадратичну похибку m_{x_i} одного перевищення та $m_{\bar{x}_i}$ середнього перевищення по чорній і червоній сторонах рейок.

№ переви-щення	Перевищення		d, мм	d’ = =d – θ, мм	d’[2]	Обчислення
	Чорна сторона	Червона сторона				
1	+1,384	+1,382	+2	+3	9	Θ=[d]/n=-13/9=−1,44 мм Контроль: [d’]=−nβ=−9(-1+1,44)= =−4 мм; |[d]|=13>0,25[|α|]=6,75; відповідноθ неприпустима і її необхідно виключити зі значень d $m_{x_i}=\sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}=\sqrt{\frac{68}{2(9-1)}}=2{,}1$ мм $m_{\bar{x}_i}=\frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}}=\frac{2{,}1}{\sqrt{2}}=1{,}5$ мм
2	-0,817	-0,813	-4	-3	9	
3	+0,373	+0,370	+3	+4	14	
4	+0,448	+0,451	-3	-2	4	
5	+1,755	+1,758	-3	-2	4	
6	+0,211	+0,215	-4	-3	9	
7	+0,314	+0,317	-3	-2	4	
8	-0,227	-0,229	+2	+3	9	
9	+0,972	+0,975	-3	-2	4	
		Σ	-13	-4	68	

3. *Обробка результатів нерівноточних вимірювань однієї величини*

Припустимо, що при вимірюванні величини (x) отримані рівноточні значення $a_1, a_2, \dots, a_k$; $b_1, b_2, \dots, b_q$; $c_1, c_2, \dots, c_n$. Ймовірнішим, тобто найбільш надійним, значенням X є середня арифметична величина

$$x = \frac{a_1+a_2+\dots+a_k+b_1+b_2+\dots+b_q+c_1+c_2+\dots+c_n}{k+q+c}. \qquad \textbf{(1.3.12)}$$

Вирахувавши середнє арифметичне із кожної групи вимірювань, знаходимо:

$$x_1 = \frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k};\ x_2 = \frac{b_1+b_2+\dots+b_q}{q};\ x_n = \frac{c_1+c_2+\dots+c_n}{n} \qquad \textbf{(1.3.13)}$$

Використовуючи формулу для визначення оберненої ваги функції, для першої функції отримаємо:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{K^2}\left(\frac{1}{P_{a_1}} + \frac{1}{P_{a_2}} + \dots + \frac{1}{P_{a_K}}\right).$$

При P_{a_1} = P_{a_2} =…= P_{a_K} =1 маємо

$$\frac{1}{P_1} = \left(\frac{1}{k^2}\right)k = \frac{1}{k},$$

звідки P_1 = k. Аналогічно P_2 = q, … , P_n = n

Порядок обчислень при обробці ряду нерівноточних вимірювань

З урахуванням цих значень і формул 1.3.13 замість 1.3.12 знаходимо формулу загальної арифметичної середини

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[xp]}{[p]} = x' + \frac{[\varepsilon p]}{p}, \qquad \textbf{(1.3.14)}$$

де $\varepsilon_i = x_i - x'$.

Запишемо

$$v_1 = x_2 - \bar{x}$$

$$v_2 = x_2 - \bar{x}$$

……………

$$v_n = x_n - \bar{x}$$

Помножимо ліву та праву частини цих виразів на ваги $p_1, p_2, \dots, p_n$ вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_n$, після підсумування отримаємо [pv] = [px] – $\bar{x}$ [p].

Підставимо в це рівняння замість $\bar{x}$ його значення із виразу 1.3.14 та отримаємо

$$[pv] = 0. \qquad \textbf{(1.3.15)}$$

Якщо відхилення (v) обчислені з використанням заокругленого значення $x_{заокруг}$, то

$$[pv] = -\left(\bar{x}_{заокруг} - \bar{x}\right)[p] = -\beta[p]. \qquad \textbf{(1.3.16)}$$

Формулу 1.3.16 використовують для контролю правильності обчислень. Помноживши величини (x_i) на корінь квадратний із ваги цих величин, знайдемо $x_i' = x_i\sqrt{p_i}$ і з вагою, що дорівнює одиниці (приклад 2.30). Цей приклад показує, що якщо результат вимірювань помножити на корінь квадратний із його ваги, то вага добутку $x\sqrt{px}$ буде дорівнювати одиниці. Цей висновок використовують для переходу від нерівноточних вимірювань до рівноточних. Тобто нерівноточні вимірювання x_i зведені до рівноточних x'_i. У цьому випадку середня квадратична похибка одиниці ваги може бути визначена за формулою Гаусса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta'^2]}{n}} = \sqrt{\frac{\left(\Delta_1\sqrt{P_1}\right)^2 + \left(\Delta_2\sqrt{P_2}\right)^2 + \ldots + \left(\Delta_n\sqrt{P_n}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{[P\Delta^2]}{n}}, \quad \textbf{(1.3.17)}$$

де Δ_i – істинна помилка.

Якщо відомі ймовірніші помилки (v_i), то використовують формулу Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}} \text{ ,тоді маємо } \mu = \sqrt{\frac{[v'^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \qquad \textbf{(1.3.18)}$$

Для обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини скористаємося формулою 1.3.12, в яку входять рівноточні виміряні величини. В цьому випадку за формулою 1.3.2 отримаємо :

$$M = \frac{m}{\sqrt{k+q+\cdots+n}}.$$

Враховуючи, що ваги безпосередньо виміряних величин у формулі 1.3.12 однакові, приймемо $p = 1$, тоді середня квадратична похибка одиниці ваги $m = \mu$, $k+q+\ldots+n = p_1+p_2+\ldots+p_n = [p]$

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad \textbf{(1.3.19)}$$

Значення $[pv^2]$, що входить у формулу 3.18 обчислюють з контролем

$$[pv^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon^2]}{[p]}. \qquad \textbf{(1.3.20)}$$

Середня квадратична похибка значень μ та M визначаються за формулами:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad \textbf{(1.3.21)}$$

При великій кількості (n) значення (μ) обчислене за формулою 1.3.18 і прийняте при обчисленні ваг $\mu^2 = c$, тобто $\mu = \sqrt{c}$, повинні збігатися в межах похибки m_μ. Їхнє розходження на величину, більше ніж m_μ, вказує на наявність систематичних похибок. Кінцевий результат записують у вигляді $\bar{x} \pm M$.

Приклад : Відмітка (Н) точки отримана із семи нівелірних ходів. Дані наведені в таблиці.

Завдання : обчислити ймовірніше значення відмітки та провести оцінку точності.

№ ходу	Н, м	mH, мм	$p = \frac{10}{m^2 H}$	ε, мм	Pε	$P\varepsilon^2$	ν	pν	$p\nu^2$
1	103,751	5,8	0,30	+1	0,30	0,30	-0,9	-0,27	0,2
2	760	6,4	0,24	+10	2,40	24,00	+8,1	+1,94	15,7
3	748	5,0	0,40	-2	-0,80	1,60	-3,9	-1,56	6,1
4	755	9,1	0,12	+5	+0,60	3,00	3,1	+0,37	1,1
5	749	4,2	0,57	-1	-0,57	0,57	-2,9	-1,65	4,8
6	747	7,5	0,18	-3	-0,54	1,62	-4,9	-0,88	4,3
7	765	8,1	0,16	+15	2,40	36,00	-13,1	+2,10	27,5
	103,750	-	1,97	-	+3,79	67,09	-	+0,05	59,7

1. Вибираємо приближне значення вимірюваної величини х (загалом беруть найменше значення).
2. Обчислюємо середню квадратичну похибку ходу $p = \frac{10}{m^2 h}$.
3. Ухилення $\Sigma = x_i - \bar{x}$.
4. $\bar{x} = x' + \frac{[p\Sigma]}{[p]} = 103{,}750\text{м} + \frac{3{,}79}{1{,}97}\text{мм} = 103{,}7519$
5. $v = x_i - \bar{x}$.
6. $\beta = \bar{x}_{\text{заокруг}} - \bar{x}$ $\qquad \bar{x} = 103{,}7519$.

$\beta = -0{,}024$; $\qquad [pv] = -\beta[p] = +0?024 \cdot 1{,}97 = +0{,}05$ мм

$[pv^2] = [p\Sigma^2] - \frac{[p\Sigma]^2}{[p]} = 67{,}09 - \frac{3{,}79^2}{1{,}79} = 59{,}8;$

$$\mu = \sqrt{\frac{59,7}{(7-1)}} = 3,2\text{мм}; \quad m_\mu = \frac{3,2}{\sqrt{2(7-1)}} = 0,92\text{мм};$$

$$\sqrt{c} = 3,1$$

$$|\mu - \sqrt{c}| = 0,1 < m_\mu; \; M = \frac{3,2}{\sqrt{1,97}} = 2,3\text{мм};$$

$$m_\mu = \frac{0,92}{\sqrt{1,97}} = 0,66\text{мм}$$

Відповідь: x = 103,7591 ± 2,3 мм.

4. ***Оцінка точності за різницями подвійних нерівноточних вимірювань***

Припустимо, що відомі різниці вимірювань, рівноточні в кожній парі, але пари між собою нерівноточні.

Для різниці $d_i = x_i - x'_i$ за формулою 2.29 отримуємо

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \left(\frac{1}{p_{x_i}}\right) + \left(\frac{1}{p'_x}\right). \tag{1.3.22}$$

Позаяк $p_{x_i} = p'_{x_i}$, то $P_d = \frac{p_{x_i}}{2} + \frac{p'_{x_i}}{2}$

Оскільки d_i являються істинними помилками, то, згідно із формулою 1.3.17, при відсутності систематичних похибок отримаємо похибку одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{[\frac{p}{2}d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \tag{1.3.23}$$

Середні квадратичні похибки середніх значень $x_{i_{ср}} = \frac{(x_i + x'_i)}{2}$ визначаються за формулою :

$$m_{x_{i_{ср}}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\bar{x}_i}}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}},$$

$$m_{x_1} = \mu\sqrt{p\bar{x}_i} = \mu\sqrt{2p_i}$$

Оскільки $\frac{1}{p_{\bar{x}_i}} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{P_{\bar{x}_i}} + \frac{1}{P_{\bar{x}_i}}\right) = \frac{1}{2p_i}$; $P_{\bar{x}_i} = 2p_i$.

Якщо різниці d_i мають систематичні похибки, то величина

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]} \qquad \textbf{(1.3.24)}$$

буде відрізнятись від нуля.

В цьому випадку

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}} \qquad \textbf{(1.3.25)}$$

де $d_i' = d_i - \theta$

Питання для самоконтролю

1. Предмет і завдання курсу «Математична обробка геодезичних вимірів».
2. Основні поняття теорії похибок.
3. Суть вимірювального процесу. Кваліфікація вимірів.
4. Поняття «похибка», «поправка». Класифікація похибок.
5. Поняття розподілу та властивостей похибок.
6. Критерії точності вимірів.
7. Середні квадратичні похибки виміру та результату вимірів.
8. Суть методів обчислень СКП (формули Гаусса, Бесселя).
9. Поняття і суть середніх квадратичних похибок функцій виміряних величин.
10. Суть поняття «вага виміру».
11. Поняття ваги нерівноточного виміру.
12. Суть середньої квадратичної похибки одиниці ваги.
13. Зміст ваги функцій виміряних величин.
14. Обробка ряду рівноточних вимірів однієї величини.
15. Оцінка точності за різницями подвійних рівноточних вимірів.
16. Обробка ряду нерівноточних вимірів однієї величини.
17. Оцінка точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

§ 1. Параметричний метод розв'язування задач

1. *Загальні поняття про метод найменших квадратів*

У теорії помилок розглядають математичну обробку багаторазових вимірювань однієї і тієї ж величини. В практиці геодезичних обчислень виникає і більш загальна задача спільної обробки вимірювань, виконаних для визначення багатьох невідомих величин.

Отримання найбільш надійних значень цих величин та їхня оцінка точності є завданням зрівноважених обчислень. Зрівноваження виконується за методом найменших квадратів, відповідно до якого виміряні величини отримують поправки υ_i, що задовольняють умову $[p\upsilon^2]=\min$ для нерівноточних вимірювань, де p_i – вага вимірювань; $[\upsilon\ \upsilon]=\min$ для рівноточних вимірювань.

Виконання цих умов, як було теоретично доведено К.Ф. Гауссом та А.М. Марковим, приводить до найкращих оцінок шуканих величин. Задача зрівноваження виникає тому, що кількість вимірювань (n) у геодезичних побудовах завжди більша від кількості необхідних невідомих (k), для визначення яких і виконують ці роботи.

Наявність надлишкових вимірювань, кількість яких $\upsilon = n - k$, дозволяє виконати контроль вимірювань і зробити оцінку їхньої точності.

Доведено, що відношення ваги (P) зрівноваженого до ваги (p) незрівноваженого результату визначається формулою :

$$\frac{P}{p}=\frac{n}{n-v}=\frac{n}{k}>1.$$

Існують два основних способи зрівноваження : параметричний та корелатний.

У параметричному способі безпосередньо визначають зрівноважені значення невідомих – параметри, а в корелатному спочатку знаходять зрівноважені корелати, а за ними за допомогою функцій – невідомі. Обидва способи дають один і той ж самий результат, тому вибір способу зрівноваження в основному визначається найменшим об'ємом обчислень, необхідних для його реалізації. Крім двох основних способів, є ще комбіновані, що об'єднують достоїнства одного і другого.

2. Параметричний спосіб зрівноваження. Рівняння поправок і нормальні рівняння

Нехай як необхідні невідомі (параметри) вибрані (k) величин, точності значення яких позначимо через X_j (j = 1,2, …., k), що не мають між собою функціональних залежностей. Дійсні значення виміряних (n) величин, тобто Z_i, зв'язані з X_j параметричними рівняннями

$$Z_i = F_i (X_1, X_2, \dots X_k), \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

де $i = 1,2, ..,n;\ n > k$.

Систему рівнянь 2.1.1 називають вихідною системою зв'язку. Оскільки дійсні значення Z_i нам невідомі, то неможливо визначити точні значення X_j , але можна підібрати такі зрівноважені значення X_j, $Z_j = Z_i' + \upsilon$

(Z_i – виміряні величини, υ_i – поправки), при яких

$$Z_i' + \upsilon_i = F_i (x_1, x_2, \dots x_k)\ , \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

звідки отримуємо систему рівнянь поправок

$$F_i (x_1, x_2, \dots x_k) - Z_j' = \upsilon_i.$$

Припускаючи, що $x_j, = x_j, + \delta\ x_j^{\circ}$, де x_j° – приблизне значення невідомих, $\delta\ x_j$ – поправки до них, знаходимо

$$F_i (x_1^{\circ} + \delta\ x_1, x_2^{\circ} + \delta\ x_2, \dots X_k^{\circ} + \delta\ x_k) - Z_i = \upsilon_1 \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

Систему нелінійних рівнянь поправок 2.1.3 необхідно привести до лінійного виду. Для цього необхідно функцію 2.1.3 розкласти в ряд Тейлора з збереженням членів, що вміщують перші степені $\delta\ x_j$. У результаті отримаємо :

$$F_i\left(x_1^\circ, x_2^\circ, ...x_k^\circ\right) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)\delta x_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)\delta x_2 + ... + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k - Z_i = \upsilon_i .$$

Позначимо $a_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_1}; \quad b_1 = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_2};.........., q_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_k}$ **(2.1.4)**

$$\ell_i = F_i\left(x_1^\circ, x_1^\circ, ...x_k^\circ\right) - Z_i$$

де ℓ_i – вільний член,

отримаємо систему лінійних рівнянь поправок

$\upsilon_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + ...q_i\delta x_k + \ell_i$. **(2.1.5)**

Система 2.1.5. має (n) рівнянь з (n+k) невідомими ((n) поправок (υ) та (k) поправок (δx)), тобто є невизначеною. Із великої кількості розв'язків системи 2.1.5 найкращим буде той, для якого виконується принцип методу найменших квадратів – $[p\upsilon^2] = \min$. Підставимо замість (υ_i) його значення із 2.1.5. Отримаємо :

$\phi = [p\upsilon^2] = p_1 (a_1\ \delta x_1 + b_1\ \delta x_2 + \ .... q_1\ \delta x_k + \ell_1)^2 + p_2(a_2\ \delta x_1 + b_2\ \delta x_2 + \ .... q_2\ \delta x_k + \ell_2)^2 + ... + p_n (a_n\ \delta x_1 + b_n\ \delta x_2 + \ .... q_n \delta x_k + \ell_n)^2 =$
$= \min$. **(2.1.6)**

Для знаходження мінімуму функції 2.1.6. візьмемо часткові похідні та прирівняємо їх до нуля:

$\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} = 2\ p_1 (a_1\ \delta x_1 + b_1\ \delta x_2 + \ .... q_1\ \delta x_k + \ell_1)a_1 + 2\ p_2(a_2\ \delta x_1 + b_2\ \delta x_2 + \ .... q_2\ \delta x_k + \ell_2)a_2 + ... + 2\ p_n (a_n\ \delta x_1 + b_n\ \delta x_2 + \ .... q_n\ \delta x_k + \ell_n)a_n = 0,$

звідки, приводимо подібні члени і розділимо на 2, отримуємо :

$(p_1\ a_1\ a_1 + p_2\ a_2\ a_2 + ... + p_n\ a_n\ a_n)\ \delta x_1 + (p_1\ a_1\ b_1 + p_2\ a_2\ b_2 + ... + p_n\ a_n\ b_n)\ \delta x_2 + ... + (p_1\ a_1\ q_1 + p_2\ a_2\ q_2 + ... + p_n\ a_n\ q_n)\ \delta x_k + (p_1\ a_1\ \ell_1 + p_2\ a_2\ \ell_2 + ... + p_n\ a_n\ \ell_n) = 0.$

Аналогічно беремо часткові похідні по $x_{2,}$, ……x_k, отримуємо інші рівняння:

Q

$$[paa]\,\delta x_1 + [pab]\,\delta x_2 + [pac]\,\delta x_3 \ldots + [paq]\,\delta x_k + [pa\ell] = 0$$

$$[pab]\,\delta x_1 + [pbb]\,\delta x_2 + [pbc]\,\delta x_3 \ldots + [pbq]\,\delta x_k + [pb\ell] = 0 \qquad \textbf{(2.1.7)}$$

$$[pac]\,\delta x_1 + [pbc]\,\delta x_2 + [pcc]\,\delta x_2 \ldots + [pcq]\,\delta x_k + [pc\ell] = 0$$

……………………………………………………………….

$$[paq]\,\delta x_1 + [pbq]\,\delta x_2 + [pcq]\,\delta x_3 \ldots\ldots + [pqq]\,\delta x_k + [pq\ell] = 0$$

Q_1

Система 2.1.7. має (k) рівнянь із (k) невідомими, тобто є визначеною, рівняння цієї системи називаються *нормальними***.** По головній діагоналі Q Q_1 цієї системи розміщені квадратичні коефіцієнти, що виступають завжди додатними числами; неквадратичні коефіцієнти, розміщені симетрично відповідно до головної діагоналі, попарно рівні між собою.

[p a b] = [p b a] і т.д.

Для рівноточних вимірювань $p_i = 1$ і замість системи рівнянь (2.1.7.) отримуємо

$$[a\ a]\delta x_1 + [a\ b]\delta x_2 + [a\ c]\delta x_3 + \ldots\ldots + [a\ q]\delta x_k + [a\ \ell] = 0$$
$$[a\ b]\delta x_1 + [b\ b]\delta x_2 + [b\ c]\delta x_3 + \ldots\ldots + [b\ q]\delta x_k + [b\ \ell] = 0$$
$$[a\ c]\delta x_1 + [c\ b]\delta x_2 + [c\ c]\delta x_3 + \ldots\ldots + [c\ q]\delta x_k + [c\ \ell] = 0$$
……………………………………………………………….
$$[a\ q]\delta x_1 + [q\ b]\delta x_2 + [q\ c]\delta x_3 + \ldots\ldots + [q\ q]\delta x_k + [q\ \ell] = 0 \qquad \textbf{(2.1.8)}$$

Подальша задача полягає в розв’язанні системи нормальних рівнянь

Розв’язком системи рівнянь називається сукупність таких чисел $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …. $x_n = \alpha_n$, які при підстановці в рівняння системи перетворює їх у тотожності.

§ 2. Методи розв'язування нормальних рівнянь

1. Розв'язування системи нормальних рівнянь. Алгоритм Гаусса

Системи нормальних рівнянь розв'язують в основному способами Гаусса, квадратних коренів, невизначених коефіцієнтів та ітерацій – послідовних приближень. Розроблений Гауссом спосіб розв'язування нормальних рівнянь зводиться до послідовного виключення з неї всіх невідомих (δx_i). При цьому вихідна система змінюється так званою еквівалентною системою рівнянь.

Розглянемо спосіб Гаусса на прикладі розв'язування трьох нормальних рівнянь

$$[a\,a]\delta x_1 + [a\,b]\delta x_2 + [a\,c]\delta x_3 + [a\,\ell] = 0;$$
$$[a\,b]\delta x_1 + [b\,b]\delta x_2 + [b\,c]\delta x_3 + [b\,\ell] = 0;$$
$$[a\,c]\delta x_1 + [c\,b]\delta x_2 + [c\,c]\delta x_3 + [c\,\ell] = 0. \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Із першого рівняння системи 2.1.9 отримуємо

$$\delta x_1 = -\frac{[ab]}{[aa]}\delta x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}\delta x_3 - \frac{[a\ell]}{[aa]}. \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Підставляємо отримане значення δx_1 у друге і третє рівняння, отримуємо

$$[b\,b \cdot 1]\,\delta x_2 + [b\,c \cdot 1]\,\delta x_3 + [b\,\ell \cdot 1] = 0,$$

$$[b\,c \cdot 1]\,\delta x_2 + [c\,c \cdot 1]\,\delta x_3 + [c\,\ell \cdot 1] = 0, \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

де прийняті позначення, називаються алгоритмами Гаусса:

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab][ab]}{aa};\ [bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]};$$

$$[b\ell \cdot 1] = [b\ell] - \frac{[ab][a\ell]}{aa};\ [cc \cdot 1] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]};$$

$$[cl \cdot 1] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]}\ . \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

Цифра 1 в алгоритмах Гаусса означає, що після першого перетворення виключено перше невідоме. Із першого рівняння системи 2.2.3 знаходимо

$$\delta x_2 = -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\delta x_3 - \frac{[b\ell\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}. \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

Підставляючи його в друге рівняння системи 2.2.3, після невеликих перетворень отримуємо

$$[cc\cdot 2]\,\delta x_3 + [c\,\ell\cdot 2] = 0, \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

де

$$[cc\cdot 2] = [cc\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},$$

$$[c\ell\cdot 2] = [c\ell\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1][b\ell\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}. \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

Із рівняння 2.2.6 отримуємо $\delta x_3 = \frac{[-c\ell\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$. **(2.2.8)**

Рівняння (2.2.2), (2.2.5), (2.2.8) називаються ***елімінаціонними*** (від латинського слова elimino – виключати), а систему перетворених рівнянь

$$\begin{aligned} &[a\,a]\,\delta x_1 + [ab]\,\delta x_2 + [a\,c]\,\delta x_3 + [a\,\ell] = 0;\\ &[bb\cdot 1]\,\delta x_2 + [bc\cdot 1]\,\delta x_3 + [b\ell\cdot 1] = 0;\\ &[cc\cdot 2]\,\delta x_3 + [c\,\ell\cdot 2] = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.2.9)}$$

називають ***еквівалентною*** (рівнозначна). Дві системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними, якщо будь-який розв’язок кожної з них є розв’язком другої системи.

Отримання еквівалентної системи називають прямим ходом рішення системи нормальних рівнянь. Визначення невідомих із елімінаціонних рівнянь, починаючи із останнього, називають оберненим ходом розв’язку :

$$\delta x_3 = -\frac{[c\ell \cdot 2]}{[cc \cdot 2]};$$

$$\delta x_2 = -\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\delta x_3 - \frac{[b\ell \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}; \qquad \textbf{(2.2.10)}$$

$$\delta x_1 = -\frac{[ab]}{[aa]}\delta x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}\delta x_3 - \frac{[a\ell]}{[aa]}.$$

Наведену схему рішення нормальних рівнянь використовують і при більшій кількості розв’язків, при цьому застосовують правило розкриття алгоритму Гауса: алгоритм з цифрою k (наприклад, [d ℓ·3], k = 3) дорівнює алгоритму без цифри ([dℓ]) мінус (k) дробів, знаменники яких дорівнюють першим коефіцієнтом еквівалентної системи рівнянь ([a a], [bb·1], [cc·2] і т.д.), а чисельники – добуток двох алгоритмів з тою ж цифрою, що й у знаменнику, при цьому перший співмножник дорівнює добутку першої букви знаменника на першу букву алгоритму, що розкривається ([a d], [b d ·1], [c d ·2]), а другий – добуток другої букви знаменника на другу букву алгоритму, що розкривається ([a ℓ], [b ℓ ·1], [c ℓ ·2]), наприклад,

$$[d\ell \cdot 3] = [d\ell] - \frac{[ad][a\ell]}{[aa]} - \frac{[bd \cdot 1][b\ell \cdot 1]}{bb \cdot 1} - \frac{[cd \cdot 2][c\ell \cdot 2]}{[cc \cdot 2]};$$

$$[bd \cdot 1] = [bd] - \frac{[ad][cd]}{[aa]}; \qquad \textbf{(2.2.11)}$$

$$[cl \cdot 2] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}.$$

Можлива і неповна форма розкриття алгоритму, коли алгоритм з цифрою (k) дорівнює тому ж алгоритму з цифрою (k-1) мінус остання дріб в повній формі розкриття, наприклад,

$$[d\ell \cdot 3] = [d\ell \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2][c\ell \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \qquad \textbf{(2.2.12)}$$

При нерівноточних вимірюваннях до всіх алгоритмів Гаусса допускається буква (р).

2. Контроль складання та розв'язування нормальних рівнянь

Контроль складання та розв'язування нормальних рівнянь проводиться методом сум. У таблиці 2.2.1 в кожному рядку виписують коефіцієнти рівнянь поправок a_i, b_i, c_i, …, q_i, вільні члени (ℓ_i) та суми (S_i) = a_i + b_i, +c_i + …+ q_i + ℓ_i. Потім обчислюють суми по стовчиках та перевіряють правильність обчислень за формулою: [a]+[b]+[c]+ ….[q]+[ℓ]=[S].

Таблиця. 2.2.1

Таблиця коефіцієнтів рівнянь поправок

Номер рівняння	a_i	b_i	c_i	…	g_i	l_i	s_i	v_i
1	a_1	b_1	c_1	…	g_1	l_1	s_1	v_1
2	a_2	b_2	c_2	…	g_2	l_2	s_2	v_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	a_n	b_n	c_n	…	g_n	l_n	s_n	v_n
Сума	$[a]$	$[b]$	$[c]$	…	$[g]$	$[l]$	$[s]$	$[v]$
Невідомі	δx_1	δx_2	δx_3	…	δx_k	-	-	-
Контроль	$[av]$	$[bv]$	$[cv]$	…	$[gv]$	-	-	$[v'^2]$

У таблиці 2.2.2 обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця. 2.2.2

Таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь

	a]	b]	c]	…	g]	l]	s]	Контроль
[a	[aa]	[ab]	[ac]	…	[ag]	[al]	[as]	[aa]+[ab]+[ac]+…+[ag]+[al]==[as]; [ab]+[bb]+[bc]+…+[bg]+[bl]==[bs]; [ac]+[bc]+[cc]+…+[cg]+[cl]==[cs].
[b		[bb]	[bc]	…	[bg]	[bl]	[bs]	
[c			[cc]	…	[cg]	[cl]	[cs]	
					…………………			………………………………
[g					[gg]	[gl]	[gs]	[ag]+[bg]+[cg]+…+[gg]+[gl]==[gs]; [al]+[bl]+[cl]+…+[gl]+[ll]==[ls]; [as]+[bs]+[cs]+…+[gs]+[ls]==[ss].
[l						[ll]	[ls]	
[s							[ss]	

Коефіцієнти нормальних рівнянь отримуємо шляхом множення в табл. 2.2.2 елементів одного стовпчика на самих себе ([aa],[b b],[c c], ….[SS]) і на інші стовпчики ([a b], [a c], ,…. [ℓ S]) та послідовного їх підсумування.

У схемі Гаусса підсумування коефіцієнтів нормальних рівнянь для контролю виконують кутом. Наприклад, [c S] = [a c]+ [b c]+ [c c] стовпчика [c] + ….+[c q]+ [c ℓ]рядка [c].

У таблиці 2.2.3 наведена схема рішення нормальних рівнянь способом Гаусса, а також дано формули, за якими обчислюють більшість елементів схеми. Пояснення необхідні тільки для рядків 5, 10, 16.

У рядку 5 записують результати підсумування за стовпчиками елементів 3-го та 4-го рядків, отримують [b b·1], [b c·1], …, [b s·1].

У рядку 10 отримуємо результат складання рядків 7, 8, 9 по кожному стовпчику, знаходимо [cc·2], [ℓ c·2], …, [c s·2]., а в рядку 16 – результат сумування по стовпчиках елементів рядків 12,13, 14, 15, отримуємо [ℓ ℓ ·3] та [ℓs·3].

При кількості невідомих $k \le 10$ коефіцієнти нормальних та еквівалентних рівнянь обчислюють до 0,01; коефіцієнти елімінаційних рівнянь і невідомі – до 0,001; значення $\frac{1}{[aa]}$, $\frac{1}{[bb \cdot 1]}$ і т.д. – до 0,0001. Розходження контрольних сум еквівалентних рядків допускається до 0,01 – 0,02 . Контроль розв'язків нормальних рівнянь виконується за формулами, наведеними в табл. 2.13 у стовпчику контроль.

Завершальним контролем прямого ходу розв'язування в схемі Гаусса є дотримання рівності $[\ell\ \ell \cdot k] = [\ell\ s \cdot k] = [s\ s \cdot k]$ або $[p\ell\ell \cdot k] = [p\ell\ s \cdot k] = [ps\ s \cdot k]$. Закінчивши прямий хід розв'язку, обчислюють невідомі δx_j, після чого обчислюють за формулою 2.1.5 :

$\upsilon_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \ldots + q_i\delta x_k + \ell_i$

поправки υ_i та контролюють їх обчислення за формулами

$[a\upsilon] = [b\upsilon] = \ldots = [q\upsilon] = 0$ або $[pa\upsilon] = [pb\upsilon] = \ldots = [pq\upsilon] = 0$, крім того,

$[a\upsilon] = [b\upsilon] = \ldots = [q\upsilon] = 0$ або $[pa\upsilon] = [pb\upsilon] = \ldots = [pq\upsilon] = 0$, крім того,

$[\upsilon^2] = [\ell\ \ell \cdot k] = [\ell\ s \cdot k]$;

$[p\upsilon^2] = [p\ell\ \ell \cdot k] = [p\ell\ s \cdot k]$. **(2.2.13)**

Таблиця. 2.2.3

Таблиця розв'язків нормальних рівнянь способом Гаусса

№ рядка	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	*Контроль*
1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	$[aa]+[ab]+[ac]+[al]=[as]$
2	$\left(-\frac{1}{[aa]}\right); -1$	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$	$-1-\frac{[ab]}{[aa]}-\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[as]}{[aa]}$
3		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	$[ab]+[bb]+[bc]+[bl]=[bs]$
4		$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[as]}{[aa]}[as]$	
5		$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$	$[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+[bl\cdot 1]=[bs\cdot 1]$
6		$\left(-\frac{1}{[bb\cdot 1]}\right); -1$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-1-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
7			$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	$[ac]+[bc]+[cc]+[cl]=[cs]$
8			$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[as]$	
9			$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bs\cdot 1]$	
10			$[cc\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$	$[cc\cdot 2]+[cl\cdot 2]=[cs\cdot 2]$
11			$\left(-\frac{1}{[cc\cdot 2]}\right); -2$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-1-\frac{[sl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
12					$[ls]$	$[al]+[bl]+[cl]+[ll]=[ls]$
13				$-\frac{[illegible]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[al]}{[aa]}[as]$	
14				$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bs\cdot 1]$	
15				$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cl\cdot 2]$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cs\cdot 2]$	
16				$[ll\cdot 3]$	$[ll\cdot 3]$	$[ll\cdot 3]=[ls\cdot 3]$
17			$\delta x_3=$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$		
18		$\delta x_2=$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\delta x_3$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$		
19	$\delta x_1=$	$-\frac{[ab]}{[aa]}\delta x_2$	$-\frac{[ac]}{[aa]}\delta x_3$	$-\frac{[al]}{[aa]}$		

Замість повної схеми табл. 2.2.3 доцільно використовувати скорочену схему Гаусса (табл. 2.2.4),

Таблиця. 2.2.4

Таблиця скороченої схеми розв'язування нормальних рівнянь способом Гаусса

Номер рядка	Назва рівняння	δx_1	δx_2	δx_3	l	s
1	H_1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$
2	$Ел_1$	(-1)	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$
3	H_2		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$
4	$Ек_2$		$[bb \cdot 1]$	$[bc \cdot 1]$	$[bl \cdot 1]$	$[bs \cdot 1]$
5	$Ел_2$		(-1)	$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$
6	H_3			$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$
7	$Ек_3$			$[cc \cdot 2]$	$[cl \cdot 2]$	$[cs \cdot 2]$
8	$Ел_3$			(-1)	$-\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$	$-\frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$
9	H_4				$[ll]$	$[ls]$
10	$Ек_4$	δx_1	δx_2	δx_3	$[ll \cdot 3]$	$[ls \cdot 3]$ $[ss \cdot 3]$

в якій не роблять проміжні записи. При цьому коефіцієнти нормальних рівнянь необхідно зразу після їх обчислень записати в схему Гауса, тоді відпадає необхідність заповнювати табл. 2.2.2.

У рядки скороченої схеми таблиці 2.2.4 записують коефіцієнти рівнянь: нормальних (Н), елімінаціонних (Ел) та еквівалентних (Ек). Порядок заповнення рядків (Н) та (Ел) очевидний та не потребує пояснень. Коефіцієнти еквівалентних рівнянь (рядки Ек) обчислюють методом накопичення сум, використовуючи наступне правило: коефіцієнт еквівалентного рівняння в рядку (i) та стовпчику (k) дорівнює коефіцієнту нормального рівняння, розміщеного над ним у цьому ж стовпчику (k), плюс сума добутку коефіцієнтів елімінаціонних рівнянь рядка (рядки Ел) в стовпчику квадратичного коефіцієнта розв'язуваного рівняння на коефіцієнти рівнянь, розміщених над ними в стовпчику (k).

Наприклад : коефіцієнт еквівалентного рівняння в рядку i = 7 та стовпчик k = 4

$$[c\ell \cdot 2] = [c\ell] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\ell] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[b\ell \cdot 1].$$

Невідоме (x_j) дорівнює числу j-го елімінаціонного рядка зі стовпчика (ℓ) плюс сума добутку вже обчислених невідомих (δx) на розміщені над ними числа з цього ж елімінаціонного рядка, наприклад

$$\delta x_2 = -\frac{[b\ell \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\delta x_3 .$$

При зрівноваженні нерівноточних вимірювань порядок обчислень залишається таким же, але в табл. 2.3.1 елементи кожного рядка множать на відповідну вагу. Наприклад, елементи рядка 1 – на p_1, рядки ℓ – на p_2 і т.д. Крім того, нерівноточні вимірювання можна привести до рівноточних шляхом множення на корінь квадратний із його ваги. Рівняння поправок у цьому випадку аналогічні формулі 2.1.5

$$\upsilon_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \ldots + q_i\delta x_k + \ell_i$$

та мають вигляд $\upsilon_i' = a'_i\delta x_1 + b'_i\delta x_2 + \ldots + q'_i\delta x_k + \ell'_i$,

де $\upsilon_i' = \upsilon_i\sqrt{p_i}$, $a'_i = a_i\sqrt{p_i}$, $b'_i = b_i\sqrt{p_i}$, ….., $q'_i = q_i\sqrt{p_i}$, $\ell_i' = \ell_i\sqrt{p_i}$.

При цьому зберігаються всі формули та схеми, отримані для рівноточних вимірювань, якщо коефіцієнти, a_i, b_i, …, q_i та вільний член ℓ_i замінити на a'_i, b'_i, …, q'_i, ℓ_i'.

У кінці обчислень визначають поправки $\upsilon_i = \dfrac{\upsilon'}{\sqrt{p_i}}$.

§ 3. Оцінка точності результатів зрівноваження параметричним методом

1. Оцінка точності зрівняних значень невідомих

Після визначення зрівняних значень невідомих виконують оцінку їхньої точності, тобто обчислюють середні квадратичні похибки вимірювань та зрівняних невідомих, що є функціями виміряних величин. У загальному випадку середню квадратичну похибку (m_i) будь-якої величини визначають за формулою

$$m_i = \mu\sqrt{\frac{1}{p_i}}, \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

де μ – середня квадратична похибка одиниці ваги;
p_i – вага оцінюваної величини.

Значення μ знаходять за формулою :

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\upsilon^2]}{n-k}}, \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

де (n - k) – кількість надмірно виміряних величин.

Для обчислення ваг невідомих можна використовувати формулу

$$\frac{1}{p_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{px_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{px_2} + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{px_n} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{1}{px_i} \qquad \textbf{(2.3.2.a)}$$

попередньо визначивши функціональну залежність між оцінюваною величиною та результатами вимірювань $x_1, x_2, \dots x_n$, тобто $u = f(x_1, x_2, \dots x_n)$.

Для вираження невідомих (δx) у вигляді лінійних функцій вільних членів нормальних рівнянь або безпосередньо виміряних величин використовують спосіб невизначених множників.

У випадку рівноточних вимірювань треба помножити перше нормальне рівняння на Q_{11} , друге – на Q_{12}, третє – на Q_{13}, маємо

$$\begin{aligned}&([aa]\delta x_1+[ab]\delta x_2+[ac]\delta x_3+.....+[a\ell])Q_{11}=0;\\&([ab]\delta x_1+[bb]\delta x_2+[bc]\delta x_3+......+[b\ell])Q_{12}=0;\\&([ac]\delta x_1+[bc]\delta x_2+[cc]\delta x_3+.......+[c\ell])Q_{13}=0.\end{aligned} \quad \textbf{(2.3.3)}$$

Після додавання та невеликих перетворень знаходимо:

$$\begin{aligned}&([aa]Q_{11}+[ab]Q_{12}+[ac]Q_{13}+....)\delta x_1+([ab]Q_{11}+[bb]Q_{12}+[bc]Q_{13}+....)\delta x_2+\\&([ac]Q_{11}+[bc]Q_{12}+[cc]Q_{13}+....)\delta x_3+[a\ell]Q_{11}+[b\ell]Q_{12}+[c\ell]Q_{13}+....=0.\end{aligned} \quad \textbf{(2.3.4)}$$

Враховуючи невизначеність множників Q_{ij} , дамо їм такі значення, щоб

$$\begin{aligned}&[aa]Q_{11}+[ab]Q_{12}+[ac]Q_{13}+...=1,\\&[ab]Q_{11}+[bb]Q_{12}+[bc]Q_{13}+...=0,\\&[ac]Q_{11}+[bc]Q_{12}+[cc]Q_{13}+...=0,\end{aligned} \quad \textbf{(2.3.5)}$$

....

В цьому випадку

$$\delta x_1=-([a\ell]Q_{11}+[b\ell]Q_{12}+[c\ell]Q_{13}+....). \quad \textbf{(2.3.6)}$$

Використовуючи коефіцієнти Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, та Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, аналогічно знаходимо

$$\begin{aligned}&\delta x_2=-([a\ell]Q_{21}+[b\ell]Q_{22}+[c\ell]Q_{23}+......),\\&\delta x_3=-([a\ell]Q_{31}+[b\ell]Q_{32}+[c\ell]Q_{33}+.....)\end{aligned} \quad \textbf{(2.3.7)}$$

при умові

$$\begin{aligned}&[aa]Q_{21}+[ab]Q_{22}+[ac]Q_{23}+...=0,\\&[ab]Q_{21}+[bb]Q_{22}+[bc]Q_{23}+...=1,\\&[ac]Q_{21}+[bc]Q_{22}+[cc]Q_{23}+...=0.\end{aligned} \quad \textbf{(2.3.8)}$$

$$\begin{aligned}&[aa]Q_{31}+[ab]Q_{32}+[ac]Q_{33}+...=0,\\&[ab]Q_{31}+[bb]Q_{32}+[bc]Q_{33}+....=0,\\&[ac]Q_{31}+[bc]Q_{32}+[cc]Q_{33}+...=1.\end{aligned} \quad \textbf{(2.3.9)}$$

Невизначені множники (Q) дозволяють оцінити точність отриманих значень невідомих та їхніх функцій. Величини (Q) є ваговими коефіцієнтами, що можна довести так. Замість 2.4.6 запишемо

$$\delta x_1 = -(a_1 Q_{11} + b_1 Q_{12} + c_1 Q_{13})\ell_1 - (a_1 Q_{11} + b_2 Q_{12} + c_2 Q_{13})\ell_2 - (a_3 Q_{11} + b_3 Q_{12} + c_3 Q_{13})\ell_3 - \\ - \ldots\ldots = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \alpha_3 \ell_3 + \ldots, \qquad \textbf{(2.3.10)}$$

де

$$\alpha = -(a_i Q_{11} + b_i Q_{12} + c_i Q_{13}). \qquad \textbf{(2.3.11)}$$

Помноживши послідовно ліву та праву частини рівняння 2.5.1 на a_1, a_2, a_3,... і додаючи результати, з врахуванням першого рівняння 2.4.5, отримуємо

$$[a\alpha] = -([aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13}) = -1 \qquad \textbf{(2.3.12)}$$

Аналогічно, використовуючи коефіцієнти b_1,b_2,b_3, і c_1,c_2,c_3, знаходимо

$$[b\alpha] = [c\alpha] = 0. \qquad \textbf{(2.3.13)}$$

Потім, помноживши ліву та праву частини 2.5.1 на α_1, α_2, α_3,.... та додавши результати, з врахуванням 2.5.2. і 2.5.3, знаходимо

$$[\alpha\alpha] = -([a\alpha]Q_{11} + [b\alpha]Q_{12} + [c\alpha]Q_{13}) = Q_{11}. \qquad \textbf{(2.3.14)}$$

Згідно із формулою 2.4.2.а, обернена вага лінійної функції 2.5.0 в якій вільні члени (ℓ_i) виконують роль результатів вимірювань (ℓ_i – різниця між приблизним та виміряним значеннями величини, тому вага ℓ_i дорівнює вазі результату виміру), визначається із виразу

$$\frac{1}{P\delta x_1} = \frac{\alpha_1^2}{p\ell_1} + \frac{\alpha_2^2}{p\ell_2} + \frac{\alpha_3^2}{p\ell_3} + \ldots\ldots = \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]. \qquad \textbf{(2.3.15)}$$

Для рівноточних вимірювань p_1= p_2=.....=1, тому з урахуванням 2.5.4

$$\frac{1}{P\delta x_1} = [\alpha\alpha] = Q_{11} \quad \textbf{(2.3.16)}$$.

Аналогічно отримуємо

$$\frac{1}{P\delta x_2} = Q_{22}, \frac{1}{p\delta x_3} = Q_{33} \quad \textbf{(2.3.17)}$$.

Вагові коефіцієнти Q_{11}, Q_{22},... з однаковими індексами називають квадратичними, вони є оберненими вагами зрівняних значень невідомих із відповідним індексом: Q_{11} – обернена вага першого невідомого, Q_{22} – другого і т.д. Квадратичні коефіцієнти завжди позитивні. Неквадратичні коефіцієнти Q_{ij} володіють властивістю симетрії відносно головної діагоналі $Q_{ij} = Q_{ji}$, виражають залежність між зрівняними невідомими (i) та (j), можуть бути додатними та від'ємними. Вагові рівняння типу 2.4.5, 2.4.8, 2.4.9 розв'язують одночасно з нормальними рівняннями. Значення вільних членів кожної системи вагових рівнянь заносять у додатковий стовпчик. Обчисливши обернені ваги невідомих, обчислюють їхні середні квадратичні похибки

$$m_i = \mu\sqrt{\frac{1}{P_i}} = \mu\sqrt{Q_{ii}} \quad \textbf{(2.3.18)}$$,

де μ похибка одиниці ваги, що визначається за формулою

$$\mu = m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{(n-k)}} , \quad \textbf{(2.3.19)}$$

звідки $m_{xi} = m\sqrt{Q_{ii}}$.

Для нерівноточних вимірювань

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} , \quad \textbf{(2.3.20)}$$

де (n – k) – кількість надмірних вимірювань.

2. *Оцінка точності функцій зрівноважених невідомих*

Часто виникає необхідність оцінювати точність функцій зрівноважених невідомих. Для функції

$$F = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \textbf{(2.3.21)}$$

де x_i – зрівняні невідомі, обернену вагу можна знайти за формулою

$$\frac{1}{P_F} = \sum f_j^2 Q_{jj} + 2\sum f_i f_j Q_{ij},$$

де $f_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right), ij = 1,2,\ldots,k.$ **(2.3.22)**

Якщо вагові коефіцієнти не відомі, то

$$\frac{1}{P_F} = -\frac{f_1^2}{[aa]} - \frac{[f_2^2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[f_3^2 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \ldots\ldots - \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[qq \cdot (k-1)]}, \quad \textbf{(2.3.23)}$$

в деякі алгоритми

$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1, [f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[f_2 \cdot 1]$ і т.д. Ясно, що окремі доданки формули 2.6.3 можна отримати у схемі рішення Гаусса шляхом введення додаткового стовпчика ℓ, якщо умовно вважати, що f_1=[aℓ], f_2=[bℓ],…, f_1=[aℓ], f_k=[qℓ], f_{k+1}= 0.

При цьому вказані алгоритми Гаусса, що мають одну букву, розкриваються так само, як і алгоритми [bℓ·1], [cℓ·2] і т.д. Для контролю обчислень служить формула.

$$-\frac{1}{P_F} = [f] - \frac{\sum_1 f_1}{[aa]} - \frac{[\sum_2 \cdot 1][f_2 \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \ldots\ldots - \frac{[\sum_k \cdot (k-1)][f_k \cdot (k-1)]}{[qq \cdot (k-1)]}, \quad \textbf{(2.3.24)}$$

в якій знову введені суми

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_1 = [as] - [a\ell] + f_1,\\
&\textstyle\sum_2 = [bs] - [b\ell] + f_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\textstyle\sum_k = [qs] - [q\ell] + f_k\ .
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.3.25)}$$

Середня квадратична похибка функції $m_F = \mu\sqrt{\dfrac{1}{P_F}}$. **(2.3.26)**

Матричні формули зрівноваження параметричним способом

Рівняння поправок 2.1.5

$$v_i = a_i\delta_{x_1} + b_i\delta_{x_2} + \cdots + q_i\delta_{x_k} + l_i$$

можна записати у вигляді v=AΔx+L

де вектори

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ --- \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ --- \\ l_n \end{pmatrix}, \qquad \Delta x = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ --- \\ \delta x_n \end{pmatrix},$$

а матриця $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 --- & q_1 \\ a_2 & b_2 --- & q_2 \\ --- & --- & --- \\ a_n & b_n & q_n \end{pmatrix}$

Увівши діагональну матрицю ваг

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & --- & \\ & & & P_n \end{pmatrix},$$

нормальні рівняння запишемо у вигляді

$$R\Delta x + b = 0 \quad , \qquad \textbf{(2.3.27)}$$

де матриця

$$R = A^T P A = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] \dots & [paq] \\ \dots & \dots & \dots \\ [paq] & [pbq] \dots & [pqq] \end{bmatrix}, \qquad (2.3.28)$$

а вектор вільних членів $\quad b = \begin{bmatrix} [pab] \\ [pbl] \\ \dots \\ [pql] \end{bmatrix}.$

У випадку рівноточних вимірювань матриця P = O (од.) :

$$O = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

де O – одинична матриця.

Виразам 2.4.6 та 2.4.7 відповідає матрична формула

$$\Delta x = -R^{-1} b = -Qb, \qquad (2.3.29)$$

де Q обернена по відношенню до R матриці

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} \dots & Q_{kk} \end{pmatrix}$$

Оскільки за властивостями оберненої матриці RQ = O (одиничні), то одразу за описаним раніше способом обчислення вагових коефіцієнтів – рішення k систем виду $RQj - O_{(\text{одинич})}j = O_{(\text{нулю})}$, де Qj = j-й стовпчик матриці Q.

При оцінці точності одразу декількох функцій отримуємо матрицю $Q_F = fQf^T$, діагональні елементи якої відповідають оберненим вагам (2.5.2), тобто

$$\frac{1}{P_F} = \Sigma f_j^2 Q_{ij} + 2\Sigma f_i f_j Q_{ij}. \qquad (2.3.30)$$

3. *Складання нормальних рівнянь способом вузлів В.В. Попова*

При зрівноваженні нівелірних та полігометричних мереж В.В. Попов запропонував складати нормальні рівняння за схемою мережі, використовуючи такі правила:

а) квадратичні коефіцієнти в іншому нормальному рівнянні дорівнюють сумі ваг ходів, що сходяться у вузлі з номером (i);

б) неквадратичні коефіцієнти в іншому нормальному рівнянні в стовпчику (ji) дорівнюють від'ємній вазі ходу між вузлами (i) та (j);

в) вільні члени нормальних рівнянь дорівнюють сумі величин ($p\ell$) ходів, що сходяться у вузлі (i); ($p\ell$) має знак „+", якщо вузол (i) є кінцевою точкою ходу, та „ –", якщо початковою.

Для нівелірної мережі (у нашому прикладі) отримаємо нормальні рівняння

$(p_1+ p_2+ p_5+ p_7)\delta x_1-p_5\, \delta x_2- p_2\, \delta x_3+(p_1\ell_1+ p_2\ell_2+ p_5\ell_5+ p_7\ell_7) = 0;$

$- p_5\, \delta x_2+(p_3+ p_4+ p_5)\, \delta x_2 – p_3\, \delta x_3 +(p_3\ell_3- p_4\ell_4 - p_5\ell_5) = 0;$

$- p_2\, \delta x_1 - p_3\, \delta x_3 + (p_1+ p_2+ p_6)\, \delta x_3 + (p_2\ell_2 – p_3\ell_3+ p_6\ell_6) = 0.$

Підставляючи в ці рівняння значення ваг із табл. 2.4.1 та (ℓ) і з табл. 2.4.2, знаходимо : $4{,}46\, \delta x_1- 0{,}8\, \delta x_2-1{,}10\, \delta x_3 +12{,}14 = 0$

$- 0{,}85\, \delta x_1 + 3{,}06\, \delta x_2 – 1{,}20\, \delta x_3 – 6{,}27 = 0;$

$- 1{,}10\, \delta x_1 – 1{,}20\, \delta x_2 +3{,}71\, \delta x_3 +4{,}08 = 0.$

Тобто отримаємо нормальні рівняння, обчислені звичайним методом.

§ 4. Приклади зрівноваження параметричним способом

1. Зрівноваження рівноточних вимірів параметричним методом

У таблиці 2.4.1 наведені результати вимірювань кутів у всіх комбінаціях. Необхідно зрівноважити ці результати параметричним способом.

Таблиця 2.4.1

Результати вимірювання кутів у всіх комбінаціях

Порядковий номер	Кути	Виміряні кути	Невідомі	Зрівноважені кути
1	1,2	$37^0 51'17,8''$	x_1	$37^0 51'17,15''$
2	1,3	$69^0 11'28,1''$	x_1+x_2	$69^0 11'28,82''$
3	1,4	$113^0 13'53,4''$	$x_1+x_2+x_3$	$113^0 13'53,32''$
4	2,3	$31^0 20'11,9''$	x_2	$31^0 20'11,68''$
5	2,4	$75^0 22'36,6''$	x_2+x_3	$75^0 22'36,18''$
6	3,4	$44^0 02'24,0''$	x_3	$44^0 02'24,50''$

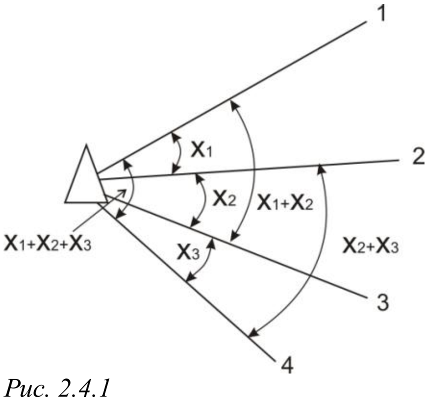

Рис. 2.4.1

<u>Порядок зрівноваження</u>

І. Вибираємо як незалежні невідомі (параметри) x_1, x_2, x_3 – відповідно перший і другий та третій кути. Тоді інші три кути, що залежать від перших трьох, будуть являти собою суму незалежних невідомих.

II. Записуємо рівняння поправок у загальному вигляді:

$$\delta x_1 + l_1 = v_1;$$
$$\delta x_1 + \delta x_2 + l_2 = v_2;$$
$$\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + l_3 = v_3; \qquad \textbf{(2.4.1)}$$
$$\delta x_2 + l_4 = v_4;$$
$$\delta x_2 + \delta x_3 + l_5 = v_5;$$
$$\delta x_3 + l_6 = v_6.$$

III. Уведемо приблизні значення невідомих, прирівнявши їх рівними виміряними кутами x_1, x_2, x_3 :

$$x_1^0=37^0 51'17{,}8'';$$
$$x_2^0=31^0 20'11{,}9''; \qquad \textbf{(2.4.2)}$$
$$x_3^0=44^0 02'24{,}0''.$$

IV. На підставі формули (2.1.4) $l_i=F_i(x^0_1,x^0_2,x^0_3\ldots x^0_k) - Z_i$ обчислимо вільні члени l_i як різниці приблизних значень кутів і виміряних кутів.

$$l_1= l_4= l_6=0;$$
$$l_2=x^0_1+x^0_2-1.3=+1.6''; \qquad \textbf{(2.4.3)}$$
$$l_3= x^0_1+x^0_2+x^0_3-1.4=+0.3'';$$
$$l_4= x^0_2+x^0_3-2.4=-0.7''.$$

V. За рівнянням 2.4.1 складемо таблицю 2.4.2 коефіцієнтів рівнянь поправок і нормальних рівнянь.

Таблиця 2.4.2

Таблиця коефіцієнтів рівнянь поправок і нормальних рівнянь

Порядковий номер	a	b	c	l	S	v
1	+1				+1	-0.65
2	+1	+1		+1.6	+3.6	+0.72
3	+1	+1	+1	+0.3	+3.3	-0.08
4		+1			+1	-0.22
5		+1	+1	-0.7	+1.3	-0.42
6			+1		+1	+0.50
Σ	+3	+4	+3	+1.2	+11.2	$[v^2]=1.422$

У таблиці 2.4.3 дано розв’язки рівнянь за скороченою схемою Гаусса.

У додаткових стовпчиках l_1, l_2, l_3 (табл. 2.4.3) подано розв’язки вагових рівнянь: (2.4.5, 2.4.8, 2.4.9), які виконуються одночасно з розв’язанням нормальних рівнянь у такій послідовності : якщо стовпчик l замінити стовпчиком l_1, потім l_2, а потім стовпчиком l_3.

Вагові коефіцієнти:

$$\begin{bmatrix} +0.500 & -0.250 & 0 \\ -0.250 & +0.500 & -0.250 \\ 0 & -0.250 & +0.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(2.4.4)}$$

Обчислюються за тими самими формулами, що й невідомі δx_j. Перетворивши за схемою Гаусса стовпчик l_1, l_2, l_3

спочатку в 3-й стовпчик матриці вагових коефіцієнтів з елімінаціонного рядка (Ел 3) виписують значення

Q_{13}= 0 зі стовпчика l_1;

Q_{23} = -0.250 зі стовпчика l_2;

Q_{33} = +0.500 зі стовпчика l_3.

Після того послідовно множать отримані значення Q_{13}, Q_{23}, Q_{33} на коефіцієнт -0.500 елімінаційного рівняння Ел 2 в стовпчиках δx_3 (рядок 5) та додають до кожного результату значення коефіцієнтів цього ж рядка 5 в стовпчиках l_1 (-0.250), l_2 (+0.375) та l_3 (0). Отримуємо:

Q12=0(-0.500) – 0.250 = - 0.250;

Q22=-0.250(-0.500) + 0.375 = +0.500;

Q32=+0.500(-0.500) + 0 = -0.250.

Далі множимо обчислені коефіцієнти в кожному рядку матриці на коефіцієнти рівняння Ел 1 в рядку 2 та в стовпчиках δx_2 та δx_3 та добавляємо до результату коефіцієнт цього ж рядка послідовно в стовпчиках l_1 (+0.333), l_2 (0), l_3 (0). Знаходимо

Q11=-0.250(-0.667)+0(-0.333)+0.333=0.500;

Q21=0.500(-0.667)-0.250(-0.333)+0=-0.250;

Q31=-0.250(0.667)+0.500(-0.333)+0=0.

Таблиця 2.4.3

Таблиця розв'язків нормальних рівнянь за скороченою схемою Гаусса

Порядковий номер	Назва рівнянь	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль	l_1	l_2	l_3	f_1	Σ_1	t_2	Σ_2
1	Н1	+3.00	+2.00	+1.00	+1.90	+7.90	+7.90	-1.00	0	0	+1.00	+7.00	0	+6.00
2	Эл1	-1	0.667	-0.333	-0.633	-2.633	-2.633	+0.333	0	0	-0.333	-2.333	0	-2.00
3	Н2		+4.00	+2.00	+1.20	+9.20	+9.20	0	-1.00	0	+1.00	+9.00	0	+8.00
4	Эк2		+2.666	+1.333	-0.067	+3.932	+3.932	+0.667	-1.00	0	+0.333	+4.331	0	+4.00
5	Эл2		-1	-0.500	+0.025	-1.474	-1.475	-0.250	+0.375	0	-0.125	-1.625	0	-1.500
6	Н3			+3.00	-0.40	+5.60	+5.60	0	0	-1.00	+1.00	+7.00	+1.00	+7.00
7	Эк3			+2.00	-1.00	+1.00	+1.00	0	+0.50	-1.00	+0.50	+2.50	+1.00	+3.00
8	Эл3			-1	+0.500	-0.500	-0.500	0	-2.50	+0.500	-0.250	-1.252	-0.500	-1.500
9	Н4				+3.14	+5.84	+5.84							
10	Эк4				+1.44	+1.44	+1.44				0.50	-0.50	-0.50	-0.50
11	Н5				+28.54	+28.54	+28.54							
12	-					+1.44								
		-0.650	-0.225	+0.500										

Середня квадратична похибка

$$m_{xj} = \mu\sqrt{Q_{jj}}; \qquad \mu=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \qquad \textbf{(2.4.5)}$$

При рівноточних вимірюваннях

$$m_{xj} = m\sqrt{Q_{jj}}; \qquad m=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}.$$

2. *Зрівноваження нерівноточних вимірювань параметричним методом. Зрівноваження нівелірної мережі параметричним методом*

Вихідні дані:

- номер марки 20 21 22
- відмітка вихідної марки, м 104,931 119,354 123,478

-приблизні значення відміток реперів x1 = 117,3м; x2 = 111,0; x3=113,9.

Результати вимірювань із зазначенням їхніх ваг (табл. 2.4.4).

Таблиця 2.4.4

Номер ходу	Перевищення h, м	Довжина ходу L, км	Вага, p_i=35/L_i	Зрівноважене перевищення, м
1	+12,352	27,4	1,28	+12,338
2	-3,387	31,8	1,10	-3,388
3	-2,894	29,1	1,20	-2,877
4	-6,075	34,5	1,01	-6,073
5	+6,243	41,3	0,85	+6,265
6	-5,488	24,9	1,41	-5,473
7	-6,208	28,4	1,23	-6,209

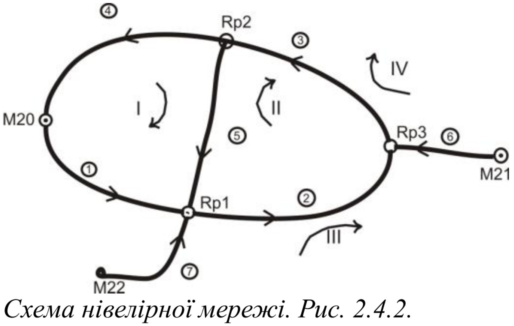

Схема нівелірної мережі. Рис. 2.4.2.

Порядок зрівноваження

I. Рівняння поправок у загальному вигляді складають як різниці між перевищеннями, отриманими по відмітках точок та їхніми виміряними значеннями в кожній секції. При цьому до найближчих значень виміряних відміток (x^0_i) реперів додають відповідну поправку (δx_i) число рівнянь поправок дорівнює кількості секцій. Для мережі, що розглядається будемо мати

$$
\begin{aligned}
&x^0_1+\delta x_1-x_{20}-h_1=v_1;\\
&x^0_3+\delta x_3-x^0_1-\delta x_1-h_2=v_2;\\
&x^0_2+\delta x_2-x^0_3-\delta x_3-h_3=v_3;\\
&x_{20}-x^0_2-\delta x_2-h_4=v_4;\\
&x^0_1+\delta x_1-x^0_2-\delta x_2-h_5=v_5;\\
&x^0_3+\delta x_3-x_{21}-h_6=v_6;\\
&x^0_1+\delta x_1-x_{22}-h_7=v_7.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.4.6)}
$$

Підставимо в ці рівняння замість x^0_1, x^0_2, x^0_3 – наближені значення відміток реперів, замість x_{20}, x_{21}, x_{22} – відмітки марок, а замість h_1, h_2, … , h_7 – виміряні перевищення. Знаходимо значення вільних членів

$l_1= x^0_1-x_{20}-h_1$;

$l_2= x^0_3-x^0_1-h_2$ і т.д.

У підсумку отримуємо рівняння поправок, в яких вільні члени надано в сантиметрах.

$+\delta x_1$				$+1.7=v_1$
$-\delta x_1$			$+\delta x_3$	$-1.3=v_2$
		$+\delta x_2$	$-\delta x_3$	$-0.6=v_3$
		$-\delta x_2$		$+0.7=v_4$
$+\delta x_1$	$-\delta x_2$			$+0.5=v_5$
			$+\delta x_3$	$+3.4=v_6$
$+\delta x_1$				$+3.0=v_7$

В таблиці 2.4.5 дано коефіцієнти рівнянь поправок та інші величини, а в таблиці 2.4.6 – коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 2.4.5

Таблиця коефцієнтів рівнянь поправок

Номер рівнян ня	Коефіцієнти урівнених поправок						
	a	b	c	l, см	s	p	V, см
1	+1			+1,7	+2,7	1,28	-1,40
2	-1		+1	-1,3	-1,3	1,10	-0,08
3		+1	-1	-0,6	-0,6	1,20	+1,73
4		-1		+0,7	-0,3	1,01	+0,25
5	+1	-1		+5,7	+5,7	0,85	+2,15
6			+1	+3,4	+4,4	1,41	+1,52
7	+1			+3,0	+4,0	1,23	-0,10
Σ	+2	-1	+1	+12,6	+14,6		
δxi	-3,10	+0,45	-1,88				

$[pv^2]=13,37$
$[plv]=13,33$
$[psv]=13,31$

Таблиця 2.4.6

Таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь

	a]	b]	c]	l]	s]	Контроль	F_1	F_2	Σ	S_1
[pa	1,46	-0,85	-1,10	+12,14	+14,65	+14,65	+1,00	0	+3,15	13,65
[pb		+3,06	-1,20	-6,27	-5,26	-5,26	0	+1,00	2,01	-6,26
[pc			+3,71	+4,08	+5,49	+5,49	0	0	1,41	4,49
[pl				+61,47	+71,42	+71,42				
[ps					+86,31	+86,31				

У таблиці 2.4.7 наведена скорочена схема розв'язків нормальних рівнянь.

Таблиця 2.4.7

Скорочена схема Гаусса розв'язків нормальних рівнянь

Порядк. №	Назва урівняння	δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль 1	l_1	l_2	l_3	S_1	Контроль 2	F_1	F_2	Σ	Контроль 3
1	$Н_1$	4,46	-0,85	-1,10	+12,14	+14,65	+14,65	-1,00	0	0	+13,65		+1,00	0	3,51	3,51
2	$Эл_1$	(-1)	+0,191	+0,247	-2,722	3,285	-3,284	+0,224	0	0	-3,061	-3,060	-0,224	0	-0,787	-0,787
3	$Н_2$		+3,06	-1,20	-6,27	-5,26	-5,26	0	-1,00	0	-6,26		0	+1,00	+2,01	+2,01
4	$Эк_2$		+2,90	-1,41	-3,95	-2,46	-2,46	-0,19	-1,00	0	-3,65	-3,65	+0,19	+1,00	+2,68	+2,68
5	$Эл_2$		(-1)	-0,486	+1,362	+0,848	+0,848	+0,066	+0,345	0	+1,259	+1,259	0,066	-0,345	-0,924	-0,925
6	$Н_3$			+3,71	+4,08	+5,49	0	0	0	-1,00	+4,49	0	0	0	+1,41	+1,41
7	$Эк_3$			+2,75	+5,16	+7,91	+7,91	-0,34	-0,496	-1,00	+6,09	+6,08	+0,34	+0,49	+3,58	+3,58
8	$Эл_3$			(-1)	-1,876	-2,876	-2,876	+0,124	+0,177	+0,364	-2,211	-2,211	0,123	-0,177	-1,30	-1,30
9	$Н_4$				+61,47	+71,42	+71,42	Вагові коефіцієнти								
10	$Эк_4$				+13,36	+13,35		0,279	+0,126	+0,124	$\frac{1}{P_f} = -0{,}278 - 0{,}478$					
11	$Н_5$					+86,31	+86,30	+0,126	+0,431	+0,177						
12		δx1=–3,099	δx2=+0,45	δx3=–1,876		+13,35		+0,124	+0,177	+0,364						

Необхідно відзначити, що таблицю 2.4.6 можна не заповнювати, а одразу за даними таблиці 2.4.5 обчислювати коефіцієнти нормальних рівнянь [paa], [pab], … , [pss] та записати їх у рядки H_1, H_2, … , H_5.

У результаті розв'язування системи нормальних рівнянь отримуємо поправки δx_1, δx_2, δx_3 і значення невідомих

$x_1=x^0_1+\delta x_1=117{,}300м-3{,}10см=117{,}269$ м;

$x_2=x^0_2+\delta x_2=111{,}000м+0{,}45см=111{,}004$ м;

$x_3=x^0_3+\delta x_3=113{,}900м-1{,}88см=113{,}881$ м.

Тепер за формулами 2.4.6 обчислюємо значення (v) та записуємо їх у таблицю 2.4.5.

Після цього обчислюємо $[pv^2]$ для контролю – $[plv]=[psv]=[pv^2]$, а також середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$\mu=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}=\sqrt{\frac{13.37}{7-3}}=1.83см.$$

Середня квадратична похибка 1 км ходу

$$m_{км}=\frac{M}{\sqrt{c}}=\frac{1.83}{\sqrt{35}}=0.31см.$$

Для оцінки точності обчислена матриця вагових коефіцієнтів, а для контролю – обернені ваги функцій $F_1=x_1$, $F_2=x_2$. Вага останнього невідомого отримана два рази

$$Px_3 = [cc\cdot 2] = 2.75 \text{ та } P_3 = \frac{1}{Q_{33}}=\frac{1}{0{,}364}=2.75.$$

Вагу першого невідомого також отримано два рази

$$Px_1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{PF1}\right)} = \frac{1}{0{,}278}=3.60;$$

$$Px_1=\frac{1}{Q_{11}}=\frac{1}{0.279}=3.58.$$

Вага останнього невідомого $px_2=1/(1/PF_2)=\frac{1}{0{,}432}=2.31$,

$$px_2=\frac{1}{Q_{22}}=\frac{1}{0{,}431}=2.32.$$

Після цього обчислюють середню квадратичну похибку:

$mx_1=\mu\sqrt{Q_{11}}=1.83\sqrt{0.279}=0.97$ см;

$mx_2 = \mu\sqrt{Q_{22}} = 1.83\sqrt{0,431} = 1.20$ см;

$mx_3 = \mu\sqrt{Q_{33}} = 1.83\sqrt{0,364} = 1.10$ см.

В останньому стовпчику таблиці 2.4.4, шляхом уведення поправок (v_i) у виміряні перевищення (h) вписуємо зрівняні значення перевищень.

Контролем обчислень є рівність нулю суми зрівняних перевищень у кожному замкнутому полігоні та рівність нулю нев'язок у ходах між твердими марками.

§ 5. Корелатний метод розв'язування задачі

1. *Загальна теорія корелатного методу зрівноваження. Умовні та нормальні рівняння корелат*

Припустимо, що в результаті безпосередніх вимірювань отримано величини $x_1, x_2,...,x_n$, істинне значення яких $X_1, X_2,...,X_n$. Якщо в мережі виконано (n) вимірювань, то (k) із них необхідні, а r=n-k – надлишкові, то виникає (r) геометричних умов.

$F_j(X_1,X_2,...,X_n) = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, r$ **(2.5.1)**

що називаються умовними рівняннями.

Оскільки істинні значення x_i нам невідомі, а тільки виміряні значення, що мають похибки вимірювань, у правій частині появляться нев'язки ω_j, тобто

$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega_j$ **(2.5.2)**

Нев'язки ω можна усунути шляхом введення в результати вимірювань (x_i) поправок (v_i), тоді нелінійні (умовні) рівняння будуть мати вигляд:

$F_j(x_1+v_1, x_2+v_2, \ldots, x_n+v_n)=0$ **(2.5.3)**

Ці нелінійні рівняння необхідно привести до лінійного виду шляхом розкладання в ряд Тейлора, зі зберіганням членів, що містять перші степені поправок:

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\frac{\partial F_j}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial F_j}{\partial x_2}v_2 + \cdots + \frac{\partial F_j}{\partial x_n}v_n = 0$$

В результаті отримуємо умовні рівняння. Позначимо:

$a_i = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, $b_i = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$, … , $gi = \frac{\partial F_r}{\partial x_i}$,

враховуючи 2.5.2

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + \omega_1 = 0$$
$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + \omega_2 = 0 \qquad \textbf{(2.5.4)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + \omega_r = 0$$

або

$$[av] + \omega_1 = 0$$
$$[bv] + \omega_2 = 0 \qquad \textbf{(2.5.5)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[qv] + \omega_r = 0$$

У системі умовних рівнянь поправок кількість незалежних рівнянь r менша кількості n невідоміих *v*, тому вона невизначена та має безліч розв’язків.

Однозначне рішення отримують при збереженні умови $\varphi = [pv^2] = \min$. Згідно зі способом Лагранжа до функції Ф приєднують умовні рівняння 2.5.5, помножені на невизначені множники rk_1, $k_2 \ldots, k_n$, що називаються корелатами. В підсумку отримують :

$$\Phi = [pv^2] - 2k_1([av] + \omega_1) - 2k_2([bv] + \omega_2) - \ldots$$
$$-2k_r([qv] + \omega_r) = \min \qquad \textbf{(2.5.6)}$$

На відміну від параметричного способу, постає завдання відшукування мінімуму функції $\Phi = [pv^2]$.

Для визначення мінімуму цієї функції беруть часткові похідні за v_i і прирівнюють їх до нуля.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \upsilon_i} = 2p_i\upsilon_i - 2k_ia_i - 2k_ib_i - \ldots - 2k_iq_i = 0,$$

звідки

$$\upsilon_1 = \left(1/p_i \right)\left(a_ik_1 + b_ik_2 + \ldots + q_ik_r\right) = \Pi_i\left(a_ik_1 + b_ik_2 + \ldots + q_ik_z\right), \textbf{ (2.5.7)}$$

де $\pi = 1/p_i$ – обернені ваги. Підставляємо замість поправок v_i їхні значення із формули 2.5.7 у 2.5.4 та знаходимо нормальні рівняння корелат :

$$[\pi aa]k_1 + [\pi ab]k_2 + \ldots + [\pi aq]k_r + \omega_1 = 0;$$
$$[\pi ab]k_1 + [\pi ab]k_2 + \ldots + [\pi aq]k_r + \omega_2 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \mathbf{(2.5.8)}$$
$$[\pi ab]k_1 + [\pi aq]k_z + \ldots + [\pi qq]k_r + \omega_r = 0.$$

кількість яких дорівнює (r). Розв'язуємо ці рівняння та знаходимо корелати k_j, потім за допомогою 2.5.7 поправки v_i зрівноважуємо результати вимірювань та їхніх функцій: $x_{ур}=x+v$.

2. *Види умовних рівнянь, які найчастіше використовуються при зрівноваженні мереж*

Розглянемо види умовних рівнянь, що найбільш часто зустрічаються в геодезичних мережах.

<u>I. Тріангуляційні побудови</u>

Нехай маємо побудовану мережу тріангуляції – вставка в кут (рис. 2.12.1)

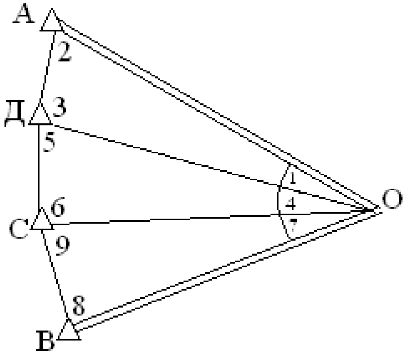

Рис. 2.5.1

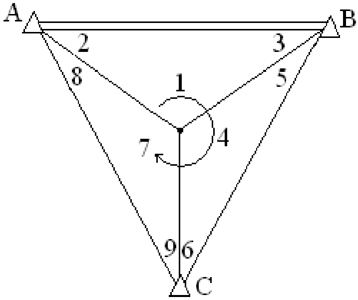

Рис. 2.5.2

У цій мережі виникає всього r = 9−4 = 5 умовних рівнянь (n = 9, k = 4 – подвоєне кількість координат пунктів, що визначаються), в тому числі:

а) три умовних рівняння зрівняних фігур:

$v_1+v_2+v_3+\omega_1=0$,

$v_4+v_5+v_6+\omega_2=0$,

$v_7+v_8+v_9+\omega_3=0$,

де нев'язки ω дорівнюють різницям між сумою виміряних у трикутнику кутів і 180^0;

б) умови рівняння твердого кута:
$v_1+v_4+v_7+\omega=0$,
де нев'язка
$\omega = y'1+y'4+y'7-$кута АОВ;

б) базисна умова рівняння, що виражає вимоги збігу сторони ОВ з її значенням, обчисленим по зрівняних кутах від сторони ОА.

На відміну від попередніх, це рівняння має нелінійний вигляд та має назву синусного умовного рівняння. В лінійному вигляді воно складається за правилом:

1) вибираємо напрямок підходу від сторони АО до сторони ОВ (показано стрілкою);
2) послідовно по кожному трикутнику намічаємо кути, що лежать навпроти передньої та задньої по ходу сторони (кути 2, 5, 9 та 3, 6, 8);
3) записуємо умовне рівняння :

$$\Delta_2 v_2 + \Delta_5 v_5 + \Delta_9 v_9 - \Delta_3 v_3 - \Delta_6 v_6 - \Delta_8 v_8 + \omega = 0, \qquad \mathbf{(2.5.9)}$$

де Δ_i – зміна логарифма синуса кута зі змінами кута на одну секунду, виражена в шостому знаці логарифма, а нев'язка

$$\omega = lg\frac{S_1 \cdot sin2 \cdot sin5 \cdot sin9}{S_2 \cdot sin3 \cdot sin6 \cdot sin8} \qquad \mathbf{(2.5.10)}$$

У центральній системі (рис. 2.12.2), крім трьох умовних рівнянь фігур виникає умовне рівняння горизонту
$v_1 + v_4 + v_7 + \omega = 0$,
де $\omega = y'_1 + y'_4 + y'_7 - 360^0$,
та полюсне умовне рівняння, що складається так як і базисне, з тією різницею, що початкова та кінцева сторони тут збігаються, а напрямок обходу вибирають, наприклад, від сторони АО і до неї ж підходять. Умовне рівняння також має вигляд 2.5.9, але у виразі 2.5.10

$$S_1 = S_2.$$

II. Полігонний хід

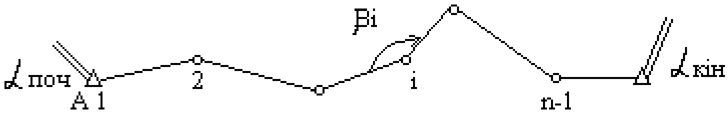

Рис. 2.5.3

В цьому ході виникає умовне рівняння дирекційних кутів

$$\sum_{i=1}^{n} \beta i + \omega_\beta = 0;$$

де нев’язка $\omega_\beta = \alpha_{поч} + \Sigma\beta_{i\ лів} - \alpha_{кін} - 180^0(n-1)$,
та два умовних рівняння координат

$$\sum v_{\Delta xi} + \omega_x = 0,$$

$$\sum v_{\Delta yi} + \omega_y = 0,$$

де нев’язка

$$\omega_x = X_A + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i - x_A,$$

$$\omega_y = Y_A + \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i - y_A.$$

В останніх двох рівняннях поправки двох приростків координат необхідно замінити поправками безпосередньо виміряних величин – кутів та ліній.

III. Нівелірна мережа

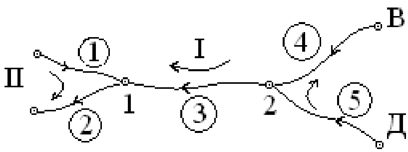

Рис. 2.5.4

В цій мережі кількість умовних рівнянь r = n – k = 5 – 2 = 3 (n – кількість усіх ходів, k – кількість вузлів). Умовні рівняння, що виникають у даній мережі, називають полігонними, і вони для вибраних трьох полігонів мають вигляд:

$-v_1 + v_3 + v_4 + \omega_1 = 0;$
$v_1 + v_2 \quad \omega_2 = 0;$
$-v_4 + v_5 \quad \omega_3 = 0,$
де нев'язку ω обчислюють як різницю між даними відмітками кінцевих марок і цими ж відмітками, але отриманими від відміток початкових марок за виміряними перевищеннями. Аналогічно виглядають умовні рівняння і в замкнутих полігонах, що не мають твердих марок.

Полігонні умовні рівняння виникають і в полігонометрії, але вони мають більш складний вигляд.

§ 6. Контроль складання та розв'язування нормальних рівнянь

1. *Контроль складання та розв'язування нормальних рівнянь корелат*

Контроль складання та розв'язування нормальних рівнянь корелат виконують методом сум так :

$$a_i + b_i + c_i + \cdots + q_i + f_1 + f_2 + \cdots + f_i = S_i; \ (i=1,2,\ldots,n)$$

та

$$[a] + [b] + \ldots + [q] + [f_1] + [f_2] + \ldots + [f_i] = [S] \ . \qquad \textbf{(2.6.1)}$$

Потім

$$[\pi aa]+[\pi ab]+\ldots+[\pi aq]+[\pi af_1]+[\pi af_2]+\ldots+[\pi af_i]=[\pi as];$$
$$[\pi ab]+[\pi bb]+\ldots+[\pi bq]+[\pi bf_1]+[\Pi bf_2]+\ldots+[\pi bf_i]=[\pi bs]; \qquad \textbf{(2.6.2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\pi aq]+[\pi bq]+\ldots+[\pi qq]+[\pi qf_1]+[\pi qf_2]+\ldots+[\pi qf_i]=[\pi qs].$$

Далі

$$[\pi as] + \omega_1=\Sigma_1;$$
$$[\pi bs] + \omega_2=\Sigma_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$[\pi qs] + \omega_r=\Sigma_r.$$

Розв'язування системи нормальних рівнянь за схемою Гаусса контролюють (контроль 1), використовуючи формули

$$[\pi aa]+[\pi ab]+\ldots+[\pi aq]+[\pi af_1]+[\pi af_2]+\ldots+[\pi af_i]=[\pi as];$$
$$[\pi bb\cdot 1]+[\pi bc\cdot 1]+\ldots+[\pi bq\cdot 1]+[\pi bf_1\cdot 1]+[\pi bf_2\cdot 1]+\ldots+[\pi bf_i\cdot 1]=[\pi bs\cdot 1];$$
$$[\pi cc\cdot 2]+[\pi cq\cdot 2]+\ldots+[\pi cq\cdot 2]+[\pi cf_1\cdot 2]+[\pi cf_2\cdot 2]+\ldots+[\pi cf_i\cdot 2]=[\pi cs\cdot 2]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(2.6.3)}$$
$$[\pi qq\cdot(r-1)]+[\pi qf_1(r-1)]+[\pi qf_2(r-1)]+\ldots+[\pi qf_i(r-1)]=[\pi qs\cdot 2].$$

Контроль 2 виконується так. Визначають $\Sigma_i = S_i + \omega_i$ для нормальних рівнянь. Потім стовпчики ω та S обчислюють так само як і інші стовпчики схеми Гаусса. Сума рядків у стовпчиках S та ω дорівнює контролю 2 і повинна дорівнювати значенню Σ в цьому ж рядку.

Після обчислень за формулою (2.5.7) поправок v_i заключним контролем служить

$[pv^2]=-[kw].$ **(2.6.4)**

Крім того, правильність обчислень можна проконтролювати, підставивши в умовні рівняння відповідні поправки та вільні члени.

2. ***Матричні формули зрівноваження корелатним способом.***

Систему нормальних рівнянь (2.6.1) можна записати у вигляді

$BV + W = 0,$ **(2.6.5)**

де матриця $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & q_2 \cdots & q_n \end{pmatrix}$,

а вектори $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix}$.

Увівши діагональну матрицю обернених ваг вимірювань

$$p^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & & \\ & \frac{1}{p_2} & \\ & & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix},$$

нормальні рівняння отримаємо у вигляді

$NK + W = 0$ **(2.6.6)**

де матриці $N = BP^{-1}B^T = \begin{pmatrix} [\pi aa] & [\pi aa] \ldots & [\pi aa] \\ [\pi ab] & [\pi bb] \ldots & [\pi bq] \\ [\pi aq] & [\pi bq] \ldots & [\pi qq] \end{pmatrix}$, а вектор корелат K = $\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_n \end{pmatrix}$.

Визначивши із рішення 2.6.6 вектор корелат (розв'язок можна виконати у вигляді K = - $N^{-1}W$), отримаємо вектор поправок

$V = p^{-1}B^TK$, **(2.6.7.)**

що відповідає 2.5.7.

Обернену вагу функції отримуємо у вигляді

$$\frac{1}{p_F} = fp^{-1}f^T - fp^{-1}B^T \cdot N^{-1} \cdot BP^{-1}f^T, \qquad \textbf{(2.6.8)}$$

де f = (f_1, f_2, … , f_n), що відповідає алгоритму Гаусса.

На підставі 2.6.8 можна знайти матрицю Q_F вагових коефіцієнтів одразу декількох функцій, при цьому матриця g буде складатися з кількох відповідних функціям рядків.

3. Складання нормальних рівнянь корелат способом В.В. Попова

Якщо коефіцієнти полігонних умовних рівнянь дорівнюють ±1 або 0, то нормальні рівняння можна отримати, не складаючи умовних рівнянь.

Попередньо в схемі нумерують усі ходи і полігони та вказують їхні напрямки при визначенні нев'язок, виписують значення обернених ваг ходів. Нормальні рівняння складають за схемою, використовуючи такі правила:

1) корелаті приписують номер полігону;
2) квадратичні коефіцієнти в рядку (i) дорівнюють сумі обернених ваг ходів в полігоні (i);
3) квадратичний коефіцієнт у рядку (i) та стовпчику (j) дорівнює оберненій вазі ходу, загальній для полігонів (i) та (j) зі знаком плюс, якщо напрямки обходу полігону збігаються, та мінус – якщо не збігаються;
4) вільний член i-го нормального рівняння дорівнює нев'язці i-того полігону. Наприклад, для мережі, зображеної на рис. 2.5.8, маємо

$$(\pi_1+\pi_4+\pi_5)k_1-\pi_5k_2-\pi_4k_4+\omega_1=0;$$
$$-\pi_5k_1+(\pi_2+\pi_3+\pi_5)k_2-\pi_2k_3-\pi_3k_4+\omega_2=0;$$
$$-\pi_2k_2+(\pi_2+\pi_6+\pi_7)k_3-\pi_6k_4+\omega_3=0; \qquad \textbf{(2.6.9)}$$
$$-\pi_4k_1-\pi_3k_2-\pi_6k_3+(\pi_3+\pi_4+\pi_6)k_4+\omega_4=0.$$

Підставимо замість π їхні значення з таблиці , знаходимо

$$+2{,}95k_1-1{,}18k_2-0{,}99k_4-3{,}5=0;$$
$$-1{,}18k_1+2{,}92k_2-0{,}91k_3-0{,}83k_4+3{,}8=0;$$
$$-0{,}91k_2+2{,}43k_3-0{,}71k_4+1{,}7=0;$$
$$-0{,}99k_1-0{,}83k_2-0{,}71k_3+2{,}53k_4-3{,}4=0.$$

Визначивши корелати з рішення отриманих рівнянь, знаходимо поправки, використовуючи правило: поправка V_j дорівнює оберненій вазі π_j, помноженій на суму корелат полігонів, яким належить хід (j).

Якщо напрямок ходу і полігону не збігаються, то корелаті надають обернений знак за схемою. Використовуючи це правило, маємо :

$$v_1 = \pi_1(-k_1);$$
$$v_2 = \pi_2(-k_2+k_4);$$
$$v_3 = \pi_3(-k_2+k_4);$$
$$v_4 = \pi_4(-k_1+k_4);$$
$$v_5 = \pi_5(k_1-k_2);$$
$$v_6 = \pi_6(-k_3+k_4);$$
$$v_7 = \pi_7k_3.$$

Для оцінки точності відміток вузлів вибирають хід від твердої точки до вузла, що оцінюється. Додатковий стовпчик у схемі Гаусса знаходять за тими ж правилами, що й нормальні рівняння. Спосіб Попова можна використовувати і при роздільному зрівноваженні полігонометричної мережі.

§ 7. Оцінка точності зрівноваження корелатним способом

1.Оцінка точності функцій при корелатному зрівноваженні

На відміну від параметричного способу при корелатному способі складають функцію вигляду :

$F = j(x_1, x_2, \dots , x_n)$ **(2.7.1)**

яка після розкладання в ряд Тейлора набуває лінійного вигляду, де

$f_1v_1 + f_2v_2 + \dots + f_nv_n + f_o = 0,$ **(2.7.2)**

$f_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$; $f_0 = f(x'_1, x'_2, \dots x'_n)$; $x_1, x_2, \dots x_n$ – результати вимірювань, x_n – вільний член.

Порівнявши формулу 2.7.2 та 2.5.4 бачимо, що вираз 2.7.2 має вигляд умовного рівняння. В деяких випадках це спрощує складання функції. Наприклад, при оцінці точності довжини сторони DC (рис. 2.5.1) функцію складають так само, як базисне умовне рівняння від сторони OA до сторони DC.

Обернена вага функції отримується у вигляді алгоритма Гаусса :

$$\frac{1}{P_F} = [\pi ff \cdot r] = [\pi ff] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf \cdot 1]^2}{[\pi bb \cdot 1]} - \dots - \frac{[\pi qf \cdot (r-1)]^2}{[\pi qq \cdot (r-1)]} \quad \textbf{(2.7.3)}$$

і вона може бути обчислена попутно з рішенням нормальних рівнянь шляхом прибавлення в схемі Гаусса стовпчика F з елементами $[\pi af]$, $[\pi bf]$, … $[\pi qf]$.

Для контролю використовують формулу:

$$\frac{1}{P_F} = [\pi fs \cdot r] = [\pi fs] - \frac{[\pi af][\pi as]}{[\pi aa]} - \dots - \frac{[\pi af \cdot (r-1)][\pi qs \cdot (r-1)]}{[\pi qq \cdot (r-1)]} \quad \textbf{(2.7.4)}$$

де $S_i = a_i + b_i + \dots + q + f_i$. **(2.7.5)**

Середня квадратична похибка функції

$m_F = \mu \sqrt{\dfrac{1}{P_F}},$ **(2.7.6)**

в якій похибка μ (або m) при рівноточних вимірах обчислюється, як в параметричному способі за формулою :

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}. \qquad \textbf{(2.7.7)}$$

Для рівноточних вимірювань замість μ знаходимо:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r\,(вр)}}. \qquad \textbf{(2.7.8)}$$

2. Строге зрівноваження витягнутого полігонометричного ходу корелатним методом

Нехай маємо витягнутий полігонометричний хід, координати точок якого обчислені за виміряними кутами та лініями і, в результаті кінцева точка ходу B' не збігатиметься з фактичною кінцевою точкою ходу B, координати якої відомі. Тоді відрізок $B'B=f_s$ – це лінійна нев’язка ходу (рис. 1).

Повернемо координатну вісь X системи координат і спрямуємо її вздовж замикаючої ходу. Новий напрямок осі абсцис позначимо X', а вісь ординат Y'. Спроектуємо точку B на вісь X'. Як видно з рисунка, після повороту координатної системи нев’язка f_x дорівнюватиме повздовжньому зсуву t, а нев’язка f_y – поперечному зсуву u. Враховуючи це, запишемо скорочені нормальні рівняння:

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = 0(I) \\ &\left[\frac{bb}{P}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{P}\right]k_3 + t = 0(II) \\ &\left[\frac{bc}{P}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{P}\right]k_3 + u = 0(III) \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(2.7.9)}$$

Оскільки дирекційний кут замикаючої $\alpha=0^o$ ($\cos\alpha = 1$; $\sin\alpha = 0$; $n_i=0$), то рівняння набудуть вигляду :

$$\left.\begin{aligned} &[v] = 0 \\ &[\omega] + t = 0 \\ &-\frac{1}{\rho}[qv] + u = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(2.7.10)}$$

Складемо на підставі (2.7.10) таблицю коефіцієнтів нормальних рівнянь.

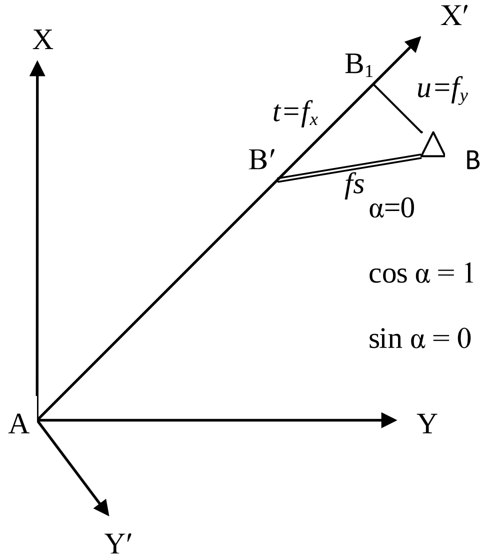

Рис. 2.7.1.

Таблиця 2.7.1.

Коефіцієнти нормальних рівнянь для витягнутого полігонометричного ходу

№ рівнянь	Для поправок у кути	Для поправок у лінії
I	$a_1 = a_2 = a_{n+1} = 1$	$a_i = a_2 = a_i = \ldots = a_n = 0$
II	$b_1 = 0; (i = 1, 2, \ldots, n+1)$	$b_1 = 1; (i = 1, 2, \ldots, n)$
III	$c_i = -\frac{1}{\rho} q_i; (i = 1, 2, \ldots, n+1)$	$c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Надамо нормальним рівнянням відповідного вигляду, враховуючи значення коефіцієнтів табл. 2.7.1 і те, що

$$\frac{1}{P_{Si_i}} = S_i, a[S_i] = L:$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ [S_i]k_2 + t = 0 \\ \dfrac{1}{P_\beta \rho^2}[q_i^2]k_3 + u = 0 \end{array}\right\}. \qquad \textbf{2.7.11}$$

Розв'яжемо систему (2.7.2) відносно невідомих корелат :

$$k_2 = -\frac{t}{[S_i]}; \qquad \textbf{2.7.12}$$

$$k_3 = -P_\beta \rho^2 \frac{u}{[q_i^2]}. \qquad \textbf{2.7.13}$$

Залишається знайти шукані поправки в кути v_i та в лінії w_i. Скористаємося вже відомою формулою :

$$v_i = \frac{1}{P_i}(b_i k_2 + c_i k_3).$$

Значення коефіцієнтів b_i і c_i візьмемо з таблиці 2.7.1. Отримаємо:

- для ліній:

$$w_i = -\frac{1}{[S_i]}S_i; \qquad \textbf{2.7.14}$$

- для кутів:

$$v_i = \left(-\frac{1}{P_\beta}\cdot\frac{1}{\rho}q_i\right)\cdot\left(-P_\beta \rho^2 \cdot \frac{u}{[q_i^2]}\right) = \rho \frac{u}{[q_i^2]}q_i. \qquad \textbf{2.7.15}$$

Виправивши лінії та кути з урахуванням відповідних поправок, знайдемо ймовірніші координати пунктів ходу.

3. Приклад зрівноваження витягнутого полігонометричного ходу корелатним методом (способом найменших квадратів)

Для кращого розуміння зрівноваження витягнутого полігонометричного ходу наведемо приклад такого зрівноваження. Використаємо відомість обчислення координат, в останньому стовпику якої подано робочі формули та виконано допоміжні обчислення.

У вертикальній графі 1 виписані номери відомих та щойно закладених пунктів, координати яких треба визначити.

У графі 2 записані виміряні кути, зокрема і прилеглі. Нев'язка в ході виявилась такою, що дорівнює $f_\beta=20''$, за допустимої $f_{\beta доп.}=\pm 24''$. Ця нев'язка майже порівну розподілена у виміряні кути з оберненим знаком. Поправки величиною 2″ або 3″ записані зверху над виміряними кутами. Внизу, під виміряними кутами, записані вторинні поправки, поки що невідомі. Щоб позбутися двох поправок на кожний кут, можна у графу 2 записати кути, уже виправлені первинними поправками, або доповнити відомість ще одною вертикальною графою.

Далі переходимо до обчислення дирекційних кутів, використовуючи кути, виправлені первинними поправками. Дирекційні кути записуємо у графу 3. Початковий дирекційний кут $\alpha_n=101^o38'46''$ і кінцевий $\alpha_к=329^o36'29''$, як задані, уже повинні бути записані у відомість (у графу 3).

У графах 10 та 11 повинні бути записані координати початкової (№ 38) та кінцевої (№ 40) точок:

$X_{38}=212{,}421$; $Y_{38}=7835{,}154$; $X_{40}=2069{,}639$; $Y_{40}=8722{,}17$.

Контролем правильності обчислень дирекцій них кутів є формула :

$$\alpha_k = \alpha_n + \sum_1^{n+1} \beta_{Лвп_n} - 180(n+1).$$

Тобто, послідовно обчислюючи дирекційні кути всіх ліній, використовуючи спочатку α_n – початковий дирекційний кут $\alpha_{37\text{-}38}=101^o38'46''$ і дійшовши до кінцевого дирекційного кута $\alpha_к$ ($\alpha_{40\text{-}}$

$_{41}$=329º36′29″), ми повинні отримати точно кінцевий дирекційний кут $\alpha_к$, тому що кутова нев'язка вже врахована.

У графу 4 записуємо виміряні лінії. Графу 5 поки що пропускаємо. Далі виконуємо обчислення наближених приростів координат за виміряними лініями S та дирекційними кутами, що подані у графі 3.

Обчислені значення Δx та Δy записуємо у графах 6 та 7. Розраховуються нев'язки f_x та f_y і записують їх унизу відомості. Використовують, зазвичай, формули

$$f_x = \sum_1^n \Delta x - (X_k - X_n); \quad f_y = \sum_1^n \Delta y - (Y_k - Y_n).$$

Далі графи 8 і 9 та 10 і 11 поки що не заповнюємо.

Заповнюємо далі графу 12, в якій обчислюються наближені абсциси X'. Абсциса X' початкової точки $X'_{38}=0$. Абсциса наступної точки X'_{98} дорівнює довжині лінії S_{38-98}=423,678 м, округленій до цілих метрів:+424. Для точки №99 $X'_{99}=S_{38-98}+S_{98-99}=+790$ і так далі. Для кінцевої точки №40 $X'_{40}=+2060$. Далі знаходимо абсцису центра ваги ходу $X_ц$:

$$X_ц = \frac{\left[X_i^{'}\right]^{n+1}}{n+1} = \frac{+11356}{9} = +1262.$$

У графі 13 обчислюємо абсциси точок ходу відносно центра ваги : $q_i = X_i^{'} - X_ц^{'}$.

У графі 14 обчислюємо квадрати цих абсцис q_i^2 та їхню суму $\left[q_i^2\right]$.

Далі у допоміжній графі 15 обчислюємо :

1. Поздовжній і поперечний зсуви t і u. Необхідні формули виписані у цій графі.
2. Поправки в лінії. Робоча формула: $w_i=-eS_i$, де $e = \frac{t}{L}$ (e визначається з точністю до сьомого знака після коми). Поправки у лінії у міліметрах записані у графі 4 над виміряними лініями.

Для отримання зрівноважених довжин $S_{зр}$ поправки алгебраїчно додаються до виміряних ліній. Зрівноважені лінії подано у графі 5.

3. Поправки у кути. Робоча формула: $v_i'' = \omega''\cdot q_i$, де $\omega'' = \rho''\cdot\frac{u}{\left[q_i^2\right]}$. Значення ω'' також обчислюється з точністю до сьомого знака після коми. Поправки v_i'' записані під виміряними кутами у графі 2. Контроль поправок у кути: $\left[v_i''\right] = 0$. Кути округляються до 1″.

4. Поправки в дирекційні кути $v_{\alpha_{ii}}'' = \sum_1^i v_i''$. Ці поправки записані над приблизними дирекційними кутами у графі 3.

Щоб знайти зрівноважені дирекційні кути, ці поправки алгебраїчно додають до наближених значень дирекційних кутів. Зрівноважені дирекційні кути у відомості не записані. За бажанням їх можна записати у графу 3 під наближеними дирекційними кутами, взявши їх у дужки. Обчислення закінчуються заповненням граф 8 і 9 та 10 і 11. У графах 8 і 9 записуються ув'язані прирости координат, обчислені за зрівноваженими дирекційними кутами та довжинами ліній $S_{зрв}$.

Головним контролем правильності виконаного зрівноваження є рівності :

$$\sum_1^n \Delta x_{зрв} = X_k - X_n;\ \sum_1^n \Delta y_{зрв} = Y_k - Y_n.$$

Інакше кажучи, оскільки прирости координат зрівноважені, то їхні суми повинні дорівнювати різницям координат кінцевої та початкової заданих точок (не повинно бути нев'язок).

У графах 10 і 11 обчислюють кінцеві (точні) координати пунктів $X_{T,I}$, $Y_{T,i}$.

Таблиця 2.7.2

Обчислення координат витягнутого полігонометричного ходу строгим методом

№ точок	Кути повороту (ліві) β	Дирекцій-ні кути α	Виміряні довжини S, м	Зрівнова-жені довжини $S_{зв}$, м	Прирости координат (наближені)		Зрівноважені прирости координат	
					$\Delta x = S \cos\alpha$	$\Delta y = S \sin\alpha$	$\Delta x_{зв} = S_{зв} \cos\alpha_в$	$\Delta y_{зв} = S_{зв} \sin\alpha_в$
	° ′ ″	° ′ ″						
1	2	3	4	5	6	7	8	9
37								
		101 38 46						
	-2							
38	104 12 45							
	+6,5	+6,5	-2,8					
	-2	25 51 29	423,678	423,6752	+381,258	+184,784	+381,249	+184,795
98	181 32 13							
	+4,3	+10,8	-2,5					
	-2	27 23 40	366,123	366,1205	+325,066	+168,458	+325,055	+168,474
99	174 18 00							
	+2,4	+13,2	-2,8					
	-2	21 41 38	412,725	412,7222	+383,493	+152,563	+383,481	+152,586
100	188 17 49							
	+0,3	+13,5	-1,7					
	-2	29 59 25	248,645	248,6433	+215,354	+124,286	+215,344	+124,299
101	173 28 42							
	-1,0	+12,5	-1,4					
	-2	23 28 05	207,548	20[illegible]	+190,380	+82,653	+190,374	+82,664
102	180 02 40							
	-2,0	+10,5	-1,1					
	-2	23 30 43	156,267	156,2659	+143,293	+62,341	+143,289	+62,348
103	184 15 11							
	-2,8	+7,7	-1,0					
	-3	27 45 52	138,117	138,1160	+122,216	+64,478	+122,213	+64,482
104	178 42 31							
	-3,6	+4,1	-0,7					
	-3	26 28 20	107,485	107,4843	+96,215	+47,913	+96,213	+47,915
40	123 08 12							
	-4,1	0,0						
		329 36 29						
41								

1487 58
Σ= 03 [S]= 2060,58

f_β= +20 $\Delta x,y$= +1857,275 +887,476

$f_{\beta\ доп}$ 24 $f_{x,y}$= +0,057 -0,087

f_s=+0,104

$$\frac{f_s}{S} = \frac{1}{20000}$$

Кінцеві (точні) координати		X'	q_i	q_i^2	Формули допоміжного обчислення
$X_т$	$Y_т$				
10	11	12	13	14	15
+212,421	+7835,154	0	-1262	1592644	
+593,670	+8109,949	+424	-838	702244	
+908,725	+8188,423	+790	-468	219024	
+1302,206	+8341,099	+1203	-59	3481	
+1517,550	+8465,308	+1451	+189	35721	
+1707,924	+8547,972	+1659	+397	157609	
+1851,213	+8610,320	+1815	+553	305809	
+1973,426	+8674,802	+1953	+691	7481	
+2069,639	+8722,717	+2060	+799	638401	

$$t=\frac{f_x[\Delta x]+f_y[\Delta y]}{L}$$

$$u=\frac{f_x[\Delta x]-f_y[\Delta y]}{L}$$

$$t=\frac{0{,}057\cdot 1857+0{,}087\cdot 887}{2061}=0{,}0139$$

$$u=\frac{0{,}057\cdot 1857-0{,}087\cdot 887}{2061}=0{,}1029$$

Контроль обчислень *t* та *u*.

$f_S^2=t^2+u^2$, $f_S=0{,}1038$.

Поправки в лінії

$$\frac{t}{L}=e=0{,}0000068;\ \omega_i=-e\cdot S_i$$

Поправки у лінії записані в кол. 4

Контроль поправок виконується за формулою $[\omega_i]=t$.

Поправки в кути

$$v_i''=\rho''\frac{u}{[q_i^2]}q_i^2.$$

Позначимо

$v_i''=\omega''\cdot q$. Контроль: $[v_i'']=0$

Поправки в дирекційні кути

$$v_{\alpha i}=\sum_1^i v_i''.$$

Контроль: кінцевий дирекційний кут не повинен мати поправок.

Σ= +11356 +2

$X'_ц$= 1262

$$[q_i^2]=4132414$$

§ 8. Приклади зрівноваження корелатним методом

1. *Зрівноваження нерівноточних вимірів корелатним методом. Зрівноваження нівелірної мережі корелатним методом*

Зрівноважимо нівелірну мережу, ту ж саму, що й параметричним способом (рис. 2.4.2).

В цій мережі виникає $r = 7-3 = 4$ умовних рівнянь полігону

$-v_1-v_4+v_5+\omega_1=0;$

$-v_2-v_3-v_5+\omega_2=0;$

$v_2-v_6+v_7+\omega_3=0;$

$v_3+v_4+v_6+\omega_4=0.$

Виконавши також оцінку точності функцій – відміток реперів Rp 1, 2, 3 - , складемо вагові функції за ходами 1, 4, 6.

В таблиці 2.8.1 отримані коефіцієнти умовних рівнянь, а в таблиці 2.8.2 – коефіцієнти нормальних рівнянь корелат.

Таблиця 2.8.1

Таблиця коефіцієнтів умовних рівнянь

№ ходу	a	b	c	d	f_1	f_2	f_3	s	p	П=1/p	v_B,см	pv^2	h, м	h_y=h+v, м
1	-1				+1			0	1,28	0,78	-1,48	2,80	+12,352	+12,338
2		-1	+1					0	1,10	0,91	-0,10	0,01	-3,387	-3,388
3		-1		+1				0	1,20	0,83	+1,69	3,43	-2,894	-2,877
4	-1			+1		-1		-1	1,01	0,99	+0,18	0,03	-6,075	-6,073
5	+1	-1						0	0,85	1,18	+2,20	4,08	+6,243	+6,265
6			-1	+1			+1	+1	1,41	0,71	+1,53	3,30	-5,488	-5,473
7			+1					+1	1,23	0,81	-0,06	0,00	-6,208	-6,209
	-3,5	+3,8	+1,7	-3,4										
k	+1,897	+0,034	-0,076	+2,076										
[kW] = -13,70									$[pv^2]$ = 13,65					

Таблиця 2.8.2

Таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат

	a]	b]	c]	d]	f_1]	f_2]	f_3]	S]	Контроль	W	Σ
[Пa	+2,95	-1,18	0	-0,99	-0,78	+0,99	0	+0,99	0,99	-3,50	-2,51
[Пb		+2,92	-0,91	-0,83	0	0	0	0	0	+3,80	+3,80
[Пc			+2,43	-0,71	0	0	-0,71	+0,10	+0,10	+1,70	+1,80
[Пd				+2,53	0	-0,99	+0,71	-0,28	-0,28	-3,40	-3,68
[Пf_1					+0,78	0	0	0	0		
[Пf_2						+0,99	0	+0,99	+0,99		
[Пf_3							+0,71	+0,71	+0,71		

В таблиці 2.8.2 стовпчику (а) відповідає перше умовне рівняння (полігон 1), стовпчикам b, c, d – друге, третє і четверте (II, III, IV полігони).

Таблицю 2.8.2 можна не складати, а одразу виписувати коефіцієнти нормальних рівнянь у рядках H_1, H_2, … H_7 схеми Гаусса таблиці 2.8.3.

Таблиця 2.8.3

Таблиця розв'язків нормальних рівнянь за схемою Гаусса.

Номер ходу	Назва рівняння	k_1	k_2	k_3	k_4	f_1	f_2	f_3	S	Контроль 1	W	Σ	Контроль 2
1	H_1	+2,95	-1,18	0	-0,99	-0,78	0	0	+0,99	+0,99	-3,50	-2,51	
2	Эл	-1,00	+0,400	0	+3,336	+0,264	-0,336	0	-0,336	-0,336	+1,186	+0,851	+0,850
3	H_2		+2,92	-0,91	-0,83	0	0	0	0	0	+3,80	+3,80	
4	$Эк_2$		+2,45	-0,91	-1,23	-0,31	+0,40	0	+0,40	+0,40	+2,40	+2,80	+2,80
5	$Эл_2$		-1,00	+0,371	+0,502	+0,127	-0,163	0	-0,163	-0,163	-0,980	-1,143	-1,143
6	H_3			+2,43	-0,71	0	0	-0,71	+0,10	+0,10	+1,70	+1,80	
7	$Эк_3$			+2,09	-1,17	-0,12	+0,15	-0,71	+0,25	+0,24	+2,59	+2,84	+2,84
8	$Эл_3$			-1,00	+0,560	+0,057	-0,072	+0,340	-0,120	-0,115	-1,239	-1,359	-1,359
9	H_4				+2,53	0	-0,99	+0,71	-0,28	-0,28	-3,40	-3,68	
10	$Эк_4$				+0,92	-0,48	-0,37	+0,31	+0,39	+0,38	-1,92	-1,53	-1,53
11	$Эл_4$				-1,00	+0,519	+0,400	+0,335	-0,422	-0,416	+2,076	+1,654	+1,654
		+1,897	+0,034	-0,076	+2,076	+0,78	0	0	0	0			
					$1/Pf_1=$	+0,28	+0,13	+0,12	+0,53	+0,53			
							+0,99	0	+0,99	+0,99			
						1/Pf=	+0,43	+0,18	+0,73	+0,74			
								+0,71	+0,71	+0,71			
							$1/Pf_3=$	+0,36	+0,66	+0,66			

При обчисленні обернених ваг (стовпчики f_1, f_2, f_3, S) контроль виконується підсумуванням кутів елементів підкреслених рядків. Наприклад, у рядку $1/Pf_3$ контроль 1 = 0,12 + 0,18 + 0,36 = +0,66, а в рядку $1/Pf_2$ контроль 1=0,13+0,43+0,18=+0,74.

За обчисленими значеннями корелат у таблиці 2.8.3 отримані поправки v_i для формули 2.12.7 та виконано заключний контроль обчислень $[pv_2]=-[k\omega]$.

Після введення поправок у виміряні значення отримані рівняння значень перевищень $h_y = h + v$. Потім обчислені відмітки реперів:

$x_1 = x_{20} + h_{y1} = 104{,}931 + 12{,}338 = 117{,}269$ м;

$x_2 = x_{20} + h_{y4} = 104{,}931 + 6{,}073 = 111{,}004$ м;

$x_3 = x_{21} + h_{y6} = 111{,}354 – 5{,}473 = 113{,}881$ м.

Обчислені зрівняні значення перевищень і відміток збігаються з їхніми значенням, отриманими при зрівнюванні параметричним способом.

За формулою 2.7.7 знаходимо середню квадратичну похибку одиниці ваги:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = \sqrt{\frac{[13{,}65]}{4}} = 1{,}85\text{см}$$

Середня квадратична похибка одного кілометра ходу дорівнює:

$$m_{км} = \frac{1{,}85}{\sqrt{35}} = 0{,}31 \text{ см};$$

$$m_{f1} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{f1}}} = 1{,}85\cdot\sqrt{0{,}28} = 0{,}98 \text{ см};$$

$$m_{f2} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{f2}}} = 1{,}85\cdot\sqrt{0{,}43} = 1{,}21 \text{ см};$$

$$m_{f3} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{f3}}} = 1{,}85\cdot\sqrt{0{,}36} = 1{,}11 \text{ см}.$$

Отримані значення в межах точності обчислень збігаються з результатами зрівнювання цієї ж мережі параметричним способом.

2. Приклад зрівноваження мережі тріангуляції корелатним способом

Схема нівелірної мережі 2-го класу зображена на рисунку 2.8.1

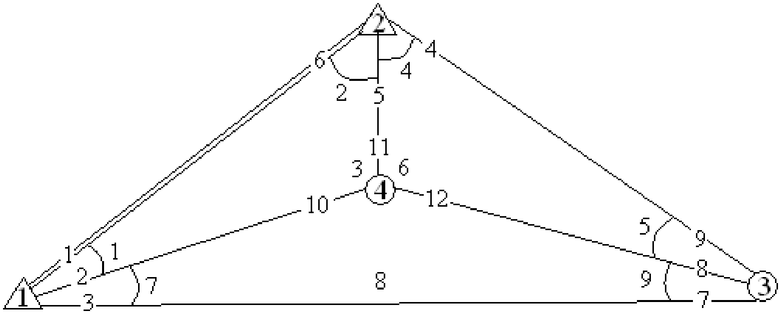

Рис. 2.8.1

Вихідні дані наведено в таблиці 2.8.4, а напрями, що приведені до центрів знаків та на площину в проекції Гаусса-Крюгера, – в таблиці 2.8.9

Таблиця 2.8.4

Таблиця вихідних даних

Пункт	Координати, м		Дирекційний кут	Довжина сторони, м
	x	y		
1	5 963 124,81	8 412 617,83	$7^0 28'37{,}81''$	14 331,32
2	5 977 314,44	8 414 480,18		

Загальна кількість (r) умовних рівнянь при зрівноваженні за кутами

r = n−2q = 9−4 = 5.

При зрівноваженні за напрямками r = 4 умова горизонту відсутня, із них три умови фігур та одне полюсне.

Складання умовних рівнянь фігур наведено в таблиці 2.8.6.

Таблиця 2.8.5

Таблиця напрямків приведених до центрів знаків

Номер пункту	Номер напрямку	Напрямки по площині	Поправки з зрівноваження	Зрівноважені напрямки
1	1	0^{0}00’00,00”	+0,13”	0^{0}00’00,00”
	2	37^{0}11’06,71”	+0,06”	37^{0}11’06,64”
	3	68^{0}08’59,63”	-0,19”	68^{0}08’59,31”
2	4	0^{0}00’00,00”	-0,18”	0^{0}00’00,00”
	5	25^{0}12’57,42”	+0,41”	25^{0}12’58,01”
	6	58^{0}19’54,61”	-0,23”	58^{0}19’54,56”
3	7	0^{0}00’00,00”	+0,06”	0^{0}00’00,00”
	8	28^{0}01’30,27”	-0,09”	28^{0}01’30,12”
	9	53^{0}31’06,58”	+0,02”	53^{0}31’06,54”
4	10	0^{0}00’00,00”	+0,04”	0^{0}00’00,00”
	11	109^{0}41’57,13”	-0,28”	109^{0}41’56,81”
	12	238^{0}59’22,59”	+0,23”	238^{0}59’22,78”

Таблиця 2.8.6

Таблиця умовних рівнянь фігур

Номер трикутника	Номер вершини	Різниця напрямків	Кути на площині	Умовні зрівноваження фігур
1	1 2 4	2 – 1 6 – 5 11–10	$37^0 11'06{,}71''$ $33^0 06'57{,}19''$ $109^0 41'57{,}13''$	−(1)+(2)−(5)+(6)− −(10)+(11)+1,03”=0
2	 2 3 4	Σ ω_1 5 – 4 9 – 8 12 – 11	$180^0 00'01{,}03''$ +1,03” $25^0 12'57{,}42''$ $25^0 29'36{,}31''$ $129^0 17'25{,}06''$	−(4)+(5)−(8)+(9)− −(11)+(12)−1,21”=0
3	 1 4 3	Σ ω_1 3 – 2 10 – 12 8 – 7	$179^0 59'58{,}79''$ -1,21” $30^0 57'52{,}92''$ $121^0 00'37{,}41''$ $28^0 01'30{,}27''$	−(2)+(3)−(7)+(8)+ +(10)−(12)+0,60”=0
		Σ ω_1	$180^0 00'00{,}60''$ +0,60”	

$\Sigma\omega^2 = 2{,}88''$

$m = \sqrt{\frac{\Sigma\omega^2}{3n}} = \sqrt{\frac{2{,}88}{9}} = 0{,}57''$; $m = \sqrt{\frac{\Sigma\omega^2}{3n}} = \sqrt{\frac{2{,}88}{9}} = 0{,}57''$

Складання полюсної умови центральної системи

$$\frac{S_{41}\cdot S_{42}\cdot S_{43}}{S_{42}\cdot S_{43}\cdot S_{41}}=\frac{\sin(6-5)\cdot\sin(9-8)\ \cdot\sin(3-2)}{\sin(2-1)\ \cdot\sin(5-4)\ \cdot\sin(8-7)}=1$$

Лінійний вигляд рівняння

ctg(2−1)(1)−[ctg(2−1)+ctg(3−2)](2)+ctg(3−2)(3)+ctg(5−4)(4)−[ctg(6−5)+ctg(5−4)](5)++ctg(6−5)(6)+ctg(8−7)(7)−[ctg(9−8)+ctg(8−7)](8)+ctg(9−8)(9)+ω=0

Коефіцієнти ctgβ та вільні члени цього рівняння обчислені в таблиці 2.8.7

Таблиця 2.8.7

Таблиця обчислення коефіцієнтів та вільних членів

Чисельник				Знаменник			
Напрямок	β_i	$\sin\beta_i$	$ctg\beta_i$	Напрямок	β_i	$\sin\beta_i$	$ctg\beta_i$
6–5	$33^0 06'57{,}19''$	0,5463342	1,533	2–1	$37^0 11'06{,}71''$	0,6043933	1,318
9–8	$25^0 29'36{,}31''$	0,4304074	2,097	5–4	$25^0 12'57{,}42''$	0,4260312	2,124
3–2	$30^0 57'52{,}92''$	0,5145098	1,667	8–7	$28^0 01'30{,}27''$	0,4698579	1,879
$П_1$ = 0,1209851				$П_2$ = 0,1209839			

$\omega=\frac{П_1+П_2}{П_1}\rho''=\frac{0{,}0000012}{0{,}1209851}206265=2{,}05'';$ Σctg^2 = 19,306;

$\omega_{доп}=2{,}5\cdot m\sqrt{\Sigma ctg^2\beta}=2{,}5\cdot 1''\sqrt{19{,}306}=10{,}98''.$

З врахуванням обчислених коефіцієнтів полюсна умова набуде вигляду :

$$1{,}318(1)-2{,}985(2)+1{,}667(3)+2{,}124(4)-3{,}657(5)+1{,}533(6)+$$
$$+1{,}879(7)-3{,}976(8)+2{,}097(9)+2{,}05=0.$$

Складання вагових функцій

Для оцінки точності визначення дирекційного кута сторони S_{34} (в найслабшому місці мережі) маємо $\alpha_{34}=f_\alpha=-(1)+(3)-(7)+(8)$. Для визначення середньої квадратичної похибки найбільш віддаленої сторони S_{34} необхідно визначити її обернену вагу, для чого S_{34} необхідно показати як функцію зрівняних напрямків від вихідної сторони S_{12}, за найкоротшим напрямком через трикутники 124 та 234 (див. рис. 2.8.2)

$$F = S_{34} = S_{12} \cdot \frac{\sin(6-5)\sin(3-2)}{\sin(11-10)\sin(8-7)}; \qquad \textbf{(2.8.1)}$$

Для визначення оберненої ваги цієї функції знаходять її приросток $\Delta F = f_S$.

Виконуючи висновок аналогічний зробленому при отриманні базисної умови, в результаті маємо:

$f_S = \Delta S_{34} =$

$$= -\frac{S_{34}}{\rho''} ctg(3-2)(2) + \frac{S_{34}}{\rho''} ctg(3-2)(3) - \frac{S_{34}}{\rho''} ctg(6-5)(5) +$$

$$\frac{S_{34}}{\rho''} ctg(6--5)(6) + \frac{S_{34}}{\rho''} ctg(8-7)(7) - \frac{S_{34}}{\rho''} ctg(11-10)(10) - \frac{S_{34}}{\rho''} ctg(11-10)$$

Для зручності сторону S_{34} виражають у дециметрах.

Підставляємо у формулу 2.8.1 різницю напрямків і S_{34} знаходимо:

$$S34 = 14311{,}32 \frac{\sin 37^{0}36'57'' \cdot \sin 30^{0}57'53''}{\sin 109^{0}41'57'' \cdot \sin 28^{0}01'30''} = 90940 дм$$

$$\frac{S_{34}}{\rho''} = 0{,}4409$$

У таблиці 2.8.23 обчислюють значення коефіцієнтів з урахуванням різниці напрямків, маємо:

$f_S = \Delta S_{34} = 0{,}735(2) + 0{,}735(3) - 0{,}676(5) + 0{,}676(6) + 0{,}286(7) -$
$-0{,}828(8) - 0{,}158(10) + +0{,}158(11)$

У таблиці 2.8.12 приведені коефіцієнти умовних рівнянь та вагових функцій f_α і f_S.

Таблиця 2.8.8

Таблиця коефіцієнтів умовних рівнянь і вагових функцій

Поправки	a	b	c	d	f_α	f_S	s'	v
(1)	-1			+1,318	-1		-0,682	+0,13
(2)	+1		-1	-2,985		-0,735	-3,720	+0,06
(3)			+1	+1,667	+1	+0,735	+4,402	-0,19
(4)		-1		+2,124			+1,124	-0,18
(5)	-1	+1		-3,657		-0,676	-4,333	+0,41
(6)	+1			+1,533		+0,676	+3,209	-0,23
(7)			-1	+1,879	-1	+0,828	+0,707	+0,06
(8)		-1	+1	-3.976	+1	-0,828	-3,804	-0,09
(9)		+1		+2,097			+3,097	+0,02
(10)	-1					-0,158	-0,158	+0,04
(11)	+1	-1				+0,158	+0,158	-0,28
(12)		+1	-1				0,000	+0,23
ω	+1,03	-1,21	+0,60	+2,05			$[v^2]=0,455$	
Контроль:	$\Sigma a_i=\Sigma b_i=\Sigma c_i=\Sigma d_i=\Sigma f_i=\Sigma f_s'=\Sigma v=0$						$-[k\omega]=0,458$	
	0	0	0	0,000	0	0,000	0,000	-0,02

У таблиці 2.8.9 отримано коефіцієнти нормальних рівнянь:

Таблиця 2.8.9

Таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь

	a] k_1	b] k_2	c] k_3	d] k_4	fα	f_S	ω	S	Контроль s^0=[as']+ω
[a	6,0	-2,000	-2,000	0,887	+1,000	+0,933	+1,03	+5,850	+5,850
[b	00	6,000	-2,000	0,292	-1,000	-0,006	-1,21	+0,076	+0,076
[c			6,000	-1,203	+3,000	-0,344	+0,60	+4,053	+4,053
[d				57,398	-5,506	+11,776	+2,05	+65,694	+65,694
[fα					4,000	-0,921		+0,573	+0,573
[f_S						+3,415		+14,853	+14,853

$$\left.\begin{array}{l}[aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+\ldots+\omega_1=0,\\ [ab]k_1+[bb]k_2+[bc]k_3+\ldots+\omega_2=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Таблиця 2.8.10

Таблиця розв'язків нормальних рівнянь за схемою Гаусса

k_1	k_2	k_3	k_4	fα	f_S	ω	S	Контроль
6,000 -1	-2,000 0,3333	-2,000 0,3333	0,887 -0,1478	+1,000 -0,1667	+0,933 -0,1555	+1,03 -0,1717	+5,850 -0,9750	-0,9751
	6,000 5,3333 -1	-2,000 -2,6667 +0,5000	0,292 0,5876 -0,1102	-1,000 -0,6667 +0,1250	-0,344 +0,1195 -0,0299	+0,60 +0,5099 -0,1275	+4,053 +7,0157 -1,7539	+2,0258 -0,3799
		6,000 +4,0000 -1	-1,203 -0,6136 0,1534	+3,000 +3,0000 -0,7500	-0,344 +0,1195 -0,0299	+0,60 +0,5099 -0,1275	+4,053 +7,0157 -1,7539	+7,0158 -1,7540
			57,398 57,1080 -1	-5,506 -5,1201 +0,0897	+11,776 +11,6228 -0,2035	+2,05 +2,0715 -0,0363	+65,694 +65,682 -1,1501	+65,6822 -1,1501
-0,1717 +0,0054 -0,0444 +0,0333 -0,1774	+0,1625 +0,0040 -0,0666 +0,999	-0,1275 -0,0056 -0,1331	-0,0363	4,000 1,0409	-0,921 -0,0859	-0,4767	+0,573 +0,4783	+0,4783
k_1	k_2	k_3	k_4 $\frac{1}{P_{f\alpha}} =$	$\frac{1}{P_{fs}} =$	3,415 0,8837	-0,5474	14,853 0,2514	0,2504

Контроль обчислення корелат:
$([aa]+[ab]+\ldots)k_1+([ab]+[bb]+\ldots)k_2+([ac]+[bc]+\ldots)k_3+\ldots+(w_1+w_2+w_3+\ldots)=0.$
Тобто у нас:
(6.000-2.000-2.000+0.887)(-0.1774+(-2.000+6.000-2.000+
+0.292)(0.0999)+(-2.000+6.000-1.203)(-0.1331)+(0.887+
+0.292-1.203+57.398))(-0.0363)+(1.03-1.21+0.60+2.05)=0.002

Оцінка точності

Середня квадратична помилка зрівноваженого елемента обчислюється за формулою :

$$mF = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}},$$

де $\mu = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{r}}$.

Середня квадратична похибка одиниці ваги, що визначається зі зрівноваження мережі;

v – поправка до виміряних за вагою (P) величин;

r – кількість надлишкових вимірювань, що дорівнює кількості умовних рівнянь;

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}455}{4}} = 0{,}34''$$

Середня квадратична похибка зрівноваженого кута m = $\mu\sqrt{2} = 0{,}34\sqrt{2} = 0{,}48''$. З урахуванням обчислених значень обернених ваг дирекційного кута $\alpha_{34}\left[\frac{1}{P_{f\alpha}} = 1{,}0409\right]$ та довжини сторони $S_{34}\left[\frac{1}{P_{fs}} = 0{,}8837\right]$ знаходимо $m_{\alpha34}$ = $\mu\sqrt{\frac{1}{P_{f\alpha}}} = 0{,}34\sqrt{1{,}0409} = 0{,}35''$

$$m_{S34} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{fs}}} = 0{,}34\sqrt{0{,}8837} = 0{,}32\text{дм} = 0{,}032\text{м}.$$

Кінцеві обчислення наведені в таблиці 2.8.28

Якщо нев'язки в деяких трикутниках зі зрівняними кутами не перевищують 0,01" і розходження довжин сторін, отриманих із розв'язків різних трикутників, не більше двох одиниць останнього знака, то зрівноваження виконано якісно. В противному випадку необхідно перевірити обчислення довжин сторін. Якщо похибок немає, то їх необхідно шукати в полюсних умовах, а при нев'язках у трикутниках більше 0,01" – в умовах фігур. Після цього обчислюють кінцеві координати пунктів таблиці 2.8.29, довжини і дирекційні кути сторін і каталог координат пунктів.

Таблиця 2.8.11

Таблиця зрівноважених кутів та сторін

Номер трикутника	Номер пункту	Різниця напрямків	Виміряні кути	Поправки	Зрівноважені кути	sin зрівноважених кутів	Зрівноважені сторони
1						q = 15200,944	
	1 2 3	2-1 6-5 11-10	$37^0$11’06,71” $33^0$06’57,19” $109^0$41’57,13”	-0,07” -0,64” -0,32”	6,64” 56,55” 56,81”	0,6043930 0,5463316 0,9414758	9187,34 8304,76 14311,32
		Σ ω_1	$180^0$00’01,03” 1,03”	-1,03”	00,00”		
2						q = 21345,667	
	4 5	5-4 9-8	$25^0$12’57,42” $25^0$29’36,31”	+0,59” +0,11”	58,01” 36,42”	0,4260337 0,4304079	9093,97 9187,34
	6	12-11	$129^0$17’25,06”	+0,51”	25,57”	0,7739459	16520,39
		Σ ω_2	$179^0$59’58,79” -1,21”	+1,21”	00,00”		
3						q = 17675,06	
	7 8 9	3-2 10-12 8-7	$30^0$57’52,92” $121^0$00’37,41” $28^0$01’30,27”	-0,25” -0,19” -0,15”	52,67” 37,22” 30,12”	0,5145088 0,8570743 0,4698572	9093,97 15148,84 8304,76
		Σω_3	$180^0$00’00,60” +0,60”	-0,59”	00,01”		

Таблиця 2.8.12

Таблиця обчислення координат пунктів

Номер пункту	Зрівноважені кути	Дирекційні кути	S, м	X, м	У, м
2					
		$187^0 28’59,31”$			
1	$68^0 08’59,31”$			5963124,81	8412617,83
		$75^0 37’37,12”$	15148,84		
3	$28^0 01’30,12”$			5966885,26	8427292,51
		$283^0 39’07,24”$	9093,97		
4	$230^0 42’34,03”$			5969031,66	8418455,47
		$334^0 21’41,27”$	9187,34		
2	$33^0 06’56,55”$			5977314,44	8414480,18
		$187^0 28’37,82”$			
1					

3. Зрівноваження тріангуляції двогруповим методом Урмаєва-Крюгера

При зрівноваженні великих мереж тріангуляції виникає багато умовних та нормальних рівнянь, що приводить до великих об'ємів обчислень. Для зменшення об'єму обчислень Крюгер запропонував двох груповий метод. Професор Н.А. Урмаєв запропонував включити у першу групу всі умовні рівняння фігур трикутників, що не перекриваються трикутниками. Ці умовні рівняння не містять в собі загальних поправок. Тому нормальні рівняння першої групи мають вигляду:

$3k'_j + \omega_j = 0$

і не містять загальних корелат.

Розв'язуючи кожне рівняння, що відноситься до (j-того) трикутника обчислюємо первинні поправки :

$v1' = v2' = v3' = -\dfrac{\omega_j}{3}$

Обчислення поправок, це фактично розподіл нев'язок трикутників з оберненим знаком порівну на три кути.

Далі виміряні кути виправляємо первинними поправками і за виправленими кутами в кожному трикутнику обчислюємо нев'язки умовних рівнянь другої групи та перетворені коефіцієнти цих рівнянь.

У кожному трикутнику вони обчислюються за формулами :

$A_1 = \alpha_1 - \alpha_j;$ $\quad A_2 = \alpha_2 - \alpha_j;$ $\quad A_3 = \alpha_3 - \alpha_j;$

$B_1 = \beta_1 - \beta_j;$ $\quad B_2 = \beta_2 - \beta_j;$ $\quad B_3 = \beta_2 - \beta_j$

…………………………………………………..

де $\alpha_j = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3);$ $\quad \beta j = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$

Контроль для кожного трикутника: [A] + [B] = … = 0.

Розв'язавши нормальні рівняння другої групи, знаходять корелати, що дозволяють обчислити вторинні поправки v″, які вводять у попередньо зрівноважені кути.

Оцінка точності

Середню квадратичну похибки безпосередньо виміряних величин визначають за формулою $m = \sqrt{\frac{[vv]}{r_1 + r_2}}$, де r_1 і r_2 – кількість умовних рівнянь в першій і другій групах,

$[vv] = [v'v'] + [v''v'']$.

Для оцінки точності функцій f_i, її коефіцієнти вносять у другу групу і перетворюють за формулами :

$F_1 = f_1 - f_j$; $F_2 = f_2 - f_j$; $F_3 = f_3 - f_j$; $f_j = \frac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3)$.

Таблиця 2.8.13

Таблиця зрівноваження тріангуляції двогруповим способом

№ трикутника	№ кута	Виміряний кут, β	v'	β + v′	v″	β + v′+v″	sinβ	Зрівноважені сторони	v=v’+ +v″
1							q = 15200,948		
	1	$37^0 11’06,71”$	-0,34”	06,37”	+0,06”	06,43	0,6043922	9187,33	-0,28
	2	$33^0 06’57,19”$	-0,34”	56,85”	-0,25”	56,60	0,5463318	8304,76	-0,59
	3	$109^0 41’57,13”$	-0,35”	56,78”	+0,19”	56,97	0,9414755	14311,32	-0,16
		$180^0 00’01,03”$	-1,03	00,00		00,00			
2							q = 21345,65		
	4	$25^0 12’57,42”$	+0,40	57,82	+0,14	57,96	0,4260335	9093,96	+0,54
	5	$25^0 29’36,31”$	+0,40	36,71	-0,32	36,39	0,4304078	9187,33	+0,08
	6	$129^0 17’25,06”$	+0,41	25,47	+0,18	25,65	0,7739457	16520,37	+0,59
		$179^0 59’58,79”$	+1,21	00,00		00,00			
3							q = 17675,07		
	7	$30^0 57’52,92”$	-0,20	52,72	-0,27	52,45	0,5145079	9093,96	-0,47
	8	$121^0 00’37,41”$	-0,20	37,21	+0,17	37,38	0,8570740	15148,84	-0,03
	9	$28^0 01’30,27”$	-0,20	30,07	+0,10	30,17	0,4698575	8304,76	-0,10
		$180^0 00’00,60”$	-0,60	00,00		00,00			

Обернену вагу функцій зрівноважених величин отримуємо у вигляді :

$$\frac{1}{P_F} = [FF] - \frac{[AF]^2}{[AA]} - \frac{[BF \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]} - \dots -$$

4. Приклад зрівноваження мережі тріангуляції двогруповим методом Урмаєва-Крюгера

Схема нівелірної мережі зображена на рисунку 2.8.1, вихідні дані наведені в таблиці 2.8.21. До першої групи віднесені умови фігур трикутників 124, 324, 134, до другої – умови горизонту і полюсне. Обчислення первинних поправок v_i та довжин сторін трикутників подані в таблиці 2.8.31.

Умови горизонту: (3) + (6) + (8) + ω = 0, де ω = 3 + 6 + 8 – 360 = =109⁰41'56,78" + 129⁰17'25,47" + 121⁰00'37,21" – 360 = −0,54".

Полюсна умова центральної системи:

$$\frac{S_{41} \cdot S_{42} \cdot S_{43}}{S_{42} \cdot S_{43} \cdot S_{41}} = \frac{\sin 2 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 9} = 1$$

Лінійний вигляд рівняння:

−ctg1(1)+ctg2(2)−ctg4(4)+ctg5(5)+ctg7(7)−ctg9(9)+ω=0;

$\omega = \frac{П_1 - П_2}{П_1}\beta''$; П1 = sin2 · sin5 · sin7; П2 = sin1 · sin4 · sin9.

Коефіцієнти ctgβ, вільний член цього рівняння, обчислений із використанням кутів, зрівноважених за умов першої групи, дані в таблиці 2.8.14.

Таблиця 2.8.14

Таблиця обчислення ctg β

Чисельник				Знаменник			
№ кутів	Значення кутів, β	sinβ	ctgβ	№ кутів	Значення кутів, β	sinβ	ctgβ
2	$33^0 06'56,85''$	0,5463328	1,533	1	$37^0 11'06,37''$	0,6043920	1,318
5	$25^0 29'36,71''$	0,4304092	2,097	4	$25^0 12'57,82''$	0,4260329	2,124
7	$30^0 57'52,72''$	0,5145090	1,667	9	$28^0 01'30,07''$	0,4698571	1,879
		$П_1 = 0,1209851$				$П_2 = 0,1209839$	

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1}\rho'' = \frac{0,0000012}{0,1209851} \cdot 206265 = 2,05;$$

$$\Sigma ctg^2\beta = 19,306;$$

$$\omega_{доп} = 2,5m\sqrt{\Sigma ctg^2\beta} = 2,5 \cdot 1''\sqrt{19,306} = 10,98''$$

З урахуванням отриманих коефіцієнтів, полюсне рівняння набуває вигляду:

$$-1,318(1) + 1,533(2) - 2,124(4) + 2,097(5) + 1,667(7) - 1,879(9) + +2,05 = 0.$$

Складання вагових функцій

Для визначення середньої квадратичної похибки дирекційного кута α_{34} і довжини сторони S_{34} маємо:

$\alpha_{34} = \alpha_{12}+1+7+1800+9$; $f_\alpha=\Delta_{\alpha34}=(1)+(7)+(9)$;

$F_S = S_{34} + S_{12}\dfrac{\sin 2 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 9}$

У лінійному вигляді

$f_S = \Delta_{S12} = \frac{S_{34}}{\rho''} ctg2(2) - \frac{S_{34}}{\rho''} ctg3(3) + \frac{S_{34}}{\rho''} ctg7(7) - -\frac{S_{34}}{\rho''} ctg9(9)$.

Підставимо у формулу F_S, S_{12} і кути, знаходимо S_{34}=90940 дм, $\frac{S_{34}}{\rho''} = 0,4409$.

Обчисливши числові значення коефіцієнтів, знаходимо:

$fS = \Delta S34 = 0,676(2) + 0,158(3) + 0,735(7) - 0,828(9)$.

Обчислення коефіцієнтів умовних та нормальних рівнянь наведено в таблиці 2.8.15.

Таблиця 2.8.15

Таблиця обчислення коефіцієнтів умовних та нормальних рівнянь

№ кута	α	β	f_α	f_s	A]	B]	F_a]	F_s]	S]	v''	
1		-1,318	+1		-1	-1,390	0,666	-0,278	-2,002	+0,06	
2		+1,533		+0,676	-1	1,461	-0,333	+0,398	+0,526	-0,25	
3	+1			+0,158	+2	-0,071	-0,333	-0,120	+1,476	+0,19	
4		-2,124			-1	-2,115			-3,115	+0,14	
5		+2,097			-1	+2,106			+1,106	-0,32	
6	+1				+2	+0,009			+2,009	+0,18	
7		+1,667	+1	+0,735	-1	+1,738	+0,333	+0,766	+1,837	-0,27	
8	+1				+2	+0,070	-0,666	+0,031	+1,435	+0,17	
9		-1,879	+1	-0,828	-1	-1,808	+0,333	-0,797	-3,272	+0,10	
ω	-0,54	+2,05			-1,62	+2,05			[v''v''] = 0,368		
k					0,0901	-0,1065	[kω]=	-0,368			
kω					-0,146	-0,218				ω	Σ
[A					+18,000	+0,024	-2,997	-0,267	14,760	-1,62	13,140
[B						19,275	-1,459	+3,751	21,591	+2,05	23,641
[$F_{\alpha S}$							+1,331	+1,473			

Коефіцієнти А і В отримані за формулами

$$Ai = \alpha i - \alpha j; \qquad Bi = \beta i - \beta j.$$

$$\alpha j = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \qquad \beta j = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$$

Для того, щоб не було дробів, коефіцієнти А і вільний член умови горизонту помножені на 3.

Розв'язки нормальних рівнянь наведено в таблиці 2.8.33.

Таблиця 2.8.33

Таблиця розв'язків нормальних рівнянь

k_A	k_B	F_α	F_S	ω	Σ	Контроль
+18,000	+0,024	-2,997	-0,267	-1,62	+13,140	+13,140
-1	-0,00133	+0,1655	+0,0148	+0,0900	-0,7300	-0,7300
	+19,275	-1,459	+3,751	+2,05	+23,641	
	+19,2750	-1,4551	+3,7513	+2,0521	+23,6235	+23,6233
k_A=0,0901	k_B=-0,1065	1,331	1,473			
	$\frac{1}{P_F} =$	0,7221	0,7390			

Контроль обчислень корелат:

(18,000 + 0,024)0,0901 + (0,024 + 19,275)(-0,1065) + (-1,62 + +2,05)= -0,001

Оцінка точності середньої квадратичної похибки результату безпосереднього вимірювання :

$$m = \sqrt{\frac{[v'v'] + [v''v'']}{r_1 + r_2}} = \sqrt{\frac{0,9618+0,368}{3+2}} = 0,516'';$$

$$m_{\alpha 34} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F\alpha}}} = 0,52\sqrt{0,7221} = 0,44'';$$

$$m_{S34} = m\sqrt{\frac{1}{P_{FS}}} = 0,52\sqrt{0,7390} = 0,46\text{дм} = 0,046.$$

Порівняння результатів вирівнювання корелатним способом за напрямками та двох груповим методом за кутами показує, що вони добре узгоджується між собою.

Питання для самоконтролю

1. Характеристика загальних понять про метод найменших квадратів.

2.Суть параметричного методу розв’язування задачі зрівноваження. Загальна теорія методу. Рівняння поправок і нормальні рівняння.

3. Методи розв’язування систем нормальних рівнянь. Метод Гаусса (алгоритм, схема).

4. Метод обертання матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь.

5. Суть контролю складання і рішення нормальних рівнянь.

6. Оцінка точності результатів зрівноваження параметричним методом; оцінку точності зрівняних невідомих.

7. Оцінка точності функцій зрівняних невідомих. Вага функцій виміряних величин. Вага невідомих.

8. Порядок дій при розв’язуванні задачі зрівноважень рівноточних вимірів параметричним методом. Зрівноваження кутів у всіх комбінаціях.

9. Порядок дій при розв’язуванні задачі зрівноваженння нерівноточних вимірів параметричним способом. Зрівноваження нівелірної мережі.

10. Суть складання нормальних рівнянь по способу вузлів проф. В.В. Попова.

11. Суть корелатного методу розв’язування задачі. Загальна теорія, умови та нормальні рівняння корелат.

12. Складання та розв’язування системи нормальних рівнянь корелат.

13. Види умовних рівнянь, що найчастіше зустрічаються в геодезичних мережах.

14. Оцінка точності функцій при корелатному зрівнюванні. Вага функцій виміряних величин.

15. Матричні формули зрівноваження корелатним методом.

16. Визначення допустимих нев’язок умовних рівнянь.

17. Порядок дій при розв’язуванні задачі зрівноваження нівелірної мережі корелатним методом.

18. Складання нормальних рівнянь корелат способом проф. В.В. Попова (спосіб полігонів).

19. Спосіб Крюгера-Урмаєва.

Список літератури

1. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей / В.Д. Большаков. – М. : Недра, 1965. – 183 с.
2. Бурмистров Г.А. Основы способа наименьших квадратов / Г.А. Бурмистров. – М. : Госгеолтехиздат, 1963. – 392 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Гончаров. – М. : Наука, 1988. – 480 с.
5. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів : навч. посібник для вищих навч. закл./ С.П.Войтенко. – К. : КНУ. – БА, 2003. – 215 с.
6. Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений / П.А.Гайдаев, В.Д. Большаков. – М. : Недра, 1969. – 400 с.
7. Гайдаев П.А. Способ наименьших квадратов / П.А. Гайдаев. – М. : Геодезиздат, 1969. – 269 с.
8. Гайдаев П.А. Вычесления геодезических сетей 3 и 4 класов / П.А. Гайдаев. – М. : Недра, 1972. – 183 с.
9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука, 1969. – 400 с.
10. Гольшин В.Н. Практикум по геодезии / В.Н. Гольшин, С.М. Лебедев, Л.С. Хренов. – М. : Недра, 1964. – 410 с.
11. Кемниц Ю.В. Теория ошибок измерений / Ю.В. Кемниц. – М. : Геодезиздат, 1961. – 112 с.
12. Куштин Н.Ф. Геодезическая обработка результатов измерений / Н.Ф. Куштин. – М. : Март, 2006. – 208 с.
13. Линник Ю.В. Метод наименьших квадтатов и основы теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – М. : Физматгиз, 1962. – 349 с.
14. Маркузе Ю.И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. / Ю.И. Маркузе. – М. : Недра, 1972. – 152 с.

15. Островський А.Л. Геодезія : підручник: у 2 ч. / А.Л. Островський, О.І. Мороз, В.Л. Тарнавський. – Львів : Львівська політехніка, 2008. – ч.1 – 564 с.
16. Пранис-Праневич И.Ю. Руководство по уравнительным вычеслениям триангуляции / И.Ю. Пранис-Праневич. – М. : Геодезиздат, 1956. – 362 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение : в 2 т. / В. Феллер. – М. : УНР, 1984. – Т. 1 – 528 с.; Т. 2. – 752 с.
18. Фильгаков П. Справочник по высшей математике / П. Фильгаков. – К. : Наук. думка, 1974. – 729 с.
19. Чеботарев А.С. Спсособ наименьших квадратов с основами теории вероятностей / А.С. Чеботарев. – М. : Геодезиздат, 1958. – 606 с.

Зміст

Навчальне видання

Математична обробка геодезичних вимірів

Конспект лекцій

Укладач ***Крупела Леонтій Миколайович***

Відповідальний за випуск ***Сухий П.О.***

Літературний редактор Колодій О.В.
Комп’ютерний набір Гайсенюк А.Ф.

Підписано до друку 22.11.2010. Формат 60 х 84/16.
Папір офсетний. Друк різографічний. Ум.-друк. арк. 7,0.
Обл.-вид. арк. 7,5. Тираж 100. Зам. 445.
Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету
58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.