Наш семинар: математические сюжеты

Сумма обратных квадратов

К. П. Кохась*

В этой заметке мы рассказываем о том, как можно разными способами найти значение суммы

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots.$$

Вероятно, все изложенные здесь способы являются известными. Да и попытки устроить ревизию в этом хозяйстве уже тоже предпринимались.

Толчком к написанию этого текста послужило наблюдение, изложенное в параграфе 7, пополнению коллекции доказательств сильно помогли статья [12] и дискуссии в [18].

1. Метод Абеля

Воспользуемся стандартным способом нахождения сумм — методом Абеля. Его проходят в конце первого курса. Способ состоит в следующем. Чтобы найти сумму сходящегося ряда $\sum a_k$, рассматривают степенной ряд $f(x)=\sum a_k x^k$. По теореме Абеля радиус сходимости этого ряда не меньше 1. Есть много различных приемов работы со степенными рядами и если мы каким-нибудь образом сумеем найти явную формулу для функции $f(x)$, то тогда $\sum a_k = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$. Итак, положим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}\,.$$

*Поддержано грантом НШ–2251.2003.1

Тогда

$$xf'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)\,.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx\,. \tag{1}$$

К сожалению, интеграл «не берется». Думаем, с этой трудностью сталкивались многие первокурсники.

Придется идти другим путем. Впрочем, чуть позже мы все-таки вычислим этот интеграл при помощи комплексного интегрирования (с помощью вычетов).

2. Разложим синус или что-нибудь на множители

Вот рассуждение, принадлежащее Эйлеру. Рассмотрим формулу Тейлора для функции $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\,. \tag{2}$$

Выражение в правой части (ряд) представляет собой «многочлен бесконечной степени». Естественно, что раз степень этого «многочлена» бесконечна, то у него должно быть бесконечно много корней. Это замечание прекрасно соответствует нашим знаниям о функции $\sin x$: действительно эта функция имеет бесконечно много корней, а именно, все точки вида πn, $n \in \mathbb{Z}$ (и кстати, других комплексных корней нет). Попробуем разложить эту функцию на множители. Здесь нужно действовать аккуратно: например, разложение

$$\sin x = x(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\dots$$

вряд ли может быть верным, сомножители при фиксированном x стремятся к бесконечности, да и все коэффициенты при раскрытии скобок получаются целочисленными кратными π, что не соответствует формуле (2). Для того чтобы получить более «правильное» разложение, давайте перенормируем скобки: вместо скобки $(x - k\pi)$, обращающейся в нуль при $x = k\pi$, возьмем $(1 - \frac{x}{k\pi})$. Кроме того сгруппируем вместе скобки, соответствующие корням $\pm k\pi$. Получим

$$\sin x = x\Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\Big)\dots\,. \tag{3}$$

Это разложение уже более правдоподобно: произведение в правой части сходится при любом вещественном (и даже комплексном) x. Да и коэффициент при младшем члене (т. е. при x) такой, как надо: если раскрыть все скобки в правой части, то, ясное дело, коэффициент при x будет равен единице.

Давайте тогда вычислим коэффициент при x^3 в формуле (3). В левой части коэффициент при x^3 равен $-1/6$, это мы знаем из формулы (2). А в правой части коэффициент равен... постойте, постойте... ну да, он равен $-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\dots\right)$. И мы приходим к замечательному равенству

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\,. \tag{4}$$

Разумеется, рассуждения, которыми получена эта формула, не претендуют на звание «доказательство». Но по большому счету они верны. Теорема о разложении функции $\sin x$ в бесконечное произведение (т. е. формула (3)) доказывается в курсе анализа или ТФКП (см. [5, 8]).

* * * * * *

Вариацией на эту же тему является вот какой подход: давайте подберем какую-нибудь разумную последовательность многочленов, у которых корнями являются не то чтобы сами дроби $1/n^2$, а какие-то асимптотически близкие к ним выражения, после чего выполним предельный переход.

Например, сделаем так ([12]). Возьмем нечетное число $n = 2m+1$. Нетрудно проверить, что тогда

$$\sin nx = P_n(\sin x),$$

где P_n — многочлен степени n. Подставляя $x = k\pi/n$, мы видим, что числа $\sin(k\pi/n)$, $-m \leqslant k \leqslant m$, являются корнями этого многочлена, а так как их здесь ровно n, то других корней нет, следовательно,

$$P_n(y) = ny\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{y^2}{\sin^2(k\pi/n)}\right).$$

Здесь нормировочный коэффициент n в правой части подобран из тех соображений, что $\lim\limits_{y\to 0} P_n(y)/y = n$. Таким образом,

$$\sin nx = n\sin x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2(k\pi/n)}\right).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 разложений Тейлора в нуле левой и правой частей, получаем

$$-\frac{n^3}{6} = -\frac{n}{6} - n\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2(k\pi/n)}\,,$$

и следовательно,

$$\frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} = \frac{1}{6n^2}\,. \tag{5}$$

Теперь зафиксируем натуральное число M и будем полагать, что число m, которое мы выбрали с самого начала, больше чем M. Тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} = \frac{1}{6n^2} + \sum_{k=M+1}^{m} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)}\,.$$

В правой части воспользуемся неравенством $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$, верным при $0 < x < \pi/2$:

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} < \frac{1}{6n^2} + \sum_{k=M+1}^{m} \frac{1}{4k^2}\,.$$

Пусть теперь $m \to +\infty$ (и вместе с ним $n = 2m+1$ тоже стремится к бесконечности), в пределе получим

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k^2\pi^2} \leqslant \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}\,.$$

Наконец, устремим и M к бесконечности. Поскольку в правой части написан хвост сходящегося ряда, мы сразу получаем (4). Первоисточник этого рассуждения — [14].

* * * * * *

А теперь чуть менее техническое рассуждение. Вероятно, читатель учил когда-то в школе формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

Знаете, что за двойка стоит в числителе? Это на самом деле коэффициент C_2^1. А знаете, что за минус единица стоит в знаменателе? Это, конечно же $(-1)^{k+1}C_2^k$ при $k=2$. Общая же формула, которую читатель, вероятно, в школе не проходил, выглядит так (мы ее к тому же запишем для котангенсов, а не для тангенсов):

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{1 - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2}\alpha + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4}\alpha - \ldots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1}\alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5}\alpha - \ldots}\,. \tag{6}$$

На самом дела эта формула очевидна: подставьте

$$\cos nx = \operatorname{Re}(\cos x + i\sin x)^n, \quad \sin nx = \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x)^n$$

и все получится. Для наших целей эта формула хороша тем, что она сразу

же позволяет указать корни многочлена
$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \dots .$$
Вот эти корни:
$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1}, \quad \dots, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1}.$$
Действительно, подставляя $n = 2m+1$, $\alpha = k\pi/(2m+1)$ в (6), мы видим, что левая часть бесконечна и при этом все котангенсы в правой части конечны; это может быть только если знаменатель обращается в нуль.

Теперь мы можем подсчитать сумму этих корней по теореме Виета
$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{C_{2m+1}^3}{C_{2m+1}^1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$
А заодно, поскольку $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1$, мы можем установить и такое равенство
$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m+1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{m\pi}{2m+1}} = \\ = \frac{m(2m-1)}{3} + m = \frac{m(2m+2)}{3}.$$
(Кстати, это в точности равенство (5).)

Ну вот, а сейчас мы вытащим из шляпы зайца. Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\sin\alpha}$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, мы можем заключить из предыдущих двух формул, что
$$\frac{m(2m-1)}{3} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{3\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \\ < \frac{m(2m+2)}{3}.$$
Сокращая на $\dfrac{(2m+1)^2}{\pi^2}$ и переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем равенство (4). Это рассуждение мы взяли из [10, задача 143].

3. Котангенс

Вот еще одно рассуждение от Эйлера. Прологарифмируем равенство (3), после чего возьмем производную, получится
$$\operatorname{ctg} x = \dots + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \dots \tag{7}$$
Дифференцирование законно, поскольку ряд $\dfrac{1}{x} + \sum \dfrac{2x}{x^2 - \pi^2 k^2}$ сходится равномерно в окрестности любой точки $x \neq \pi k$. Между прочим, получилось

довольно разумное равенство, типичное разложение на простейшие, сравните с разложениями

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{1/2}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1/2}{x+1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P'(x_k)}{x-x_k}$$

(в последнем равенстве $P(x)$ — многочлен степени n, x_k — его (комплексные) корни). В курсе ТФКП, это так и называется: «разложение мероморфной функции на элементарные дроби».

Теперь будем пожинать плоды. Разложим каждую из дробей $\dfrac{1}{x+\pi k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{x+\pi k}=\frac{1}{\pi k}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{\pi k}}=\frac{1}{\pi k}\Big(1-\frac{x}{\pi k}+\frac{x^2}{\pi^2k^2}+\ldots\Big).$$

Суммируя такие разложения по всем k, получаем формулу

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\pi^2}\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\Big)-\frac{2x^3}{\pi^4}\Big(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\Big)-\ldots .$$

Чтобы в очередной раз узнать, чему же, собственно, равна сумма $1+\dfrac{1}{4}+$ $+\dfrac{1}{9}+\ldots$, осталось только подсчитать коэффициент при x в тейлоровском разложении в окрестности точки $x_0=0$ функции $\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}$. Эта функция только с виду ведет себя в нуле не очень хорошо, но если положить $f(0)=$ $=0$, то она окажется в нуле и непрерывна, и дифференцируема, и даже аналитична; искомый коэффициент равен

$$\lim_{x\to 0}\Big(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\Big)'=\lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{x^2}\Big)=-\frac{1}{3}\,. \tag{8}$$

И мы снова получаем (4). Кстати, аналогично можно узнать, что сумма обратных четвертых степеней равна $\pi^4/90$ (это можно было также узнать, пользуясь всеми остальными изложенными здесь способами или их обобщениями).

В книге [4], из которой мы взяли это рассуждение, предлагается еще и такой вариант:

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1-\sin x}&=\operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\Big)=\\ &=-2\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{x+\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{x-\frac{5\pi}{2}}+\frac{1}{x+\frac{7\pi}{2}}+\ldots\right)=\\ &=\frac{4}{\pi}\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\Big)+\end{aligned} \tag{9}$$

$$+\frac{8x}{\pi^2}\Big(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\dots\Big)+$$
$$+\frac{16x^2}{\pi^3}\Big(1-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}-\frac{1}{343}+\dots\Big)+\dots.$$

Приравнивая коэффициенты при x в левой и правой частях, получаем равенство

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\dots=\frac{\pi^2}{8}. \qquad (10)$$

Но сумма обратных квадратов нечетных чисел легко выражается через сумму обратных квадратов всех натуральных чисел:

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\dots=$$
$$=\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots\Big)-\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\dots\Big)=$$
$$=\frac{3}{4}\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots\Big).$$

4. Арктангенс

Вам ничего не напоминает, уважаемый читатель, выражение (9)?

Ну конечно же, это «кусочек» знаменитой формулы Грегори – Лейбница, первого в истории математики ряда, задающего разложение числа π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots.$$

Возведем это равенство в квадрат! Точнее говоря, сначала запишем его в виде $\pi=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}$, а уж потом возведем в квадрат

$$\pi^2=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}}\underset{n:=r-m}{=}$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})}= \qquad (11)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})} \qquad (12)$$

Законность перемены порядка суммирования (переход от (11) к (12)) здесь нетривиальна, мы не будем это доказывать (у нас *популярная* статья), доказательство можно прочесть в [5, § 1.66], а пока закончим вычисление. Заметим, что в последних суммах при $n \neq 0$ мы имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}} \right) = 0\,.$$

Поэтому двойная сумма (12) равна

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2} = 8\Big(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\Big)\,.$$

Мы опять доказали формулу (10).

5. Теорема о вычетах

Еще один подход к вычислению интересующей нас суммы, родственный использованию формулы (7), основан на применении теоремы о вычетах. Желаете вычислить некоторую сумму? Есть фирменный способ! Подберите такую мероморфную функцию, вычеты которой в особых точках равны слагаемым этой суммы, и вычислите интеграл по контуру, охватывающему все особые точки!

Например, вычислим-ка, чему равно 2+2. Разложение (7) подсказывает, что есть довольно удобная функция, у которой много особых точек и все вычеты в особых точках равны единице. Эта функция — котангенс! Рассмотрим тогда интеграл

$$\int\limits_{C_R} 2\operatorname{ctg} z\, dz,$$

где контур C_R изображен на рис. 1 слева. Внутри контура две особые точки, по теореме о вычетах интеграл равен $2\pi i(2+2)$. С другой стороны, в силу π-периодичности котангенса интегралы по вертикальным сторонам прямоугольника сокращаются, а в силу нечетности сумма интегралов по горизонтальным сторонам равна удвоенному интегралу по верхней стороне. Итак,

$$2\pi i(2+2) = 2 \int\limits_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} 2\operatorname{ctg} z\, dz = 2 \int\limits_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} \frac{2\cos z}{\sin z}\, dz = 4i \int\limits_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} \frac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}\, dz\,.$$

Левая часть не зависит от R, а в правой части подынтегральное выражение при $R \to +\infty$ стремится к -1, а сам интеграл — к 2π. Переходя

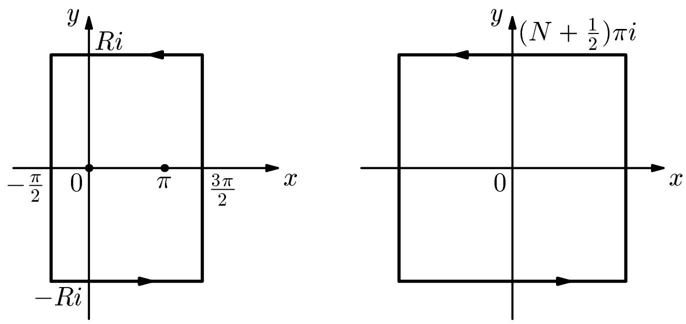

Рис. 1. *К вопросу о том, чему равно 2+2*

к пределу, заключаем, что

$$2+2=4. \tag{13}$$

Как вы понимаете, теперь вычисление суммы $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\dots$ для нас не проблема. Правда, удобнее вычислять удвоенную сумму

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2}, \tag{14}$$

где штрих обозначает, что в сумме пропущено слагаемое для $n=0$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{C_N} \frac{\pi^2}{z^2} \operatorname{ctg} z\, dz,$$

где контур C_N изображен на рис. 1 справа (здесь N — натуральное число). Мы добавили в подынтегральное выражение множитель π^2/z^2, чтобы вычеты подынтегральной функции стали равны слагаемым нашей суммы. Аналогично предыдущему вычислению интегралы по вертикальным сторонам квадрата сокращаются, а интегралы по горизонтальным сторонам квадрата стремятся к нулю, кстати, тоже из-за множителя $1/z^2$. Кроме того, при $N\to+\infty$ в контур попадает все больше особых точек котангенса. Переходя к пределу, мы получаем, что

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\pi^2}{z^2} \operatorname{ctg} z \;+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2} = 0$$

Сам вычет мы уже фактически подсчитали в (8). И это дает нам еще одно доказательство формулы (4).

6. Γ-функция

Приведенное вычисление, несомненно, оставит неприятный осадок в душе настоящего эстета. Прозрачная идея, краткость, несложные или хорошо замаскированные технические подробности, — все это прекрасно, но один штрих (а именно: штрих в формуле (14)) сводит на нет все наши усилия: с самого начала вычисления нам пришлось удвоить количество слагаемых!

— Нет ли у Вас такого же халата, но с перламутровыми пуговицами? — спросит нас этот читатель. — Т. е. нет ли у Вас такой функции, особые точки которой находятся в точках $n \in \mathbb{N}$, а вычеты по-прежнему равны единице?

Есть. Есть такая функция! Это логарифмическая производная Γ-функции Эйлера! Ну. . . , почти.

Саму Γ-функцию можно определить выражением

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x}\, dx,$$

которое задает ее при $\operatorname{Re} z > 0$. На остальные комплексные значения z ее можно распространить, пользуясь формулой понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{15}$$

Имеет место следующая замечательная формула, которую получают, отталкиваясь от определений и простых свойств Γ-функции, довольно замысловатыми манипуляциями с интегралами (см., например [8, §535–537]):

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} + C = \int\limits_0^1 \frac{1-t^z}{1-t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\Big). \tag{16}$$

Здесь C — это не какая попало константа, а постоянная Эйлера. Эта формула показывает, что функция $\dfrac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}$ действительно обладает нужными нам свойствами: ее особые точки расположены, правда, не в натуральных, а в отрицательных целых точках, ну так и вычеты равны не единице, а минус единице.

Между прочим, все три части равенства (16) можно продифференцировать по z, а потом подставить $z = 0$, получится перспективная для наших целей формула

$$\frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}\bigg|_{z=0} = \int\limits_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,, \tag{17}$$

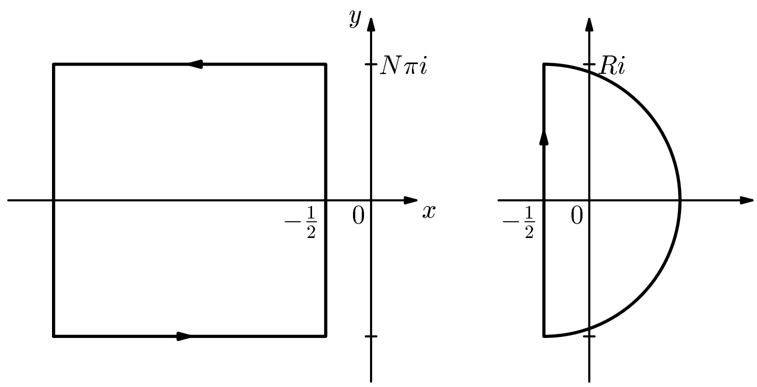

Рис. 2.

которая выражает интересующую нас сумму, впрочем, не вполне понятно через что (и кстати, интеграл в средней части формулы мы уже встречали в параграфе 1). Не будем пока думать об этом, мы поглощены другой идеей. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{S_N} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где S_N — квадратный контур, изображенный на рис. 2 слева.

Как ведут себя интегралы по сторонам этого квадрата, когда N растет? Интегралы по горизонтальным сторонам и по левой вертикальной стороне стремятся к нулю, благодаря множителю z^2 в знаменателе, поскольку по формуле (16) подынтегральная функция в этих местах невелика. Переходя к пределу при $N \to +\infty$, получаем равенство

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2\Gamma(z+1)}\,dz.$$

Отметим еще одно достижение человеческой мысли, формулу Вейерштрасса (см. [8])

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{z}{n}\Bigr)e^{-z/n}, \qquad z\in\mathbb{C},\ z\neq -1,-2,-3\ldots$$

(здесь C — по-прежнему постоянная Эйлера). Из этой формулы в частности следует, что $\Gamma(z+1)\neq 0$ при $\operatorname{Re} z > -\dfrac{1}{2}$ и поэтому в полуплоскости

$\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ определена однозначная ветвь функции $\log\Gamma(z+1)$. Тогда проинтегрируем по частям

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2\Gamma(z+1)}\,dz = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz,$$

и чтобы вычислить интеграл в правой части, изобретем подходящий контур (рис. 2 справа):

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}-Ri}^{-\frac{1}{2}+Ri} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz + \int\limits_{\substack{\operatorname{Re} z\geqslant-\frac{1}{2}\\ |z|=\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}}} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz\right) =$$

$$= -2\operatorname{res}_{z=0}\frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,. \tag{18}$$

Второе слагаемое под пределом — интеграл по полуокружности — стремится к нулю при $R \to +\infty$ опять в силу оценок, которые следуют из формулы (16), а минус перед пределом стоит из-за неправильной ориентации контура. Таким образом, под пределом стоит интеграл по границе полукруга, который мы вычислили по теореме о вычетах.

Осталось подсчитать вычет (18) и тут наша наезженная магистраль упирается в тупик: стандартный способ вычисления вычетов приводит к необходимости найти значение выражения $\left(\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}\right)'$ при $z = 0$, т. е. к проигнорированной нами чуть раньше формуле (17)!

7. Немного здравого смысла, везения и комплексного интегрирования

Мы его все-таки вычислим, этот вычет. Вернемся к интегралу (1). Сделаем замену переменных $x = e^{-t}$:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1}\,.$$

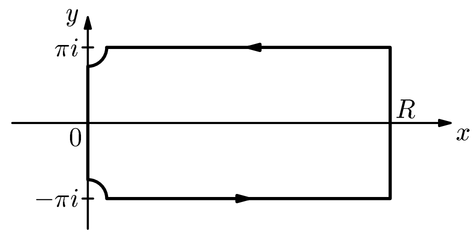

Рис. 3.

Рассмотрим контур $C_{r,R}$, изображенный на рис. 3. Проинтегрируем функцию $\dfrac{z^2}{-e^z-1}$ по этому контуру.

В точках $\pm\pi i$ подынтегральная функция имеет простой полюс с главной частью ряда Лорана $\dfrac{-\pi^2}{x\mp\pi i}$. Поэтому сумма пределов интегралов по дугам, обходящим особые точки $\pm\pi i$, равна $\pi^3 i$. По теореме о вычетах имеем

$$0=\pi^3 i+\lim_{\substack{r\to+0\\R\to+\infty}}\int\limits_{C_{r,R}}\frac{z^2\,dz}{-e^{-z}-1}=\pi^3 i+\lim_{\substack{r\to+0\\R\to+\infty}}\left(\int\limits_{\rightarrow}+\int\limits_{\uparrow}+\int\limits_{\leftarrow}+\int\limits_{\downarrow}\right)\frac{z^2\,dz}{-e^{-z}-1}\,.$$

Рассмотрим сумму интегралов по горизонтальным сторонам контура:

$$\lim_{\substack{r\to+0\\R\to+\infty}}\left(\int\limits_{\rightarrow}+\int\limits_{\leftarrow}\right)\frac{z^2\,dz}{-e^z-1}=$$
$$=\lim_{\substack{r\to+0\\R\to+\infty}}\int\limits_r^R\frac{(t-\pi i)^2\,dt}{-e^{t-\pi i}-1}-\lim_{\substack{r\to+0\\R\to+\infty}}\int\limits_r^R\frac{(t+\pi i)^2\,dt}{-e^{t+\pi i}-1}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{-4\pi i t\,dt}{e^t-1}\,.$$

Интеграл по правой вертикальной стороне контура $C_{r,R}$ стремится к нулю из-за экспоненты в знаменателе. Таким образом, получаем равенство

$$0=\pi^3 i-4\pi i\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{e^t-1}-\lim_{r\to+0}\int\limits_{(-\pi+r)i}^{(\pi-r)i}\frac{z^2\,dz}{e^z+1}\,. \tag{19}$$

Теперь заметим, что

$$\frac{z^2}{e^z+1}=-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{e^z-1}{e^z+1}+\frac{z^2}{2}\,,$$

причем функция $-\dfrac{z^2}{2}\cdot\dfrac{e^z-1}{e^z+1}$ — нечетна, и следовательно, интеграл от нее по промежутку $[(-\pi+r)i, (\pi-r)i]$ равен нулю. Значит, мы можем переписать равенство (19) в виде

$$4\pi i \int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t-1} = \pi^3 i - \int\limits_{-\pi i}^{\pi i} \frac{z^2}{2}\,dz\,.$$

Таким образом, мы находим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t-1} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Это вычисление нам подсказал Е. Горячко.

Заканчивая тему комплексных вычислений, мы приведем еще одно вычисление, связанное с интегралом $\int \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$, при помощи которого можно совсем легко найти сумму обратных квадратов нечетных чисел (мы почерпнули это вычисление в [16]).

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-1}^{1} \frac{z^k}{k}\,dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\log(1-z)}{z}\,dz = -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1} \frac{\log(1+z)}{z}\,dz\,.$$

Можно считать, что в правой части мы интегрируем не по отрезку $[-1,1]$, а по полуокружности $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тогда введем параметризацию $z=e^{2it}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ и, избегая не очень содержательных в данном случае замечаний о выборе ветви логарифма, учтем, что $\log(1+e^{2it}) = \ln|1+e^{2it}| + i\arg(1+e^{2it}) = \ln 2\cos t + it$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1} \frac{\log(1+z)}{z}\,dz =$$

$$= -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+e^{2it})\,dt = -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\cos t\,dt + \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Сравнивая вещественные части самого левого и самого правого выражения, мы опять находим нашу сумму, а сравнивая мнимые части, получаем равенство $\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$, которое, впрочем, нам не потребуется.

8. Функциональное уравнение для дзета-функции

До сих пор мы старательно обходили еще один подход, чуть ли не самый важный, к вычислению нашей суммы. Обозначим

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

Эта формула задает функцию комплексной переменной $\zeta(s)$ — дзета-функцию Римана — при $\operatorname{Re} z > 1$. Доказательство того, что эта функция аналитична в указанной области, является несложным упражнением для второкурсника. Функция допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Получается функция, имеющая единственный простой полюс в нуле. Нас интересует значение $\zeta(2)$. Кстати, вопрос, чему равно $\zeta(3)$, интересует все прогрессивное человечество.

Известно функциональное уравнение для дзета-функции:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\tfrac{1}{2}\pi s\,\Gamma(s)\zeta(s).$$

Уравнение, эквивалентное написанному, встречается (без доказательства) в одной работе Эйлера 1749 г. Два доказательства этой формулы можно прочесть в [5, §4.44–4.45]. Выразив $\zeta(s)$ из правой части и подставив $s = 2$, мы находим, что

$$\zeta(2) = \frac{\zeta(-1)}{2^{-1}\pi^{-2}\cos\pi\,\Gamma(2)} = -2\pi^2\zeta(-1).$$

Нам осталось найти, чему же равно $\zeta(-1)$. А поскольку ответ мы уже знаем, то достаточно проверить формулу

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = -\frac{1}{12}\,. \tag{20}$$

Появление здесь расходящегося ряда, да еще *такого*, не должно шокировать читателя. Работа с расходящимися рядами и вообще с *сомнительными* объектами — это одна из постоянных черт работы математика. Вспомните, например, о производящих функциях, при работе с которыми далеко не всегда задаются вопросом, а определена ли эта функция хотя бы в одной точке (кроме нуля; впрочем, значение производящей функции в нуле мало кого интересует).

Сама формула (20) была известна еще Эйлеру. В книге Харди [9, §13.10] дано доказательство этой формулы, состоящее в том, что предлагается специальный способ суммирования рядов — метод суммирования Рамануджана, который для сходящихся рядов дает их обычную сумму, но кроме того дает конечную сумму для целого класса расходящихся рядов, в том числе для ряда (20). Кроме того при этом не остается сомнений, что мы вычисляем в точности $\zeta(-1)$.

Мы же ограничимся красивым, но трудно формализуемым выводом формулы (20), фактически в стиле [9, §13.12], который принадлежит D. Piponi (мы прочли об этом в заметке J. Baez в [18]).

Рассмотрим дифференциальный оператор $D = \dfrac{d}{dx}$. Формальное вычисление экспоненты дает нам формулу Тейлора

$$(e^{cD}f)(x) = f(x) + cf'(x) + \frac{c^2}{2}f''(x) + \ldots = f(x+c).$$

Эта формула хорошо знакома тем, кто слышал о представлениях группы Гейзенберга и ее алгебры Ли. Суммируя найденные выражения по c и подставляя $x = 0$, получаем

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots = \big((1 + e^D + e^{2D} + \ldots)f\big)(0) = \left(\frac{1}{1-e^D}\, f\right)(0).$$

Пусть $f(x) = x$, $F(x) = x^2/2$ — первообразная функции $f(x)$. Тогда мы имеем соотношение

$$1 + 2 + 3 + \ldots = \Big(\frac{D}{1-e^D}\, F\Big)(0).$$

Для вычисления правой части осталось воспользоваться обычным разложением Тейлора

$$\frac{t}{1-e^t} = -1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \ldots$$

и тем соображением, что более чем двукратное дифференцирование функции $F(x) = x^2/2$ дает нуль. Формула (20) «доказана».

9. Интегрирование по частям

Следующее рассуждение мы почерпнули в [3], первоисточник — [15]. Пусть

$$I_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2k} x \, dx.$$

Обычное интегрирование по частям дает равенство

$$I_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2k-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= \frac{2k}{2k-1}\, I_{k-1} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin x \cdot (\cos^{2k-2} x \sin x) \, dx =$$

$$= \frac{2k}{2k-1} I_{k-1} - \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2k-1} x (2x \sin x + x^2 \cos x)\, dx =$$

$$= \dots = \frac{2k}{2k-1} I_{k-1} - \frac{1}{2k-1} I_k - \frac{2}{2k(2k-1)} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\, dx.$$

Пользуясь известным равенством

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,, \tag{21}$$

мы получаем соотношение

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{k^2}\,.$$

Суммируя эти соотношения по k, мы получаем, что

$$I_0 - I_N = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{N^2}\,.$$

Поскольку $I_N \to 0$ при $N \to +\infty$, мы окончательно получаем, что

$$1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{N^2} + \ldots = I_0 = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

10. Арксинус

Знаете, как раскладывают в ряд Тейлора $\arcsin x$ в нуле? Очень просто. Сначала его дифференцируют, получится $(1-x^2)^{-1/2}$. Это выражение раскладывают по биному:

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 - \Big(-\frac{1}{2}\Big)x^2 + \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{2!} x^4 - \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2})}{3!} x^6 + \ldots\,,$$

а потом интегрируют, получается

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}\, x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}\, x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\, x^7 + \ldots\,.$$

Ну хорошо, подставим в обе части $x = \sin t$ и проинтегрируем по t от 0 до $\pi/2$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} t\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\, dt + \frac{1}{2 \cdot 3} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t\, dt + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t\, dt + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^7 t\, dt + \ldots\,.$$

Вычисление интеграла в левой части оставим читателю в качестве упражнения, а для интегралов в правой части сгодится формула (21). Итого

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots .$$

Фантастика! Мы взяли это рассуждение в [4] (также как и рассуждения с формулой (3)).

11. Двойной интеграл

Следующее рассуждение, принадлежащее Калаби, мы приводим по [13]. Рассмотрим сумму $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Запишем каждое слагаемое $(2k+1)^{-2}$ в виде $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k}\, dxdy$, тогда сумму можно преобразовать следующим образом

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k}\, dxdy =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (xy)^{2k} \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-(xy)^2}$$

(сумму и интегралы можно поменять местами, например, в силу положительности). Теперь сделаем замену переменных

$$x = \frac{\sin u}{\cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}.$$

Загадочным образом выражение под интегралом превратиться в $1\, dudv$, а область, по которой происходит интегрирование, — в треугольник $\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u,v > 0, u+v < \frac{\pi}{2}\right\}$. Таким образом, полученный интеграл равен $\pi^2/8$.

* * * * * *

Следующее рассуждение взято из работы [11] со скромным названием: «Доказательство, которое упустил Эйлер: вычисление $\zeta(2)$». На самом деле, Эйлер упустил предыдущее доказательство.

Запишем сумму нашего ряда в виде двойного интеграла:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (xy)^{n-1} \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}.$$

Мы не будем прослеживать судьбу полученного многострадального интеграла в деталях, об этом можно прочесть не только в цитированной работе, но и в интернете, на страничке

http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeta2.html, в [12] и в других местах. Скажем только, что после замены переменных $x = u - v$, $y = u + v$ и интегрирования по v, получается интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg}\Big(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\Big)\, du,$$

Который, э-э-э, берется.

12. Ряды Фурье

Сразу несколько способов подсчета суммы обратных квадратов дает теория рядов Фурье. Рассмотрим разложения

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x\in[-\pi,\pi];$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad x\in[-\pi,\pi];$$

$$\frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x\in[0,2\pi]$$

и т. д. Из них можно сразу найти значение нашей суммы, подставляя подходящее значение x.

А из разложений

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad x\in(0,2\pi);$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad x\in(-\pi,\pi)$$

и т. д., можно получить значение нашей суммы, если применить равенство Парсеваля.

* * * * * *

Следующее рассуждение (из [12]) принадлежит Е. Старку. Из определения ядра Фейера следует, что

$$\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2 = \sum_{k=-n}^{n}(n-|k|)e^{ikx} = n + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\cos kx.$$

Пользуясь этой формулой, проинтегрируем по промежутку $[0,\pi]$ функцию $x\big(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\big)^2$, для этого удобнее взять в качестве n четное число,

$n = 2N$, тогда получаем

$$\int_0^\pi x\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx = N\pi^2 - 8N\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{(2r+1)^2} + 4\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{2r+1}\,.$$

Или

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{(2r+1)^2} + O\Big(\frac{\log N}{N}\Big). \tag{22}$$

Поскольку $\sin\dfrac{x}{2} > x/\pi$ при $0 < x < \pi$, мы можем оценить интеграл в правой части

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx < \frac{\pi^2}{8N}\int_0^\pi \sin^2 Nx\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{8N}\int_0^{N\pi}\sin^2 y\frac{dy}{y} = O\Big(\frac{\log N}{N}\Big).$$

Переходя в (22) к пределу при $N \to \infty$, получаем равенство (10).

Другое рассуждение Старка, ничуть не более изящное, можно прочесть в [17].

13. Формула суммирования Пуассона

Эта формула утверждает, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi nix}dx\,, \tag{23}$$

если функция удовлетворяет разумным условиям аналитичности (в этом случае ее доказывают комплексной техникой, напоминающей рассуждения § 5; см. [2]) или суммируемости (тогда используют преобразование Фурье; см. [6]).

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ни тому, ни другому условию не удовлетворяет, поэтому применим формулу (23) к функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$, а потом перейдем к пределу при $a \to 0$. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi nix}\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\,e^{-2\pi|n|a}$$

(опять вычисление по вычетам). Следовательно, сумма в правой части (23) равна

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{a}\,e^{-2\pi|n|a} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2\pi na} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}\cdot\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\,.$$

Таким образом, в нашем случае формула (23) превращается в равенство

$$\frac{1}{a^2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\,.$$

Что же получится, если мы теперь перейдем к пределу? Думаем, читатель, ни секунды не сомневаясь, ответит: «$\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$». Правильно!

14. Теория чисел

Следующее рассуждение — опять из [12]. Обозначим через $r(n)$ количество целочисленных решений уравнения

$$x^2+y^2+z^2+t^2=n.$$

Хорошо известна формула для $r(n)$ (см., например, [1, предл. 17.7.2]):

$$r(0)=1,\qquad r(n)=8\sum_{\substack{m|n,\\ 4\nmid n}}m.$$

Положим $R(N)=\sum\limits_{n=0}^{N}r(n)$. Тогда

$$R(N)=1+8\sum_{n=0}^{N}\sum_{\substack{m|n,\\ 4\nmid n}}m=1+8\sum_{\substack{m\leqslant N,\\ 4\nmid n}}m\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor=1+8\bigl(\theta(N)-4\theta(N/4)\bigr)\,,\quad(24)$$

где

$$\theta(N)=\sum_{m\leqslant N}\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor=\sum_{mr\leqslant N}m=\sum_{r\leqslant N}\sum_{m=1}^{\lfloor N/r\rfloor}m=\frac{1}{2}\sum_{r\leqslant N}\left(\left\lfloor\frac{N}{r}\right\rfloor^2+\left\lfloor\frac{N}{r}\right\rfloor\right)\quad(25)$$

Найдем асимптотику левой и правой частей (24) при $N\to\infty$. Очевидно, $R(N)$ — это количество точек с целочисленными координатами в четырехмерном шаре радиуса $\sqrt{N}$, эта величина асимптотически равна объему шара, т. е. $\pi^2N^2/2$. Асимптотика $\theta(N)$ видна из формулы (25): $\theta(N)\sim\sim\zeta(2)N^2/2$. Подставляя эти величины в (24), получаем, что $\zeta(2)=\pi^2/6$.

Список литературы

[1] Айерлэнд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* М.: Мир, 1987.

[2] Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука, 1979.

[3] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. *Избранные задачи по вещественному анализу.* М.: Наука, 1992.

[4] Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения.* М.: Наука, 1975.

[5] Титчмарш Е. *Теория функций.* М.: Наука, 1980.

[6] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье.* М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

[7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа.* Часть вторая. М.: Физматлит, 1963.

[8] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2. СПб: Невский Диалект, 2002.

[9] Харди Г. *Расходящиеся ряды.* М.: ИЛ, 1951.

[10] Яглом А. М., Яглом И. М. *Неэлементарные задачи в элементарном изложении.* М.: ГИТТЛ, 1954.

[11] Apostol T. M. *A proof that Euler missid: evaluting* $\zeta(2)$ // Math. Intel., 1983. Vol. 60.

[12] Chapman R. *Evaluating* $\zeta(2)$.
`http://www.maths.ex.ac.uk/~rjc/rjc.html`

[13] Elkies N. *On the sums* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^{-n}}$. `arxiv.org/math.CA/0101168`

[14] Kortram R. A. *Simple proofs for* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *and* $\sin x = x \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2})$ // Math. Mag., 1996. Vol. 69. P. 122–125.

[15] Matsuoka Y. *An elementary proof of the formula* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ // Amer. Math. Monthly, 1961. Vol. 68. P. 486–487.

[16] Russel D. *Another Eulerian-type proof* // Math. Mag., 1991. Vol. 60. P. 349.

[17] Stark E. L. *The series* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$, $s = 2, 3, 4, \ldots$, *once more* // Math. Mag., 1974. Vol. 47. P. 197–202.

[18] `newsgroup: sci.math.research`