А К А Д Е М И Я   Н А У К
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
имени В. А. СТЕКЛОВА

LXXV

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА · 1965

Ответственный редактор
академик И. Г. Петровский

[illegible] редактора

Αἰσχύλος . . . τὰς αὑτοῦ τραγῳδίας
τεμάχη εἶναι ἔλεγεν τῶν
Ὁμήρου μεγάλων δείπνων*.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные факты теории алгебраических поверхностей были найдены во второй половине прошлого и в начале этого века М. Нетером, Пикаром, Пуанкаре и в особенности классиками итальянской школы алгебраической геометрии — Кастельнуово, Энриквесом и Севери. Полученные ими результаты были отправным пунктом следующего этапа развития алгебраической геометрии, который основывался на применении топологических, аналитических и алгебраических методов.

При этом выяснилось, что результаты, составляющие «классическую» теорию алгебраических поверхностей, распадаются на две принципиально различные группы.

Некоторые из них оказались частными случаями общих теорем об алгебраических многообразиях (или схемах) произвольной размерности. Наиболее яркие примеры дают теория многообразий Пикара и абелевых многообразий или теорема Римана—Роха. Интересно заметить, что почти все результаты, содержащиеся в классическом обзоре Зариского [16], относятся именно к этому кругу вопросов. Сейчас имеется большое количество прекрасных изложений относящихся сюда теорий.

Результаты другой группы оказались специфичными именно для случая алгебраических поверхностей. К ним относятся такие основные факты этой теории, как критерий рациональности и линейчатости алгебраической поверхности, решение проблемы Люрота, теория минимальных моделей и большой комплекс результатов, которые итальянские алгебраические геометры объединяли названием «классификация алгебраических поверхностей».

По-видимому, все эти результаты не переносятся на многообразия высших измерений без очень существенных изменений и самый характер этих изменений в настоящее время совершенно неясен. Имеется немного работ, посвященных тому, чтобы снабдить эти результаты доказательствами, строгими с современной точки зрения и основывающимися на современной технике, и по возможности их дополнить. Первые (и основные) работы в этом направлении — это предложенное Кодаирой [48] доказательство критерия рациональности, а также статьи и книга Зариского [19] по проблеме минимальных моделей. Цель настоящей книги — дать связное изло-

---

* «Эсхил... говорил, что его трагедии — объедки от великих пиров Гомера», Афиней VIII, 39, 347 e.

жение всего этого круга вопросов. Ниже приводим краткое описание содержания книги.

Вся теория основывается на связи рациональных отображений многообразия в проективное пространство с классами дивизоров на этом многообразии (см., например, [30]). Как известно, в случае алгебраических кривых «почти всегда» (для негиперэллиптических кривых) отображение, соответствующее каноническому классу, является бирациональным и определяет так называемую каноническую модель кривой однозначно, с точностью до проективного преобразования. Таким образом, задача бирациональной классификации сводится к вопросам проективной классификации пространственных кривых.

Отображение, соответствующее удвоенному или утроенному каноническому классу, играет ту же роль для всех кривых, кроме рациональных и эллиптических. Для этих же кривых отображение, соответствующее любой кратности канонического класса, не является бирациональным. Этот метод непригоден вообще для их описания, которое, впрочем, получается легко из других соображений.

Речь идет о том, чтобы получить аналогичную картину для алгебраических поверхностей. Сначала выделяется класс тех поверхностей, для которых некоторая кратность канонического класса дает бирациональное отображение. Доказывается, что всегда достаточно взять канонический класс с кратностью, не большею девяти (но кратность 3, которая играет роль в теории кривых, может быть недостаточна, как показывают примеры). Поверхности этого типа могут быть характеризованы простым способом — это те нерациональные поверхности, для которых индекс самопересечения канонического класса положителен.

Дальнейшая цель заключается в описании остальных поверхностей, для которых никакая кратность канонического класса не определяет бирационального отображения. Эти поверхности аналогичны, с этой точки зрения, рациональным и эллиптическим кривым. Их конструктивное описание также в значительной степени аналогично описанию этих кривых. Именно, поверхности, о которых идет речь, распадаются на следующие пять групп: 1) рациональные поверхности; 2) двумерные абелевы многообразия; 3) линейчатые поверхности, т. е. поверхности, расслоенные на семейства рациональных кривых; 4) поверхности, расслоенные на семейство эллиптических кривых, и 5) еще один тип поверхностей, которые близки к абелевым многообразиям в том смысле, что их канонический класс равен нулю, но у которых, в отличие от абелевых многообразий, одномерное число Бетти равно нулю.

Чтобы разобраться во всем множестве этих типов поверхностей, их делят на четыре группы в зависимости от значения важного инварианта, который обозначается через $\varkappa$. Через $\varkappa$ обозначается максимальная размерность образа поверхности при рациональных отображениях, соответствующих всевозможным кратностям канонического класса. Очевидно, что всегда $\varkappa \leqslant 2$. Если линейные системы, соответствующие всем кратностям канонического класса, пусты, то мы полагаем $\varkappa = -1$. Таким образом, $\varkappa$ может принимать четыре значения: $-1, 0, 1$ и 2. Окончательная цель классификации — дать характеристику поверхностей с заданным значением $\varkappa$ при помощи так называемых численных инвариантов (индекса самопересечения канонического класса, кратных родов, определяемых формулой (11), и иррегулярности, определяемой формулой (12) и указать их конструктивное описание. Результаты классификации сведены в таблице в конце введения.

В книге имеется также ряд результатов, выходящих за рамки описанной выше теории, хотя с ней и связанных.

Скажем подробнее о некоторых: теории бирациональных преобразований поверхностей, теории минимальных моделей, теореме М. Нетера.

Теория бирациональных преобразований поверхностей основывается на понятии σ-процесса. Это бирациональное преобразование

$$f : V \to V'$$

неособых поверхностей V и V', которое бирегулярно всюду, кроме точки $P \in V$ и кривой $C \subset V'$, причем f^{-1} регулярно и $f^{-1}(C) = P$. Основные результаты:

1) если φ — такое бирациональное отображение

$$\varphi : V \to V'$$

неособых поверхностей, что φ^{-1} регулярно отображает V' на V, то φ является произведением конечного числа σ-процессов;

2) любое бирациональное преобразование неособой поверхности в неособую является произведением конечного числа σ-процессов и конечного числа преобразований, обратных σ-процессам.

Теория минимальных моделей изучает такие поверхности V (называемые минимальными), что любое регулярное бирациональное преобразование $f: V \to V'$ является бирегулярным. Всякая поверхность бирационально эквивалентна минимальной, из которой она получается, следовательно, конечным числам σ-процессов. Основная теорема заключается в том, что в классе бирационально эквивалентных друг другу поверхностей имеется только одна минимальная, если эти поверхности не являются линейчатыми.

Минимальные модели линейчатых (в частности, рациональных) поверхностей все описаны.

Наконец, теорема М. Нетера касается структуры группы всех бирациональных преобразований проективной плоскости (или, что то же самое, группы автоморфизмов поля рациональных функций $k(x, y)$ от двух переменных). Она утверждает, что эта группа порождается так называемыми квадратичными преобразованиями:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \qquad y' = \frac{a_3x + b_3y + c_3}{a_4x + b_4y + c_4}.$$

Классические результаты, излагаемые в этой книге, собраны почти все в обзоре Энриквеса [59]. Настоящая работа чрезвычайно многим обязана книге Энриквеса. Доказательства большей части теорем основаны на идеях Энриквеса. В то же время в проведении деталей доказательств следовать Энриквесу вряд ли было возможно — например, по обычаям того времени и той школы он часто ограничивается рассмотрением «общего» случая, не разбирая наиболее неприятные случаи, которые могут представиться. С другой стороны, в некоторых вопросах мы могли дополнить классические результаты новыми. Это относится, например, к некоторым результатам, изложенным в главах V, VII и IX. Наконец, в очень редких местах имеются расхождения с утверждениями Энрикввеса.

Мы не стремились к максимально возможной общности в условиях, накладываемых на основное поле. Все результаты верны, если это поле совпадает с полем комплексных чисел. Однако большинство рассуждений сохраняет свою силу, если основное поле алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0, а некоторые — для произвольного алгебраически замкнутого поля. Более подробно об этом сказано в каждой из глав.

Настоящая книга написана на основе докладов на семинаре по теории алгебраических поверхностей, который работал в 1961—1962 и 1962—1963 гг. под руководством И. Р. Шафаревича. Тексты докладов были затем переработаны, а некоторые части написаны заново. Отдельные главы написаны следующими авторами: гл. I, II и III — А. Б. Жижченко, гл. IV и VII — И. Р. Шафаревичем, гл. V: § 1 и 2 — Ю. И. Маниным, § 3—6 — Ю. Р. Вайнбергом и Ю. И. Маниным, § 7 — А. Н. Тюриным, гл. VI — Б. Г. Мойшезоном, гл. VIII и X — Б. Г. Авербухом, гл. IX — Г. Н. Тюриной.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей книге используется много фактов из теории алгебраических многообразий, в основном из теории алгебраических поверхностей и кривых. Приведем перечень основных результатов, знание которых необходимо для чтения этой книги, со ссылками на доступную читателю литературу. Кроме того, ниже приводятся некоторые определения и доказательства нескольких результатов, которые, хотя и содержатся в периодической литературе, но не могут считаться общеизвестными.

Все предварительные определения и результаты (определение алгебраического многообразия, поля функций на нем и т. д.) читатель может найти в книгах Ходжа и Пидо [55] и Ленга [30].

Мы предполагаем известными основные определения и факты из теории рациональных и бирациональных преобразований: определение рационального и бирационального преобразования, понятия исключительных подмногообразий и фундаментальных подмногообразий при бирациональных преобразованиях, основные свойства фундаментальных и исключительных подмногообразий, понятие и основные свойства регулярного (рационального) отображения, понятие нормального многообразия, нормализации (Ходж и Пидо [55], Ленг [30]).

Алгебраическое соответствие T между алгебраическими многообразиями V и V', в частности рациональное или бирациональное отображение, задается графиком $U \subset V \times V'$. Мы будем говорить, что пара (x, x'), $x \in V$, $x' \in V'$ принадлежит соответствию, если $x \times x' \in U$; также точка $x' \in V'$ будет соответствовать $x \in V$, если $x \times x' \in U$. Если $W \subset V$ — некоторое подмногообразие V и T — алгебраическое соответствие между V и V', то через $T(W)$ мы будем обозначать множество точек на V', соответствующих точкам W; таким образом, $x' \in T(W)$, если найдется точка $x \in W$ такая, что $x \times x' \in U$. Как известно, $T(W)$ будет алгебраическим множеством [55]. Мы будем называть $T(W)$ полным образом. Рациональное отображение $T: V \to V'$ индуцирует гомоморфизм полей функций $k(V') \to k(V)$; этот гомоморфизм будем обозначать через T^*.

Понятие дивизора функции, определение линейной и алгебраической эквивалентности циклов, построение группы классов линейной эквивалентности и группы классов алгебраической эквивалентности для циклов, понятие пространства функций, связанных с дивизором, читатель сможет найти в книгах [8], [11] и статье [12].

Основные факты, касающиеся этих групп (в частности, конечность ранга группы Нерона — Севери классов алгебраической эквивалентности для дивизоров), изложены в книге Ходжа и Пидо [55] и в [8].

Теория пересечения алгебраических циклов на алгебраических многообразиях изложена в статье Серра [51], а для алгебраических поверхностей — в книге Зариского [23].

Возможность введения с помощью пересечений умножения в группе классов линейной эквивалентности, благодаря чему эта группа приобретает структуру градуированного кольца (кольца Чжоу алгебраического многообразия), доказана в статье Самюэля [43] и в трудах семинара Шевалле [46].

Определение линейных систем дивизоров на алгебраическом многообразии и их связь с рациональными отображениями содержится в книге Ленга [30]. Теорема Бертини, сюда относящаяся, изложена в § 3, гл. I настоящего сборника.

В сборнике используются многие факты из теории алгебраических кривых. Теорема Римана — Роха, формула для рода накрытия кривой, формула для арифметического рода кривой на поверхности, теорема Римана — Роха для кривой с особенностями могут быть найдены читателем в книгах Шевалле [58] и Серра [49].

Теорему Римана — Роха для поверхности, формулу для арифметического рода поверхности читатель может найти в книге Серра [49], статье Зариского [21] и статье Бореля и Серра [9].

Основные свойства дифференциальных форм на алгебраических многообразиях и их поведение при регулярных отображениях изложены в книге Ленга [30].

Наконец, основные свойства абелевых многообразий, многообразий Альбанезе и т. д. содержатся в книге Ленга [31].

Понятие локального кольца точки, подмногообразия, теоремы о поведении локальных колец при бирациональных преобразованиях можно найти в книгах Ходжа и Пидо [55] и Ленга [30].

Основной метод, применяемый в этом сборнике,— метод когерентных алгебраических пучков. Изложение этого метода, связь его с классическим методом линейных систем, а также основные теоремы о когерентных алгебраических пучках содержатся в статьях Зариского [21] и Серра [50].

Мы приведем теперь два определения, которые не являются общеизвестными.

Пусть есть рациональное отображение $T\colon V \to V'$ и пусть C — некоторый дивизор на V с общей точкой x. Поскольку фундаментальные элементы T имеют размерность $\leqslant n-2$, отображение T в точке x регулярно, и, следовательно, определена точка $y = T(x)$, когда $k(y) \subset k(x)$, причем, очевидно, $k(y) \subset k(V')$. Рассмотрим подмногообразие C' на V' с общей точкой y.

Возможны два случая.

1. $\dim C' = \dim C$, т. е. $tr^{k(y)/k} = tr^{k(x)/k}$.

Обозначим через n_C число $[k(x) : k(y)]$; тогда дивизор $n_C C'$ мы будем называть образом (правильным, алгебраическим) кривой C.

2. $\dim C' < \dim C$, т. е. $tr^{k(y)/k} < tr^{k(x)/k}$. В этом случае мы будем считать образ C нулевым (удобно считать, что в этом случае $n_C = 0$) либо точкой $(T(x)$, поскольку такая точка определена). В случае, когда $\dim V = \dim V'$, так определенное отображение даст гомоморфизм группы дивизоров $D(V)$ в группу $D(V')$, который мы будем обозначать через $T\colon D(V) \to D(V')$.

Образ дивизора $T(C)$ (или, иногда, $T[C]$ для отличия от полного образа) при этом отображении будет называться алгебраическим (или правильным) образом.

Если отображение T бирационально, то, как легко следует из свойств бирациональных отображений, n_C будет либо 0, либо 1.

Рассмотрим в этом случае обратное отображение $T^{-1}\colon V' \to V$, и пусть D' — дивизор на V'.

Определен образ $(T^{-1})(D')$. Если $(T^{-1})(D') = D \neq 0$, $D \subset V$, то, как нетрудно проверить, $T(D) = T((T^{-1}) D^1) = D'$.

В случае, когда T — регулярное бирациональное отображение, не имеющее фундаментальных точек на V, отображение T является, очевидно, эпиморфизмом:

$$T : D(V) \xrightarrow{\text{на}} D(V').$$

Пусть теперь $T : V \to V'$ — регулярное отображение V на V' (необязательно бирациональное). Мы можем определить в этом случае отображение $T^* : D(V') \to D(V)$ следующим образом.

Пусть C' — дивизор на V', $P' \in C'$. Тогда дивизор C' в окрестности точки P' является, как известно [55], локальной P'-компонентой дивизора $(g_{P'})$ некоторой функции $g_{P'} \in k(V)$ (V' — неособо). Уравнение $g_{P'} = 0$ мы будем называть локальным уравнением дивизора C' в точке P'. Пусть теперь P — некоторая точка на V, соответствующая точке $P' \in V'$ (быть может, точке P соответствует не единственная точка, а некоторый дивизор на V).

Функцию $g_{P'}$ можно рассматривать как некоторую функцию на V (так как существует вложение $k(V') \subseteq k(V)$). Нетрудно видеть, что, поскольку точка P' принадлежала дивизору нулей функции $g_{P'}$ на V', точка P будет принадлежать дивизору нулей функции $g_{P'}$ на V, причем если точке P' соответствует дивизор D на V, то этот дивизор D будет входить в дивизор нулей функции $g_{P'}$ с кратностью, равной кратности точки P', как точки дивизора C' (см. Ходж и Пидо [55]).

Рассматривая аффинное покрытие $\{U'\}$ многообразия V' и систему локальных уравнений $\{g_{P'} = 0\}$ дивизора C' в этом покрытии, мы, поднявшись на многообразие V, получим систему локальных уравнений $\{g_{P'} = 0\}$, соответствующую некоторому покрытию $\{U\}$ многообразия V. Можно показать, что система $\{g_{P'} = 0\}$ в покрытии $\{U\}$ будет согласована, т. е. что мы получим некоторый дивизор C на V. Так, определенный дивизор на V обозначается через $T^*(C')$ и называется полным прообразом дивизора $C' \subset V'$.

Известно, что в случае, когда $T\colon V \to V'$ регулярно, отображения T и T^* переводят линейно-эквивалентные дивизоры в линейно-эквивалентные, алгебраически эквивалентные в алгебраически эквивалентные и, более того, индуцируют гомоморфизмы колец Чжоу (см. статьи Бореля и Серра [9] и Самюэля [43]).

Кроме этих общих ссылок, в некоторых главах будут встречаться ссылки на немногие специальные факты из теории алгебраических и аналитических многообразий (например, гл. IX). В этих местах будут даваться точные указания на используемую литературу.

Приведем теперь основные обозначения и некоторые основные формулы, ссылки на которые будут часто встречаться в тексте.

1) $D \sim C$, $D \underset{V}{\sim} C$ — линейная эквивалентность циклов D и C (на V);

2) $D \approx C$, $D \underset{V}{\approx} C$ — алгебраическая эквивалентность циклов D и C, а также гомологичность циклов D и C (на V);

3) $D \geqslant 0$ — эффективный дивизор;

4) (f), $(f)_V$ — дивизор функции f на многообразии V;

5) $\mathcal{L}(D)$ — пространство функций, таких, что $(f) + D \geqslant 0$ на V;

6) $|D|$ — линейная система дивизоров (линейно), эквивалентных D;

7) $\mathcal{O}_P$ — локальное кольцо точки $P \in V$;

8) $C \cdot D$ — цикл пересечения двух циклов D и C;

9) $(C \cdot D)$ — индекс пересечения кривых C и D на поверхности;

10) K, K_V — канонический класс поверхности V; иногда также произвольный представитель этого класса;

11) $P_n = l(nK)$ — n-кратный род, $p_g = l(K)$ — геометрический род;

12) q, $q(V)$ — размерность пространства одномерных форм 1-го рода на поверхности, иррегулярность поверхности V;

13) $p_a(V)$ — арифметический род поверхности V, по определению $p_a(V) = 1 - q + p$,

14) $s(V)$ — группа Нерона — Севери поверхности V — фактор-группа группы дивизоров V по подгруппе дивизоров, алгебраически эквивалентных 0;

15) $A(V)$ — многообразие Альбанезе многообразия V, α_V — каноническое отображение $V \to A(V)$, всюду регулярное на V,

$$\dim A(V) = q(V);$$

16) $\rho(V)$ — число Пикара поверхности V, ранг группы $s(V)$; это число конечно [8, 16];

17) χ, $\chi(V)$— Эйлерова характеристика поверхности;

18) $F(D)$ — когерентный пучок на поверхности, соответствующий дивизору D (иногда также $0[D]$, $\Omega(D)$) (Зариский [21]).

Числа P_n, q, p_a являются бирациональными инвариантами.

Действительно, пусть T: $V \to V'$ — бирациональное отображение V на V'. Каждый элемент $\omega \in \mathcal{L}(nK_{V'})$ можно рассматривать как дифференциальную форму $\varphi(dx \wedge dy)^n$, регулярную на V'.

Прообраз этой формы на V — форма $\overline{\varphi}(d\overline{x} \wedge d\overline{y})^n$, где $\overline{\varphi}$, $\overline{x}$, $\overline{y} \in k(V)$ будет регулярной формой на $V - S$ (S — множество фундаментальных точек T на V). Так как $S \leqslant n - 2$, то эта форма будет регулярна всюду на V, поскольку множество полюсов формы есть кривая на V. Таким образом, $P_n(V) \geqslant P_n(V')$, и обратно, т. е. $P_n(V) = P_n(V')$. Совершенно аналогично $q(V) = q(V')$.

Основные формулы

Если D — дивизор на поверхности D, а $p_a(D)$ — его арифметический род, то [49]

$$p_a(D) = \frac{(D\cdot(D+K))}{2} + 1. \tag{1}$$

Формула Римана — Роха на поверхности V для дивизора D

$$l(D) = \frac{(D(D-K))}{2} + p_a(V) - l(K-D) + \Delta_D, \tag{2}$$

где Δ_D — «избыточность D» $= \dim H^1(V, F(D)) \geqslant 0$.

Неравенство Римана — Роха:

$$l(D) + l(K-D) \geqslant \frac{(D(D-K))}{2} + p_a(V). \tag{3}$$

Формула для арифметического рода поверхности [9]

$$p_a(V) = \frac{(K^2) + \chi}{12}. \tag{4}$$

Формула для арифметического рода неприводимой кривой C:

$$p_a(C) = g + \delta, \qquad \delta = \sum_P \delta_P, \tag{5}$$

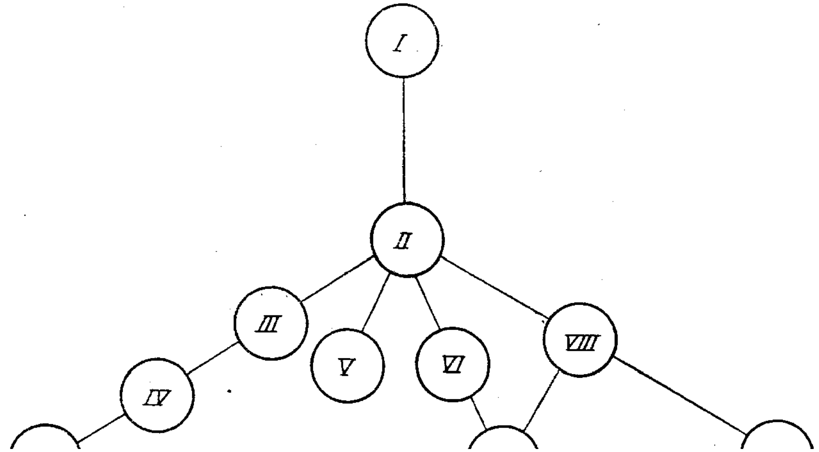
где g — род неособой модели C (геометрический род C); $\Sigma\delta_P$ распространена на все особые точки кривой C; $\delta_P > 0$ и δ_P — не меньше числа точек неособой модели C, отображающихся в P при канонической проекции (Серр [49]).

Таблица типов алгебраических поверхностей

$\varkappa$	Инварианты	Распадаются на классы	Типы поверхностей	Глава, §
-1	$P_{12}=0$	$q=0$, $P_2=0$	Рациональные	Гл. III; гл. V § 4.
		$(q>1,\ p=0) \Longleftrightarrow (K^2)<0$; $q=1$, $P_{12}=0$	Линейчатые	Гл. IV; гл. V § 7
0	$12K=0$	$P_2=1$, $p=0$, $q=0$	Поверхность Энриквеса, $2K=0$	Гл. VIII § 1; гл. X
		$P_2=1$, $p=1$, $q=0$	Регулярные поверхности с $K=0$	Гл. IX
		$P_4=1$, $p=1$, $q=2$	Двумерные абелевы многообразия	Гл. VIII § 4
		$P_{12}=1$, $q=1$	Поверхности с пучком эллиптических кривых. База пучка — проективная прямая. Все слои, кроме конечного числа кратных слоев, изоморфны. $2K=0$, или $3K=0$, или $4K=0$, или $6K=0$	Гл. IV §§ 7,8; гл. VII § 9
1	$(K^2)=0$ $12K\neq 0$		Поверхности с пучком эллиптических кривых за исключением тех из них, которые относятся к предшествующему типу	Гл. VII
2	$(K^2)>0$		Линейная система $\|9K\|$ дает бирациональное отображение в проективное пространство размерности $P_9 - 1$	Гл. VI

Под поверхностями в этой таблице подразумеваются минимальные модели. Первый столбец содержит значения инварианта $\varkappa$. Второй — характеристику того же класса поверхностей через другие инварианты: P_n, q, (K^2), K. Третий столбец (там, где он заполнен) — разбиение на более узкие классы поверхностей, а четвертый — конструктивную характеристику тех же поверхностей. Наконец, последний столбец указывает главы и параграфы книги, в которых описаны эти поверхности.

Схема зависимости глав



Глава I

БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В этой главе дается описание одного важного типа бирациональных преобразований — σ-процесса. Применение конечной последовательности σ-процессов дает возможность уничтожать фундаментальные точки бирациональных преобразований. Доказывается, что применение конечного числа σ-процессов к поверхности дает возможность разрешить особенности кривой, лежащей на поверхности. Приводится доказательство теоремы Зариского о кратных линейных системах.

§ 1. σ-процесс

Весьма существенным для дальнейшего примером бирационального преобразования является так называемый σ-процесс (другие названия — «локальное квадратичное преобразование», «раздувание точки», «локальная модификация», «локальная дилатация»).

Под σ-процессом в неособой точке Q алгебраической поверхности (многообразия) V мы будем понимать бирациональное преобразование $\sigma: V \to V^*$, удовлетворяющее условиям:

1) σ регулярно всюду на V, кроме точки Q;
2) σ^{-1} регулярно всюду на V^*;
3) точке Q соответствует некоторая прямая L (соответственно пространство P^{d-1}, если $\dim V = d$) на V^*;
4) все точки прямой L (пространства P^{d-1}) — неособые на V^*.

Таким образом, преобразование σ является бирегулярным отображением $V - Q$ на $V^* - L$, причем $\sigma^{-1}(L) = Q$. Мы покажем, что σ-процесс можно провести в любой неособой точке поверхности V. Итак, пусть Q — неособая точка на поверхности V и пусть $\{U\}$ — покрытие поверхности аффинными множествами. Мы построим, исходя из этого покрытия, новую совокупность аффинных множеств $\{U'\}$ и докажем, что это будет покрытие некоторой поверхности V^*, такой, что отображение $\sigma: V \to V^*$ будет удовлетворять всем условиям σ-процесса в точке $Q \in V$.

Если аффинное множество $U \in \{U\}$ не содержит точки Q, то мы его включаем в нашу совокупность $\{U'\}$. Если же $Q \in U$, то можно выбрать локальные параметры x, y в точке Q (неособой) так, что x и y будут регулярными функциями во всем U.

Рассмотрим прямое произведение $U \times P^1$ множества U на проективную прямую P^1. Обозначим через (t_0, t_1) проективные координаты P^1 и рассмотрим подмногообразие $U' \subset U \times P^1$, определяемое следующим образом:

$$U' = \{(u, t_0 : t_1) \in U \times P^1, t_0 y(u) - t_1 x(u) = 0\}.$$

Очевидно, что на U' лежит проективная прямая $Q \times P^1 = L_u$. Отображение (проекция)

$$\sigma_U: (u, t_0 : t_1) \to u$$

будет, как нетрудно видеть, изоморфизмом вне L_u; сама прямая L_u проектируется в точку Q.

Подмногообразие U' есть объединение двух аффинных открытых множеств U'_0 и U'_1; U'_0 состоит из точек U', где $t_0 \neq 0$, а U'_1 из точек U', где $t_1 \neq 0$. Заметим, что локальными координатами в точках $Q' \in U_0 \cap L_u$ служат функции x, $y/x - C^*$, где $C^* = t_1/t_0 | a'$, а в точках $Q' \in U'_1 \cap L_u$ — функции y, $x/y - b^*$, где $b^* = t_0/t_1 | Q'$. В первом случае локальное уравнение прямой L_u в точке Q' имеет вид $x = 0$, во втором $y = 0$. Множества U'_0 и U'_1 будут называться прообразами множества $U \in \{U\}$. Можно показать, что точки прямой L_u находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством касательных направлений P в точке Q. Пусть, действительно, α — некоторая ветвь кривой на U с центром в точке Q. Эта ветвь имеет параметрическое представление

$$\alpha: \begin{cases} x = \alpha_1 \tau^{r_1} + \ldots = \varphi(\tau), \\ y = \beta_1 \tau^{s_1} + \ldots = \psi(\tau), \end{cases}$$

причем касательная к этой ветви определяется соотношением чисел r_1 и s_1 ($r_1 > s_1$, $r_1 < s_1$), а в случае равенства $r_1 = s_1$ отношением $\alpha_1 : \beta_1$.

Этой ветви будет соответствовать некоторая ветвь α^*: $(\varphi(\tau), \psi(\tau), \varphi(\tau): \psi(\tau))$ на U', центром которой будет либо точка $(0, 0, 1 : 0)$ (если $s_1 > r_1$), либо точка $(0, 0, 0: 1)$ (если $r_1 > s_1$), либо точка $(0, 0, u_1: v_1)$ (если $r_1 = s_1$). Таким образом, центр ветви α^* однозначно определяется лишь касательным направлением к ветви α в точке Q; легко видеть также, что каждой точке L_u соответствует некоторое касательное направление. Это соответствие обозначим через $\mu_u : L_u \to P$.

Мы хотим доказать, что совокупность аффинных множеств $\{U'\}$ образует покрытие некоторой алгебраической поверхности V^*.

Для этого достаточно показать, что элементы покрытия $\{U'\}$ можно «склеить» таким образом, что в результате мы получим некоторую алгебраическую поверхность V^*. Заметим прежде всего, что можно выбрать исходное покрытие $\{U\}$ поверхности V так, что точка Q будет входить лишь в один элемент этого покрытия; пусть для определенности $\tilde{U} \ni Q$. Если теперь U' и W' — два элемента покрытия $\{U'\}$, то возможны три случая. Прежде всего, U' и W' могут быть просто двумя элементами покрытия $\{U\}$, не содержащими точки Q. Тогда мы их склеиваем так же, как склеивали элементы покрытия $\{U\}$. Если же $W' \in \{U'\}$ является элементом W покрытия $\{U\}$, а U' есть один из элементов-прообразов множества $\tilde{U}$, например $\tilde{U}'_0$, то мы можем провести склеивание следующим образом. Обозначим через $\tilde{U}_0 = \sigma_{\tilde{U}}(\tilde{U}'_0)$. Отображение $\sigma_{\tilde{U}}$ будет, очевидно, бирегулярным отображением $\tilde{U}'_0 - \tilde{U}'_0 \cap L_u$ на $\tilde{U}_0 - Q$. Поскольку $\tilde{U}_0 \cap W \not\ni Q$, мы склеим точку $\beta \in U_0 \cap W$ с точкой $\sigma_{\tilde{U}}^{-1}(\beta) \in \tilde{U}'_0$. Наконец, множества $\tilde{U}'_0$ и $\tilde{U}'_1$ мы склеиваем в соответствии с их естественной склейкой как аффинных подмножеств многообразия $\tilde{U}' \in \tilde{U} \times P^1$. Очевидно, что такое склеивание будет согласованным, т. е. в результате мы получим алгебраическую поверхность V^*.

Тем самым построена алгебраическая поверхность V^*, удовлетворяющая всем условиям σ-процесса (бирациональная эквивалентность V^* и V, очевидна, ввиду того, что $V^* - L$ бирегулярно эквивалентно $V - Q$).

Попутно доказан следующий факт: точки «вклеиваемой» при σ-процессе прямой L находятся во взаимооднозначном соответствии с множеством касательных направлений в точке Q, в которой производится σ-процесс. Совершенно аналогично строится σ-процесс для многообразий любого числа измерений.

Если многообразие V вложено в проективное пространство P^N, то полученное в результате σ-процесса многообразие V^* будет также вложено в некоторое проективное пространство $P^{N'}$.

Этот факт можно доказать непосредственно; существует, однако, другое описание σ-процесса для вложенных многообразий, для которого этот факт тривиален. Предположим, что многообразие V расположено в P^N, и пусть $Q = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда каждая точка $R \in V$, $R \neq Q$ проектируется из Q на поверхность $x_0 = 0$; пусть S — соответствующая точка. Если $R = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$, то $S = (x_1, \ldots, x_N)$. Пары точек (R, S) заполняют алгебраическое многообразие V^*; соответствие $R^\sigma \to (R, S)$, σ: $V \to V^*$ и является искомым. Нетрудно установить (локальный) изоморфизм этих двух описаний σ-процесса.

Итак, мы имеем бирациональное отображение σ: $V \to V^*$ такое, что обратное отображение σ^{-1}: $V^* \to V$ регулярно. В этом случае определены два гомоморфизма группы дивизоров $D(V)$ в группу $D(V^*)$:

$$\sigma : D(V) \to D(V^*),$$

$$\sigma_* : D(V) \to D(V^*),$$

где $\sigma(C)$ — собственный (алгебраический) образ дивизора $C \subset V$, а $\sigma_*(C)$ — полный образ дивизора $C \subset V$. Опишем эти гомоморфизмы подробно, ибо это будет важно для дальнейшего. Пусть C — неприводимая кривая на V. В окрестности U_P любой точки $P \in V$ дивизор C задается уравнением $\gamma_P = 0$, где γ_P — рациональная (мероморфная) функция на V. Ввиду нашего условия (C — неприводимая кривая), функция γ_P будет голоморфной в U_P функцией, обращающейся в 0 лишь на кривой C и имеющей на ней нуль первого порядка (все — в окрестности U_P). Уравнение $\gamma_P = 0$ будет локальным уравнением кривой C в окрестности U_P. Если $P_3 \in U_{P_1} \cap U_{P_2}$, то функция $\gamma_{P_1}^{-1} \gamma_{P_2}$ является единицей в P_3. В случае, когда $P \neq Q$, найдется такая окрестность U_P, что отображение σ будет бирегулярно на U_P. Кривая C^*, задаваемая уравнениями $\sigma^* \gamma_P = 0$ в окрестностях $U_{P^*} = \sigma(U_P)$, точек $P^* = \sigma(P)$, $P \neq Q$, будет, очевидно, кривой на $V^* - L$, бирегулярно эквивалентной кривой $C - Q$ на $V - Q$.

Пусть теперь $\gamma_Q = 0$ — локальное уравнение кривой в окрестности U_Q. Пусть Q m-кратная точка кривой C. Это означает, что разложение функций γ_Q по степеням локальных параметров (x, y) в точке Q начинается с m-й степени:

$$\gamma_Q = \gamma_Q^m + \gamma_Q^{m+1} + \ldots,$$

где

$$\gamma_Q^m = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m$$

и не все a_i равны 0.

Пусть теперь $P^* = (t_0^* : t_1^*)$ — некоторая точка на прямой $L \in V^*$. Предположим, что $t_0^* \neq 0$; тогда локальными коэффициентами в точке P^* могут служить функции $x_1 = x$ и $y_1 = t_1/t_0 - c^* = y/x - c^*$, где $c^* = t_1^*/t_0^*$. Локальным уравнением самой прямой L в окрестности U_{P^*} будет $x_1 = 0$. Функция $\sigma^* \gamma_Q$ в этой окрестности будет записываться в виде $\sigma^* \gamma_Q = x_1^m [a_0 + a_1 (y_1 + c^*) + \ldots + a_m (y_1 + c^*)^m + \ldots]$, отсюда следует, что функция $\sigma^* \gamma_Q$ имеет на L в окрестности U_{P^*} нуль m-й кратности.

Рассмотрим функцию $\sigma_1^0 \gamma_Q = \frac{\sigma^* \gamma_Q}{x_1^m}$ в окрестности U_{P^*}. Это будет, как мы только что выяснили, гомоморфная в этой окрестности функция.

Рассмотрим локальное уравнение $\sigma_1^* \gamma_Q = 0$ в окрестности U_P^*. Нетрудно проверить, что набор локальных уравнений $\{\sigma^* \gamma_P = 0$, если $P \neq Q$, и, следовательно, $\sigma(P) \in L$, и $\sigma_1^* \gamma_Q = 0$, если $P^* \notin L\}$ будет набором согласованных уравнений (т. е. в пересечении двух любых окрестностей отношение соответствующих функций будет единицей), и, следовательно, будет определять некоторую кривую C^* на V^*; при этом $C^* - L \cap C^*$ будет бирегулярно эквивалентна $C - Q$ и ввиду того, что она не содержит L в качестве компоненты, она будет неприводима. Если X — дивизор на V, $X = \Sigma k_i C_i$, то, полагая $X^* = \Sigma k_i C_i^*$, получаем отображение $\bar{\sigma}$ группы дивизоров на V в группу дивизоров на V^* ($\bar{\sigma} : D(V) \to D(V^*)$), являющееся, очевидно, мономорфизмом. Очевидно, что так построенное отображение и есть отображение σ.

В связи с вышесказанным заметим также, что если g — мероморфная на V функция и $(g)_V = X = \Sigma k_i C_i$, то, рассматривая эту же функцию на V^* (или, что то же самое, рассматривая функцию $\sigma^* g$), мы получаем: $(g)_{V^*} = (\sigma^* g)_{V^*} = X^* + \Sigma k_i m_i L$, где m_i — кратность точки Q на кривой C_i. Отображение σ_* получается из отображения $\sigma = \bar{\sigma}$ следующим образом.

Сопоставим кривой $C \subset V$, $C \not\ni Q$ кривую $C^* = \sigma^*(C) \subset V^*$. Если же Q — m-кратная точка кривой C, сопоставим этой кривой кривую $C^* + mL \subset V^*$. Дивизору $X = \Sigma k_i C_i$ сопоставим дивизор $\sigma_*(X) = \Sigma k_i C_i^* + \Sigma k_i m_i L$, где m_i — кратность точки Q на кривой C_i. В дальнейшем мы будем обозначать число $\Sigma k_i m_i$ через $X(Q)$. Имеет место

Л е м м а 1. *Если* $X \overset{V}{\sim} Y$, *то* $\sigma_*(V) \overset{V^*}{\sim} \sigma_*(Y)$, *и, обратно, если* $\sigma_*(X) \overset{V^*}{\sim} \sigma_*(Y)$, *то* $X \overset{V}{\sim} Y$. *Кроме того,* $(X \cdot Y)_V = (\sigma_*(X) \cdot \sigma_*(Y))_{V^*}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X \overset{V}{\sim} 0$, т. е. $X = (g)_V$. Рассмотрим $(g)_{V^*}$. Поскольку

$$(g)_{V^*} = X^* + X(Q), \quad L = \sigma_*(X),$$

первое (прямое и обратное) утверждение леммы очевидно.

Пусть теперь X и Y — два дивизора на V. Если X и Y не проходят через точку Q (и не имеют общих компонент), то индекс пересечения $(X \cdot Y)_V$ определен и равенство $(X \cdot Y)_V = (\sigma_*(X) \cdot \sigma_*(Y))_{V^*}$ очевидно, ибо отображение σ бирегулярно в каждой точке пересечения дивизоров X и Y.

В общем случае мы заменим дивизоры X и Y линейно эквивалентными им дивизорами X' и Y', не проходящими через Q и не имеющими общих компонент. Эта лемма является, конечно, простым следствием свойств гомоморфизма σ_*, перечисленных во введении. Отсюда, в частности, легко следует, что $(L^2) = -1$.

§ 2. Фундаментальные точки и σ-процесс

Предположим, что T: $V \to V'$ — бирациональное отображение неособой поверхности V на поверхность V', и пусть $P \in V$ — фундаментальная точка преобразования T. Применим к поверхности V в точке P σ-процесс; получим новую поверхность $V_1 = \sigma_1(V)$ и бирациональное отображение T_1: $V_1 \to V'$; $T_1 = T\sigma_1^{-1}$.

Отображение T_1 может иметь фундаментальные точки на прямой $L_1 = \sigma_1(P)$; пусть $P^{(1)}$ — одна из таких точек. Применим к V_1 в $P^{(1)}$ σ-процесс, получим поверхность $V_2 = \sigma_2(V_1)$ и бирациональное отображение

$T_2 : V_2 \to V'$, $T_2 = T_1\sigma_2^{-1}$, фундаментальную точку T_2 на L_2 (если таковая найдется) обозначим через $P^{(2)}$, применим к V_2 σ-процесс в точке $P^{(2)}$ и т. д. Как будет показано в этом параграфе, этот процесс оборвется через конечное число шагов, т. е. на некотором конечном шагу p мы получим поверхность V_p, такую, что на прямой $L_p \subset V_p$ не будет фундаментальных точек преобразования T_p. Отсюда с очевидностью будет следовать основная

Теорема 1. Пусть $T : V \to V'$ — *бирациональное отображение неособой поверхности* V *на* V'. *Применяя к* V *конечную последовательность σ-процессов* $\sigma = \sigma_n \cdot \sigma_{n-1} \ldots \sigma_1$, *мы получим поверхность* $\overline{V} = \sigma(V)$, *такую, что бирациональное отображение* $\overline{T} = T\sigma^{-1}$: $\overline{V} \to V'$ *не будет иметь фундаментальных точек на* $\overline{V}$.

Доказательство. Пусть $P \in V$ — фундаментальная точка преобразования T. Если (x, y) — локальные параметры в точке P, то преобразование T в окрестности U_P этой точки может быть записано в виде

$$\bar{z}_1 = \frac{f_1(x, y)}{g(x, y)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{z}_0 = \frac{f_s(x, y)}{g(x, y)},$$

где $g(0, 0) = 0$ и $f_i(0, 0) = 0$ (поскольку точка P фундаментальная). Рассмотрим

$$\bar{z}_i = \frac{f_i(x, y)}{g(x, y)}$$

(для упрощения записей мы будем в дальнейшем опускать индекс i). Пусть

$$f(x, y) = f^{\rho}(x, y) + f_i^{\rho+1}(x, y) + \ldots, \tag{1}$$

$$g(x, y) = g^{\delta}(x, y) + g^{\delta+1}(x, y) + \ldots, \tag{1a}$$

где $f^{\lambda}(x, y)$ и $g^{\mu}(x, y)$ — однородные многочлены от x и y степеней λ и μ соответственно.

Обозначим через F кривую в окрестности U_P, задаваемую уравнением $f(x, y) = 0$, через G — кривую $g(x, y) = 0$. Точка $P = (0, 0)$ будет ρ-кратной точкой кривой F_ρ и δ-кратной точкой кривой G. Выразим условие того, что точка $P = (0, 0)$ — фундаментальная, в геометрической форме. Кривые F и G можно представить в виде сумм локально неприводимых компонент («ветвей»):

$$F = \sum_{j=1}^{u} k_j F_j, \qquad G = \sum_{j=1}^{v} m_j G_j.$$

Может оказаться, что некоторые компоненты кривых F и G совпадают; выделим все эти компоненты:

$$F_j = G_j, \quad j = 1, \ldots, l, \quad l \leqslant u, v,$$

$$F = k_1F_1 + \ldots + k_lF_l + \sum_{j=l+1}^{u} k_jF_j, \tag{2}$$

$$G = m_1F_1 + \ldots + m_lF_l + \sum_{j=l+1}^{v} m_jG_j; \tag{2a}$$

кроме того, будем считать, что

$$k_1 \geqslant m_1, \ldots, k_r \geqslant m_r, \quad k_{r+1} \leqslant m_{r+1}, \quad k_l \leqslant m_l.$$

Приведенной парой кривых по отношению к кривым F, G мы назовем кривые

$$\overline{F} = (k_1 - m_1) F_1 + \ldots + (k_r - m_r) F_r + \sum_{j=l+1}^{u} k_jF_j,$$

$$\overline{G} = (m_{r+1} - k_{r+1}) F_{r+1} + \ldots + (m_l - k_l) F_l + \sum_{j=l+1}^{v} m_jG_j.$$

Кривые $\overline{F}$ и $\overline{G}$ не имеют уже общих компонент; очевидно, что точка P будет фундаментальной в том и только в том случае, если и $\overline{F}$ и $\overline{G}$ проходят через эту точку.

Кривые $\overline{F}$ и $\overline{G}$ определяются числителем и знаменателем $\bar{z}$ после проведения всех возможных сокращений; разумеется, с самого начала можно было бы предполагать, что f и g взаимно просты в окрестности U_P; для дальнейшего нам, однако, будет удобно не проводить сокращений и рассматривать «полные» кривые F и G, а не приведенные $\overline{F}$ и $\overline{G}$.

Уравнение $f^{\rho}(x, y) = 0$ определяет кривую, компонентами которой будут касательные к F в точке $P(0, 0)$; уравнение $g^{\delta}(x, y) = 0$ — кривую, компонентами которой являются касательные к G. При этом различные ветви F и G могут иметь совпадающие касательные, а точка $(0, 0)$ может быть особой на некоторых ветвях. Та ветвь, которая имеет точку $(0, 0)$ в качестве обыкновенной точки, называется линейной в этой точке. Мы будем предполагать, что кривые G и F не имеют в качестве касательной прямой $x = 0$. Поэтому

$$f^{\rho}(x, y) = (y - a_1x)^{\alpha_1} \ldots (y - a_rx)^{\alpha_r}, \quad \Sigma\alpha_j = \rho, \tag{3}$$

$$g^{\delta}(x, y) = (y - b_1x)^{\beta_1} \ldots (y - b_tx)^{\beta_t}, \quad \Sigma\beta_j = \delta. \tag{3a}$$

Применим к V в точке P σ-процесс; в результате получим поверхность V_1 с прямой $L_1 = \sigma_1(P)$. Локальными координатами на V в точке $P^{(1)} = (t_1 : t_0) \in L_1$ будут либо функции $(x_1, y_1) = \left(x, \frac{y}{x} - c\right)$ (в точке $P_c^{(1)}(c : 1) \in L_1$), либо $(x_1, y_1) = \left(\frac{x}{y}, y\right)$ (в точке $P_\infty^{(1)} = (1 : 0) \in L_1$). Бирациональное отображение $T_1 = T\sigma_1^{-1}$ в окрестности точки $P_\infty^{(1)}$ записывается в виде

$$\bar{z} = \frac{y_1^{\rho-\delta}\left[(1 - a_1x_1)^{\alpha_1} \ldots (1 - a_rx_1)^{\alpha_r} + \ldots\right]}{(1 - b_1x_1)^{\beta_1} \ldots (1 - b_tx_1)^{\beta_t} + \ldots},$$

откуда сразу следует, что точка $P_\infty^{(1)}$ не будет фундаментальной точкой преобразования T_1.

В любой другой точке $P_c^{(1)}$ бирациональное преобразование T_1 записывается в виде

$$\bar{z} = \frac{x_1^{\rho}\left[(y_1 - a_1 + c)^{\alpha_1} \ldots (y_1 - a_r + c)^{\alpha_r} + x_1 (f^{\rho+1})^1 (x_1, y_1) + \ldots\right]}{x_1^{\delta}\left[(y_1 - b_1 + c)^{\beta_1} \ldots (y_1 - b_t + c)^{\beta_t} + x_1 (g^{\delta+1})^1 (x_1, y_1) + \ldots\right]}.$$

Уравнение

$$g_1(x_1, y_1) = (y_1 - b_1 + c)^{\beta_1} \ldots (y_1 - b_t + c)^{\beta_t} + x_1 (g^{\delta+1})^1 (x_1, y_1) + \ldots = 0 \tag{4}$$

есть локальное уравнение кривой G^1 — алгебраического образа кривой G при σ-процессе; уравнение

$$f_1(x_1, y_1) = (y_1 - a_1 + c)^{\alpha_1} \dots (y - a_r + c)^{\alpha_r} + x_1 (f^{\rho+1})^1 (x_1, y_1) + \dots = 0 \qquad (4a)$$

есть локальное уравнение кривой F^1 — образа кривой F при σ-процессе.

Каждому касательному направлению к кривой в точке $P = (0, 0)$ на V соответствует точка пересечения образа этой кривой при σ-процессе с «вклеиваемой» прямой $L_1 = \sigma_1(P)$, причем кратность этой точки пересечения на образе кривой равна кратности соответствующей касательной (это сразу видно из формул (3) и (4)). Поэтому, если кривые F и G имели различные касательные в точке P, то, в случае $\rho = \delta$, F^1 и G^1 пересекаться на L_1 не будут и, следовательно, T_1 не будет иметь фундаментальных точек на L_1. В общем случае дело обстоит сложнее, но приводится в конце концов к этому случаю. Наряду с кривыми F^1 и G^1, которые мы будем обозначать через $\sigma^1_{c_1}(F)$ и $\sigma^1_{c_1}(G)$, где индекс «c» показывает, что кривые рассматриваются в окрестности точки $P^1_{c_1} \in L_1$, мы рассмотрим кривые

$$\sigma^1_{*c_1}(F) = \sigma^1_{c_1}(F) + \rho L_1,$$

$$\sigma^1_{*c_1}(G) = \sigma^1_{c_1}(G) + \delta L_1,$$

определяемые числителем и знаменателем $\bar{z}$. Эти кривые мы назовем полными локальными образами кривых G и F.

Применяя σ-процесс в точке $P^1_{c_1} \in L_1 \subset \sigma_1(V)$, мы получим в некоторой точке $P^2_{c_2} \in L_2 \subset \sigma_2\sigma_1(V)$ кривые $F^{(2)} = \sigma^2_{c_2}(F^{(1)}) = \sigma^2_{c_2}(\sigma^1_{c_1} F)$ и $G^{(2)} = \sigma^2_{c_2}(G^{(1)}) = \sigma^2_{c_2}(\sigma^1_{c_1} G)$, а также полные образы

$$\sigma^2_{*c_2}(F) = F^{(2)} + \rho\sigma^2_{c_2}(L_1) + \rho_1 L_2 = F^{(2)} + \rho L_1^{(2)} + \rho_1 L_2,$$

$$\sigma^2_{*c_2}(G) = G^{(2)} + \delta\sigma^2_{c_2}(L_1) + \delta_1 L_2 = G^{(2)} + \delta L_1^{(2)} + \delta_1 L_2,$$

где число ρ_1, как нетрудно проверить, будет равно кратности точки $P^1_{c_1}$ на кривой $\sigma^1_{*c_1}(F)$; аналогично определяется δ_1. Очевидно, что кривая $\sigma_2(L_1)$ будет проходить через единственную точку прямой L_2 и будет определять в ней линейную ветвь; вообще

$$\sigma^n_{*c_n}(F) = F^{(n)} + \sum \rho_{i-1} L_i^{(n)},$$

где $F^{(n)}$ — алгебраический локальный образ кривой F при последовательности σ-процессов $\sigma_n\sigma_{n-1} \dots \sigma_1$, а $L_i^{(n)}$ — алгебраический локальный образ вклеенной на i-м шагу прямой при дальнейших σ-процессах $(\sigma_n\sigma_{n-1} \dots \sigma_{i+1})$, все $L_i^{(n)}$ будут определять линейные ветви в любой точке $P^n_{c_n}$ на L_n.

Таким образом, к кривой F на каждом шагу добавляется некоторая кратность линейной ветви, причем, поскольку линейная ветвь при σ-процессе переходит в линейную ветвь, в результате последовательности σ-процессов мы получим алгебраический образ кривой F при последовательности σ-процессов и еще некоторое количество линейных ветвей. Покажем прежде всего, что алгебраический образ кривой F в каждой точке $P^n_{c_n} \in L_n$ будет состоять лишь из линейных ветвей, т. е. конечная последовательность σ-процессов позволяет «линеаризовать» ветви. Для этого покажем, что каждая точка пересечения L_n с $F^{(n)}$ будет простой точкой на каждой ветви $F^{(n)}$, начиная с некоторого n. Действительно, сравним (2a), (3a) и (4a).

Точка P — ρ-кратная точка кривой F; точка $P^1_{a_j} \in L_1$ будет α_j-кратной точкой кривой F^1, как сразу следует из этих формул. Таким образом, если $r > 1$, то каждая точка пересечения F^1 с L_1 будет иметь кратность $< \rho$ и, рассуждая по индукции, мы получим нужное утверждение. Единственно неприятный случай, таким образом, когда $r = 1$, т. е. $f^\rho(x, y) = (y - ax)^\rho$; тогда кривая F имеет в точке P единственную касательную кратности ρ.

Без ограничения общности мы можем предполагать, что $f^\rho(x, y) = y^\rho$ и $f(x, y) = y^\rho + f^{\rho+1}(x, y) + \dots$. Кривая F^1 будет иметь тогда единственную точку пересечения $P^1_0 = (0, 0)$ с прямой L_1 той же кратности ρ:

$$f_1(x, y) = y_1^\rho + x_1 f^1(x_1, y_1) + \dots$$

Среди слагаемых $f^1(x, y)$ выберем слагаемое с наименьшей степенью y: $\gamma x^\nu y^\mu$, $\nu + \mu \geqslant \rho$. Очевидно, что $\mu < \rho$ и $\nu + \mu > \rho$, ибо в противном случае $f(x, y) = y^\rho [1 + \dots]$ и кривая F будет эквивалентна кривой $y^\rho = 0$, т. е. точка P будет простой точкой на $y = 0$, т. е. на неприводимой компоненте F, что и требовалось доказать.

Итак, найдется член $\gamma x^\nu y^\mu$, $\mu < \rho$, $\nu + \mu > \rho$. Тогда в разложении $f^1(x_1, y_1)$ будет член $\gamma x_1^{\nu+\mu-\rho} y_1^\mu$. Применяя σ-процесс в точке $(0, 0)$ на $L_1 \subset V_1$, мы найдем, что в разложении $f^{(2)}$ будет член $\gamma x_2^{\nu+\mu-2\rho} y_2^\mu$ и т. д. Ясно, что через конечное число шагов мы получим член степени $< \rho$, а тем самым понизим кратность особенности.

Таким образом, наше первое утверждение доказано.

Пусть теперь H_q: $\{h_q(x_q, y_q) = 0\}$ и E_q: $\{e_q(x_q, y_q) = 0\}$ — две различные неприводимые (локально) кривые, проходящие через точку $P^q_0(x_q = 0, y_q = 0) \in L_q$ на V_q, причем точка P^q_0 будет простой точкой на H_q и E_q.

Применим к V_q в точке P^q_0 σ-процесс

$$\sigma_q\colon V_q \to V_{q+1}, L_{q+1} = \sigma_{q+1}(P^q_0).$$

Кривые H_{q+1} и E_{q+1} — образы кривых H_q и E_q при σ-процессе, будут пересекаться с L_{q+1} каждая в одной (простой) точке; если касательные к H_q и E_q в точке P^q_0 были различны, то точки $H_{q+1} \cdot L_{q+1}$ и $E_{q+1} \cdot L_{q+1}$ будут различны, если же касательные совпадали, то $H_{q+1} \cdot L_{q+1} = E_q \cdot L_{q+1}$. Оказывается, применяя несколько раз σ-процесс, эти кривые можно «развести», т. е. добиться того, что точки $E_{q+u} \cdot L_{q+u}$ и $H_{q+u} \cdot L_{q+u}$ будут различны. Действительно, поскольку точка P^q_0 неособая на E_q и H_q, можно выбрать локальные координаты так, что

$$h_q(x_q, y_q) = y_q - \sum_{i=1}^{\infty} d_i^q x_q^i, \qquad (5)$$

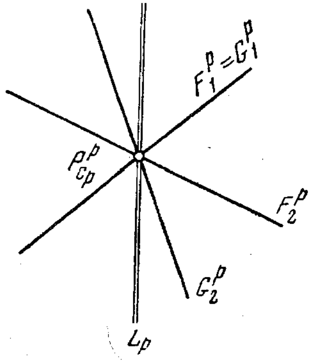
$$e_q(x_q, y_q) = y_q - \sum_{i=1}^{\infty} l_i^q x_q^i, \qquad (5a)$$

и, поскольку кривые E_q и H_q различны, найдется такое наименьшее i, что $d_i^q \neq l_i^q$.

Легко видеть, что после i σ-процессов эти кривые будут тогда «разведены», т. е. $E_{q+i} \cdot L_{q+i} \neq H_{q+i} \cdot L_{q+i}$. Из этих двух утверждений следует теорема I. Действительно, применяя конечную последовательность σ-процессов, мы добьемся того, что в каждой точке

$$P^n_{c_n} \in L_n \subset \sigma_n\sigma_{n-1} \dots \sigma_1 V$$

кривые $\sigma^n_{*c_n}(F)$ и $\sigma^n_{*c_n}(G)$ будут иметь лишь линейные ветви, согласно первому утверждению.



Пусть

$$\sigma^n_{*c_n}(F) = \sum k_j^n F_j,$$

$$\sigma^n_{*c_n}(G) = \sum m_j^n G_j,$$

где F_j и G_j — линейные ветви в точке $P^n_{c_n}$. Путем дальнейшего применения σ-процессов мы добьемся того, что все разные ветви будут иметь различные касательные; заметим, что линейная ветвь, вклеиваемая при каждом последующем процессе, не касается образов предшествующих ветвей. Итак, мы добились того, что

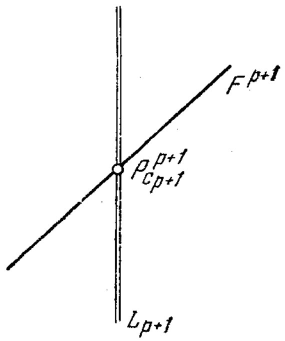
$$\sigma^p_{*c_p}(F) = k_1^pF_1^p + \dots + k^p_{l_p}F^p_{l_p} + \sum_{j=l_p+1}^{u_p} k_j^pF_j^p + \rho_pL_p, \quad (6)$$

$$\sigma^p_{*c_p}(G) = m_1^pF_1^p + \dots + m^p_{l_p}F^p_{l_p} + \sum_{j=l_p+1}^{v_p} m_j^pF_j^p + \delta_pL_p, \quad (6a)$$

где все ветви линейны и имеют различные касательные. Если мы применим теперь σ-процесс к точке $P^p_{c_p} \in L_p \subset V_p$, то увидим, что через каждую точку $P^{p+1}_{c_{p+1}} \in L_{p+1}$ будет проходить не более двух линейных ветвей кривых $\sigma^{p+1}_{*c_{p+1}}(F)$ и $\sigma^{p+1}_{*c_{p+1}}(G)$, а именно

$$\sigma^{p+1}_{*c_{p+1}}(F) = kF^{(p+1)} + \rho_{p+1}L_{p+1},$$

$$\sigma^{p+1}_{*c_{p+1}}(G) = mF^{(p+1)} + \delta_{p+1}L_{p+1},$$



где $k, \rho_{p+1}, m, \delta_{p+1} \geqslant 0$.

Возможны два случая:

1. $k \geqslant m$, $\rho_{p+1} \geqslant \delta_{p+1}$. В этом случае соответствующие приведенные кривые будут таковы, что $\overline{\sigma^{p+1}_{*c_{p+1}}}(F)$ проходит через точку $P^{p+1}_{*c_{p+1}}$, а $\overline{\sigma^{p+1}_{*c_{p+1}}}(G)$ не проходит, либо обе кривые не проходят через эту точку, т. е. эта точка не будет фундаментальной точкой преобразования T_{p+1}. Совершенно аналогичен случай $k \leqslant m$, $\rho_{p+1} \leqslant \delta_{p+1}$.

2. $k > m$, $\rho < \delta$ (или симметрично $k < m$, $\rho > \delta$). В этом случае соответствующие приведенные кривые будут обе проходить через точку $P^{p+1}_{*c_{p+1}}$, т. е. эта точка будет фундаментальной для T_{p+1}.

Если мы применим σ-процесс к точке $P^{p+1}_{*c_{p+1}}$, то этой точке на поверхности V_{p+2} будет соответствовать прямая L_{p+2}; нас будет интересовать на L_{p+2} две точки: R_1 — центр преобразованной ветви F^{p+1} и R_2 — точка пересечения преобразованной прямой L_{p+1} с L_{p+2}.

Пусть F^{p+2} — образ ветви F^{p+1}, L'_{p+1} — образ L_{p+1} при σ_{p+2}: $V_{p+1} \to V_{p+2}$. Очевидно, что T_{p+2} может иметь фундаментальные точки на L_{p+2} лишь в точках R_1 и R_2.

В точке R_1

$$\sigma^{p+2}_{*R_1}(F) = kF^{p+2} + (k+\rho_{p+1})L_{p+2},$$

$$\sigma^{p+2}_{*R_1}(G) = mF^{p+2} + (m+\delta_{p+1})L_{p+2}, \quad (7)$$

в точке R_2

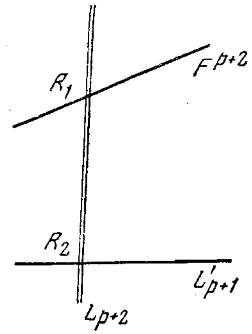
$$\sigma^{p+2}_{*R_2}(F) = \rho_{p+2}L'_{p+1} + (k+\rho_{p+1})L_{p+2},$$

$$\sigma^{p+2}_{*R_2}(G) = \delta_{p+2}L'_{p+1} + (m+\delta_{p+1})L_{p+2}. \quad (7a)$$

Поскольку $k > m$, $\rho < \delta$, то либо

а) $k+\rho \geqslant m+\delta$, либо

б) $k+\rho \leqslant m+\delta$.



В случае а) — точка R_1 не будет фундаментальной точкой для преобразования T_{p+2}, в случае б) — точка R_2 не будет фундаментальной для T_{p+2}. В случае равенства на L_{p+2} не будет фундаментальных точек T_{p+2}. Таким образом, T_{p+2} будет иметь не более одной фундаментальной точки на L_{p+2}.

Вообще, если разложение кривых $\sigma_*^{p+2}(F)$ и $\sigma_*^{p+2}(G)$ в любой точке прямой L_{p+2} записать в виде

$$\sigma_*^{p+2}(F) = k_1D + \rho_{p+2}L_{p+2},$$

$$\sigma_*^{p+2}(G) = m_1D + \delta_{p+2}L_{p+2},$$

то мы увидим, что

$$|k_1-m_1| + |\rho_{p+2}-\delta_{p+2}| < |k-m| + |\rho_{p+1}-\delta_{p+1}|.$$

Поэтому, рассматривая индукцию по сумме

$$|k_i - m_i| + |\rho_{p+i} - \delta_{p+i}|,$$

мы добьемся того, чтобы на некотором μ шаге это число стало равным 0, откуда сразу будет следовать отсутствие фундаментальных точек у $T_{p+\mu}$ на $L_{p+\mu}$.

Теорема доказана.

Заметим, что из утверждений о возможности «линеаризации» ветвей и о «разведении» ветвей сразу следует

Теорема 2. *Любую кривую E поверхности V можно превратить в неособую путем применения конечной последовательности σ-процессов к поверхности V.*

Очевидно, что эти σ-процессы нужно применять в точках V, являющихся особыми точками кривой E.

§ 3. Теоремы Бертини

Первая теорема. *Пусть V — алгебраическое d-мерное многообразие в P^n. Рассмотрим на V линейную систему $\Pi(\lambda_0, \dots, \lambda_s)$ без неподвижных компонент, задаваемую системой гиперповерхностей*

$$\Phi_\lambda = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_s f_s = 0. \quad (1)$$

Этой линейной системе соответствует рациональное отображение V на многообразие $W \subset P_s$ (см. введение). *Если $\dim W \geqslant 2$, то общий член линейной системы — неприводимое подмногообразие $V' \subset V$ кратности I.*

Доказательство. Пусть $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — неоднородные координаты общей точки V и предположим, что $f_0(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$. Тогда общей точкой W будет точка

$$(f_1(\xi)/f_0(\xi), \ldots, f_s(\xi)/f_0(\xi)).$$

Поскольку $\dim W = 2$, мы можем предположить, что $\eta_1 = f_1(\xi)/f_0(\xi)$ и $\eta_2 = f_2(\xi)/f_0(\xi)$ алгебраически независимы над полем k.

Мы покажем прежде всего, что если λ — независимый параметр, то элемент нашей линейной системы, высекаемый гиперповерхностью

$$f_1 + cf_2 = \lambda f_0,$$

где c — некоторый элемент поля k, имеет вид mS, где S — неприводимое подмногообразие V.

Для этого достаточно показать, что для некоторого $c \in k$ поле $k(\eta_1 + c\eta_2)$ будет алгебраически замкнуто в поле $k(V) = k(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ (т. е. поле $k(V)$ — регулярное расширение поля $k(\eta_1 + c\eta_2)$).

Действительно, в этом случае точка $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ определяет некоторое (абсолютно) неприводимое многообразие V^* над полем $k(\eta_1 + c\eta_2)$, размерность которого равна $d - 1$, где $d = \dim V$ [55]. Поскольку точка (ξ) лежит на V, $V^* \subseteq V$.

С другой стороны, V^* будет лежать на гиперповерхности Π, определяемой уравнением

$$f + cf_2 = tf_0,$$

где $t = \eta_1 + c\eta_2$ — некоторый трансцендентный элемент над k. Легко видеть также, что каждая точка пересечения $\Pi \cdot V$ принадлежит V^*, ибо получается из общей точки (ξ) многообразие V специализацией над $k(\eta_1 + c\eta_2)$.

Итак, для доказательства того, что $V \cdot \Pi = mV^*$, нам осталось показать, что можно так выбрать $c \in k$, что поле $k(\eta_1 + c\eta_2)$ будет алгебраически замкнуто в $k(\xi)$. Это утверждение известной леммы Зариского (см. Ходж и Пидо, [55], стр. 93—95).

Мы доказали тем самым, что общий элемент нашей линейной системы $\Pi_{(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)}$, высекаемой на V гиперповерхностью $\Phi_\lambda = 0$, где $(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)$ — независимые параметры, имеет вид $\Pi_{(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)} = mS$, где S — (неприводимое) подмногообразие V. Докажем теперь, что $m = 1$, т. е. что гиперповерхность (1) высекает на V подмногообразие S в первой кратности.

Для этого достаточно показать, что гиперповерхность (1) не касается V в общей точке подмногообразия S.

Рассмотрим общую точку (ζ) многообразия S, содержащегося в пересечении многообразия V с гиперповерхностью (1); это будет некоторая точка над полем $k(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Phi_\lambda(\zeta) = \lambda_0 f_0(\zeta) + \ldots + \lambda_s f_s(\zeta) = 0. \tag{2}$$

Продолжая дифференцирование $\partial\lambda_i$, действующее в поле $k(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)$, до некоторого дифференцирования D_i в поле $k(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)(\zeta)$ и применяя его к (2), получаем:

$$f_i(\zeta) + \sum_k \left(\lambda_0 \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \zeta_k} + \ldots + \lambda_s \frac{\partial f_s(\zeta)}{\partial \zeta_k}\right) D_i \zeta_k = 0. \tag{3}$$

Если f — произвольный элемент идеала, определяющего многообразие V, тогда

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0, \tag{4}$$

поскольку $(\zeta) \in S \subset V$.

Применяя к (4) дифференцирование D_i, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta_0} D_i \xi_0 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \zeta_n} D_i \zeta_n = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{5}$$

Это означает, что точка $(D_i\zeta_0, \ldots, D_i\zeta_n)$ содержится в касательном подпространстве к V в точке (ζ).

Пусть теперь гиперповерхность (1) касается V в точке (ζ). Тогда, как сразу следует из подсчета размерностей, касательное подпространство к V содержится в касательной гиперплоскости

$$\sum_{j=0}^{n} z_j \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial \zeta_j} = 0 \tag{6}$$

к гиперповерхности (1) (точку (ζ) можно предполагать неособой на V). Поэтому точка $(D_i\zeta_0, \ldots, D_i\zeta_n)$ удовлетворяет уравнению (6) и

$$\sum_k \left(\lambda_0 \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \zeta_k} + \ldots + \lambda_s \frac{\partial f_s(\zeta)}{\partial \zeta_k}\right) D_i \zeta_k = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial \zeta_j} D_i \zeta_j = 0. \tag{7}$$

Сопоставляя (3) и (7), получаем равенства

$$f_r(\zeta) = 0, \ r = 0, \ldots, S.$$

Это означает, что многообразие S с общей точкой (ζ) — есть неподвижная компонента нашей линейной системы, что противоречит условию. Теорема доказана.

Предположим теперь, что линейной системе Φ_λ соответствует отображение π многообразия V на кривую C с общей точкой $(\eta) = (f_1(\xi)/f_0(\xi), \ldots, f_s(\xi)/f_0(\xi))$. Обозначим поле $k(\xi) = K$, $K(\eta) = K_1$. Поле K/K_1 является полем функций на подмногообразии $V_1 = \pi^{-1}(\eta) \subset V$. Подмногообразие V_1 может быть приводимо. Рассмотрим тогда поле $\overline{K}_1 = \overline{k(\eta)}$ — алгебраическое замыкание поля K_1 в поле K. Если $\dim V = 2$, то $\dim V_1 = 1$. Обозначим через $\overline{C}$ неособую модель поля $\overline{k(\eta)} = \overline{K}_1$; пусть общей точкой $\overline{C}$ будет точка $(\overline{\eta})$.

Вложение $\overline{K}_1 \subset K$ определяет рациональное отображение $\overline{\pi} : V \to \overline{C}$. Поскольку поле $\overline{K}_1 = k(\overline{\eta})$ замкнуто в K, кривая $\overline{V}_1 = \overline{\pi}^{-1}(\overline{\eta})$ будет иметь вид mS, где S — неприводимая кривая. Совершенно так же, как в доказательстве предшествующей теоремы, мы можем показать, что $m = 1$.

Кроме того, поскольку $k(\eta) \subset k(\overline{\eta})$, существует накрытие $r: \overline{C} \to C$.

Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма рациональных отображений
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \overline{C} \arrow[d, "r"] \\ & C \end{tikzcd} \quad (T_1),$$
причем r является накрытием, а общий слой $\overline{\pi}^{-1}(\overline{\eta})$ отображения $\overline{\pi}$ — есть неприводимая кривая.

В том случае, когда линейной системе соответствует отображение поверхности V на кривую C, мы будем говорить, что эта система составлена из пучка. Каждая составленная из пучка линейная система составлена из неприводимого пучка в том смысле, что для нее существует диаграмма (T_1) с указанными выше свойствами.

Пусть Φ — неприводимый пучок (необязательно линейный) кривых на V. Ему соответствует рациональное отображение $\pi : V \to C$, такое, что C — кривая, и общая кривая пучка $E_x = \pi^{-1}(x)$, где x — общая точка C. Кривую C обычно называют базой пучка. Очевидно, что поле функций на V, поле $k(V) = K'(E_x)$, где $K' = k(C)$. Предположим, что кривая E_x рациональна (имеет арифметический род 0) над полем K'. Тогда, как известно [58], поле $K'(E_x)$ будет полем функций на кривой 2-го порядка $\varphi(u, v) = 0$, с коэффициентами в поле K'.

Если исходное поле k было алгебраически замкнуто, то поле K' будет квазиалгебраически замкнуто и кривая $\varphi(u, v) = 0$ будет иметь по крайней мере одну рациональную над K' точку [52]. Но это означает [58], что поле $k(V) = K'(E_x)$ будет чисто трансцендентным расширением поля K':

$$k(V) = K'(t) = k(C)(t),$$

откуда следует, что поверхность V бирационально эквивалентна прямому произведению $C \times P^1$ кривой C на прямую P^1. Такая поверхность называется линейчатой. Полученный результат принадлежит Нетеру.

Теорема Нетера. *Если на поверхности V существует пучок, общая кривая которого неособа и рациональна, то поверхность V линейчатая. Более того, если C — базис пучка, то V бирационально эквивалентна $P^1 \times C$. В частности, если C — прямая, т. е. если пучок линеен, то V бирационально эквивалентна $P^1 \times P'^1$, т. е. V — рациональна.*

Вторая теорема Бертини. *Общий элемент линейной системы Π_λ на алгебраическом многообразии V не может иметь особых точек вне базисных точек системы Π_λ и вне особых точек V.*

Пусть линейная система Π_λ задается системой гиперповерхностей (1). Мы сведем общий случай к случаю пучка

$$\lambda f_0 + \mu f = 0. \tag{8}$$

Действительно, присоединяя $(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)$ к основному полю k и рассматривая систему, задаваемую пучком (8) (где $\mu f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_s f_s$), мы видим, что если точка P является особой точкой общего элемента системы и не является особой точкой V, то $f_0(P) = 0$ в предположении, что вторая теорема Бертини верна для пучков. Совершенно аналогично $f_1(P) = \ldots = f_r(P) = 0$, т. е. точка P — базисная точка системы (1).

Итак, мы рассматриваем пучок $\lambda f_0 + \mu f = 0$. Очевидно, что особые точки подмногообразий, являющихся элементами этого пучка, удовлетворяют уравнению

$$fDf_0 - f_0 Df = 0, \tag{9}$$

где D — любое дифференцирование в поле $k(\xi)$ над k, (ξ) — общая точка V.

Эти уравнения определяют некоторое алгебраическое подмножество W на V, $W = \Sigma W_i$, где W_i — неприводимые подмногообразия на V.

Пусть (x_i) — общая точка W_i. Мы можем предполагать, что $f_0(x_i) \neq 0$; рассмотрим $\nu = \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}$.

Применяя дифференцирование D к

$$\nu f_0(\xi) + f_1(\xi) = 0,$$

получим

$$f_0(\xi) D(\nu) + \nu D(f_0(\xi)) + D(f_1(\xi)) = 0. \tag{10}$$

Поскольку (x_i) удовлетворяет уравнениям (9), (10),

$$\nu D(f_0(x_i)) + D(f_1(x_i)) = 0 \tag{11}$$

и из (10) и (11) следует, что $D(\nu) = 0$ для любого дифференцирования в $k(\xi)$ над k (в частности, для любого дифференцирования $\overline{D}$ в $k(x_i)$ над k). Поэтому ν алгебраично над k, а это означает, что существует лишь конечное

множество элементов пучка (8), имеющих особые точки вне базисных точек этого пучка и вне особых точек V. Теорема доказана. Приведенное доказательство принадлежит Акидзуки [2].

§ 4. Теорема Зариского

Пусть T — рациональное отображение неособой поверхности V на поверхность V'. Это отображение может быть задано линейной системой L кривых на поверхности V, не имеющей неподвижных компонент. Тогда для достаточно большого числа h полная линейная система $|hL|$ не имеет базисных точек, т. е. отображение, соответствующее этой системе,— регулярно.

Доказательство. Поскольку системе L соответствует отображение на поверхность, общий член этой системы — неприводимая кривая (см. доказательство первой теоремы Бертини). Пусть C — некоторая неприводимая кривая системы L. Докажем, что $(C^2) \geqslant 1$. Действительно, $\dim L \geqslant 2$, так как этой системе соответствует отображение на поверхность. Поэтому, какова бы ни была точка $P \in C$, найдется кривая $C' \in L$, проходящая через P и отличная от C. Поскольку кривые C и C' не могут иметь общих компонент (C — неприводима), $(C \cdot C') \geqslant 1$, т. е. $(C^2) \geqslant 1$.

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to F((h-1)D') \to F(hD') \to F_C(hD' \cdot C) \to 0, \tag{T_1}$$

где D' — некоторый дивизор (необязательно эффективный), линейно эквивалентный кривой C и не проходящий через особые точки $Q_1, \ldots, Q_s$ кривой C.

Пучок $F_C(hD' \cdot C)$ таков, что

$$F_C(hD' \cdot C)_x = \begin{cases} \text{множество рациональных функций } \varphi \text{ на } C, \text{ таких, что } (\varphi) + C \cdot hD' > 0, \text{ если } x \text{ — простая точка кривой } C; \\ \text{множество рациональных функций на } C, \text{ регулярных в } x, \text{ если } x \in \{Q_1, \ldots, Q_s\}. \end{cases}$$

Из последовательности (T_1) получаем точную последовательность групп когомологий

$$\begin{gathered} 0 \to H^0(V, F((h-1)D')) \to H^0(V, F(hD')) \to H^0(C, F_C(hD' . C)) \to \\ \to H^1(V, F((h-1)D')) \to H^1(V, F(hD')) \to H^1(C, F_C(hD' . C)) \to \ldots \end{gathered} \tag{T_2}$$

Так как $hD' \cdot C = hC^2 \geqslant h$ и дивизор $hD' \cdot C$ не содержит особых точек кривой C, по теореме Римана — Роха для кривой с особенностями $H^1(C, \mathcal{L}_C(hD' \cdot C)) = 0$, если $hC^2 > 2\pi - 2$ (1),где π —арифметический род кривой C. Из последовательности (T_2) получаем, что для чисел h, удовлетворяющих условию (1), числа $r_h = \dim H^1(V, \mathcal{L}(hD'))$ образуют невозрастающую последовательность, и, таким образом, существует такое целое число m_0, что $r_m = \mathrm{const}$ для всех $h \geqslant m_0$. Отсюда следует, что $H^1(V, F(hD')) \approx H^1(V, F((h-1)D'))$ при $h \geqslant m_0 + 1$, и мы получаем следующую точную последовательность:

$$0 \to H^0(V, F((h-1)D')) \to H^0(V, F(hD')) \xrightarrow{r_C} H^0(C, F_C(hD' \cdot C)) \to 0. \tag{T_3}$$

В этой последовательности

$$H^0(V, F((h-1)D')) = \mathcal{L}_V((h-1)D'),$$
$$H^0(V, F(hD')) = \mathcal{L}_V(hD'),$$
$$H^0(C, F(hD' \cdot C)) = \mathcal{L}_C(hD' \cdot C).$$

Наша цель — доказать, что система $|hD'|$, т. е. система дивизоров $D_\varphi = (\varphi) + hD'$, где $\varphi \in \mathcal{L}_V(hD')$, не имеет базисных точек, т. е. точек, общих для всех D_φ. Для этого достаточно доказать, что система дивизоров $|hD'\cdot C|_C$, т. е. система дивизоров $\mathscr{E}_{\overline{\varphi}} = (\overline{\varphi}) + hD'\cdot C$, где $\overline{\varphi} \in \mathscr{L}_C(hD'\cdot C)$, на кривой C не имеет базисных точек. Действительно, если некоторая точка $\mathfrak{p} \in V$ является базисной точкой системы $|hD'|$, то $\mathfrak{p} \in C$, ибо $hC \in |hD'|$, и, следовательно, проходит через $\mathfrak{p}$. Из того, что отображение r_C эпиморфно, следует, что каждый дивизор системы $|hD'\cdot C|_C$ высекается на кривой C некоторым дивизором системы $|hD'|$. Отсюда мы немедленно получаем, что существование базисной точки $\mathfrak{p}$ системы $|hD'|$ влечет за собой существование базисной точки системы $|hD'\cdot C|_C$. Покажем теперь, что при больших h система $|hD'\cdot C|_C$ не имеет базисных точек. Очевидно, что если C — неособая кривая, то при $hD'\cdot C = hC^2 > 2\pi - 2$ (в этом случае $\pi = g(C)$ — геометрическому роду кривой C) система дивизоров $|hD'\cdot C|_C$ не имеет неподвижных точек, и все доказано. Осталось рассмотреть случай, когда C — кривая с особыми точками $Q_1, \ldots, Q_s$. Обозначим $S = \bigcup_i Q_i$. Пусть $\widetilde{C}$ — нормализация кривой C, а $\mu\colon \widetilde{C} \to C$ — регулярное отображение $\widetilde{C}$ на C, такое, что $\mu\colon \widetilde{C} - S \to C - S$, где $S' = \mu^{-1}(S)$ является биголоморфизмом. Обозначим через O' пучок локальных колец на C, через $\widetilde{O}$ — пучок локальных колец на $\widetilde{C}$ и через O — прямой образ пучка $\widetilde{O}$: $O = \mu_\cdot(\widetilde{O})$. Как следует из свойств нормализации, пучок O таков, что

$$O_x = \begin{cases} O'_x, & \text{если } x \notin S;\\ \bigcap\limits_{P_i \in \mu^{-1}(Q)} \widetilde{O}_{P_i}, & \text{если } x = Q,\ Q \in S;\\ & \text{в этом случае } O_Q \text{ — есть целое замыкание кольца } O'_Q \text{ в}\\ & \text{поле функций } K = k(C). \end{cases}$$

Очевидно, что $O \supset O'$.

Рассмотрим аннулятор $\mathfrak{s}$ пучка модулей O/O', т. е. такой пучок, слоем которого в точке $x \in C$ является идеал $\mathfrak{s}_x \subset O_x$, состоящий из элементов $f \in O_x$, таких, что $f_g \in O'_x$ для всех $g \in O_x$. Поскольку O и O' — когерентные алгебраические пучки, таковым же будет $\mathfrak{s}$.

Если x — простая точка кривой C, то $O_x = O'_x$ и $\mathfrak{s}_x = O'_x$; если же $x = Q$, $Q \in S$, то $O'_Q \neq O_Q$ и $\mathfrak{s}_Q \subset O'_Q$, ибо O_Q — кольцо с единицей. Кроме того, в этом случае $\mathfrak{s}_Q$ не может содержать 1, и, следовательно, имеет место цепочка включений

$$O_Q \supset O'_Q \supset k + \mathfrak{s}_Q,$$

т. е., в частности, $\dim O'_Q/\mathfrak{s}_Q \geqslant 1$.

Условие принадлежности элемента $f \in O_Q$ к идеалу $\mathfrak{s}_Q$ можно выразить в следующей удобной для дальнейшего форме.

Поскольку кольцо O'_Q является пересечением конечного числа регулярных локальных колец $\widetilde{O}_P$, $P \in \mu^{-1}(Q)$, пересечение идеала $\mathfrak{s}_Q$ с любым кольцом $\widetilde{O}_P$ будет снова идеалом $\mathfrak{s}^P_Q$. Если обозначить через t_P локальную униформизирующую в точке P кривой $\widetilde{C}$, то очевидно, что любой идеал кольца $\widetilde{O}_P$ имеет вид $t^k_P\widetilde{O}_P$; в частности, идеал $\mathfrak{s}^P_Q = t^{n_P}_P\widetilde{O}_P$.

Рассмотрим дивизор $\mathfrak{s}_Q = \sum\limits_{P\in\mu^{-1}(Q)} n_P P$ на кривой $\widetilde{C}$. Очевидно, что функция $f \in O'_Q$ принадлежит $\mathfrak{s}_Q$ в том и только в том случае, если $f \equiv 0 \bmod \mathfrak{s}_Q$, т. е. если $f = t^{n_P}_P u$, где $u \in \widetilde{O}_P$ для каждого $P \in \mu^{-1}(Q)$. Иными словами, необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f \in O'_Q$ к идеалу $\mathfrak{s}_Q$, является обращение ее в нуль не меньше n_P-го порядка в каждой точке $P \in \mu^{-1}(Q)$. Степень $n_Q = \sum\limits_{P\in\mu^{-1}(Q)} n_P$ дивизора $\mathfrak{s}_Q$ равна размерности $O_Q/\mathfrak{s}_Q$. Дивизор $\mathfrak{s} = \sum\limits_{Q\in S} \mathfrak{s}_Q$ на кривой $\widetilde{C}$ называется обычно кондуктором кривой C. Степень дивизора $\mathfrak{s}$ обозначим через $n_{\mathfrak{s}}$, $n_{\mathfrak{s}} = \sum\limits_{Q\in S} n_Q$. Из изложенного выше следует, что $\mathfrak{s} \approx F_{\widetilde{C}}(-\mathfrak{s})$.

Рассмотрим теперь точную последовательность (когерентных алгебраических) пучков

$$0 \to \mathfrak{s} \to O' \to M_C \to 0,$$

где M_C — факторпучок $O_C/\mathfrak{s}$. Поскольку $\mathfrak{s}_Q = O'_Q$ в точках $Q \subset C - S$, пучок M_C сосредоточен на S. Кроме того, в силу вышесказанного в каждой точке $Q \in S$ группа $M_Q = O'_Q/\mathfrak{s}_Q$ — конечный k-модуль размерности $\geqslant 1$. Пусть D (в нашем случае $D = hD'\cdot C$) — некоторый дивизор на кривой C, $D \cap S = \phi$. Ему соответствует дивизор $\widetilde{D} = \mu^{-1}(D)$ на $\widetilde{C}$, имеющий, очевидно, ту же степень, что и D. Более того, поскольку пучок $\mathfrak{s}$ изоморфен пучку $F_{\widetilde{C}}(-\mathfrak{s})$, мы получаем точную последовательность пучков:

$$0 \to F_{\widetilde{C}}(\widetilde{D} - \mathfrak{s}) \to F_C(D) \to M_C \to 0$$

(здесь существенно, что $D \cap S = \phi$). Отсюда получаем точную последовательность групп когомологий:

$$0 \to H^0(\widetilde{C}, F_{\widetilde{C}}(\widetilde{D} - \mathfrak{s})) \to H^0(C, F_C(D)) \to H^0(C, M_C) \to \qquad (\mathrm{T}_4)$$
$$\to H^1(\widetilde{C}, F_{\widetilde{C}}(\widetilde{D} - \mathfrak{s})) \to \ldots$$

Если степень дивизора D достаточно велика (если $hD'\cdot C - n_{\mathfrak{s}} = hC^2 - n_{\mathfrak{s}} > 2\pi - 2$, где π — арифметический род C = роду $\widetilde{C}$), то $H^1(\widetilde{C}, F_{\widetilde{C}} \times (\widetilde{D} - \mathfrak{s})) = 0$ и линейная система дивизоров $|\widetilde{D} - \mathfrak{s}|$ на $\widetilde{C}$ не имеет неподвижных точек. Из второго утверждения и из точной последовательности (T_4) следует, что никакая простая точка кривой C не может быть базисной точкой системы $|hD'\cdot C|_C = |D|_C$; из первого утверждения и из (T_4), а также из свойств M_C следует, что никакая точка $Q \in S$ также не может быть базисной точкой нашей системы. Теорема доказана.

Теорема Зариского доказана в [22]. Настоящее доказательство следует идее Кодаиры [25].

Глава II

МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

В этой главе доказывается теорема о разложении бирационального преобразования поверхности на последовательность σ-процессов. Изучаются минимальные модели поверхностей. Показывается, что каждый бирациональный класс поверхностей имеет относительно минимальную модель. Доказывается также, что все классы поверхностей, за исключением классов линейчатых поверхностей, имеют (абсолютно) минимальную модель.

Пусть V — некоторая неособая проективная алгебраическая поверхность. Тогда в классе $\{V\}$ бирациональных эквивалентных ей неособых поверхностей можно ввести отношение частичной упорядоченности. Мы скажем, что неособая поверхность $V' \in \{V\}$ доминирует поверхность $V'' \in \{V\}$, если существует регулярное бирациональное отображение $T\colon V' \to V''$. Это отношение мы будем обозначать $V' > V''$.

Если отображение T будет бирегулярным, то поверхности V' и V'' мы будем отождествлять; таким образом, мы будем рассматривать поверхности с точностью до бирегулярной эквивалентности.

Минимальной моделью класса $\{V\}$ мы назовем такую неособую поверхность $\overline{V} \in \{V\}$, что $\overline{V} < V'$ для любой $V' \in \{V\}, V' \neq \overline{V}$. Очевидно, что если минимальная модель существует, то она единственна.

В этой главе мы выясним, какие классы $\{V\}$ поверхностей имеют минимальные модели.

Основной результат будет заключаться в следующем.

Все классы поверхностей, за исключением линейчатых поверхностей, имеют минимальные модели.

Наряду с минимальными моделями можно рассматривать относительно минимальные модели.

Поверхность $V' \in \{V\}$ мы назовем относительно минимальной моделью (о.м.м.), если не существует поверхности $V'' \in \{V\}$, такой, что $V' > V''$.

Покажем, что в каждом классе $\{V\}$ существует по крайней мере одна относительно минимальная модель.

Действительно, пусть V_1 — произвольная поверхность класса $\{V\}$. Тогда либо не существует поверхности $V_2 \in \{V\}, V_2 < V_1$, и поверхность V_1 сама является о.м.м., либо такая поверхность V_2 найдется. Поверхность V_2 либо является о.м.м., либо найдется поверхность $V_3 \in \{V\}$, такая, что $V_2 > V_3$. Повторяя это рассуждение, мы либо получим о.м.м. V_n, $n < +\infty$, либо получим бесконечную последовательность $V_1 > V_2 > V_3 > \ldots$ поверхностей класса $\{V\}$. Докажем, что существование такой последовательности невозможно.

Действительно, поскольку каждое регулярное отображение $T_i\colon V_i \to V_{i+1}$ небирегулярно, на V_i найдется исключительная кривая C_i — неприводимая кривая, такая, что $T_{i*}(C_i) = Q_i$, где Q_i — точка на поверхности V_{i+1} [см. введение, [55]). Регулярное отображение T_i порождает эпиморфизм (отображение) групп дивизоров

$$T_{i*}\colon D(V_i) \to D(V_{i+1}),$$

а также, поскольку алгебраическая эквивалентность сохраняется при регулярном отображении, эпиморфизм

$$T_{i*}\colon S(V_i) \to S(V_{i+1}).$$

Так как гомоморфизм T_{i*} имеет ненулевое ядро (класс алгебраической эквивалентности кривой C_i), а ранг группы $S(V_1)$ конечен, не может существовать бесконечной цепочки поверхностей $V_1 > V_2 > V_3 > \ldots$.

Таким образом, в каждом классе $\{V\}$ существует по крайней мере одна о.м.м. Более того, какова бы ни была поверхность $\overline{V} \in \{V\}$, существует, очевидно, о.м.м. $V' \in \{V\}$, такая, что $V' > \overline{V}$. Очевидно также, что если в классе $\{V\}$ не существует минимальной модели, то в этом классе существует по крайней мере две о.м.м. V_1 и V_2, между которыми не существует ни отношения $V_1 > V_2$, ни отношения $V_2 > V_1$. Рассмотрим бирациональное отображение $T\colon V_1 \to V_2$. Поскольку T — нерегулярно, найдется точка $Q_1 \in V_1$, фундаментальная для T, т. е. такая, что $T(Q_1)$ будет некоторой кривой E на поверхности V_2.

Рассмотрим теперь отображение T^{-1}. Если бы это отображение, которое обязательно имеет фундаментальные точки на V_2, не имело фундаментальных точек на E, нашлась бы поверхность $V_3 \in \{V\}$ и регулярное отображение $T'\colon V_2 \to V_3$, такое, что $T'(E)$ было бы точкой на V_3 (см. лемму 2, § 1). Это означало бы, что V_2 не есть относительно минимальная модель, что противоречит условию. Таким образом, из несуществования минимальной модели в некотором классе $\{V\}$ следует, что в этом классе найдется о.м.м. V такая, что на ней лежит кривая E со следующими свойствами:

1) кривая E является полным прообразом некоторой точки $Q \in V'$ при бирациональном отображении $T\colon V \to V'$, $E = T^{-1}(Q)$;

2) отображение T имеет по крайней мере одну фундаментальную точку на кривой E.

Такая кривая E называется исключительной кривой 2-го рода; эти кривые будут подробно изучены в дальнейшем. Из предшествующих рассуждений ясно, что каждая о.м.м. класса $\{V\}$, не имеющего минимальной модели, несет на себе исключительную кривую 2-го рода.

Позже мы докажем, что если на о.м.м. существует исключительная кривая 2-го рода, то на ней лежит и неприводимая исключительная кривая 2-го рода.

Основное утверждение этой главы будет следовать из теоремы (см. теорему A, § 4).

Если на о.м.м. V существует неприводимая исключительная кривая 2-го рода E, то эта поверхность линейчатая, если $(E^2) = 0$, и рациональная, если $(E^2) > 0$. Можно показать также, что если класс $\{V\}$ не имеет минимальной модели, то любая поверхность $V' \in \{V\}$ несет исключительную кривую 2-го рода; это утверждение, однако, нам в дальнейшем не понадобится.

§ 1. Исключительные кривые 1-го рода

Алгебраическая кривая E на неособой поверхности V называется исключительной кривой, если существует бирациональное преобразование $T\colon V \to V'$ поверхности V на неособую поверхность V', такое, что E есть полный T-прообраз некоторой точки $Q' \in V'$, т. е. $E = T^{-1}(Q')$.

Если преобразование T является регулярным отображением в каждой точке кривой E, то эта кривая называется исключительной кривой 1-го рода (и. к. 1); в противном случае — исключительной кривой 2-го рода (и. к. 2).

В этом параграфе будут изучены и.к. 1; будет показано, что в некотором смысле и.к. 1 исчерпываются прямыми, получаемыми на поверхности в результате применения к ней σ-процессов.

Докажем вначале леммы о регулярных преобразованиях.

Лемма 1. *Пусть T: $V' \to V$ — бирациональное преобразование поверхности V' на V, являющееся регулярным в некоторой неособой точке $Q' \in V'$, $Q = T(Q')$ — неособая точка поверхности V и $O_{Q'} > O_Q$* (т. е. *Q — фундаментальная точка преобразования T^{-1}*).

Рассмотрим, далее, поверхность $V^* = \sigma(V)$, получаемую из поверхности V в результате применения σ-процесса в точке Q.

Рассмотрим бирациональное преобразование

$$T'\colon V' \to V^*,\ T' = \sigma T.$$

Тогда T' будет регулярно в точке Q'.

$$\begin{tikzcd} {}^{Q'}V' \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & & V^{Q} \arrow[dl, "\sigma"] \\ & V^*_{Q^*} & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть Q^* — некоторая точка на V^*, соответствующая $Q' \in V'$ при преобразовании T'. Из определения T' и σ, а также из регулярности T в точке Q легко следует, что $Q^* \in L$. Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — локальные параметры в точке Q^*. Функции $\bar{x}$, $\bar{y}$ можно выбрать так (см. описание σ-процесса), что $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y/x$, где (x, y) — локальные параметры в точке Q. Очевидно, что $x, y \in \mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}'$ — максимальный идеал локального кольца $O_{Q'}$. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что $\bar{x}; \bar{y} \in O_{Q'}$. Предположим противное, т. е. что точка Q' будет фундаментальной точкой преобразования T'. Тогда, как легко следует из определения, точке Q' может соответствовать на V^* лишь прямая $L = \sigma(Q)$. Локальное уравнение L в окрестности точки Q^* записывается уравнением $x = 0$. Если обозначить через $\nu_L(\varphi)$ порядок функции $\varphi \in \Sigma$ на прямой L, то $\nu_L(x) = 1$, откуда $x \notin \mathfrak{M}'^2$ (кривой L соответствует точка Q' на V', [55]). Поскольку точка Q является фундаментальной точкой преобразования T^{-1}, на поверхности V' существует кривая (неприводимая) C', такая, что $T(C') = Q$. Очевидно, что x и y обращаются в 0 на C', и, так как $x \notin \mathfrak{M}'^2$, $x = 0$ может служить локальным уравнением кривой C' в окрестности точки Q'. Отсюда следует, что x делит y в локальном кольце $O_{Q'}$, т. е. $y/x \in O_{Q'}$, что противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть V — неособая поверхность и E — и.к. 1 на V. Тогда существует неособая поверхность G и бирациональное отображение $T\colon V \to G$, всюду регулярное на V и бирегулярное на $V - E$, причем $E = T^{-1}(P)$, где P — точка на G.*

По условию теоремы существует неособая поверхность V' и бирациональное отображение T': $V \to V'$, регулярное во всех точках $Q \in E \subset V$, причем $E = (T')^{-1}(P')$, где P' — точка на V'. Преобразование $(T')^{-1}$ может иметь фундаментальные точки на V', отличные от P'. Применяя конечную последовательность σ-процессов (в точках $\neq P'$), мы получим новую неособую поверхность $V'' = T_0(V')$, такую, что бирациональное отображение $T'' = T_0 T'$: $V \to V''$ будет регулярно на E, $(T'')^{-1}$ будет иметь фундаментальную точку лишь в $P'' = T_0(P')$, причем $E = (T'')^{-1}(P'')$, т. е. $(T'')^{-1}$ регулярно на $V'' - P''$ (теорема 1, § 2, гл. I).

Пусть L — линейная система на V (без неподвижных компонент), соответствующая преобразованию T''. Рассмотрим полную линейную систему $|h \cdot L|$ для достаточно большого h и рассмотрим соответствующее ей преобразование T и поверхность $G = T(V)$. Докажем, что нормализация $G_н$ поверхности G ($G_н = N^{-1}(G)$) и соответствующее преобразование $T_н = N^{-1}T$ удовлетворяют требованиям леммы. Прежде всего преобразование T всюду регулярно на V (теорема Зариского).

Преобразование T можно рассматривать, как составленное из двух преобразований: преобразования $T_{|L|}$ поверхности V, соответствующего полной линейной системе $|L|$, и преобразования T_h поверхности $V_{|L|} = T_{|L|}(V)$, соответствующего некоторой полной системе сечений поверхности $V_{|L|}$ гиперповерхностями степени h. Преобразование T_h является бирациональным преобразованием. Поскольку поверхность $V_{|L|}$ получалась из поверхности V преобразованием $T_{|L|}$, соответствующим системе $|L| \supseteq L$, $V_{|L|}$ бирационально эквивалентна V (так как V'' была бирационально эквивалентна V; это сразу следует из свойств отображений, соответствующих линейным системам, — см. введение). Таким образом, отображение T: $V \to G$ всюду регулярно на V и бирационально.

Пусть D — некоторая кривая на V, $D \neq E$ и пусть ξ — общая точка кривой D. Тогда, поскольку $tr[T''(\xi)/k] = 1$ (так как T'' не стягивает кривую D в точку) и поскольку $k(T(\xi)) \supset k(T''(\xi))$, ибо преобразование T соответствует линейной системе $|hL|$, имеем $tr\ [k(T(\xi))/k] = 1$, т. е. кривая $D \neq E$ переходит при преобразовании T в некоторую кривую, а не стягивается в точку.

Линейная система L состоит, по определению, из эффективных дивизоров D_λ, таких, что

$$D_\lambda = (F_\lambda) + D,\ F_\lambda = \lambda_0 F_0 + \ldots + \lambda_d F,$$

где $F_0, \ldots, F_d$ — линейно независимые рациональные функции на V и D — дивизор на V, такой, что $(F_j) + D \geqslant 0$, $j = 0, \ldots, d$. Отображение поверхности V, соответствующее системе L, в окрестности U_i задается следующим образом:

$$T \ni P \xrightarrow{T''} (F_0 R^i_D(P), \ldots, F_d R^i_D(P)),$$

где R^i_D — локальное уравнение D в окрестности U_i.

Очевидно, что для того, чтобы кривая E переводилась в точку при бирациональном преобразовании S, соответствующей линейной системе M (без неподвижных компонент), необходимо и достаточно, чтобы $(E \cdot \bar{M}) = 0$, где $\bar{M}$ — общая кривая системы M. Отсюда мы сразу получаем, что, поскольку $(E \cdot \bar{L}) = 0$, $(E \cdot h\bar{L}) = 0$, т. е. кривая E переводится преобразованием T в точку. Итак, отображение T: $V \to G$ регулярно переводит кривую E в некоторую точку $P \in G$ и не стягивает в точку ни одной кривой $D \neq E$.

Наряду с поверхностью G рассмотрим ее производную нормальную модель $G_н$ и коммутативный треугольник (T_1) бирациональных отображений, где T и N — регулярные отображения, а $T_н = N^{-1}T$.

$$(T_1)\quad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "T"] & & G \\ & G_н \arrow[ul, "T_н"] \arrow[ur, "N"'] & \end{tikzcd}$$

Нам потребуется для дальнейшего два основных факта из теории нормализации поверхностей:

1) какова бы ни была точка $Z \in G$, $N^{-1}(Z)$ состоит из конечного множества точек;

2) если отображение $T_н^{-1}$ в точке $R \in G_н$ нерегулярно, то этой точке соот-

ветствует в отображении $T_н^{-1}$ кривая на V (аналогично: если $T_н$ нерегулярно в точке $Q \in V$, то точке Q соответствует кривая на $G_н$).

Доказательство этих фактов приведено, например, в книге Ходжа и Пидо [55, т. III].

Отсюда и из свойств отображения T сразу вытекает, что: а) отображение $T_н$ будет регулярно всюду на V; б) отображение $T_н^{-1}$ будет регулярно на $G_н - N^{-1}(P)$, где $P = T(E)$; в) $T_н(E) = N^{-1}(P) = R$ (как образ неприводимой кривой).

Таким образом, $V - E$ — бирегулярно эквивалентно $G_н - N^{-1}(P)$. Осталось показать, что $R = N^{-1}(P)$ — неособая точка поверхности $G_н$. Для этого рассмотрим треугольник бирациональных отображений (T_2), где через $\overline{T}$ обозначено отображение $T''T_н^{-1}$.

$$(T_2)\quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "T''"] \arrow[dr, "T_н"'] & V'' \\ & G_н \arrow[u, "\overline{T}"'] \end{tikzcd}$$

Покажем, что отображение $\overline{T}$ будет бирегулярно в точке $R \in G_н$, откуда сразу будет следовать простота точки R. Из определения $\overline{T}$ вытекает, что $\overline{T}(R) = P''$, т. е. $\overline{T}$ регулярно в точке R. Если $(\overline{T})^{-1}$ нерегулярно в точке P'', то существует кривая $E_1 \subset G_н$, $E_1 = \overline{T}^{-1}(P'')$, $E_1 \ni R$. Рассмотрим кривую $D = T_н^{-1}(E), D \subset F$. Очевидно, что $D \neq E$; кроме того, поскольку $\overline{T} = T''T_н^{-1}$, а $T_н$ — регулярно, $T''(D) = P''$, что противоречит условию (E — есть полный прообраз точки P'' в преобразовании T''). Лемма доказана.

Эти леммы дают возможность описать исключительные кривые 1-го рода. Пусть V — неособая поверхность, и E — и. к. 1 на ней. Это значит, что существует бирациональное отображение T поверхности V на некоторую неособую поверхность V', такое, что T регулярно во всех точках E, $T(E) = Q'$.

Тогда, как следует из леммы 2, существует бирациональное отображение $\overline{T}$ поверхности V на неособую поверхность $\overline{V}$, регулярное всюду на V и бирегулярное на $V - E$, такое, что $E = \overline{T}^{-1}(\overline{Q})$, где $\overline{Q} \in \overline{V}$. Применив к поверхности $\overline{V}$ в точке $\overline{Q}$ σ-процесс, получим неособую поверхность V^* с прямой L на ней, $L = \sigma(\overline{Q})$. Рассмотрим (бирациональное) отображение $T^* = \sigma\overline{T}$ поверхности V на V^*. Из леммы 1 следует, что T^* будет регулярно всюду на E и, следовательно, на всем V, и бирегулярно на $V - E$

$$\begin{tikzcd} \overset{E}{V} \arrow[rr, "\overline{T}"] \arrow[dr, "T^*"'] & & \overset{\overline{Q}}{\overline{V}} \arrow[dl, "\sigma"] \\ & \underset{L}{V^*} & \end{tikzcd}$$

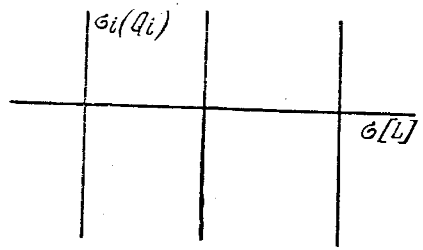
$$(V - E \overset{T^*}{\approx} V^* - L).$$

При этом $(T^*)^{-1}(L) = E$. Очевидно, что кривая E будет состоять из (алгебраического) образа кривой L при преобразовании $(T^*)^{-1}$ и исключительных кривых преобразования T^*, соответствующих фундаментальным точкам преобразования $(T^*)^{-1}$ на прямой L. Если E — неприводимая кривая, преобразование $(T^*)^{-1}$ не имеет фундаментальных точек на L, т. е. T^* — бирегулярное отображение V на V^*. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Любая неприводимая и.к.1 получается (с точностью до бирегулярного преобразования поверхности) в результате применения σ-процесса в некоторой точке неособой поверхности. Отсюда, в частности, если E — неприводимая и.к.1, то $(E^2) = -1$, $p_a(E) = 0$.*

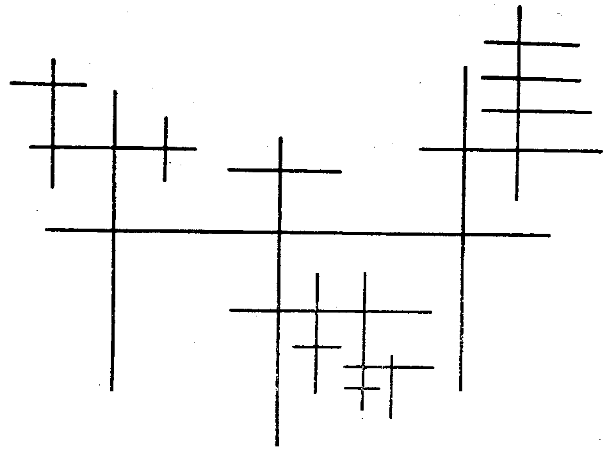
Будем пользоваться обозначениями предшествующего доказательства.

Пусть E — теперь приводимая и. к. 1. Обозначим через $E_0 = (T^*)^{-1}[L]$ алгебраический прообраз прямой L при отображении T^*. Поскольку $E_0 \neq E$, на прямой L существуют точки $Q_1, \ldots, Q_r$, являющиеся фундаментальными точками преобразования $(T^*)^{-1}$. Если обозначить $E_i = (T^*)^{-1}(Q_i)$, то, очевидно, каждая кривая E_i будет снова и. к. 1. Применяя к каждой точке Q_i поверхности V^* σ-процесс, мы получим поверхность V_1^*, на которой будет лежать кривая $\widetilde{L}_1$, изображенная на рисунке,



$$\widetilde{L}_1 = \sigma[L] + \Sigma\sigma_i(Q_i).$$

Как следует из леммы 1, будет существовать регулярное отображение $T_1^* = \sigma_r\sigma_{r-1}\ldots\sigma_1 T^*$ поверхности V^* на V_1^*, причем $(T_1^*)^{-1}(\widetilde{L}_1) = E$. Повторяя этот процесс, мы найдем, что любая исключительная кривая 1-го



рода E имеет вид дерева, состоящего из неприводимых рациональных неособых кривых L_i. Кривая E имеет лишь двойные особые точки, образованные пересечениями L_i; кривые L_i и L_j имеют не больше одной точки пересечения. Это дерево связно; кроме того, это дерево имеет лишь конечное число ветвей, что следует из основной леммы о последовательности σ-процессов (см. § 3, гл. I).

§ 2. Теорема Кастельнуово

В предыдущем параграфе мы показали, что любая неприводимая исключительная кривая 1-го рода является, с точностью до бирегулярного преобразования поверхности, на которой она лежит, прямой, получаемой применением σ-процесса к некоторой неособой поверхности.

Поэтому неприводимая и. к. 1 L имеет следующие численные характеристики: $(L^2) = -1$, $g(L) = \pi(L) = 0$. Сейчас мы докажем обратную теорему. Доказательство принадлежит Кодаире [24].

Теорема. *Если на неособой поверхности V лежит неособая неприводимая кривая L, удовлетворяющая условиям $(L^2) = -1$, $g(L) = 0$ ($g(L) = \pi(L)$, так как кривая L неособая), то кривая L — исключительная кривая 1-го рода.*

Доказательство. Рассмотрим на V дивизор $\bar{E} = kE$, где E — гиперплоское сечение V, а число k настолько велико, что пучок, соответствующий дивизору $\bar{E}$, полутонок, т. е., в частности, $H^1(V, F(\bar{E})) = 0$. Этого всегда можно добиться по теореме Зариского [21].

Пусть $m = (\bar{E}\cdot L)$; рассмотрим последовательность дивизоров

$$\bar{E}_i = \bar{E} + (i-1)L, \quad 1 \leqslant i \leqslant m+1.$$

Для двух соседних членов этой последовательности напишем точную последовательность групп когомологий с коэффициентами в пучках, соответствующих этим дивизорам:

$$\begin{gathered} 0 \to H^0(V, F(\bar{E}_i)) \to H^0(V, F(\bar{E}_{i+1})) \to \\ \to H^0(L, F(L\cdot\bar{E}_{i+1})) \to H^1(V, F(\bar{E}_i)) \to \\ \to H^1(V, F(\bar{E}_{i+1})) \to H^1(L, F(L\cdot\bar{E}_{i+1})) \to \dots \end{gathered} \tag{1}$$

Легко видеть, что $\dim H^0(L, F(L\cdot\bar{E}_{i+1})) = m - i$, поскольку $(L\cdot\bar{E}_{i+1}) = m - i$ и $g(L) = 0$. Отсюда также $H^1(L, L\cdot\bar{E}_{i+1}) = 0$, $i \leqslant m+1$, поэтому индукцией по i получаем, что $H^1(V, F(\bar{E}_{i+1})) = 0$ (очевидно, что $H^1(V, F(\bar{E}_1)) = 0$). Отсюда следует, что полная линейная система $|\bar{E}_{i+1}| = |\bar{E} + iL|$ на V высекает на кривой L полную линейную систему $|L\cdot(\bar{E} + iL)|$. Для $i = m$ получаем, в частности, точную последовательность

$$0 \to H^0(V, F(\bar{E}_m)) \to H^0(V, F(\bar{E}_{m+1})) \to H^0(L, F(L\cdot\bar{E}_{m+1})) \to 0. \tag{2}$$

Индекс пересечения $(L\cdot\bar{E}_{m+1}) = 0$; поэтому $\dim H^0(L, F(L\cdot\bar{E}_{m+1})) = 1$. Более того, $H^0(L, F(L\cdot\bar{E}_{m+1})) = k$. Действительно, как следует из точной последовательности (2), кривая L не есть неподвижная компонента системы $|\bar{E}_{m+1}|$. Поэтому в системе $|\bar{E}_{m+1}|$ найдется кривая U, такая, что $U\cdot L = 0$, и, следовательно, $H^0(L, F(0)) = k$. Это означает, в частности, что кривые системы $|\bar{E}_{m+1}|$, не содержащие кривой L в качестве компоненты (а такие обязательно существуют!), не пересекаются с кривой L, т. е. система $|\bar{E}_{m+1}|$ не имеет базисных точек на кривой L; поэтому преобразование поверхности V, соответствующее системе $|\bar{E}_{m+1}|$, всюду регулярно на L.

Рассмотрим более подробно отображение поверхности V, соответствующее дивизору $\bar{E}_{m+1}$. Обозначим базис линейного пространства $H^0(V, F(\bar{E}_{m+1}))$ через $(f_0, \dots, f_q)$. Он содержит базис $(\varphi_0, \dots, \varphi_t)$, $t < q$ пространства $H^0(V, F(\bar{E}))$. Можно предположить, что $f_0 = \varphi_0, \dots, f_t = \varphi_t$ и, кроме того, что $iH^0(V, F(\bar{E}_m))$ порождает подпространство $(f_0, \dots, f_{q-1})$.

Отображение V, соответствующее $\bar{E}_{m+1}$, можно задать следующим образом:

$$\Phi: z \to (f_0(z)\, e^i_{m+1}(z), \dots, f^i_q(z)\cdot e^i_{m+1}(z)),$$

где $z \in U_i \subset V$, а e^i_{m+1} — локальное уравнение дивизора $\bar{E}_{m+1}$ в U_i. Из точной последовательности (2) следует, что $f_k(z)\cdot e^i_{m+1}(z)|_L = 0$, $k = 0, \dots, q-1$, $f^i_q(z)\, e^i_{m+1}(z)|_L = 1$, т. е. отображение Φ переводит кривую $L \subset V$ в точку $P = (0, \dots, 0, 1)$ пространства P^q. Обозначим теперь через l^i локальное уравнение L в U_i; тогда отображение

$$z \to \left(\frac{f_0(z)\, e^i_{m+1}(z)}{(l^i)^m}, \dots, \frac{f_q(z)\, e^i_{m+1}(z)}{(l^i)^m}\right),$$

бирегулярно эквивалентное Φ на $V - L$, будет бирегулярным отображением $V - L$ в $P^q - P$, поскольку отображение поверхности V в P^t

$$z \to (\varphi_0(z)\, l^i_1(z), \dots, \varphi_t(z)\, l^i_1(z)),$$

соответствующее дивизору $\bar{E}_1 = \bar{E}$, будет бирегулярным (очевидно, что $l^i_1 = \frac{e^i_{m+1}}{(l^i_1)^m}$ и l^i — единица на $V - L$). Итак, мы доказали, что отображение Φ, соответствующее дивизору $\bar{E}_{m+1} = \bar{E} + mL$ на V, будет регулярным отображением поверхности V на некоторую поверхность $\bar{V} = \Phi(V) \subset P^q$; при этом $V - L$ бирегулярно отображается на $\bar{V} - P$, а кривая L переходит в точку $P \in \Phi(V)$. Осталось доказать, что точка P поверхности $\bar{V}$ — неособая.

Для этого рассмотрим основную точную последовательность (1) для $i = m - 1$. Получаем

$$0 \to H^0(V, F(\bar{E}_{m-1})) \xrightarrow{i} H^0(V, F(\bar{E}_m)) \xrightarrow{r} H^0(L, F(L\cdot\bar{E}_m)) \to 0.$$

Поскольку $(L\cdot\bar{E}_m) = 1$, $\dim H^0(L, F(L\cdot\bar{E}_m)) = 2$, т. е. линейно независимыми сечениями пучка $F_L(L\cdot\bar{E}_m)$ будут 1 и функция ψ, имеющая единственный нуль на L (см. предшествующие рассуждения о системе $|\bar{E}_{m+1}|$). Обозначим прообразы этих функций в $H^0(V, F(\bar{E}_{m-1}))$ через χ_1 и χ_2; это означает, что в U_i

$$\chi_1 e^i_m|_L = 1, \quad \chi_2 e^i_{m-1}|_L = \psi^i.$$

(Очевидно, что в некотором U_j, $j \neq i$ возможно

$$\chi_1 e^j_{m-1}|_L = \psi^i, \quad \chi_2 e^j_{m-1}|_L = 1.)$$

Рассмотрим (глобальные) функции $\xi_1 = \frac{\chi_1}{f_q}$, $\xi_2 = \frac{\chi_2}{f_q}$. Поскольку $f_q e^i_{m+1}|_L = 1$ в любой окрестности U_i и поскольку $e^i_{m+1} = e^i_{m-1}\cdot l^i$, где l^i — локальное уравнение L в U_i, функции ξ_1 и ξ_2 будут голоморфны в окрестности $U(L)$ кривой L и будут обращаться в 0 на L.

Наша цель показать, что функции ξ_1 и ξ_2, рассмотренные на $\bar{V}$, будут локальными параметрами в точке $P \in \bar{V}$. Иными словами, мы покажем, что существует бирегулярное отображение $U(\xi_1, \xi_2)$ окрестности O на $U(P) = \Phi(U(L)) \subset \bar{V}$.

Прежде всего существует бирегулярное отображение $U(L) - L$ в $U - O$:

$$\varkappa: z \to ((\xi_1 z), \xi_2(z)).$$

Действительно, если точка $q \in L$, $q \in U_i \cap U(L)$, то либо $\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\chi_2}{\chi_1}$, либо $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\chi_1}{\chi_2}$ может служить локальным параметром на L; пусть имеет место первый случай. Тогда, очевидно, $\left(\xi_1, \frac{\xi_2}{\xi_1}\right)$ есть система локальных координат на V в окрестности $U_i \cap U(L)$. Но в этом случае $(\xi_1, \xi_2/\xi_1)$ являются локальными параметрами в любой точке $z \in U_i \cap U(L) - L$. Для этого нужно просто повторить рассуждения, применявшиеся при рассмотрении σ-процесса (сама окрестность $U_i \cap U(L)$ получается, как легко видеть, из окрестности $U(\xi_1, \xi_2)$ при помощи σ-процесса $\xi_1 t_2 - \xi_2 t_1 = 0$).

Рассмотрим теперь отображение Φ в окрестности $U(L)$. В $U(L) \cap U_i$ функция $f_q \cdot e^i_{m+1} \neq 0$, и поэтому Φ в неоднородных координатах записывается в виде

$$\Phi^i(t) = \left(\frac{f_0(z)}{f_q(z)}, \ldots, \frac{f_{q-3}(z)}{f_q(z)}, \xi_1^i(z), \xi_2^i(z), 1\right),$$

причем все $\frac{f_k(z)}{f_q(z)}$ — голоморфные функции от $z \in U(L) \cap U_i$, и, следовательно, являются голоморфными функциями от ξ_1, ξ_2, если $\xi_1, \xi_2 \in U(\xi_1, \xi_2)$. Но тогда все функции $\frac{f_k(z)}{f_q(z)}$ являются голоморфными от ξ_1, ξ_2 во всем $U(\xi_1, \xi_2)$, поскольку они не могут иметь изолированных полюсов.

Таким образом, отображение $\Phi\varkappa^{-1}$ является биголоморфным отображением $U(\xi_1, \xi_2)$ в $\Phi(U(L)) = U(P) \subset \overline{V}$, что и требовалось доказать.

§ 3. Исключительные кривые 2-го рода

Перейдем теперь к исключительным кривым 2-го рода. Пусть $T\colon V \to V'$ — бирациональное преобразование неособой поверхности V на неособую V', $Q' \in V'$, $E = T^{-1}(Q')$ — полный прообраз точки Q', т. е. исключительная кривая. Рассмотрим так называемую «соединяющую» поверхность G, т. е. такую неособую поверхность, бирационально эквивалентную V и V', что существуют всюду регулярные на G (бирациональные) отображения $f\colon G \to V$ и $f'\colon G \to V'$. Такую поверхность можно построить, используя метод леммы 2 § 1

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ V \arrow[rr, "T"] & & V' \end{tikzcd}$$

Треугольник отображений будет коммутативен. Очевидно, что $E = T^{-1}(Q') = f((f')^{-1}(Q'))$, откуда сразу следует, что исключительная кривая (2-го рода) связна, поскольку $\tilde{E} = (f')^{-1}(Q')$ будет исключительной кривой 1-го рода (и, следовательно, связной), а f — регулярное отображение.

Пусть теперь D — неприводимая компонента кривой E. Алгебраический прообраз $f^{-1}[D]$ кривой D является неприводимой кривой на G, и, кроме того, $f^{-1}[D] \subset (f')^{-1}(Q') = \tilde{E}$. Но кривая $\tilde{E}$ является и. к. 1, и поэтому все неприводимые компоненты ее — рациональные кривые. Следовательно, кривая D — также рациональна.

Произведем в точке $Q' \in V'$ σ-процесс; получим поверхность V_1' с прямой L на ней. Рассмотрим треугольник отображений $T_1 = \sigma_1 T$. Очевидно,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_1"'] & V' \arrow[d, "\sigma_1"] \\ & V_1' \end{tikzcd}$$

что $E = T_1^{-1}(L)$. Предположим, что существует точка $Q_1' \in L$, такая, что $E = T_1^{-1}(Q_1')$. Тогда произведем σ-процесс в точке $Q_1' \in V_1'$, получим поверхность V_2' и т. д. Таким образом, мы получаем последовательность точек $Q' < Q_1' < Q_2' < \ldots$, расположенных соответственно на поверхностях $V', V_1', V_2', \ldots$ и таких, что кривая E является полным прообразом каждой из этих точек, при соответствующем отображении. Но тогда, как следует из § 3, гл. I, эта последовательность обрывается на конечном шаге, т. е. существует такая поверхность $\overline{V}'$ и точка $\overline{Q}'$ на ней (называемая «максимальным сжатием»), а также бирациональное преобразование $\overline{T}\colon V \to \overline{V}'$ такое, что $E = \overline{T}^{-1}(\overline{Q}')$, удовлетворяющие следующим условиям: если мы произведем σ-процесс в точке $\overline{Q}' \in \overline{V}'$, то никакая точка $\overline{Q}^* \in \overline{L}^* = \sigma(\overline{Q}') \subset \overline{V}^*$ не может иметь в качестве полного прообраза кривую E. Очевидно, что $E = (\overline{T}^*)^{-1}(\overline{L}^*)$; здесь $\overline{V}^* = \sigma(\overline{V}')$, $\overline{T}^* = \sigma\overline{T}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overline{T}"] \arrow[dr, "\overline{T}^*"'] & \overline{V}' \arrow[d, "\sigma"] \\ & \overline{V}^* \end{tikzcd}$$

Пусть теперь кривая E — приводима и имеет $q > 1$ неприводимых компонент. Поскольку кривая $\overline{L}^*$ неприводима, преобразование $(\overline{T}^*)^{-1}$ должно иметь (по крайней мере одну) фундаментальную точку P' на $\overline{L}^*$. Пусть $E_1 = (\overline{T}^*)^{-1}(P')$. В силу выбора поверхности $\overline{V}'$ и точки $\overline{Q}'$, E_1 будет исключительной кривой, строго содержащейся в кривой E, т. е. состоящей из $s < q$ компонент. Может представиться два случая: либо E_1 — исключительная кривая 2-го рода, либо 1-го рода. Во втором случае существует бирациональное всюду регулярное отображение $T_0\colon V \to \overline{V}_0$, при котором $E_1 = T_0^{-1}(Q_0)$. Рассмотрим кривую $E_0 = T_0(E)$. Тогда $E_0 = (\overline{T}_0)^{-1}(Q')$,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_0"] \arrow[dr, "\overline{T}"'] & V_0 \arrow[d, "\overline{T}_0"] \\ & \overline{V}' \end{tikzcd}$$

и, поскольку преобразование $\overline{T}$ не было регулярно на E, преобразование $\overline{T}_0$ не будет всюду регулярно на E_0, т. е. E_0 будет и. к. 2, причем число компонент кривой E_0 будет $< q$ (оно будет равно $q - s$, где s — число компонент E_1). Таким образом, и в первом, и во втором случаях мы получаем и. к. 2 (расположенную, быть может, на другой поверхности того же бирационального класса, что и исходная поверхность V) с числом компонент, меньшим q. Суммируем все полученные утверждения.

Теорема 1. *И. к. 2 связна, все неприводимые компоненты ее — рациональные кривые. Кроме того, если на поверхности V лежит и. к. 2 E, то существует (неособая) поверхность того же класса, на которой лежит неприводимая (и, следовательно, рациональная) и. к. 2. Более того, из доказательства последнего утверждения сразу следует, что если V — относительно минимальная модель, то уже на ней существует неприводимая* *и. к. 2 (действительно, описанная выше кривая E_1 будет обязательно и. к. 2 с меньшим, чем E, числом компонент).*

Лемма 1. *Пусть E — неприводимая исключительная кривая 2-го рода на поверхности V, T: $V \to V'$ — бирациональное преобразование такое, что $E = T^{-1}(P')$, $P' \in V'$. Пусть, далее, точка $P \in E$ — фундаментальная точка преобразования T (такая всегда существует, поскольку E — и. к. 2), и пусть σ: $V \to \bar V$ — σ-процесс в точке $P \in E$. Тогда $\sigma[E]$ тоже исключительная кривая (быть может, и. к. 1).*

Доказательство. Рассмотрим коммутативный треугольник отображений. Пусть $L = \sigma(P)$. Тогда

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\sigma"'] & V' \\ \bar V \arrow[ur, "\bar T"'] & \end{tikzcd}$$

$$\bar T^{-1}(P') \subseteq \sigma[E] + L.$$

Докажем, что $\bar T^{-1}(P') = \sigma[E]$. Ввиду того, что P — фундаментальная точка преобразования T, найдется (неприводимая) кривая E' на V', проходящая через P', и такая, что $T^{-1}[E'] = P$. Рассмотрим некоторую точку $Q' \in E'$, $Q' \neq P'$, в которой отображение T^{-1} регулярно. Но тогда отображение $\bar T^{-1}$ в этой точке Q' также будет регулярно (лемма 1, § 1); обозначим соответствующую точку (лежащую, очевидно, на кривой L) через Q. Имеют место соотношения: $O_{Q'} > O_P$, $O_{Q'} \geqslant O_Q$. Если мы предположим теперь, что $\bar T[L] = P'$, то, без ограничения общности, можно допустить, что $\bar T$ — регулярно в точке Q, и, следовательно, $O_Q > O_{P'}$. Отсюда следовало бы, что $O_{Q'} > O_{P'}$, что, очевидно, невозможно. Лемма доказана.

Если кривая $\sigma[E]$ — вновь и. к. 2, мы опять применим σ-процесс в точке $P' \in \sigma[E]$ — фундаментальной точке преобразования $\bar T$ и т. д. Очевидно, что через конечное число шагов мы получим кривую $\bar E$ — и. к. 1. Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть E — и. к. 2 на V. Тогда существует такая поверхность G, получаемая из V антирегулярным бирациональным преобразованием g : $G \to V$, являющимся произведением конечного числа σ-процессов, что $g^{-1}[E]$ будет (неприводимой) и. к. 1, т. е. рациональной кривой без особенностей. Из наших рассуждений, в частности, следует, что все особые точки неприводимой и. к. 2 E будут обязательно фундаментальными точками соответствующего преобразования; в процессе превращения и. к. 2 в и. к. 1 мы, применяя σ-процессы к поверхности V в особых точках E, разрешаем эти особенности (т. е. десингуляризируем кривую E).*

Из этих свойств неприводимых и. к. 2 мы сейчас, используя леммы § 1, гл. I, получим некоторые численные характеристики таких кривых.

Пусть E — неприводимая и. к. 2 на V. Обозначим $E^2 = k$, $g(E) = 0$, $\pi(E) = p$. Если E — неособая кривая, то $p = 0$. Для преобразования E в и. к. 1 потребуется $n > 0$ σ-процессов с центрами в точках $Q_0 \in E$, $Q_1 \in E_1 = \sigma_1[E]$, ..., $Q_{n-1} \in E_{n-1} = \sigma_{n-1}[E_{n-2}]$; $E' = \sigma_n[E_{n-1}]$. Имеем $(E^2) = (E'^2) + n$ (лемма 1, § 1), поскольку $(E'^2) = -1$; $(E^2) = -1 + n \geqslant 0$, $-(KE) = 1 + n \geqslant 2$. Если кривая E имеет особые точки $P_1, \ldots, P_2$ кратностей $s_1, \ldots, s_2$, то в процессе превращения ее в и. к. 1 мы должны разрешить все особенности при помощи σ-процессов.

Пользуясь леммой 1, § 1, легко найти численные характеристики такой кривой:

$$(E^2) = -1 + n + \sum_{i=1}^{r} s_i^2, \tag{1}$$

$$\pi(E) = \sum_{i=1}^{r} \frac{s_i(s_i-1)}{2}, \tag{2}$$

$$-(KE) = 1 + n + \sum_{i=1}^{r} s_i, \text{ где } n + r > 0,\ n,\ r \geqslant 0. \tag{3}$$

Мы получаем следующие утверждения о неприводимых исключительных кривых 2-го рода.

Теорема 3. *Неприводимая и. к. 2, E является рациональной кривой, $(E^2) \geqslant 0$, причем если $(E^2) = 0$, то E — неособая кривая и $\pi(E) = 0$.*

§ 4. Основная теорема

Теперь мы перейдем к доказательству основной теоремы (см. введение к гл. II), а именно докажем, что если некоторый класс B неособых поверхностей не имеет (абсолютно) минимальной модели, то этот класс состоит из линейчатых поверхностей. Прежде всего отсутствие абсолютно минимальной модели означает, что на любой относительно минимальной модели этого класса лежит неприводимая исключительная кривая 2-го рода (теорема 1, § 3), причем $(E^2) \geqslant 0$ (теорема 3, § 3). Мы докажем теперь следующую теорему, из которой, следовательно, будет вытекать основная.

Теорема А. *Если на относительно минимальной поверхности V (т. е. поверхности без и. к. 1) лежит неприводимая и. к. 2 E, то поверхность V линейчатая в случае $(E^2) = 0$ и рациональна в случае $(E^2) > 0$.*

В случае $(E^2) = 0$ кривая E неособа (теорема 3, § 3). Этот случай разбирается просто. Доказательству соответствующей теоремы мы предпошлем лемму, которая часто будет использоваться в дальнейшем.

Лемма. *Если на неособой алгебраической поверхности V лежит неприводимая кривая C, индекс самопересечения которой $(C^2) \geqslant 0$, а $(C \cdot K) < 0$ (где K — канонический дивизор на V), то все кратные роды P_n поверхности V равны* 0.

Доказательство. Предположим, напротив, что некоторое $P_n = l(nK) > 0$. Тогда существует эффективный дивизор D (либо 0), такой, что $nK \sim D$ (~ 0). Но тогда $(D \cdot C) \geqslant 0$. Действительно, если представить D в виде суммы неприводимых кривых $\Sigma n_i C_i$, $n_i > 0$, то $(D \cdot C) = \Sigma n_i (C_i \cdot C)$, причем $(C \cdot C_i) \geqslant 0$, если $C_i \neq C$, и $(C_i \cdot C) \geqslant 0$, если $C_i = C$, поскольку $(C^2) \geqslant 0$. Отсюда $(D \cdot C) \geqslant 0$, что противоречит условию леммы $((D \cdot C) = n(K \cdot C) < 0)$. Итак, все $P_n = 0$.

Следствие. *Если на поверхности V лежит и. к. 2, то все кратные роды равны* 0 *(см. формулу* 3, § 3, *и теорему* 1). Отсюда, на основании результатов главы IV, уже будет следовать, что поверхность V — линейчатая.

Теорема. *Пусть V — неособая алгебраическая поверхность, на которой лежит неособая неприводимая рациональная кривая E, такая, что $(E^2) = 0$. Тогда V бирационально эквивалентна линейчатой поверхности.*

Доказательство. Поскольку $\pi(E) = 0$ и $E^2 = 0$, из формулы $\pi(E) = \frac{(E^2) + (E \cdot K)}{2} + 1$ сразу получаем, что $(E \cdot K) = -2$, т. е. по предшествующей лемме $l(n \cdot K) = 0$, $n > 0$. Применим теорему Римана — Роха к кривой nE:

$$l(n \cdot E) \geqslant \frac{1}{2}((n \cdot E)^2) - \frac{1}{2}(K \cdot (nE)) + 1 + p_a - l(K - nE);$$

поскольку $((nE)^2) = n^2 (E^2) = 0$, $(K \cdot nE) = -2n$ и $l(K - nE) \leqslant l(K)$ $(E > 0)$, получаем неравенство

$$l(nE) \geqslant n + p_a. \tag{1}$$

Из точной последовательности пучков

$$0 \to F((n-1)E) \to F(nE) \to F_E(E \cdot nE) \to 0$$

получаем точную последовательность групп когомологий:

$$0 \to H^0(V, F((n-1)E)) \to H^0(V, F(nE)) \to H^0(E, F_E(E \cdot nE)) \to \ldots \tag{2}$$

Так как $(E \cdot nE) = n(E \cdot E) = 0$, а E — неособая рациональная кривая, $\dim H^0(E, F_E(E \cdot nE)) = l_E(0) = 1$, и из точной последовательности (2)

$$l((n-1)E) \leqslant l(nE) \leqslant l((n-1)E) + 1. \tag{3}$$

Сопоставляя неравенства (1) и (3), мы получаем, что, начиная с некоторого n, $l(nE) = n + C$, где C — некоторая константа, и, следовательно, для достаточно больших n

$$l(nE) = 1 + l((n-1)E). \tag{4}$$

Поскольку кривая E неприводима, равенство (4) означает, что линейная система $|nE|$ при достаточно больших n не имеет неподвижных компонент. В то же время общая кривая этой системы приводима. Действительно, пусть D — общая кривая системы $|nE|$ (n достаточно велико) и P — точка на D. Тогда, как следует из равенства (1), существует кривая $D' \in |nE|$, $D' \neq D$, проходящая через точку P. По условию $(D' \cdot D) = (nE \cdot nE') = 0$, откуда следует, что кривые D и D' должны иметь общую компоненту (проходящую через точку P). Следовательно, по теореме Бертини, система $|nE|$ составлена из некоторого неприводимого пучка кривых; обозначим его через L. Покажем, что сама кривая E является кривой этого пучка. Действительно, число n можно с самого начала выбрать настолько большим, что уже система $|(n-1)E|$ не будет иметь неподвижных компонент. Это значит, что система $|(n-1)E|$ содержит кривую D, такую, что D не имеет E в качестве компоненты. Поэтому система $|nE|$ содержит кривую $D' = D + E$, имеющую E в качестве простой компоненты. Ввиду этого кривая E должна являться кривой того неприводимого пучка, из которой составлена система $|nE|$. Таким образом, мы нашли на поверхности V пучок L, членом которого является неприводимая неособая рациональная кривая E. Отсюда, по теореме Нетера (§ 2, гл. I), поверхность V линейчатая. Вторая часть теоремы А доказывается сложнее.

Доказательство будет следовать из теоремы Кастельнуово, утверждающей, что если неособая поверхность V такова, что $P_2 = 0$, $p_a = 1$, то поверхность V — рациональна (гл. III).

Род P_2 нашей поверхности V, на которой лежит неприводимая и. к. 2 E с $(E^2) > 0$, равен 0 по следствию к лемме 1.

Докажем, что $p_a(V) = 1$. Прежде всего, поскольку геометрический род $P_1 = 0$, достаточно доказать, что иррегулярность q поверхности V равна 0, ибо $p_a = p - q + 1$. Иррегулярность поверхности есть размерность ее многообразия Альбанезе A. Рассмотрим каноническое отображение $\alpha_V \colon V \to A$, и пусть $V' = \alpha_V(V)$. Поскольку V — неособая поверхность, отображение f регулярно на V. Образ $\alpha(E)$ и. к. 2 E будет точкой, ибо в противном случае на A существовала бы рациональная кривая $\alpha(E)$ (поскольку E — рациональна), что невозможно. Отсюда, в частности, следует, что любая эффективная кривая $U \sim mE$, где $m > 0$, переводится при отображении α_V в точку $P = \alpha(E) \in A$.

Действительно, $\alpha(U)$ будет некоторой эффективной кривой на A, причем $\alpha(U) \approx \alpha(mE) \approx 0$. Это означает, конечно, что $\alpha(U) = Q \in A$. С другой стороны, поскольку $(U \cdot E) = m(E^2) > 0$, т. е., поскольку кривые U и E пересекаются, $Q = P$. Отсюда мы сразу получаем, что $\alpha_V(V) = P$, ибо, если m достаточно велико, линейная система $|mE|$ имеет положительную размерность (поскольку $(E^2) > 0$, это сразу следует из теоремы Римана — Роха), и, следовательно, через каждую точку поверхности V проходит эффективная кривая $U \sim mE$. Так как $\alpha(V)$ порождает A, $\dim A = 0$ и наше утверждение доказано.

Глава III

КРИТЕРИЙ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

§ 1. Присоединенные системы

Рассмотрим некоторую линейную систему $|D|$ кривых на поверхности V, соответствующую линейному пространству функций $\mathcal{L}(D)$. Эта система состоит из (эффективных) кривых C, таких, что $D \sim C > 0$. Присоединенной к $|D|$ системой называется система $|D+K|$, где K — канонический дивизор на F. Систему $|D+K|$ мы будем называть также первой присоединенной системой к системе $|D|$, наряду с ней мы будем рассматривать 2-ю, 3-ю и т. д. присоединенные системы; n-й присоединенной системой мы назовем систему $|D+nK|$. Мы выведем сейчас некоторые условия, обеспечивающие пустоту n-й присоединенной системы данной системы $|D|$ для больших n.

Обозначим через K_a антиканонический дивизор на V, т. е. дивизор $-K$. Линейную систему $|K_a|=|-K|$ будем называть антиканонической системой на V. Будем говорить, что линейная система $\mathcal{L}$ существует, если найдется дивизор $D>0$, $D \in \mathcal{L}$.

Лемма 1. *Если антиканоническая система на V существует, то для любого дивизора D на V n-я присоединенная система $|D+nK|$ не существует для достаточно большого n.*

Действительно, существование антиканонической системы означает, что существует дивизор $Z \sim -K$, $Z>0$.

Пусть H — гиперплоское сечение поверхности F. Тогда $(H\cdot K) = -(H\cdot Z) = r < 0$. Обозначим $(H\cdot D) = s$. Тогда $((D+nK)\cdot H) = s + nr < 0$, если $n > -\frac{s}{r}$. Поэтому, очевидно, дивизор $D+nK$ не может быть линейно эквивалентен никакому эффективному дивизору, т. е. система $|D+nK|$ не существует.

Лемма 2. *Пусть V — поверхность, на которой не существует исключительных кривых 1-го рода, и пусть на V существует эффективная кривая $\mathscr{E}$ такая, что $(\mathscr{E}\cdot K)<0$. Тогда для любого дивизора D на V n-я присоединенная система $|D+nK|$ не существует для достаточно большого n.*

Пусть $\mathscr{E} = \Sigma n_i C_i$, где C_i — неприводимые кривые и $n_i>0$. Тогда, так как $(\mathscr{E}\cdot K)<0$, найдется кривая C_i, такая, что $(C_i\cdot K) = -r < 0$.

Из формулы для арифметического рода

$$\pi(C_i) = \frac{(C_i^2)+(C_i\cdot K)}{2} + 1$$

следует, что, поскольку $\pi(C_i) \geqslant 0$, существует две возможности:

а) $\pi(C_i) = 0$, $(C_i^2) = (C_i\cdot K) = -1$,

б) $\pi(C_i) \geqslant 0$, $(C_i^2) \geqslant 0$.

Случай а) невозможен, поскольку мы предположим, что на поверхности V нет и. к. 1.

Рассмотрим индекс пересечения $((D+nK)\cdot C_i)$. Поскольку $(K\cdot C_i) = r<0$, $((D+nK)\cdot C_i) < 0$, если n достаточно велико. Поэтому не может существовать эффективная кривая $C \sim D+nK$, ибо $(C\cdot C_i) \geqslant 0$ (ввиду того, что $(C_i^2) \geqslant 0$).

Следствие 1. *Пусть $(K^2)<0$. Тогда для любого дивизора D найдется такое n, что система $|D+nK|$ не существует.*

Доказательство от противного. Пусть система $|D+nK|$ существует для любого n. Эта система не может состоять лишь из 0 для больших n, ибо, в противном случае, $D+nK \sim 0$, т. е. $(D^2) = n^2(K^2)$ для больших n, что невозможно в случае $n^2 > \frac{(D^2)}{(K^2)}$. Итак, для любого достаточно большого числа n существует эффективная кривая $\mathscr{E} \sim D+nK$. Очевидно, что $(\mathscr{E}\cdot K) = ((D+nK)\cdot K) < 0$, если n достаточно велико. Поэтому в силу леммы 2 система $|D+nK|$ не существует.

Лемма 3. *Пусть кривая $D>0$ на поверхности V такова, что присоединенной системы $|D+K|$ не существует. Тогда $\pi(D) \leqslant 1 - p_a(V)$.*

Действительно, несуществование системы $|K+D|$ означает, что $l(K+D) = \dim \mathcal{L}(K+D) = 0$. Применяя теорему Римана — Роха к дивизору $-D>0$, получаем:

$$0 = l(-D) \geqslant \frac{1}{2}(D^2) + \frac{1}{2}(D\cdot K) + p_a(V) - l(K+D). \qquad (1)$$

Из (1) следует:

$$\pi(D) = \frac{(D^2)+(D\cdot K)}{2} + 1 \leqslant 1 - p_a(V),$$

поскольку $l(K+D) = 0$.

Следствие 2. *Если C — неприводимая кривая на поверхности V с $p_a(V) = 1$ и система $|K+C|$ не существует, $\pi(C) = 0$.*

Действительно, в этом случае $\pi(C) \leqslant 0$. Так как кривая C неприводима, $\pi(C) \geqslant 0$, т. е. $\pi(C) = 0$.

§ 2. Теорема Кастельнуово

Теорема Кастельнуово заключается в следующем: всякая неособая поверхность с $p_a(V) = -1$, $P_2(V) = 0$ бирационально эквивалентна рациональной поверхности. Поскольку p_a и P_2 являются бирациональными инвариантами, мы с самого начала можем предполагать, что наша поверхность V является относительно минимальной, т. е. на ней не существует и. к. 1, т. е. неприводимых кривых X, таких, что

$$(X^2) = -1, \quad \pi(X) = 0.$$

По лемме Нетера, для доказательства этой теоремы достаточно найти на поверхности V линейный пучок L кривых, общим членом которого будет (неприводимая) кривая арифметического рода 0, т. е. неприводимая рациональная неособая кривая.

Пусть на поверхности V лежит неприводимая кривая C, такая, что $\pi(C) = 0$, $(C^2) \geqslant 0$. Тогда, используя теорему Римана — Роха, мы получаем $l(C) \geqslant (C^2) - \pi(C) + 2 = (C^2) + 2 \geqslant 2$, поскольку $p_a(V) = 1$, $l(K-C) < l(K) = P_1 = 0$. Таким образом, на поверхности V нашлась кривая C, такая, что: 1) $\pi(C) = 0$, 2) $l(C) \geqslant 2$.

Второе условие гарантирует существование линейного пучка кривых на V, членом которого является кривая C. Действительно, существует $f \in \mathcal{L}(C)$, $f \neq 0$, поскольку $l(C) = \dim \mathcal{L}(C) > 1$. Рассмотрим отображение поверхности V на проективную прямую P', задаваемое функцией f. Тем самым мы определим линейный пучок кривых L на V, членом которого будет кривая C. Общий член этого пучка кривая $C_\lambda = f^{-1}(\lambda) = (f-\lambda)_0$, где λ — общая точка прямой P', будет, очевидно, неприводимой кривой (поскольку кривая C неприводима), и $\pi(C_\lambda) = 0$, поскольку $C_\lambda \sim C$, и, следовательно, $\pi(C_\lambda) = \pi(C)$. Поэтому, по теореме Нетера, поверхность F рациональна.

Итак, для доказательства теоремы нам достаточно найти на поверхности V неприводимую кривую C, удовлетворяющую условиям $\pi(C) = 0$, $(C^2) \geqslant 0$.

Нам придется рассмотреть три случая: 1) $(K^2) = 0$, 2) $(K^2) < 0$, 3) $(K^2) > 0$.

1) $(K^2) = 0$.

По теореме Римана — Роха в этом случае $l(-K) \geqslant 1$. Если $D \in |-K|$, то $D \neq 0$, поскольку в противном случае

$$P_2 = l(2K) = l(0) = 1.$$

Таким образом, антиканоническая система существует. Пусть E — достаточно высокая кратность гиперплоского сечения поверхности V. Тогда $l(E+K) > 1$, а по лемме 1 о присоединенных системах: $l(E+rK) = 0$ для достаточно большого $r > 0$. Таким образом, найдется число $n \geqslant 1$, такое, что

$$l(E + nK) \geqslant 1,$$

$$l(E + (n+1)K) = 0.$$

Пусть $D' \in |E + nK|$, $D' = \Sigma a_i C_i$, где C_i — неприводимые кривые, $a_i > 0$. Индекс пересечения $(K \cdot D') = (K \cdot (E + nK)) = (K \cdot E) + (nK^2) = -(E \cdot D) < 0$, откуда следует, что по крайней мере для одной кривой C_i индекс пересечения $(K \cdot C_i) < 0$.

Поскольку $C_i \leqslant D'$,

$$l(K + C_i) \leqslant l(K + D') = l(E + (n+1)K) = 0,$$

откуда, по лемме 3 о присоединенных системах, $\pi(C_i) = 0$. Таким образом, мы нашли на поверхности неприводимую кривую C_i, такую, что

$$(K \cdot C_i) < 0, \quad \pi(C_i) = 0.$$

По формуле для арифметического рода $\pi(C_i) = \dfrac{(C_i^2) + (K \cdot C_i)}{2} + 1$ мы получаем, что $(C_i^2) \geqslant -1$. Так как случай $(C_i^2) = -1$ невозможен (мы предположили с самого начала, что на F отсутствуют и. к. 1), то $(C_i^2) \geqslant 0$ что и требовалось доказать.

2) $(K^2) < 0$.

Пусть E — некоторая кратность гиперплоского сечения поверхности V, причем $l(E+K) > 2$. По следствию леммы 2 о присоединенных системах, система $|E + sK|$ не существует для достаточно больших s. Найдется, следовательно, такое число $n > 0$, что

$$l(E + nK) \geqslant 2,$$

$$l(E + (n+1)K) \leqslant 1.$$

Из первого неравенства следует, что на поверхности F существует линейный пучок L кривых. Общий элемент D этого пучка представляется в виде $D = A + \Sigma C_i$, где A — неподвижная кривая пучка, C_i — неприводимые кривые с $(C_i^2) \geqslant 0$, причем существует по крайней мере одна кривая C_i. По теореме Римана — Роха

$$\pi(C_i) \leqslant l(K + C_i) \leqslant l(K + D) \leqslant 1.$$

Если $\pi(C_i) = 0$, то теорема доказана (поскольку $(C_i^2) \geqslant 0$).

Предположим, что $\pi(C_i) = 1$, откуда следует, что $l(K + C_i) = 1$, и пусть $0 < D \in |K + C_i|$. Дивизор $D \neq 0$, ибо в противном случае $K \sim -C_i$ и $(K^2) = (C_i^2) \geqslant 0$, что противоречит нашему предположению $((K^2) < 0)$. Итак, мы нашли дивизор $D > 0$, $D \sim K + C_i$. Поскольку $\pi(C_i) = 1$, $(K \cdot C_i) = -(C_i^2) \leqslant 0$ и $(D \cdot K) = ((K + C_i) \cdot K) = (K^2) + (K \cdot C_i) < 0$. Это означает, что по крайней мере одна из неприводимых компонент D, кривая G, имеет отрицательный индекс пересечения с K: $(G \cdot K) < 0$. В то же время $(G \cdot C_i) = 0$, поскольку

$$(D \cdot C_i) = ((K + C_i) \cdot C_i) = 0 \text{ и } (C_i) \geqslant 0.$$

Таким образом, мы нашли неприводимую кривую G такую, что $(G \cdot K) < 0$ и $(G^2) < 0$ (так как $(G \cdot D) = (G \cdot (K + C_i)) < 0$). Это возможно лишь в случае, когда $(G \cdot K) = -1$, $(G^2) = -1$ и $\pi(G) = 0$, т. е. в случае существования и. к. 1 на V. Поэтому случай $\pi(C_i) = 1$ невозможен, и теорема доказана.

3) $(K^2) > 0$.

По теореме Римана — Роха $l(-K) \geqslant 2$, т. е. существует пучок L кривых D, $D \sim -K$, $D = A + \Sigma C_i$, где A — неподвижная компонента пучка L, а $(C_i^2) \geqslant 0$.

Если D — приводимая кривая, то $D - C_i > 0$ и $\pi(C_i) \leqslant l(K + C_i) \leqslant l(C_i - D) = 0$, что и требовалось доказать. Пусть D — неприводимая кривая, т. е. $D = C_i$, $D^2 \geqslant 0$. Тогда, поскольку $D \sim -K$, $\pi(D) = 1$, а по лемме 1 о присоединенных системах для любого гиперплоского сечения E, соответствующего некоторому вложению V в проективное пространство, найдется число n_E, такое, что

$$l(E + n_E K) \geqslant 1,$$

$$l(E + (n_E + 1)K) = 0.$$

Пусть $G \in |E + n_E K|$. Предположим сначала, что $G \neq 0$. Тогда $(G \cdot K) \leqslant 0$, поскольку $K \sim -D$ и $(D^2) = (K^2) > 0$. Поэтому найдется неприводимая компонента C кривой G, такая, что $(C \cdot K) \leqslant 0$.

Так как $\pi(C) \leqslant l(K + C) \leqslant l(K + G) = 0$, $(C^2) + (K \cdot C) = -2$, и либо $(C \cdot K) < 0$ и $(C^2) \geqslant 0$, т. е. C — искомая кривая, либо $(K \cdot C) = 0$, $(C^2) = -2$.

Во втором случае, по теореме Римана — Роха

$$l(D - C) = l(-K - C) \geqslant \frac{(D^2)}{2} - l(2K + C),$$

и, поскольку $l(2K + C) \leqslant l(K + C) = 0$,

$$l(D - C) \geqslant 1.$$

Поэтому существует кривая $H \in |D - C|$; так как $C \nsim D$, $((C^2) = -2$, $(D^2) > 0)$, то $H > 0$. Поскольку $(H \cdot K) = -(C \cdot K) - (K^2) < 0$, найдется неприводимая компонента H_0 кривой H, такая, что $(H_0 \cdot K) < 0$. Вследствие того, что $\pi(H_0) \leqslant l(K + H_0) \leqslant l(H + K) = l(-C) = 0$, $(H_0^2) = -1$, и так как случай $(H_0^2) = -1$ невозможен, кривая H_0 и будет искомой кривой.

Осталось разобрать случай, когда для любого гиперплоского сечения E поверхности V дивизор $G \in |E + n_E K|$ будет нулевым. Мы покажем, что это предположение приводит к противоречию. Действительно, это означает, что любое гиперплоское сечение $E \sim n_E K$, а, поскольку каждый дивизор D поверхности V может быть представлен в виде разности $D = E_1 - E_2$, где E_1 и E_2 — гиперплоские сечения V, соответствующие двум (различным) погружениям V в проективное пространство [24], группа классов дивизоров V изоморфна группе целых чисел Z, и дивизор (кривая) D является образующей этой группы. Поскольку, далее, $h^{2,0} = h^{0,2} = p = 0$, эта группа изоморфна группе $H^2(V, Z)$ и кривая D, как образующая этой группы, имеет индекс самопересечения ± 1. С другой стороны, по формуле Нетера — Энриквеса,

$$\frac{(K^2)+\chi}{12} = 1 + p_g - q, \text{ т. е. } (K^2) = 9,$$

поскольку $p_g = q = 0$ и $\chi = 2 - 4q + b_2 = 3$. Это противоречие и завершает доказательство теоремы. Очевидно, что все приведенное доказательство (принадлежащее Кодаире [48]) проходит для случая, когда основное поле — алгебраически замкнутое характеристики 0, за исключением последнего рассуждения. Существует доказательство Зариского теоремы Кастельнуово для случая алгебраически замкнутого основного поля характеристики $p > 0$ [18—20].

Обратная теорема, заключающаяся в том, что если поверхность V рациональна, то $p_a(V) = 1$, $P_2(V) = 0$, очевидна. Действительно, на проективной плоскости P^2 канонический дивизор $K = -3E$, где E — прямая на P^2, поэтому $P_n(P^2) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Точно так же $q(P^2) = 0$, а поэтому $p_a(P^2) = p(P^2) - q(P^2) + 1 = 1$. Отсюда следует, что, поскольку числа P_2 и p_a — бирациональные инварианты, $p_a(V) = 1$, $P_2(V) = 0$ для любой рациональной поверхности V. Таким образом, теорема Кастельнуово дает критерий рациональности алгебраической поверхности.

Теорема Кастельнуово дает решение проблемы Люрота для полей алгебраических функций степени трансцендентности 2 над основным полем. Проблема заключается в следующем: пусть K — поле, изоморфное полю рациональных функций от двух независимых переменных, и пусть K' — подполе поля K конечного индекса:

$$K' < K, \quad [K : K'] < \infty.$$

Будет ли поле K' изоморфно полю рациональных функций от двух независимых переменных?

Теорема Кастельнуово позволяет положительно ответить на этот вопрос. Действительно, поле K является полем алгебраических функций на рациональной поверхности V; поле K' — полем алгебраических функций на некоторой поверхности V'. Вложению $K' \subset K$ соответствует рациональное отображение $T\colon V \to V'$. Поскольку $P_2(V) \geqslant P_2(V')$, $q(V) \geqslant q(V')$ (см. введение) и V — рациональная поверхность, $P_2(V') = q(V') = 0$, откуда, по теореме Кастельнуово, поверхность V' — рациональна и, следовательно, поле K' изоморфно полю рациональных функций от двух переменных.

Многообразие V', такое, что существует рациональное отображение T рационального многообразия V на V', называется унирациональным. Полученный результат можно формулировать следующим образом: всякая унирациональная поверхность рациональна. Неизвестно, верно ли аналогичное утверждение для многообразий размерности, большей двух. Построенные в [63] примеры унирациональных многообразий не решают вопроса, так как доказательства того, что эти многообразия нерациональны, неубедительны (см. [64]).

Заметим также, что существуют примеры поверхностей V с $p_a(V) = 1$, $p(V) = 0$, $P_2(V) \neq 0$ (и не являющихся, следовательно, рациональными).

Эти поверхности построены Энриквесом (см. гл. X). С другой стороны, Севери поставил вопрос, не будут ли рациональные поверхности характеризоваться условиями $p(V) = 0$, $H_1(V, \mathbf{Z}) = 0$ (напомним, что условие $H_1(V, \mathbf{Z}) = 0$ распадается на два: $q = 0$, что дает вместе с $p = 0$, что $p_a = 1$, и $\operatorname{Tor} H_1(V, \mathbf{Z}) = 0$). Ответ на этот вопрос неизвестен.

Заметим, что проблема Люрота для полей степени трансцендентности 2 решается отрицательно, если основное поле k не алгебраически замкнуто. Соответствующие примеры имеются для случая, когда k — поле вещественных чисел [62] или конечное поле [61].

Глава IV

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В этой главе будут исследованы линейчатые поверхности и будет доказано, в частности, что они характеризуются условием $P_{12} = 0$. Если они нерациональные, то $q > 0$. Будет доказано, что если $q > 1$, то уже условие $p = 0$ достаточно для того, чтобы поверхность была линейчатой. При $q = 1$ этого условия недостаточно. Все поверхности с $p = 0$, $q = 1$ будут найдены и будет проверено, что те среди них, у которых $P_{12} = 0$, линейчаты. Таким образом, в этой главе будет дана классификация поверхностей более общего вида, чем линейчатые нерациональные поверхности — всех поверхностей с $p = 0$, $q > 0$. Мы будем предполагать, что основное поле k является полем комплексных чисел. Тем не менее почти все рассуждения проходят в случае, когда k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Мы специально отмечаем те места, в которых предположение $k = C$ существенно.

§ 1. Простейшие свойства

Определение. *Поверхность V называется линейчатой, если она бирационально эквивалентна прямому произведению алгебраической кривой на проективную прямую.*

Теорема 1. *Если поверхность V линейчатая:*

$$V = B \times P^1,$$

где B — алгебраическая кривая, то $P_n(V) = 0$, $n \geqslant 1$ и иррегулярность q поверхности V совпадает с (геометрическим) родом кривой B.

Доказательство. Ввиду бирациональной инвариантности чисел P_n и q мы можем предполагать, что

$$V = B \times P^1, \tag{1}$$

где B — неособая кривая. Пусть вообще $X = B \times C$, где B и C — неособые кривые, а α и β — одномерные дифференциальные формы на B и C соответственно, (α) и (β) — их дивизоры. Если π_1 и π_2 — проекции V на B и C, то форма

$$\omega = \pi_1^*(\alpha) \wedge \pi_2^*(\beta)$$

является двумерной дифференциальной формой на V. Очевидно, что

$$(\pi_1^*(\alpha)) = \pi_1^{-1}((\alpha)) = (\alpha) \times C,$$

$$(\pi_2^*(\beta)) = \pi_2^{-1}((\beta)) = B \times (\beta),$$

$$K(B \times C) = K(B) \times C + B \times K(C), \tag{2}$$

$$(\omega) = (\alpha) \times C + B \times (\beta). \tag{3}$$

Отсюда следует, что, если $V = B \times P^1$, то

$$K \cdot (b \times P^1) = -2\,((B \times a) \cdot (b \times P^1)) = -2 < 0, \quad b \in B, \ a \in P^1$$

и, следовательно, $(nK \cdot (b \times P')) < 0$ для любого $n > 0$. Если бы хоть для одного $n > 0$ мы имели $P_n > 0$, то существовал бы дивизор D, $D > 0$, $D \sim nK$. Тогда должно было бы быть $(D \cdot (b \times P^1)) < 0$. Но это невозможно: если $D = \Sigma\, n_i c_i + \Sigma\, m_j (b_j \times P^1)$, то $(D \cdot (b \times P')) = \Sigma\, n_i (C_i \cdot (b \times P^1)) \geqslant 0$.

Для доказательства утверждения, касающегося иррегулярности, воспользуемся тем, что для любых многообразий B и C многообразие Альбанезе обладает свойством

$$A(B \times C) = A(B) \times A(C).$$

В частности, из (1) мы получаем

$$A(V) = A(B) \times A(P^1) = A(B),$$

а так как

$$q = \dim A(V), \quad g = \dim A(B),$$

где g — род кривой B, то это и доказывает наше утверждение.

Основная задача этой главы заключается в доказательстве обратного утверждения в его более точной форме: поверхность является линейчатой, если $P_{12} = 0$. При этом мы будем исходить из теоремы Нетера (гл. I, § 3). Переформулируем эту теорему геометрически: вложению $K_1 = k(B) \to K = k(V)$ соответствует рациональное отображение

$$\pi\colon \ V \to B,$$

причем, если ξ — общая точка кривой B, то поле K/K_1 является полем функций на кривой $\pi^{-1}(\xi)$. Таким образом, теореме Нетера можно придать следующую формулировку:

Теорема 2. *Если существует такое рациональное отображение*

$$\pi\colon V \to B$$

поверхности V на кривую B, что прообраз $\pi^{-1}(\xi)$ общей точки ξ кривой B является неприводимой кривой рода 0, то V — линейчатая поверхность.

Мы будем пользоваться этой теоремой в частном случае, когда π — регулярное отображение. Тогда оно определяет расслоение V на непересекающиеся слои $F_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in B$. Мы будем часто называть π расслоением, а F_b — его слоями. Способ конструкции такого расслоения основывается на рассмотрении отображения Альбанезе.

§ 2. Отображение Альбанезе при $p = 0$, $q > 0$

Теорема 3. *Если $\alpha_V\colon V \to A(V)$ — отображение Альбанезе поверхности X, для которой $p = 0$, $q > 0$, то: 1) $\alpha_V(V)$ является алгебраической кривой, 2) кривая $\alpha_V(V)$ — неособая и 3) род кривой $\alpha_V(V)$ равен q.*

Доказательство 1). Так как многообразие $\alpha_V(V)$ порождает все $A(V)$, а $\dim A(V) = q > 0$, то и $\dim \alpha_V(V) > 0$, т. е. $\dim \alpha_V(V) = 1$ или 2.

Докажем, что $\dim \alpha_V(V) \neq 2$. Предположим, что $\dim \alpha_V(V) = 2$, и пусть a — неособая точка поверхности $\alpha_V(V)$. Так как отображение α_X определено с точностью до сдвига многообразия $A(V)$, то мы можем считать, что $a = 0$. Пусть σ — бивектор, соответствующий в касательном пространстве к $A(V)$ в точке 0 плоскости, касательной к $\alpha_V(V)$ в этой точке, а s — такой двумерный элемент грасмановой алгебры, то $(s, \sigma) \neq 0$. Инвариантную дифференциальную форму, соответствующую s, обозначим через ω. Очевидно, что ω — дифференциал 1-го рода на $A(V)$. Из условия $(s, \sigma) \neq 0$ следует, что ω не равен тождественно нулю в точке 0. Отсюда следует, что дифференциал 1-го рода $\alpha_X^*(\omega)$ на V не обращается тождественно в 0, а это противоречит условию $p = 0$.

Доказательство 2). Положим $\alpha_V(V) = B$. Пусть $B_{\text{н}}$ — нормализация B и N: $B_{\text{н}} \to B$ — каноническое отображение. Так как N является бирациональной эквивалентностью, то существует рациональное отображение ν: $B \to B_{\text{н}}$, $\nu = N^{-1}$. Пусть $\varphi = \nu\cdot\alpha$, φ: $V \to B_{\text{н}}$. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[r, "\alpha(\varphi)"] & A(B_{\text{н}}) \\ B \arrow[u, "\psi_2"] & B_{\text{н}}. \arrow[l, "N"'] \arrow[u, "\psi_1"'] \end{tikzcd} \tag{4}$$

Здесь ψ_2 — вложение B в $A(V)$. Так как (геометрический) род кривой B, а значит и $B_{\text{н}}$ отличен от 0 (см. [31], гл. II), то каноническое отображение ψ_1 кривой $B_{\text{н}}$ в $A(B_{\text{н}})$ тоже является вложением, которое мы можем считать единичным отображением. Отображение $\alpha(\varphi)$ регулярно, а следовательно, регулярно и отображение N': $B \to B_{\text{н}}$; $N' = (\alpha(\varphi)|_B)\cdot\psi_2$. Из диаграммы (4) следует, что $NN' = 1$, $N'N = 1$, т. е. N — бирегулярная эквивалентность B и $B_{\text{н}}$ и значит $B = B_{\text{н}}$ не имеет особых точек.

Доказательство 3). Так как $B = B_{\text{н}}$, то (4) сводится к схеме

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[rr, "\alpha(\varphi)"] & & A(B) \\ & B \arrow[ul, "\psi_2"] \arrow[ur, "\psi_1"'] & \end{tikzcd}$$

Согласно свойству универсальности многообразия Альбанезе существует отображение η: $A(B) \to A(V)$, делающее коммутативной схему

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[rr, shift left] & & A(B) \arrow[ll, shift left, "\eta"'] \\ & B \arrow[ul, "\psi_2"] \arrow[ur, "\psi_1"'] & \end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что $\psi_2 = \eta\psi_1$ и $\psi_1 = \alpha(\varphi)\psi_2$, т. е.

$$\psi_1 = \alpha(\varphi)\eta\psi_1,\quad \psi_2 = \eta\alpha(\varphi)\psi_2.$$

Так как $\operatorname{Im}\psi_1$ и $\operatorname{Im}\psi_2$ порождают $A(B)$ и $A(V)$, то отсюда следует, что $\alpha(\varphi)\eta = 1$, $\eta\alpha(\varphi) = 1$, т. е. что $A(V)$ изоморфно $A(B)$. Это доказывает 3) и теорему 3.

Мы обозначим α_V через π и получим регулярное отображение (или расслоение)

$$\pi:\ V \to B$$

на неособую кривую B рода q.

Теорема 4. *Общий слой расслоения π неприводим.*

Доказательство. Мы видели, что утверждение теоремы 4 равносильно тому, что поле $k(B)$ алгебраически замкнуто в поле $k(V)$. Если это не так, то пусть K' — алгебраическое замыкание $k(B)$ в $k(V)$ и B' — неособая модель поля K'. Вложение $k(B') = K' \subset k(V)$ определяет рациональное отображение $V \to B'$ и значит эпиморфизм $A(V) \to A(B')$. Отсюда следует, что род g кривой B' не меньше, чем q. Но B' является накрытием B (так как $k(B) \subset k(B')$) и, следовательно, $g \geqslant q$. Мы видим, что $g = q$. Согласно формуле Гурвица для рода накрытия, равенство $g = q$

возможно только при $g = q = 1$. Таким образом, $A(V) = B$, $A(B') = B'$ и мы имеем отображения

$$A(V) \xrightarrow{\varphi} B',\quad B' \xrightarrow{\psi} B,\quad \psi\varphi = \alpha_V.$$

Согласно свойству универсальности многообразия Альбанезе существует отображение χ: $B \to B'$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[rr, "\alpha_V"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \arrow[dl, "\chi"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

Отсюда, как при доказательстве теоремы 3, легко получается, что χ и ψ являются изоморфизмами, т. е. что $B' = B$ и $K' = k(B)$. Теорема доказана.

§ 3. Случай $q > 1$

Мы будем все время предполагать в этом параграфе, что для поверхности V

$$p = 0,\quad q > 1. \tag{5}$$

Лемма 1. *Для поверхности, удовлетворяющей условиям* (5),

$$(K^2) < 0.$$

Действительно, согласно формуле (4) введения

$$\frac{(K^2)+\chi}{12} = 1 - q + p = 1 - q,$$

так что

$$(K^2) = -\chi + 12(1 - q).$$

Так как $\chi = 2 - 4q + b_2$, то

$$(K^2) = -2 + 4q - b_2 + 12(1 - q),$$

$$(K^2) = 8(1 - q) + 2 - b_2.$$

Так как $q \geqslant 2$, $b_2 \geqslant 1$, то отсюда следует, что $(K^2) \leqslant -7$.

Следствие. *Если E — гиперплоское сечение, то $l(E + mK) = 0$ при достаточно больших m. Если $l(E + nK) > 0$, $l(E + mK) = 0$, при $m > n$, то*

$$E + nK \sim D > 0,\quad D \neq 0 \quad и \quad p_a(C) \leqslant q \tag{6}$$

для любого цикла C, для которого $0 < C < D$.

Все утверждения, кроме того что $D \neq 0$, следуют из леммы 3 (§ 1, гл. III). То, что $D \neq 0$ следует из того, что иначе было бы $E \sim -nK$, в то время как $(E^2) > 0$, $(K^2) < 0$.

Лемма 2. *Если C неприводимая кривая на X, π — расслоение, введенное в предшествующем параграфе, и F_b — его слои, то или $C = F_b$ или*

$$p_a(C) \geqslant (C\cdot F)(q - 1) + 1. \tag{7}$$

Доказательство. Если $C \neq F_b$, то отображение $f = \pi/C$ определяет C как накрытие B. Степень этого накрытия равна $C\cdot F$. Действительно, по определению эта степень равна степени дивизора $f^{-1}(b)$. Рассматривая π на V локально как функцию и пользуясь равенством

$$\deg(\pi/C)_0 = ((\pi_0)\cdot C)$$

($(\pi)_0$ и $(\pi/C)_0$ — дивизоры нулей функций π и π/C на V и C соответственно), мы получим, что $\deg f^{-1}(b) = (F_b \cdot C)$. Применяя теперь формулу Гурвица для рода накрытия, мы получим для геометрического рода γ кривой C неравенство $\gamma \geqslant (F \cdot C)(q-1)+1$, а так как $p_a(C) \geqslant \gamma$, то отсюда следует (7).

Лемма 3. *Если род g общего слоя F расслоения π отличен от 0, то* $(F \cdot K) \geqslant 0$.

Действительно, по условию

$$\frac{(F \cdot (F+K))}{2} + 1 \geqslant 1,$$

а так как $(F^2)=0$, то $(F \cdot K) \geqslant 0$.

Следствие. *В тех же предположениях для дивизора D в* (6) $(D \cdot F) \geqslant 3$.

Так как $D \sim E + nK$, *то* $(D \cdot F) = (E \cdot F) + n(K \cdot F) \geqslant (E \cdot F)$. Очевидно, что $(E \cdot F)$ — это степень кривой F. Если бы эта кривая имела степень 1 или 2, то она была бы рациональной, что противоречит условию $g > 0$.

Теорема 5. *Алгебраическая поверхность V с инвариантами $p=0$ и $q>1$ является линейчатой.*

При доказательстве мы можем предполагать, что V является относительно минимальной моделью и, следовательно, не содержит исключительных кривых 1-го рода.

Рассмотрим отображение $\pi\colon V \to B$, построенное в предшествующем параграфе. Оно удовлетворяет всем предположениям теоремы 2 за исключением того, что мы еще не знаем, что род g общего слоя равен 0. Если мы это докажем, то теорема 5 будет следовать из теоремы 2.

Предположим, что $g \geqslant 1$. Пусть дивизор D, существование которого доказано в следствии леммы 1, имеет вид $D = \sum_1^m n_i C_i$, где C_i — различные неприводимые кривые. Согласно следствию леммы 3, $(D \cdot F) \geqslant 3$.

Рассмотрим отдельно три случая, которые вместе покрывают все возможности:

1) хотя бы для одного из C_i, например при $i=1$, $(C_i F) \geqslant 2$,
2) для всех C_i $(C_i F) \leqslant 1$, но $m \geqslant 2$,
3) $D = nC$, $(C \cdot F) = 1$, $n \geqslant 3$.

В случае 1) мы можем вычислить $p_a(C_1)$ разными способами на основании леммы 2 и формулы (6). Мы получаем противоречие:

$$p_a(C_1) \leqslant q, \quad p_a(C_1) \geqslant 2(q-1)+1 = 2q-1.$$

В случае 2) хотя бы для одного из C_i, например при $i=1$, $(C_i F) = 1$, так как $(D \cdot F) > 0$. По условию существует еще кривая C_2. Применим формулу (6) к $C = C_1 + C_2$:

$$p_a(C_1 + C_2) \leqslant q.$$

Так как $p_a(C) = \dfrac{(C \cdot (C+K))}{2} + 1$, то

$$p_a(C_1 + C_2) = p_a(C_1) + p_a(C_2) - 1.$$

Согласно лемме 2,

$$p_a(C_1) \geqslant q,$$

так что

$$p_a(C) \geqslant q + p_a(C_2) + (C_1 C_2) - 1.$$

Если и $(C_2 F) = 1$, то $p_a(C_2) \geqslant q$, и так как $(C_1 C_2) \geqslant 0$, мы получаем противоречие с (6):

$$p_a(C) \geqslant 2q-1.$$

Если же $(C_2 \cdot F) = 0$, то $C_2 = F_b$, $(b \in B)$, $p_a(C_2) \geqslant 1$ и $(C_1 C_2) = (C_1 \cdot F) = 1$, так что мы опять получаем противоречие с (6):

$$p_a(C) \geqslant q+1.$$

В случае 3) мы рассуждаем совершенно аналогично, применяя (6) и лемму 2 к кривой $2C$. Получается, что

$$p_a(2C) \leqslant q, \quad p_a(2C) \geqslant 2q + (C^2) - 1.$$

Мы получим противоречие, если докажем, что $(C^2) \geqslant 0$. Но $(C^2) < 0$ дает $(C \cdot D) < 0$, т. е. $(C \cdot (E + nK)) < 0$, а значит $(C \cdot K) < 0$, так как $(C \cdot E) > 0$. Поэтому $(C^2) + (CK) = 2p_a(C) - 2 < 0$, что возможно, только если $(C^2) = -1$, $p_a(C) = 0$, т. е. если C является исключительной кривой 1-го рода. Так как мы предположили, что таких кривых на V нет, то тем самым теорема доказана.

§ 4. Регулярные отображения алгебраических поверхностей на кривые

Рассмотрим произвольное регулярное отображение $\pi\colon V \to B$ алгебраической поверхности V на неособую алгебраическую кривую B с неприводимым общим слоем F. Пусть q и g — роды B и F. Мы будем предполагать известными следующие свойства таких расслоений (см., например, [25]).

Слой $F_b = \pi^{-1}(b)$ связан для всех $b \in B$. Для всех точек $b \in B$, кроме, быть может, конечного числа F_b, является неприводимой неособой алгебраической кривой рода g. Множество точек $\{b_1, \ldots, b_s\}$, для которых это не имеет места, обозначим через S, а соответствующие слои F_{b_i} будем называть вырожденными или особыми.

Расслоение π, ограниченное на $V - \pi^{-1}(S)$:

$$\pi\colon V - \pi^{-1}(S) \to B - S$$

является (если $k = \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел) локально тривиальным дифференцируемым расслоением.

Через $\chi(L)$ мы будем обозначать эйлерову характеристику топологического пространства L. В частности, если

$$L = F_b = \sum_1^m n_i C_i,\ n_i > 0, \text{ то } \chi(F_b) = \chi(F'),\ F' = \sum_1^m C_i.$$

Теорема 6. *В случае* $k = \mathbf{C}$

$$\chi(V) = \chi(F)\,\chi(B) + \sum_1^s (\chi(F_{b_i}) - \chi(F)). \tag{8}$$

Доказательство (предложено А. Б. Жижченко). Положим $\widetilde{V} = V - \pi^{-1}(S)$. Из точной последовательности когомологий, определенной пространством, замкнутым подпространством и его дополнением, следует, что

$$\chi(V) = \chi(\widetilde{V}) + \chi(\pi^{-1}(B)). \tag{9}$$

Очевидно, что

$$\chi(\pi^{-1}(B)) = \sum_1^s \chi(F_{b_i}). \tag{10}$$

Так как $V \to B - S$ является локально тривиальным расслоением (как расслоение дифференцируемых многообразий), то из спектральной последовательности Лере для этого расслоения вытекает, что

$$\chi(\widetilde{V}) = \chi(F)\,\chi(B - S). \tag{11}$$

Наконец,

$$\chi(B) = \chi(B - S) + s \tag{12}$$

(s — число точек в S), как, например, следует из точной последовательности, аналогично рассмотренной при выводе (9). Сопоставляя (9), (10), (11) и (12), получаем (8).

Лемма 4. *Если C — связная кривая (быть может, приводимая) на поверхности V, то*

$$\chi(C) \geqslant -(C\cdot(C+K)), \tag{13}$$

причем равенство имеет место только в том случае, когда C является неприводимой неособой кривой.

Доказательство. Пусть $C = \Sigma C_i$, $\overline{C}$ — нормализация C, т. е. несвязная сумма нормализаций $\overline{C}_i$ кривых C_i, и

$$\varphi\colon \overline{C} \to C$$

каноническое регулярное отображение. Во всех точках, кроме конечного числа, φ является бирегулярной эквивалентностью. Поэтому обычный способ вычисления эйлеровой характеристики дает

$$\chi(C) = \chi(\overline{C}) - \delta,$$

где

$$\delta = \sum_{c\in C}(\deg(\varphi^{-1}(c)) - 1). \tag{14}$$

Если род кривой $\overline{C}_i$ равен g_i, то

$$\chi(\overline{C}) = \sum \chi(\overline{C}_i) = 2\sum(1 - g_i)$$
$$g_i = p_a(C_i) - \delta_i$$

(ввиду формулы (5) введения).

Таким образом,

$$\chi(C) = 2\sum(1 - p_a(C_i)) + 2\sum\delta_i - \delta =$$
$$= -\sum(C_i\cdot(C_i + K)) + 2\sum\delta_i - \delta.$$

Пусть в точку $c \in C$ при отображении φ переходит n_i точек кривой C_i. Тогда соответствующее слагаемое в формуле (14) равно

$$\Bigl(\sum_1^m n_i\Bigr) - 1 = \sum_1^l (n_i - 1) + l - 1,$$

если $n_i > 1$ для $i = 1, \ldots, l$ и $n_i = 1$ для $i = l + 1, \ldots, m$. При этом слагаемое, соответствующее точке c в выражении для δ_i, не меньше, чем $n_i - 1$, а число $l - 1$ — не меньше, чем кратность точки c в дивизоре $\sum_{i<j}(C_iC_j)$. Отсюда вытекает, что

$$\delta \leqslant \sum_i \delta_i + \sum_{i<j}(C_i\cdot C_j). \tag{15}$$

Тем более

$$2\delta_i - \delta \geqslant -2\sum_{i<j}(C_i\cdot C_j), \tag{16}$$

так что

$$\chi(C) \geqslant -\sum(C_i(C_i + K)) - 2\sum_{i<j}(C_i\cdot C_j) =$$
$$= -((\sum C_i)\cdot(\sum C_i + K)) = -(C\cdot(C + K)).$$

Ввиду (16) в (13) имеет место знак равенства, только если все $\delta_i = 0$ и $(C_i\cdot C_j) = 0$, при $i \neq j$. Первое означает, что кривые не особые, а второе — что они друг с другом не пересекаются. Так как мы предполагаем кривую связной, то это значит, что она состоит из одной компоненты. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если слой F_b отображения π имеет вид Σn_iC_i, то для $C = \Sigma m_iC_i$, $m_i \geqslant 0$, $(C^2) \leqslant 0$.*

Воспользуемся равенством

$$(C\cdot F) = 0, \tag{17}$$

которое очевидно, если взять слой F, отличный от F_b.

Если бы мы имели $(C^2) > 0$, то для гиперплоского сечения E и достаточно большого n

$$l(nC - E) > 0,$$

как непосредственно следует из неравенства Римана — Роха.

Пусть $nC - E \sim D > 0$, т. е.

$$nC \sim E + D.$$

Так как $(D\cdot F) \geqslant 0$, а $(E\cdot F) > 0$, то отсюда мы получаем, что $(C\cdot F) > 0$ в противоречии с (17).

Теорема 7 (полунепрерывность эйлеровой характеристики). *Если F — неособый, а F_0 — особый слой расслоения π и поверхность V является относительно минимальной моделью, то*

$$\chi(F_0) \geqslant \chi(F), \tag{18}$$

причем равенство имеет место только в том случае, когда род F равен 1, а F_0 является неособой кривой рода 1, взятой с некоторой кратностью.

Доказательство. Очевидно, что

$$\chi(F) = 2 - 2g = -(F\cdot(F + K)) = -(F\cdot K),$$

так как $(F^2) = 0$.

Пусть $F_0 = \Sigma n_iC_i$, $n_i \geqslant 1$; положим $F' = \Sigma C_i$.

Из леммы 4 следует, что

$$\chi(F_0) - \chi(F) = \chi(F') - \chi(F) \geqslant -(F'^2) + ((F - F')\cdot K).$$

Согласно лемме 5, $(F'^2) \leqslant 0$. Нам остается доказать, что $(F - F')K \geqslant 0$.

Если бы для некоторого C_i было $(C_i\cdot K) < 0$, мы имели бы

$$(C_i\cdot(C_i + K)) < (C_i^2),$$

а значит

$$2p_a(C_i) - 2 < (C_i^2).$$

Так как $(C_i^2) \leqslant 0$ по лемме 5, то $p_a(C_i) - 1 < 0$, т. е. $p_a(C_i) = 0$, а $-2 < (C_i^2) \leqslant 0$. Для C_i^2 имеется, следовательно, два значения: -1 и 0.

Первый случай обозначал бы, что C_i — исключительная кривая 1-го рода, что противоречит тому, что V — относительно минимальная модель. Пусть $(C_i^2) = 0$. Из условия $(C_iF_0) = 0$ мы получаем:

$$n_i (C_i^2) = -\sum_{j \neq i} n_j (C_iC_j) = 0.$$

Так как $(C_iC_j) \geqslant 0$ при $i \neq j$, то отсюда следует, что $(C_iC_j) = 0$ для всех $i \neq j$, а это противоречит связности слоя F_b, если существует кривая $C_j \neq C_i$. Значит, $F_0 = nC_i$. Неравенство $p_a(F) \geqslant 0$ дает нам вместе с формулой для p_a:

$$0 \leqslant p_a(F) = p_a(nC_i) = np_a(C_i) + (n^2 - n)(C_i^2) + 1 - n = 1 - n,$$

т. е. $0 \leqslant 1 - n$, что возможно только при $n = 1$. Таким образом, все $n_i = 1$. Но в этом случае $F_0 = F'$ и $((F - F')\cdot K) = ((F_0 - F')\cdot K) = 0$. Неравенство (18) доказано.

Выясним теперь, когда в нем может иметь место знак равенства. Тогда все встречавшиеся по дороге неравенства должны быть равенствами. В частности, это относится к неравенству $\chi(F') \geqslant -(F'\cdot(F' + K))$, которое, согласно лемме 4, является равенством только, если $F_0 = nC$, где C — неприводимая неособая кривая, $n \geqslant 2$. Точно так же равенством должно быть и неравенство

$$-(F')^2 + ((F - F')\cdot K) \geqslant 0,$$

которое мы доказали. Так как при этом выяснилось, что слева каждый член неотрицателен, то $((F - F')K) = (n - 1)(C\cdot K) = 0$ и значит $(C\cdot K) = 0$ и $(F\cdot K) = 0$. Из того, что $(F^2) = 0$, следует, ввиду $F_0 = nC$, что $(C^2) = 0$. Значит

$$p_a(F) = \frac{(F^2) + (F\cdot K)}{2} + 1 = 1,$$

$$p_a(C) = \frac{(C^2) + (C\cdot K)}{2} + 1 = 1,$$

что и утверждалось.

§ 5. Случай $q = 1$

Лемма 6. *Для поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$ имеет место неравенство $(K^2) \leqslant 0$.*

Действительно, в этом случае $p_a(V) = 1 - q + p = 0$.

Из формулы (4) введения следует, что $(K^2) + \chi = 12p_a(V) = 0$, т. е.

$$(K^2) = -\chi.$$

Рассмотрим расслоение $\pi: V \to B$, определенное отображением Альбанезе. Из теорем 6 и 7 мы получаем (так как $\chi(B) = 0$), что $\chi \geqslant 0$, а значит $(K^2) \leqslant 0$.

Замечание. Другое доказательство можно получить, исходя из формулы (4) введения, которая в нашем случае дает

$$(K^2) = 2 - b_2.$$

Нам достаточно доказать, что $b_2 \geqslant 2$, и для этого указать на V два независимых класса гомологий. Такими классами являются, например, классы, определенные циклами E (гиперплоское сечение) и F (один из слоев расслоения π). Они независимы, так как $(E^2) > 0$, $(F^2) = 0$. Мы разберем дальше отдельно случаи $(K^2) < 0$ и $(K^2) = 0$.

§ 6. Случай $(K^2) < 0$

Теорема 8. *Поверхность с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, $(K^2) < 0$ является линейчатой.*

Доказательство. Рассмотрим все то же расслоение $\pi: V \to B$, которое теперь совпадает с отображением Альбанезе. Если род g общего слоя F равен 0, то поверхность V линейчатая. Если $g = 1$, то X обладает расслоением на эллиптические кривые. В гл. VII (теорема 3) будет доказано, что у такой поверхности $(K^2) = 0$, что противоречит предположению $(K^2) < 0$. Остается рассмотреть случай $g > 1$.

План доказательства теоремы 8 таков. Для некоторого неразветвленного накрытия C кривой B с проекцией $\varphi: C \to B$ мы рассмотрим обратный образ $V' = V \times_B C$ расслоения π на C, т. е. подмногообразие $C \times V$, состоящее из точек (c, v), для которых $\varphi(c) = \pi(v)$. Проекция $C \times V \to C$ определяет на V проекцию π': $V' \to C$ и расслоение, слои которого изоморфны слоям π. Сама поверхность V' является неразветвленным накрытием V. Мы покажем, предположив, что $g > 1$, что для надлежащим образом подобранного накрытия C поверхность V' будет прямым произведением $C \times F$. Отсюда следует (на основании формулы (2)), что на V' $K' \sim C \times K(F)$, где K' и $K(F)$ — канонические классы X' и F. Поэтому $(K'^2) = 0$. Но если f: $V' \to V$ — неразветвленное накрытие степени n, то, как легко проверить, $K' = f^*(K)$, и поэтому

$$K'\cdot K' = f^*(K) f^*(K) = f^*(K\cdot K)$$

(мы рассматриваем здесь $K'\cdot K'$ и $K\cdot K$ как циклы, а не числа). Поэтому $(K'^2) = n(K^2)$ и значит $(K^2) = 0$ в противоречии с условием теоремы. Это и доказывает теорему 8.

Применяя следствие леммы 1 (в котором, очевидно, можно заменить E на $E + F_b - F_0$), мы получим, что для любой точки $b \in B$ существует такое $n > 0$ и такой дивизор $D_b > 0$, что

$$E + F_b - F_0 + nK \sim D_b, \quad D_b \neq 0, \quad p_a(C) \leqslant 1 \tag{19}$$

для любого цикла C, для которого $0 < C < D_b$. Отсюда следует, что цикл D_b не может содержать в качестве компонента слой F, так как для него $p_a(F_b) = g > 1$. Поэтому любая неприводимая компонента C цикла D_b отображается проекцией π на B и, следовательно, не является рациональной кривой. Значит, для нее $p_a(C) = 1$, она не имеет особых точек и имеет род 1.

Пусть β — общая точка кривой B. Обозначим через C_β некоторую неприводимую (над $k(\beta)$) компоненту цикла D_β. Для любого $b \in B$ мы будем подразумевать под C_b специализацию кривой C_β. Точнее говоря, обозначим через ξ_β общую точку кривой C_β и рассмотрим в $B \times V$ неприводимое подмногообразие Γ с общей точкой (β, ξ_β). Мы положим

$$C_b = pr_V((b \times V)\cdot\Gamma).$$

Цикл C_b состоит из компонент размерности 1. Иначе его носитель совпадал бы с V, т. е. Γ содержал бы компоненту $b \times V$, что противоречит его неприводимости. Пусть $C_\beta = \Sigma C_\beta^{(i)}$ — разложение на абсолютно неприводимые компоненты. Мы определим совершенно аналогично их специализации $C_b^{(i)}$. Мы выберем за C_β компоненты цикла D_β, не определенную над k (иными словами, кривая C_b не остается постоянной при изменении $b \in B$). Чтобы доказать, что такая компонента существует, достаточно доказать, что поле определения цикла D_β трансцендентно над k. Для этого обозначим через β' другую общую точку кривой B, независимую от β, и докажем, что $D_\beta \neq D_{\beta'}$.

Равенство $D_\beta = D_{\beta'}$ влекло бы за собой соотношение $F_\beta \sim F_{\beta'}$. Пусть $(f) = F_\beta - F_{\beta'}$. Функция f является образом некоторой функции g на B: $f : \pi^*(g)$. Действительно, для любой постоянной c мы имеем $((f-c)_0 \cdot F) = 0$. Отсюда следует, что $(f - c)_0$ состоит из слоев расслоения π, т. е. f постоянна по слоям. Это и значит, что $f = \pi^*(g)$. Но тогда, очевидно, $(g) = \beta - \beta'$, а этого не может быть, так как род кривой B равен 1. Поле, определенное кривой $C_\beta^{(i)}$, также трансцендентно над k. Мы обозначим через U неособую модель этого поля. Соответственно кривые $C_b^{(i)}$ мы будем обозначать через $\mathscr{L}_u$, $u \in U$. Они образуют одномерное семейство эллиптических кривых на V.

Пусть $\mathscr{L}$ — кривая $\mathscr{L}_u$ для некоторого фиксированного $u \in U$, причем $\mathscr{L}$ неприводима, не имеет особых точек и $(\mathscr{L} \cdot F) = n$ ($n > 0$, так как $\mathscr{L} \neq F$). Отображение π определяет на кривой $\mathscr{L}$ структуру накрытия кривой B. Так как обе кривые эллиптические, то это накрытие является неразветвленным. Как известно, не существует непрерывных систем неразветвленных накрытий (см. [32]). Если $k = \mathbf{C}$, то это следует из конечности числа накрытий заданной степени). Поэтому на общей кривой $\mathscr{L}_\xi$ (ξ — общая точка U) мы имеем накрытие, изоморфное тому, которое определено на $\mathscr{L}$. Это означает, что существует такой изоморфизм φ: $\mathscr{L} \to \mathscr{L}_\xi$, что для $x \in \mathscr{L}$

$$\varphi(x) = \pi(\varphi(x)).$$

Рассмотрим теперь обратный образ $\mathscr{L} \times_B V$ расслоения π на накрытии $\mathscr{L}$, т. е. подмногообразие $V' \subset \mathscr{L} \times V$, состоящее из пар (y, v), $y \in \mathscr{L}$, $v \in V$, для которых $\pi(y) = \pi(v)$. Проекция $\mathscr{L} \times V \to \mathscr{L}$ определяет на V' расслоение π': $V' \to \mathscr{L}$ с базой $\mathscr{L}$, слои которого изоморфны слоям π. Обозначим через $\mathscr{L}_\xi'$ кривую на V', состоящую из точек (y, v), $v \in \mathscr{L}_\xi$, $x = \varphi(y)$, $y \in \mathscr{L}$, $v \in V$.

Заметим, что отображение φ, возможно, определено над бо́льшим полем, $k(\xi)$. То же относится к кривой $\mathscr{L}_\xi'$. Обозначим через W неособую кривую, поле функций на которой совпадает с полем определения кривой $\mathscr{L}_\xi'$. Кривую, соответствующую общей точке η кривой W, мы будем обозначать через $\mathscr{L}_\eta'$, а ее специализацию для любой точки $w \in W$ через $\mathscr{L}_w'$. Легко проверить, что $(\mathscr{L}_w' \cdot F) = 1$, где F — любой слой расслоения π'.

Для любого неособого слоя F_y, $y \in \mathscr{L}$ расслоения π' отображение

$$\psi(w) = \mathscr{L}_w' \cdot F_y$$

определяет кривую W как накрытие кривой F_y или, иначе говоря, $k(F_y)$ как подполе поля $k(W)$. Как известно, не существует непрерывных систем подполей рода $g > 1$ (см., например, [15]). Отсюда следует, что отношение эквивалентности, определенное на W условием: $w \sim w'$, если $\mathscr{L}_w' \cdot F_y = \mathscr{L}_{w'}' \cdot F_y$, не зависит от выбора слоя F_y. Иначе говоря, если кривые $\mathscr{L}_w'$ и $\mathscr{L}_{w'}'$ пересекаются в одной точке (лежащей на слое F_{y_0}), то они должны иметь бесконечное число точек пересечения (лежащих на всех слоях F_y), т. е. совпадать. Так как W параметризует семейство кривых $\mathscr{L}_w'$, то мы получаем, что $\mathscr{L}_w'$ и $\mathscr{L}_{w'}'$ не пересекаются, если $w' \neq w$.

Поэтому отображение $W \times \mathscr{L} \to V'$, определенное формулой

$$(w, y) \to \mathscr{L}_w' \cdot F_y,\ w \in W,\ y \in \mathscr{L},$$

будет изоморфизмом между $W \times \mathscr{L}$ и V'. Очевидно, что при этом F изоморфно отображается на W. Таким образом, V' изоморфно $F \times \mathscr{L}$. Как мы говорили в начале доказательства, из этого уже следует утверждение теоремы 8.

§ 7. Случай $(K^2) = 0$

Поверхности с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, $(K^2) = 0$ — это единственные поверхности (среди тех, для которых $p = 0$, $q > 0$), которые могут не быть линейчатыми. Ниже будет дана их полная классификация. Основным средством исследования будет отображение Альбанезе π: $V \to B$. Если род g общего слоя расслоения π равен 0, то поверхность является линейчатой. Дальше мы будем рассматривать случай $g > 0$.

Заметим, что для поверхностей рассматриваемого типа $p_a(X) = 1 - q + p = 0$, а так как $(K^2) = 0$, то и $\chi(V) = 0$. Основной результат, который мы получим (теорема 9), будет верен для любых поверхностей, для которых $p_a(V) = \chi(V) = 0$.

Т е о р е м а 9. *Пусть V — такая алгебраическая поверхность, что $p_a(V) = \chi(V) = 0$, а π: $V \to B$ — регулярное отображение V на неособую эллиптическую кривую. Если род g невырожденного слоя F расслоения π больше 1, то существует такое неразветвленное накрытие $\bar{B} \to B$, что обратный образ $\bar{V} = V \times_B \bar{B}$ расслоения π на $\bar{B}$ является прямым произведением: $\bar{V} \simeq \bar{B} \times F$.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 9, докажем несколько вспомогательных предложений о расслоениях поверхностей над кривыми.

Л е м м а 7. *Если π: $V \to B$ — регулярное отображение поверхности V на эллиптическую кривую, общий слой которого неприводим, и если $\chi(V) = 0$, то все слои расслоения π — неособые или, если род общего слоя равен 1, кратные неособой кривой рода 1.*

Лемма непосредственно следует из теорем 6 и 7, так как в (8) $\chi(V) = \chi(B) = 0$ и, значит, $\chi(F_{b_i}) = \chi(F)$.

Приведем несколько полезных понятий, относящихся к расслоениям π: $V \to B$ без вырожденных слоев.

Если f — функция на V, принадлежащая локальному кольцу $\mathfrak{D}_{F_b}$ некоторого слоя F_b, то ее ограничение на слое F_b дает регулярную функцию на F_b. Таким образом, определен гомоморфизм

$$\rho_b\colon\ \mathfrak{D}_{F_b} \to k(F_b).$$

Аналогичным образом любому дивизору D на поверхности можно сопоставить дивизор $D \cdot F_b$ на кривой F_b.

Пересечение $D \cdot F_b$ определено, если дивизор D не содержит F_b в качестве компоненты. Мы доопределим его для всех дивизоров, положив $F_b \cdot F_b = 0$ (не только как число, но и как дивизор). Таким образом, мы получим гомоморфизм группы дивизоров на V на группу дивизоров на F_b. Мы обозначим его также через ρ_b.

Определим, наконец, понятие дифференциала на V над B. Под этим мы будем подразумевать дифференциалы в поле $k(V)/k(B)$. Это поле имеет степень трансцендентности 1, поэтому все его дифференциалы имеют вид gDf, g, $f \in k(V)$, где через Df обозначается полный дифференциал функции f в поле $k(V)/k(B)$. Все дифференциалы на V над B образуют модуль $D_{k(B)}(k(V))$ над $k(V)$. Дивизор дифференциала gDf определяется обычным образом: для любого дивизора C, не совпадающего со слоем расслоения π, мы выбираем такую функцию $T \in k(V)$, что $\nu_C(T) = 1$, записываем gDf в виде $gDf = hDT$ и полагаем $\nu_C(h) = m_C$,

$$(gDf) = \Sigma m_C C.$$

Слои F_b по определению в дивизор (gDf) не входят.

Этим определениям можно придать более геометрический характер, рассмотрев одномерное векторное расслоение Θ на V, слоем которого в точке v является подпространство касательного пространства к точке v, состоящее из векторов, касающихся слоя $F_{\pi(v)}$, который проходит через точку v. Обозначим через ϑ расслоение, дуальное к Θ. Тогда дифференциалы — это рациональные сечения этого одномерного расслоения, а дивизор дифференциала — это дивизор рационального сечения.

Дифференциал на V над B называется регулярным в слое F_b, если он может быть записан в виде gDf, $g, f \in \mathfrak{O}_{F_b}$. Все такие дифференциалы образуют модуль $D_{\mathfrak{O}_b}(\mathfrak{O}_{F_b})$ над кольцом $\mathfrak{O}_{F_b}$. Гомоморфизм ρ_b продолжается до гомоморфизма модулей

$$D_{\mathfrak{O}_b}(\mathfrak{O}_{F_b}) \to D_k(k(F_b)),$$

который мы также будем обозначать через ρ.

Все введенные гомоморфизмы обладают следующими свойствами коммутативности:

$$\rho_b(f) = (\rho_b \cdot f), \quad f \in \mathfrak{O}_{F_b}, \tag{20}$$

$$\rho_b \cdot (gDf) = (\rho_b \cdot gd\rho_b f), \; g, f \in D_{\mathfrak{O}_b}(\mathfrak{O}_{F_b}). \tag{21}$$

Доказательство этих соотношений получается непосредственной проверкой.

Пусть β — общая точка B. Тогда отображение ρ_β является эпиморфизмом и имеет в качестве ядра группу, состоящую из линейных комбинаций слоев.

Эпиморфный характер отображения ρ_β следует из того, что все главные дивизоры поля $k(F_\beta)/k(\beta)$ содержатся в $\operatorname{Im} \rho_\beta$, что о.н.д. $(\rho_\beta(C), \rho_\beta(C')) = \rho_\beta$ (о.н.д. (C, C')) и что все дивизоры могут быть получены как общие наибольшие делители главных.

Так как взаимно простые и не содержащие слоев эффективные дивизоры на V пересекаются с общим слоем во взаимно простых дивизорах, то мы получаем и утверждение о ядре отображения ρ_β.

Из общих этих утверждений следует: если $CF_\beta \sim DF_\beta$ на F_β, то $C \sim D + \Sigma m_i F_{b_i}$ на V, где F_{b_i} — некоторые слои.

Мы переходим теперь к формулировке результата, который лежит в основе доказательства теоремы 9.

Определение. *Дивизор $D = \Sigma n_i C_i$ (C_i — различные между собой неприводимые кривые) называется неразветвленным, если различные кривые C_i не пересекаются и для каждой из них проекция $\pi: C_i \to B$ определяет C_i как неразветвленное накрытие базы B.*

Лемма 8. *Пусть $\pi: V \to B$ — регулярное отображение поверхности V на кривую B, не имеющее вырожденных слоев. Если существует функция $f \in k(V)$, дивизор которой является суммой ненулевого неразветвленного дивизора и некоторой линейной комбинации слоев, то для некоторого неразветвленного накрытия базы $\bar{B} \to B$ расслоение $\bar{V} = V \times_B \bar{B}$ является прямым произведением $\bar{V} \simeq \bar{B} \times F$.*

Доказательство. Пусть

$$(f) = \Sigma n_i C_i - \Sigma n'_j C'_j + \Sigma m_k F_{b_k},$$

где $n_i > 0$, $u'_j > 0$ и $\Sigma n_i C_i - \Sigma n'_j C'_j$ — неразветвленный дивизор. Рассмотрим расслоение L над B, слой которого является аффинной прямой и которое соответствует дивизору $\Sigma m_k b_k$ на B. Дополнив каждый слой L бесконечно удаленной точкой, мы будем рассматривать L как расслоение, слой которого является проективной прямой.

Покажем, что поверхность V можно рассматривать как разветвленную накрывающую поверхности L. Для этого представим себе B покрытым такими открытыми множествами W_i, что $b_i \in W_i$, $b_j \notin W_i$ при $i \neq j$ и существуют такие функции τ_i, что $\tau_i(b_i) = 0$ и $\tau_i - \tau_i(b)$ является локальным параметром в любой точке $b \in W_i$, причем $\tau_i(b) \neq 0$ для $b \in W_i$, $b \neq b_i$. Тогда L можно задать как объединение открытых множеств U_i, причем $U_i \simeq W_i \times P^1$, где P^1 — проективная прямая, и точки U_i и U_j отождествляются по правилу:

$$b \times z \sim b' \times z' \; (b \in W_i, \; b' \in W_j, \; z, z' \in P^1),$$

если

$$b = b' \in W_i \cap W_j; \; z' = z \cdot \frac{\tau_i^{m_i}}{\tau_j^{m_j}}(b). \tag{22}$$

Определим отображение $\varphi_i : \pi^{-1}(W_i) \to U_i$, положив

$$\varphi_i(v) = (\pi(v) \times \rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})(v)), \; v \in \pi^{-1}(W_i).$$

Заметим, что $f\pi^*(\tau_i)^{-m_i} \in O_{F_v}$, для $v \in \pi^{-1}(W_i)$ согласно выбору τ_i, и поэтому функция $\rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})$ определена. Очевидно, что φ_i являются регулярными отображениями.

Докажем, что $\varphi_i = \varphi_j$ на $\pi^{-1}(W_i) \cap \pi^{-1}(W_j)$, и, таким образом, совокупность отображений φ_i определяет единое регулярное отображение φ поверхности V на L. Действительно, если $x \in \pi^{-1}(W_i) \cap \pi^{-1}(W_j)$, то

$$\varphi_j(v) = (\pi(v) \times (\rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_j)^{-m_j}))(v))$$

и

$$\rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_j)^{-m_j})(v) = \rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})(v) \cdot \frac{\tau_i^{m_i}}{\tau_j^{m_j}}(\pi(v))$$

в согласии с формулами (22).

Таким образом, при отображении φ каждый слой F_b отображается на проективную прямую, являющуюся слоем L, причем для $b \in W_i$ отображение осуществляется функцией $\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})$. Заметим, что при этом ни один из слоев F_b не отображается в точку. Другими словами, функция $\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})$ непостоянна на F_b. Это следует из того, что мы можем указать даже ее дивизор — он равен $\Sigma n_i C_i \cdot F_b - \Sigma n'_j C'_j \cdot F_b$ и не равен 0, так как по условию кривые C_i и C'_j не пересекаются. Следовательно, отображение φ определяет на каждом слое отображение накрытия проективной прямой, причем степень этого накрытия для всех слоев одна и та же — она равна $\Sigma n_i (C_i \cdot F) = \Sigma n'_j (C'_j \cdot F)$.

Обозначим через W_b дивизор ветвления того накрытия, которое отображение φ определяет на слое F_b. Так как

$$(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})) = \Sigma n_i \rho_b C_i - \Sigma n'_j \rho_b C'_j,$$

то

$$W_b = (d\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0 + \Sigma (n'_j - 1) \rho_b C'_j,$$

где $(\omega)_0$ означает дивизор нулей дифференциала ω. Согласно (21)

$$(d\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})) = \rho_b(Df),$$

и поэтому $W_b = \rho_b W$, где W — дивизор на V,

$$W = (Df)_0 + \Sigma(n_j' - 1)C_j'.$$

Из определения дивизора (Df) следует, что

$$W = \Sigma(n_i - 1)C_i + \Sigma(n_j' - 1)C_j' + \overline{W},\ \overline{W} > 0.$$

Основой доказательства леммы 8 является то, что, как мы сейчас покажем, дивизор $\overline{W}$ не пересекается с кривыми C_i и C_j'. Действительно, так как $(f_0) = \Sigma n_i C_i + \Sigma l_s F_s$, то ввиду (20)

$$(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0 = \Sigma n_i \rho_b C_i = \Sigma n_i C_i \cdot F_b.$$

По условию теоремы накрытие $\pi\colon C_i \to B$ неразветвленно; поэтому, если $(C_i \cdot F) = m_i$, то

$$C_i \cdot F_b = Q_{b,i}^{(1)} + \ldots + Q_{b,i}^{(m_i)},\ Q_{b,i}^{(r)} \neq Q_{b,i}^{(s)} \text{ при } r \neq s.$$

Отсюда следует, что

$$(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0 = \Sigma n_i(Q_{b,i}^{(1)} + \ldots + Q_{b,i}^{(m_i)})$$

и, значит, каждая из точек $Q_{b,i}^{(r)}$ входит в дивизор $(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0$ с кратностью n_i. Поэтому эта точка входит в дивизор $(d(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})))$ с кратностью $n_i - 1$. Но с той же кратностью она входит и в дивизор $(n_i - 1)\rho_b C_i$. Отсюда следует, что в дивизор $\rho_b\overline{W}$ ни одна из этих точек уже не входит. Это значит, что дивизоры $\overline{W}$ и C_i не имеют общих точек ни на одном слое F_b и, значит, вообще не пересекаются. Аналогично рассматриваются и дивизоры C_j'.

При отображении φ дивизоры $\Sigma n_i C_i$ и $\Sigma n_j' C_j'$ являются прообразами нулевого и бесконечного сечений расслоения L:

$$\Sigma n_i C_i = \varphi^*(S_0),\ \Sigma n_j' C_j' = \varphi^*(S_\infty).$$

Дивизор V является прообразом некоторого дивизора S на L: $V = \varphi^*(S)$. Из того, что только что доказано, следует, что S не пересекается ни с S_0, ни с S_∞.

Исходя из этого, мы сейчас покажем, что для некоторого неразветвленного накрытия $B' \to B$ прообраз L тривиален: $L' = L \times_B B' \simeq B' \times P^1$ и в L' прообраз S' дивизора S «постоянен» $S' = B' \times \Delta$, где Δ — эффективный дивизор на P^1. Для этого обозначим через C любую неприводимую компоненту $\overline{W}$. Проекция, определенная в L, $L \to B$, определяет C как накрытие B. Рассмотрим расслоение $M = C \times_B L$. В нем точки (c, c), $c \in C$ образуют сечение, не пересекающее ни нулевого, ни бесконечного сечения. Одномерное векторное расслоение, обладающее таким сечением, обязано быть тривиальным. Это значит, что L становится тривиальным на некотором накрытии $C \to B$. Для дивизора $\Sigma m_k b_k$, соответствующего L, это означает, что он становится главным на накрытии C. Такой дивизор определяет класс дивизоров конечного порядка и тогда, как известно, становится главным на некотором неразветвленном накрытии $B' \to B$. Таким образом, $L' = L \times_B B' \simeq B' \times P^1$. Для прообраза S' дивизора S условие, что S'

не пересекает нулевого сечения, означает, что $(S' \cdot (B' \times 0)) = 0$, а так как дивизор S' эффективен, то отсюда следует, что $S' = B' \times \Delta$.

Рассмотрим прообраз V' расслоения π на B': $V' = V \times_B B'$. Мы имеем отображение $\varphi'\colon V' \to L'$, которое на каждом слое $F_{b'}$ определяет отображение накрытия над P^1, разветвленного в точках фиксированного (не зависящего от b') дивизора Δ. Отсюда уже следует, что накрытие $V' \to L'$ является фактором накрытия $V'' \to L'$, где $V'' = \overline{B} \times H$, причем $\overline{B}$ — неразветвленное накрытие B', а H — накрытие P^1, которое разветвлено только в точках дивизора Δ. Этот результат вытекает из теоремы о неразветвленных накрытиях прямого произведения и одного замечания Абианкара (см. [1]).

Замечание Абианкара заключается в том, что можно найти такое накрытие $H_1 \to P^1$, разветвленное только в точках Δ, что любое накрытие $F_b \times_{P^1} H_1 \to H_1$ будет уже неразветвленным. Для этого достаточно взять H_1 таким, чтобы его показатели ветвления в точках Δ делились на соответствующие показатели ветвления накрытий $F_b \to P^1$ (для этого придется, быть может, увеличить Δ на одну точку). К накрытию $V\colon X \times_{L'}(B' \times H_1) \to B' \times H_1$ можно уже применить теорему о неразветвленных накрытиях прямого произведения (при $k = C$ она следует из равенства $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$). Мы получаем, что оно является фактором накрытия $V'' = \overline{B} \times H \to B' \times H_1$, где $\overline{B}$ и H — неразветвленные накрытия кривых B' и H_1. Так как X' в свою очередь является фактором накрытия $V \times_{L'}(B' \times H_1) \to B' \times H_1$, то V' является и фактором накрытия V''.

Обозначим через $\overline{V}$ поверхность $V' \times_{B'} \overline{B}$, имеющую расслоение $\overline{\pi}\colon \overline{V} \to \overline{B}$, и докажем, что $\overline{V} \simeq \overline{B} \times F_0$, где F_0 — любой из слоев расслоения $\overline{\pi}$. Из сказанного выше следует, что $\overline{V}$ является фактором V'', причем, как легко проверить, отображение $u\colon V'' \to \overline{V}$ коммутирует с проекциями обеих поверхностей на $\overline{B}$.

Перейдя, если нужно, от H к большему накрытию, мы можем считать H нормальным накрытием P^1 с группой Галуа G. Из построения следует, что мы имеем последовательность накрытий

$$\overline{B} \times H \xrightarrow{u} \overline{V} \xrightarrow{v} \overline{B} \times P^1,$$

причем отображения u и v коммутируют с проекциями всех членов этой последовательности на $\overline{B}$. Накрытие $\overline{V} \to \overline{B} \times P^1$ принадлежит к некоторой подгруппе G_1 группы Галуа G накрытия $\overline{B} \times H \to \overline{B} \times P^1$. Так как автоморфизмы $g \in G$ действуют по закону

$$g(\overline{b} \times h) = \overline{b} \times g(h),$$

то так же действуют и автоморфизмы $g_1 \in G_1$. Ввиду этого $\overline{V} \simeq (\overline{B} \times H)/G_1 \simeq \overline{B} \times H/G_1$. Лемма 8 доказана.

Чтобы применить лемму 8 к доказательству теоремы 9, нам надо построить на поверхности V, удовлетворяющей условиям этой теоремы, функцию, дивизор которой состоит из неразветвленного дивизора и линейной комбинации слоев. Построению такой функции посвящены следующие леммы.

Мы будем обозначать дальше знаком $C \approx D$ алгебраическую, а знаком $C \approxeq D$ — численную эквивалентность дивизоров на поверхности (если $k = C$, речь идет о гомологичности и соответственно слабой гомологичности).

Л е м м а 9. *Пусть V — алгебраическая поверхность с $(K^2) = 0$, $p_a(X) = 0$ и $\pi\colon V \to B$ — ее отображение на кривую B, причем все слои этого отображения невырождены и имеют род $g > 1$. При достаточно большом n*

(например $n \geqslant 3$) для любого дивизора D, для которого имеет место соотношение $D \approx nK$, существует такой дивизор C, что $C > 0$, $C \approx D$.

Доказательство. Нам достаточно найти такой дивизор C, что $C \approx D$, $l(C) > 0$. Будем искать C в виде $D + F_b - F_0$, $b \in B$. Мы докажем, что для некоторого $b \in B$ $l(D + F_b - F_0) > 0$ — это и есть то, что нам нужно.

Пусть $l(D + F_b - F_0) = 0$ для всех $b \in B$. Из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{F}(D + F_b - F_0) \to \mathcal{F}(D + F_b) \to \mathcal{F}_*(F_0(D + F_b) F_0) \to 0$$

вытекает точность последовательности

$$0 \to \mathcal{L}(D + F_b - F_0) \to \mathcal{L}(D + F_b) \to \mathcal{L}_{F_0}((D + F_b)\cdot F_0). \tag{23}$$

Из сделанного предположения следует, что гомоморфизм ограничения

$$\rho_0 : \mathcal{L}(D + F_b) \to \mathcal{L}_{F_0}((D + F_b)\cdot F_0) \tag{24}$$

является вложением для любого $b \in B$.

Вычислим размерности обоих пространств в (24). Так как

$$((D + F_b)\cdot F_0) = ((nK + F_b - F_0)\cdot F_0) = 2n(g - 1),$$

то число $l((D + F_b)\cdot F_0)$ может быть найдено по теореме Римана — Роха, примененной к кривой F_0:

$$l((D + F_b) F_0) = (2n - 1)(g - 1). \tag{25}$$

С другой стороны, теорема Римана — Роха на V дает:

$$l(D + F_b) \geqslant \frac{((D + F_b)\cdot(D + F_b - K))}{2} = \frac{(2n-1)(K\cdot F_b)}{2} = (2n - 1)(g - 1). \tag{26}$$

Из (25), (26) и того, что ρ_0 в (24) является вложением, следует, что оба пространства в (24) имеют одинаковую размерность и, значит, ρ_0 является изоморфизмом для любого $b \in B$.

Таким образом, для любого эффективного дивизора Δ, содержащегося в полной линейной системе $|(D + F_b) F_0|$ на F_0, существует ровно один такой эффективный дивизор $C_b \in |D + F_b|$, что $C_b \cdot F_0 = \Delta$.

Докажем, что через каждую точку $v \in V$ проходит хотя бы одна кривая C_b. Для этого рассмотрим в $V \times B$ подмножество Γ, состоящее из точек (v, b), для которых $v \in C_b$. Очевидно, что Γ — алгебраическое подмногообразие в $V \times B$. При отображении $\Gamma \to B$, индуцированном проекцией $V \times B \to B$, каждая точка $b \in B$ имеет прообразом кривую C_b, откуда следует, что $\dim \Gamma = 2$. Утверждение, которое мы хотим доказать, заключается в том, что $pr_V \Gamma = V$. Ввиду полноты всех рассматриваемых многообразий, $pr_V \Gamma$ является алгебраическим подмногообразием V и, следовательно, совпадает с V, если $\dim pr_V \Gamma = 2$. Если же $pr_V \Gamma = U$, $\dim U = 1$, то $\Gamma = U \times B$, а это в свою очередь означает, что $C_b = U$ для всех $b \in B$. Этого не может быть, так как $C_b \neq C_{b'}$ для $b \neq b'$. Действительно, из равенства $C_b = C_{b'}$ следовало бы, что $F_b \sim F_{b'}$. Мы видели при доказательстве теоремы 8, что это приводит к противоречию: если $(f) = F_b - F_{b'}$, то $f = \pi^*(g)$, $g \in k(B)$, $(g) = (b) - (b')$, т. е. $b \sim b'$, а это противоречит тому, что род кривой B равен 1.

Возьмем за точку v, в частности, произвольную точку кривой F_0, не входящую в дивизор Δ. По условию найдется такая точка $b \in B$, что $C_b \ni v$. Но тогда C_b пересекается с F_0 более чем в $(C_b \cdot F_0)$ точках, а это возможно только тогда, когда C_b содержит F_0 в качестве компоненты. Если $C_b = H + F_0$, $H > 0$, то $D + F_b \sim H + F_0$, т. е. $D + F_b - F_0 \sim H > 0$, что противоречит предположению $l(D + F_b - F_0) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если V — поверхность, удовлетворяющая условиям леммы 9, то дивизор C, существование которого установлено в этой лемме, отличен от 0 и неразветвлен.*

Действительно, пусть $C \approx nK$, $C > 0$. Так как $(K\cdot F) > 0$, то $nK \not\approx 0$ и, значит, $C \neq 0$. Положим

$$C = \Sigma n_i C_i,\ C_i \neq C_j \text{ при } i \neq j,\ n_i > 0,$$

где C_i — неприводимые кривые.

Так как всякая неприводимая кривая, лежащая на поверхности V, или является накрывающей базы B, или совпадает со слоем F, причем род B равен 1, а род F больше 1, то на V не может лежать неприводимая рациональная кривая. Поэтому

$$(C_i^2) + (C_i K) \geqslant 0. \tag{27}$$

Покажем, что $(C_i K) \geqslant 0$. Действительно, из $(C_i K) < 0$ следовало бы, ввиду (27), что $(C_i^2) > 0$. Так как $C \approx nK$, то $(C_i K) < 0$ давало бы

$$(C_i \cdot \Sigma n_j C_j) = n_i (C_i^2) + \sum_{j \neq i} n_j (C_i C_j) < 0,$$

что невозможно, так как $(C_i C_j) \geqslant 0$ при $i \neq j$, а $(C_i^2) > 0$.

Равенство $(K^2) = 0$ может, ввиду того что $C \approx nK$, быть переписано как

$$\Sigma n_i (C_i K) = 0 \tag{28}$$

или

$$(\Sigma n_i C_i)^2 = \Sigma n_i^2 (C_i^2) + \sum_{i \neq j} n_i n_j (C_i C_j) = 0. \tag{29}$$

Из (28) следует теперь, что $(C_i K) = 0$, а из (27) и (29) — что $(C_i^2) = 0$ и $(C_i C_j) = 0$ при $i \neq j$. Поэтому

$$p_a(C_i) = \frac{(C_i^2) + (C_i K)}{2} + 1 = 1,$$

а так как C_i — нерациональная кривая, то она — неособая кривая рода 1. Она не может совпадать со слоем, так как род слоя больше 1 и, значит, является накрывающей базой. Так как род обеих кривых — и C_i и B — равен 1, то это накрытие неразветвленное. Наконец, уже доказанное нами соотношение $(C_i C_j) = 0$ при $i \neq j$ завершает проверку того, что дивизор C — неразветвленный.

Лемма 11. *Пусть π: $V \to B$ — расслоение без вырожденных слоев, β — общая точка кривой B и F_β — общий слой. Всякий класс дивизоров конечного порядка на кривой F_β определен над некоторым неразветвленным расширением поля $k(\beta)$.*

Доказательство. Пусть J_β — якобиево многообразие кривой F_β. Оно определено над полем $k(\beta)$ и при любом $b \in B$ имеет в качестве специализации якобиево многообразие J_b кривой F_b. Обозначим через $\mathfrak{a}_n(\beta)$ цикл, состоящий из точек порядка n на J_β. Как известно, этот цикл состоит из n^{2g} точек с кратностью единица. При специализации β в b цикл $\mathfrak{a}_n(\beta)$ специализируется в цикл $\mathfrak{a}_n(b)$, состоящий из точек порядка n на J_b. Так как слой J_b невырожден, то цикл $\mathfrak{a}_n(b)$ состоит из n^{2g} различных точек. Из обобщенной леммы Гензеля (см. [34]) следует тогда, что цикл $\mathfrak{a}_n(\beta)$ рационален над полным локальным кольцом точки b. Так как это верно для любой точки b, то отсюда следует, что поле определения цикла $\mathfrak{a}_n(\beta)$ не разветвлено над полем $k(\beta)$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Этому рассуждению можно придать следующую геометрическую форму. Обозначим через J_b якобиево многообразие слоя F_b. В множество всех многообразий J_b, $b \in B$ можно ввести структуру алгебраического многообразия J, снабженного проекцией $\varphi: J \to B$. Для каждого $b \in B$ многообразие J_b содержит n^{2g} точек порядка n. Совокупность всех этих точек для всех $b \in B$ образует, как нетрудно доказать, одномерный эффективный дивизор $\mathfrak{a}_n \subset J$. Проекция φ определяет на $\mathfrak{a}_n$ структуру накрытия B. Так как для любого $b \in B$ цикл $\mathfrak{a}_n \cdot J_b$ состоит из n^{2g} различных точек, то это накрытие — неразветвленное. Это и есть утверждение леммы.

Л е м м а 12. *Пусть $K = k(B)$ — поле функций над алгебраической кривой B, U — алгебраическая кривая над K и C — класс дивизоров на U, которому соответствует рациональная над K точка якобиева многообразия кривой U, причем $l(C) > 0$. Тогда в C существует эффективный дивизор, определенный над K.*

Это утверждение по существу совпадает с так называемым критерием рациональности Картье.

Пусть L/K — нормальное расширение поля K, над которым класс C уже определен, G — группа Галуа L/K, а $\mathfrak{C}_L$, $\mathfrak{D}_L$, P_L — группы классов дивизоров, дивизоров и главных дивизоров на U над L. Все эти группы являются G-модулями. По условию $C^\sigma = C$ для $\sigma \in G$, т. е. $C \in H^0(G, \mathfrak{C}_L)$. Докажем, что существует $D' \in \mathfrak{D}_K$, $D' \in C$. Для этого рассмотрим точную последовательность

$$H^0(G, \mathfrak{D}_L) \to H^0(G, \mathfrak{C}_L) \to H^1(G, P_L),$$

которая выводится из точной последовательности

$$(1) \to P_L \to \mathfrak{D}_L \to \mathfrak{C}_L \to (1).$$

Очевидно, наше утверждение будет доказано, если мы докажем, что $H^1(G, P_L) = (1)$. Для этого рассмотрим точную последовательность

$$(1) \to L^* \to L(U)^* \to P_L \to (1),$$

где L^* и $L(U)^*$ — мультипликативные группы полей L и $L(U)$, и точную последовательность

$$H^1(G, L(U)^*) \to H^1(G, P_L) \to H^2(G, L^*).$$

Так как G является группой Галуа $L(U)/K(U)$, то $H^1(G, L(U)^*) = (1)$ ввиду известного алгебраического факта. С другой стороны, $H^2(G, L^*) = 0$ ввиду теоремы Тзена, так как $K = k(B)$ и поле k алгебраически замкнуто. Отсюда следует, что $H^1(G, P_L) = (1)$.

Остается доказать, что существует эффективный дивизор D, определенный над K и эквивалентный дивизору D'. Но это следует из того, что $l(C) > 0$ и что размерность дивизора не меняется при сепарабельном расширении поля констант (см., например, [58, гл. V, § 6, следствие 1 теоремы 4]).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 9. Возьмем пока произвольное число m и рассмотрим на кривой F_β класс дивизоров $\mathscr{E}$, порядок которого равен m. Согласно лемме 11, этот класс определен над некоторым неразветвленным расширением поля $k(B)$. Если $\overline{B}$ — неособая модель этого неразветвленного расширения, то мы имеем неразветвленное накрытие $\varphi: \overline{B} \to B$, и на поверхности $\overline{V} = V \times_B \overline{B}$ класс дивизоров $\mathscr{E}$ кривой $F_{\overline{\beta}}$ определен уже над полем $k(\overline{B})$. Согласно лемме 12, существует эффективный дивизор $\mathfrak{D}$

кривой $F_{\overline{\beta}}$, принадлежащий классу $K(F_{\overline{\beta}}) + \mathscr{E}$ и тоже определенный над $k(\overline{B})$. Этому дивизору соответствует такой эффективный дивизор D на $\overline{V}$, что

$$D \cdot F_{\overline{\beta}} = \mathfrak{D} \in K(F_\beta) + \mathscr{E}.$$

Тогда

$$(D + (n-1)K) \cdot F_{\overline{\beta}} \in nK(F_{\overline{\beta}}) + \mathscr{E}, \tag{30}$$

$$m(D + (n-1)K) \cdot F_{\overline{\beta}} \in mnK(F_{\overline{\beta}}),$$

и, значит, на $F_{\overline{\beta}}$

$$m(D + (n-1)K) \cdot F_{\overline{\beta}} \sim mnK \cdot F_{\overline{\beta}}. \tag{31}$$

Отсюда следует, что на $\overline{V}$

$$m(D + (n-1)K) \sim mnK + \Sigma m_i F_{b_i},$$

а так как

$$\Sigma m_i F_{b_i} \approx l F_b,$$

где $l = \Sigma m_i$, а b — любая точка на B, то

$$m(D + (n-1)K) \approx mnK + lF_b. \tag{3а}$$

Докажем, что при надлежащем выборе m обязательно l делится на m. Для этого достаточно рассмотреть индексы пересечения отдельных частей (31а) с K. Мы получим

$$m(D \cdot K) = 2l(g-1),$$

и если m взаимно просто с $2(g-1)$, то оно делит l. До сих пор m было произвольным. Поэтому мы можем выбрать его взаимно простым с $2(g-1)$ и положить тогда $l = l'm$. Тогда

$$m(D + (n-1)K - l'F_b) \approx mnK,$$

и, значит,

$$D + (n-1)K - l'F_b \approx nK.$$

Мы можем применить к дивизору $D + (n-1)K - l'F_b$ лемму 9. Мы получим дивизор $C' > 0$, такой, что

$$C' \sim D + (n-1)K - l'F_b + F_{b_1} - F_0.$$

С другой стороны, по той же лемме 9 существует такой дивизор $C > 0$, что

$$C \sim nK + F_{b_2} - F_0.$$

Отсюда мы получаем, ввиду (31), что

$$mC' \sim mC + \Sigma s_i F_{b_i},$$

т. е. существует функция f на X, для которой

$$(f) = -mC' + mC + \Sigma s_i F_{b_i}.$$

По лемме 10 дивизор $-mC' + mC$ не разветвлен. Он не равен 0, так как $C' \neq C$. Действительно, ввиду (30), даже

$$C' \cdot F_{\overline{\beta}} \not\sim C \cdot F_\beta.$$

Применяя лемму 8, мы получаем утверждение теоремы 9.

Рассмотрим теперь случай, когда род g общего слоя отображения Альбанезе равен 1. Как мы дальше увидим, в этом случае точный аналог теоремы 9 не имеет места. Однако из леммы 7 и следствия 3 теоремы 7, гл. VII, вытекает следующее, более слабое утверждение.

Теорема 10. *Если π: $V \to B$ — регулярное отображение, общий слой которого — эллиптическая кривая, а $\chi(V) = 0$, то существует такое (быть может разветвленное) накрытие $C \to B$, что обратный образ π на C является прямым произведением:*

$$V \times_B C \simeq C \times F.$$

§ 8. Поверхности с $p = 0$, $q > 0$
(классификация и теорема Энриквеса)

В предшествующих параграфах доказано, что поверхность с инвариантами $p = 0$, $q > 0$ является линейчатой, кроме, может быть, случая $q = 1$, $(K^2) = 0$ (теоремы 5 и 8). Основой исследования этого последнего случая является теорема 9. Исходя из этой теоремы, мы сейчас приведем полную классификацию таких поверхностей и проверим, что те из них, которые удовлетворяют условию $P_{12} = 0$, являются линейчатыми (теорема Энриквеса).

Мы рассмотрим отдельно случаи, когда род g общего слоя расслоения π больше 1 и равен 1. Начнем со случая $g > 1$.

Согласно теореме 9, в этом случае поверхность V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, $(K^2) = 0$ имеют в качестве неразветвленной накрывающей поверхность $\overline{V} = \overline{B} \times F$. Посмотрим, как можно получить поверхность V из $\overline{V}$.

Теорема 9 показывает, что $\overline{V} = V \times_B \overline{B}$, где B — многообразие Альбанезе поверхности V (в данном случае — эллиптическая кривая), а $\overline{B} \to B$ — неразветвленное накрытие. Мы можем считать, не нарушая общности, что $\overline{B} \to B$ — нормальное накрытие. Обозначим его группу Галуа через G. Очевидно, что $X = \overline{X} / G$. При изоморфизме

$$\overline{V} \simeq \overline{B} \times F, \tag{32}$$

автоморфизму $\sigma \in G$ накрытия $\overline{B} \to B$ соответствует автоморфизм

$$\sigma(\bar{b}, f) = (\sigma\bar{b}, f\sigma^{-1}), \tag{33}$$

где $f \to f\sigma^{-1}$ — некоторый автоморфизм кривой F. Это следует из того, что как действие автоморфизма $\sigma \in G$ на $\overline{V}$, так и изоморфизма (32) перестановочен с проекцией $\overline{V} \to \overline{B}$.

Таким образом, мы имеем гомоморфизм

$$\varphi : G \to \operatorname{Aut}(F)$$

группы G в группу автоморфизмов кривой F. Наоборот, задание такого представления группы G (которая сама задана как группа Галуа накрытия $\overline{B} \to B$) определяет ее действие в качестве группы автоморфизмов поверхности $\overline{V}$:

$$\sigma(\bar{b}, f) = (\sigma\bar{b}, f\varphi(\sigma)^{-1}).$$

Непосредственно ясно, что при этом мы получаем группу, действующую на $\overline{V}$ без неподвижных точек, и поверхность $V = \overline{V}/G$ не имеет особых точек. Мы видим, что таким образом мы можем получить все интересующие нас поверхности, но, может быть, и многие другие. Нам надо, следовательно, выяснить, каким условиям должны быть подчинены накрытие $\overline{B} \to B$, кривая F и представление φ, чтобы поверхность V имела инварианты $p = 0$, $q = 1$. Чтобы сформулировать результат, обозначим через L кривую $F/\varphi(G)$.

Лемма 13. *Для поверхности $V = \overline{V}/G$*

$$q = 1 + \gamma, \tag{34}$$

$$p = \gamma, \tag{35}$$

где γ — род кривой L.

Доказательство. Проекция $\psi: \overline{V} \to V$ определяет отображение

$$\psi_i^*: \Omega^i(V) \to \Omega^i(\overline{V})$$

i-мерных дифференциальных форм 1-го рода. Очевидно, что ψ_i^* — вложение и $\psi_i^*(\Omega^i(V)) = \Omega^i(\overline{V})^G$. Поэтому нам надо сначала найти дифференциальные формы 1-го рода на $\overline{V}$, а потом отобрать среди них те, которые инвариантны относительно действия автоморфизмов из G.

Начнем с одномерных форм. Очевидно, что

$$\Omega'(\overline{V}) = p_1^*(\Omega'(\overline{B})) \oplus p_2^*(\Omega'(F)), \tag{36}$$

где p_1 и p_2 — проекции $\overline{V}$ на $\overline{B}$ и F. Выясним, как действует автоморфизм $\sigma \in G$ на формы из $\Omega'(\overline{V})$. По определению (33) действия σ на $\overline{V}$ пространства $p_1^*\,\Omega'(\overline{B})$ и $p_2^*\Omega'(F)$ остаются инвариантными при действии σ и преобразуются так же, как пространство $\Omega'(B)$ под действием σ и пространство $\Omega'(F)$ под действием $\varphi(\sigma)^{-1}$. Заметим теперь, что σ действует на $\Omega'(\overline{B})$ тривиально, так что $\Omega'(\overline{B})^G = \Omega'(\overline{B})$. С другой стороны, как нетрудно видеть, $\Omega'(F)^{\varphi(G)} \simeq \Omega'(L)$.

Отсюда следует, что

$$\Omega'(V)^G \simeq \Omega'(\overline{B}) \oplus \Omega'(L),$$

что и дает (34).

Рассмотрим теперь формы второй степени. Согласно (2),

$$K(\overline{V}) = K(\overline{B}) \times F + \overline{B} \times K(F),$$

а так как $K(\overline{B}) = 0$, то

$$K(\overline{V}) = \overline{B} \times K(F). \tag{37}$$

Поэтому

$$\Omega^2(\overline{V}) \simeq \Omega'(\overline{B}) \otimes \Omega'(F) \simeq \Omega'(F) \tag{38}$$

и

$$\Omega^2(\overline{V})^G \simeq \Omega'(F)^{\varphi(G)} \simeq \Omega'(L), \tag{39}$$

откуда следует (35).

Следствие. *Поверхность $V = \overline{V}/G$ тогда и только тогда имеет инварианты $q = 1$, $p = 0$, когда $g = 0$, т. е. кривая $F/\varphi(G)$ рациональна.*

Перейдем теперь к конструкции поверхностей с инвариантами $p = 0$, $q = 1$ (опять предполагая, что $g > 1$, т. е. что эти поверхности описываются теоремой 9). Заметим прежде всего, что накрытие $\overline{B} \to B$, как неразветвленное накрытие эллиптической кривой, имеет абелеву группу Галуа с одной или двумя образующими:

$$G = \{\sigma_1\} \times \{\sigma_2\}, \quad \sigma_1^{m_1} = 1, \quad \sigma_2^{m_2} = 1.$$

Поле $k(F)/k(L)$ имеет в качестве группы Галуа группу $\varphi(G)$. Следовательно, эта группа Галуа имеет две образующие: $\varphi(\sigma_1)$ и $\varphi(\sigma_2)$, порядки которых являются делителями чисел m_1 и m_2. Так как кривая L должна быть рациональна, то поле $k(L)$ изоморфно полю рациональных функций $k(L) = k(x)$, а поле $k(F)/k(L)$ может быть, как легко следует из теории Галуа, получено в виде $k(x)(\sqrt[m_1]{P_1(x)}, \sqrt[m_2]{P_2(x)})$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — любые многочлены от x. Наоборот, в поле $k(x, \sqrt[m_1]{P_1(x)}, \sqrt[m_2]{P_2(x)})$ можно определить автоморфизмы s_1 и s_2, положив

$$s_1(\sqrt[m_1]{P_1(x)}) = \varepsilon_1 \sqrt[m_1]{P_1(x)},$$

$$s_1(\sqrt[m_2]{P_2(x)}) = \sqrt[m_2]{P_2(x)},$$

$$s_2(\sqrt[m_2]{P_2(x)}) = \varepsilon_2 \sqrt[m_2]{P_2(x)},$$

где ε_1 и ε_2 — первообразные корни из 1, степени которых равны степеням полей $k(x, \sqrt[m_1]{P_1})/k(x)$ и $k(x, \sqrt[m_1]{P_1}, \sqrt[m_2]{P_2})/k(x, \sqrt[m_1]{P_1})$. Взяв за F неособую модель поля $k(x, \sqrt[m_1]{P_1}, \sqrt[m_2]{P_2})$, мы можем определить гомоморфизм φ группы G в группу $\operatorname{Aut} F$, положив $\varphi(\sigma_1) = s_1$, $\varphi(\sigma_2) = s_2$, и на поверхности $\bar V = \bar B \times F$ задать действие G формулами (33). Так как кривая $F/\varphi(G) = L$ рациональна, то поверхность $V = \bar V / G$ будет иметь инварианты $p = 0$, $q = 1$. Мы доказали, таким образом, следующее утверждение.

Теорема 11. *Все поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$ в случае $g > 1$ могут быть получены в виде $V = \bar V/G$, $\bar V = \bar B \times F$, $\bar B \to B$ — неразветвленное накрытие эллиптической кривой, F — неособая модель поля $k(x, \sqrt[m_1]{P_1(x)}, \sqrt[m_1]{P_2(x)})$, G — изоморфна группе Галуа накрытия $\bar B \to B$ и действует на $\breve X$ по правилу $\sigma(\bar b, f) = (\sigma\bar b, f\varphi(\sigma)^{-1})$, а $\varphi(\sigma)$ — гомоморфизм группы Галуа накрытия $\bar B \to B$ на группу Галуа поля $k(x, \sqrt[m_1]{P_1}, \sqrt[m_2]{P_2})/k(x)$.*

Рассмотрим теперь случай, когда род общего слоя расслоения π равен 1.

Согласно теореме 10, существует такое накрытие $C \to B$ базы, что

$$C \times _B V \simeq C \times F,$$

где F — неособая кривая рода 1. Мы можем, конечно, предполагать C нормальным накрытием с группой Галуа G. Очевидно, что на $C \times F$ группа G действует по правилу

$$\sigma(c \times f) = \sigma(c) \times f\varphi(\sigma)^{-1}, \ \sigma \in G, \tag{40}$$

где

$$\varphi\colon G \to \operatorname{Aut} F$$

— гомоморфизм G в группу бирегулярных автоморфизмов кривой F. Очевидно, что

$$V = (C \times _B V)/G = (C \times F)/G.$$

При этом можно ограничиться рассмотрением случая, когда φ — мономорфизм. Действительно, если N — ядро φ, $G_1 = G/N$, $C_1 = C/N$, то, как легко видеть,

$$V \times _B C_1 \simeq C_1 \times F, \quad V = (C_1 \times F)/G_1.$$

Выясним, какие неподвижные точки имеют автоморфизмы $\sigma \in G$.

Очевидно, что точка $\sigma = (c \times f)$ является неподвижной для автоморфизма σ тогда и только тогда, когда $\sigma c = c$, $f\varphi(\sigma) = f$. Так как при $\sigma \neq 1$ и $\varphi(\sigma) \neq 1$, то и σ и $\varphi(\sigma)$ имеют конечное число неподвижных точек на C и F соответственно, а следовательно, σ имеет только конечное число неподвижных точек на $C \times F$. Таким образом, накрытие $C \times F \to V$ может иметь

только изолированные точки ветвления. Отсюда и из того, что ни $C \times F$, ни V не имеют особых точек, следует, что это накрытие вообще не имеет точек ветвления. Это вытекает, например, из теоремы Зариского о многообразии ветвления [17], согласно которой многообразие ветвления любого накрытия неособого многообразия неособым имеет коразмерность 1. Можно это проверить и непосредственно, рассмотрев подкольцо $\mathfrak{O}_x^H$, состоящее из H-инвариантных элементов локального кольца $\mathfrak{O}_x$ точки $x \in C \times F$, где H — стационарная подгруппа точки x, и показав, что это кольцо нерегулярно (кольцо $\mathfrak{O}_x^H$ изоморфно, как легко видеть, локальному кольцу образа точки x на V).

Возьмем теперь, наоборот, нормальное накрытие $C \to B$ с группой Галуа G и мономорфизм $\varphi\colon G \to \operatorname{Aut} E$ группы G в группу автоморфизмов кривой F рода 1. Определим действие G на $C \times F$ формулой (40) и выясним, когда G действует на $C \times F$ без неподвижных точек и когда $(C \times F)/G$ имеет инварианты $p = 0$, $q = 1$.

Группа $\varphi(G)$ является группой автоморфизмов неособой кривой F рода 1. Введем в F структуру одномерного абелева многообразия. Тогда, как известно, конечная группа бирегулярных преобразований F является полупрямым произведением

$$\varphi(G) = H \cdot \mathfrak{A}, \tag{41}$$

где $\mathfrak{A}$ состоит из сдвигов, а H — из автоморфизмов абелева многообразия F, причем $\mathfrak{A}$ имеет одну или две образующие, а H является циклической группой порядка 1, 2, 3, 4 или 6. При этом, естественно, $\mathfrak{A}$ является H-операторной группой.

Легко проверить, что элементы из $\mathfrak{A}$, и только они, не имеют неподвижных точек на F. Следовательно, для того чтобы группа G, действующая на $C \times F$ по закону (33), не имела неподвижных точек, необходимо и достаточно, чтобы в группе G автоморфизмов накрытия $C \to B$ только автоморфизмы вида $\varphi^{-1}(a)$, $a \in \mathfrak{A}$ имели неподвижные точки. Это в свою очередь означает, что накрытие $C_1 \to B$, принадлежащее согласно теории Галуа к подгруппе $\varphi^{-1}(\mathfrak{A})$, является неразветвленным.

Положим $F/\varphi(G) = L$ и обозначим род кривой L через γ. Из формулы (36) следует, что если $\bar V = C \times F$, $V = (C \times F)/G$, то

$$\Omega'(V) \simeq \Omega'(\bar V)^G \simeq \Omega'(C)^G \oplus \Omega'(F)^G \simeq \Omega'(B) \oplus \Omega'(L),$$

и поэтому для V

$$q = 1 + \gamma,$$

так что $q = 1$, тогда и только тогда, когда кривая L рациональна. Это в свою очередь эквивалентно тому, что в (41) $H \neq 1$.

Из формулы (38) следует, что

$$\Omega^2(\bar V) \simeq \Omega'(C) \otimes \Omega'(F).$$

Для того чтобы вычислить $\Omega^2(\bar V)^G$, определим сначала $\Omega^2(\bar V)^{\mathfrak{A}}$. Так как элементы $a \in \mathfrak{A}$ являются сдвигами абелева многообразия F, то $\Omega'(F)^{\mathfrak{A}} = \Omega'(F)$ и

$$\Omega^2(\bar V)^{\mathfrak{A}} \simeq \Omega'(C)^{\mathfrak{A}} \otimes \Omega'(F) \simeq \Omega'(C_1) \otimes \Omega'(F),$$

где C_1 — накрытие $C_1 \to B$, принадлежащее подгруппе $\varphi^{-1}(\mathfrak{A})$ группы Галуа накрытия $C \to B$. Накрытие $C_1 \to B$ по условию неразветвлено, и мы можем применить к нему формулу (39). Поэтому

$$\Omega^2(\bar V)^G = (\Omega^2(\bar V)^{\mathfrak{A}})^H \simeq \Omega'(L),$$

и, следовательно, $p = 0$ тогда и только тогда, когда кривая L рациональна и, значит, $H \neq 1$. Мы доказали следующий результат.

Теорема 12. *Все поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$ в случае $g = 1$ могут быть получены в виде $V = \overline{V}/G$, $\overline{V} = C \times F$, $C \to B$ — накрытие эллиптической кривой B с группой Галуа G типа (41) с $H \neq 1$, причем G изоморфно группе бирегулярных преобразований кривой F рода 1, и в этом изоморфизме элементы $\mathfrak{A}$ соответствуют сдвигам, а H — автоморфизмам одномерного абелева многообразия F. При этом накрытие $C_1 \to B$, принадлежащее в смысле теории Галуа подгруппе $\mathfrak{A}$ группы Галуа G накрытия $C \to B$, должно быть неразветвленным.*

Можно было бы дать явную конструкцию расширений поля $k(B)$, имеющих группы Галуа типа (41) и удовлетворяющих всем условиям теоремы 12, и тем самым дать явную конструкцию для поверхностей с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, также и в случае $g = 1$. Однако более красивая классификация таких поверхностей будет получена в рамках теории поверхностей с пучком эллиптических кривых (см. теорему 12, гл. VII).

Теорема 13. (Критерий Энриквеса). *Поверхность X является линейчатой тогда и только тогда, когда для нее $P_{12} = 0$.*

Доказательство. Прежде всего проверим, что для линейчатой поверхности $P_{12} = 0$. Ввиду бирациональной инвариантности числа P_{12} достаточно установить равенство $P_{12} = 0$ для поверхности $V = B \times P^1$, где P^1 — проективная прямая. Для этой поверхности $P_n = 0$ для всех $n > 0$. Действительно, из (2) следует, что на V

$$(K \cdot (b \times P^1)) = -2 < 0.$$

Поэтому если бы $P_n(V)$ было положительно при некотором $n > 0$, мы имели бы $nK \sim D > 0$,

$$(D \cdot (b \times P')) = (nK \cdot (b \times P')) = -2n < 0,$$

что невозможно.

Докажем, что из равенства $P_{12} = 0$ следует, что поверхность V линейчатая. Прежде всего заметим, что ввиду этого условия $p = 0$ и $p_2 = 0$. Поэтому, если $q = 0$, то поверхность V рациональна ввиду критерия Кастельнуово и тем более является линейчатой. Точно так же, если $q > 1$, то поверхность является линейчатой согласно теореме 5. Нам остается рассмотреть случай $q = 1$.

В этом случае мы можем воспользоваться теоремами 11 и 12 и представить V в виде $\overline{V}/G$, где $\overline{V} = C \times F$, $C \to B$ —накрытие, быть может, разветвленное, а группа G определена в теоремах 11 и 12 и действует на $\overline{V}$ без неподвижных точек. Нам надо определить $P_n(X)$, т. е. размерность пространства дифференциалов степени n и 1-го рода на X.

Если x и y — две функции, алгебраически независимые на X, то они будут независимыми и на $\overline{X}$, и любой дифференциал n-й степени на $\overline{X}$ может быть записан в виде $f(dx \wedge dy)^n$, $f \in k(\overline{X})$. Инвариантность этого дифференциала относительно действия автоморфизмов из G равносильна инвариантности функции f, а это в свою очередь означает, что $f \in k(X)$, а значит, и сам дифференциал является образом дифференциала на X при отображении дифференциалов, которое индуцируется отображением $\pi \colon \overline{X} \to X$.

Мы доказали, таким образом, что дифференциалы n-й степени на $\overline{X}$, инвариантные относительно автоморфизмов из G, совпадают с дифференциалами вида $\pi^*(\omega)$, где ω — дифференциал на X.

Заметим теперь, что ввиду неразветвленности накрытия $\overline{X} \to X$ дифференциал ω тогда и только тогда 1-го рода на X, когда $\pi^*(\omega)$ — 1-го рода

на $\overline{X}$. Таким образом,

$$\Omega_n(X) \simeq \Omega_n(\overline{X})^G,$$

где $\Omega_n(\overline{X})$ и $\Omega_n(\overline{X})$ — пространства дифференциалов n-й степени и 1-го рода на X и соответственно на $\overline{X}$. Очевидно, что

$$\Omega_n(\overline{V})^G \supset \Omega_{\overline{n}}(C)^G \otimes \Omega_n(F)^G \supset \Omega_n(B) \otimes \Omega_n(F)^G.$$

Так как B — эллиптическая кривая, то $\Omega_n(B) \simeq k$. Ввиду того, что мы доказали раньше, отсюда следует, что

$$P_n(V) \geqslant \dim_k \Omega_n(F)^{\varphi(G)}.$$

Остается найти размерность пространства $\Omega_n(F)^{\varphi(G)}$. Для этого вспомним, что $\varphi(G)$ является группой Галуа расширения $k(F)/k(L)$ и что L является рациональной кривой. Так как дифференциалы n-й степени, инвариантные относительно автоморфизмов из $\varphi(G)$, как мы видели, имеют вид $\psi^*(\omega)$, где ψ — накрытие $F \to L$, а ω — дифференциалы на L, то пространство $\Omega_n(F)^{\varphi(G)}$ совпадает с пространством тех дифференциалов n-й степени на L, для которых $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода.

Поверхность V обладает регулярным отображением $V \to B$, слои которого изоморфны F (это отображение индуцируется отображением $\overline{V} \to \overline{B}$). Поэтому если мы покажем, что род кривой F равен 0, то тем самым будет доказано, что поверхность V — линейчатая.

Мы видим, что утверждение теоремы 11 свелось к следующей лемме об алгебраических кривых.

Лемма 14. *Пусть $\psi \colon F \to L$ — нормальное накрытие рациональной кривой. Если любой дифференциал ω 12-й степени на L такой, что $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода на F равен 0, то F — рациональная кривая.*

Доказательство. Выберем координату t на проективной прямой L так, чтобы все точки ветвления накрытия ψ были конечными. Пусть $\omega = f(dt)^n$ — дифференциал n-й степени на L. Выясним, каким условиям должна удовлетворять функция f, чтобы дифференциал $\psi^*(\omega)$ был 1-го рода.

Пусть точка $P_i \in F$, $\psi(P_i) = Q_i \neq \infty$ и P_i является точкой ветвления кратности e_i для накрытия ψ. Тогда $t = \tau_i^{e_i} u$ на F, где τ_i — локальный параметр в точке P_i, а $\nu_{P_i}(u) = 0$ и

$$\psi^*(\omega) = \psi^*(f)(\tau_i^{e_i - 1} v)^n, \quad \nu_{P_i}(v) = 0.$$

Отсюда следует, что ω регулярен в P_i тогда и только тогда, когда

$$\nu_{P_i}(\psi^*(f)) \geqslant -n(e_i - 1),$$

а так как $\nu_{P_i}(\psi^*(f)) = e_i \nu_{Q_i}(f)$, то то же условие можно записать в виде

$$\nu_{Q_i}(f) \geqslant -n\left(1 - \frac{1}{e_i}\right),$$

или

$$\nu_{Q_i}(f) \geqslant -\left[n\left(1 - \frac{1}{e_i}\right)\right].$$

Аналогичное рассмотрение в бесконечно удаленной точке (∞) дает условие

$$\nu_\infty(f) \leqslant -2n.$$

Мы видим, таким образом, что дифференциал $\psi^*(\omega)$ тогда и только тогда будет дифференциалом 1-го рода, когда

$$f \in \mathcal{L}(D), D = \Sigma\, [n(1 - 1/e_i)]\, Q_i - 2n(\infty).$$

Нам нужно выяснить, когда существует такой дифференциал $\omega \neq 0$, что $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода на F. Иначе говоря, мы должны выяснить, когда

$$l(D) > 0.$$

Так как на кривой рода 0 размерность $l(D) > 0$ тогда и только тогда, когда $\deg D \geqslant 0$, то интересующее нас условие принимает вид

$$\Sigma\ [n(1 - 1/e_i)] \geqslant 2n. \tag{42}$$

Предположим теперь, что род кривой F отличен от 0, и докажем, что соотношение (42) можно удовлетворить при $n = 2, 3, 4$ или 6. Это и дает нам существование такого дифференциала ω степени $n = 2, 3, 4$ или 6, что $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода на F. Дифференциал $\omega^{1/n}$ будет тогда удовлетворять всем требованиям леммы.

Пусть накрытие $\psi\colon F \to L$ имеет степень m. Тогда над каждой из точек Q_i лежит m/e_i точек ветвления кратности e_i (виду нормальности накрытия). Так как род g кривой F по условию $\geqslant 1$, то

$$\frac{1}{2}\Sigma\,(e_i - 1)\frac{m}{e_i} - m + 1 \geqslant 0,$$

т. е.

$$\Sigma\,(1 - 1/e_i) \geqslant 2. \tag{43}$$

Пусть $e_1 \leqslant e_2 \leqslant \ldots \leqslant e_k$. Так как $e_i \geqslant 2$, то, если $k \geqslant 4$, условие (42) выполнено уже с $n = 2$:

$$2\,(1 - 1/e_i) = 2 - 2/e_i \geqslant 1,$$
$$\sum_1^k [2\,(1 - 1/e_i)] \geqslant k \geqslant 4.$$

Если $3 \leqslant e_1 \leqslant e_2 \leqslant e_3$, то соотношение (42) выполняется с $n = 3$:

$$3\,(1 - 1/e_i) \geqslant 2, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$\sum_1^3 [3\,(1 - 1/e_i)] \geqslant 6.$$

Если $e_1 = 2$, $\ 4 \leqslant e_2 \leqslant e_3$, то (42) выполняется с $n = 4$:

$$[4\,(1 - 1/2)] + [4\,(1 - 1/e_2)] + [4\,(1 - 1/e_3)] \geqslant 2 + 3 + 3 = 8.$$

Если $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, $e_3 \geqslant 6$, то (42) выполняется с $n = 6$:

$$[6\,(1 - 1/2)] + [6\,(1 - 1/3)] + [6\,(1 - 1/e_3)] \geqslant 3 + 4 + 5 = 12.$$

Таким образом, остались неразобранными случаи $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, $e_3 = 3, 4$ или 5. В этих случаях (соответствующих группам правильных многогранников) не выполняется соотношение (43):

$$1 - 1/2 + 1 - 1/3 + 1 - 1/e_3 \leqslant 1\frac{29}{30} < 2 \text{ при } e_3 \leqslant 5.$$

Лемма 14, а следовательно, и теорема Энриквеса, доказана.

Замечание. Если род кривой F больше 1, то при достаточно большом n размерность пространства таких дифференциалов ω n-й степени на L, что $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода на F, принимает сколь угодно большие значения. Иначе говоря, если $V = (F \times B)/G$, то $\max P_n(V) = \infty$.

Действительно, в этом случае вместо (43) мы имеем неравенство

$$\theta = \Sigma\,(1 - 1/e_i) - 2 > 0,$$

и если $n \equiv 0 \pmod{e_i}$ для всех e_i, то

$$\deg D = \Sigma\ [n(1 - 1/e_i)] - 2n = n\theta$$

и, значит, $l(D)$ сколь угодно велико вместе с n.

Глава V

МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙЧАТЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Основные результаты

Всюду в этой части основное поле k предполагается алгебраически замкнутым и произвольной характеристики.

Тройка (V, π, B), где V — полная неособая поверхность, B — полная неособая кривая, $\pi\colon V \to B$ — регулярный эпиморфизм, называется *геометрически линейчатой поверхностью*, если V над B биационально эквивалентна произведению $B \times P^1$ над B (P^1 — проективная прямая), и $\pi^{-1}(Q) \simeq P^1$ — для любой точки $Q \in B$. Для краткости мы иногда будем называть геометрически линейчатой поверхностью просто V, B — ее базой, π — проекцией, а кривую $\pi^{-1}(Q) \subset V$ — слоем над точкой $Q \in B$.

Тривиальной линейчатой поверхностью будем называть прямое произведение $B \times P^1$ с канонической проекцией на первый множитель.

Пусть V — любая поверхность, $P \in V$ — произвольная точка, $l \subset V$ — исключительная кривая 1-го рода. Символами $\mathrm{dil}_P\colon V \to V'$ и $\mathrm{cont}_l\colon V \to V''$ мы обозначаем соответственно бирациональные отображения раздувания точки P и сжатия кривой l.

Пусть V — линейчатая поверхность, $P \in V$ — произвольная точка. Обозначим через l собственный образ слоя, проходящего через точку P, на поверхности $V'' = \mathrm{dil}_P V$. Очевидно, $l^2 = -1$, поэтому l — исключительная кривая 1-го рода на V''; поскольку образ l при сквозном отображении $V'' \xrightarrow{\mathrm{dil}_P^{-1}} V \xrightarrow{\pi} B$ является точкой на B, рациональное отображение π' поверхности $V' = \mathrm{cont}_l V''$ на B, определенное из условия коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
V'' \arrow[r, "\mathrm{dil}_P^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{const}_l"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\
V' \arrow[r, "\pi'"] & B
\end{tikzcd}$$

является регулярным. Очевидно (V', π', B) представляет собой геометрически линейчатую поверхность. Мы будем говорить, что V' получилась из V посредством элементарного преобразования elm_P с центром в точке P: $\mathrm{elm}_P = \mathrm{cont}_l \circ \mathrm{dil}_P\colon V \to V'$.

Нашей основной целью является доказательство следующего результата, описывающего относительно минимальные модели линейчатых поверхностей (т. е. модели, на которых нет исключительных кривых 1-го рода).

Теорема 1. а) *Пусть V — иррациональная линейчатая поверхность, $\pi\colon V \to B$ — ее каноническое отображение на свой образ в многообра-*

зии Альбанезе. Поверхность V является относительно минимальной моделью в том и только в том случае, когда (V, π, B) — геометрически линейчатая поверхность.

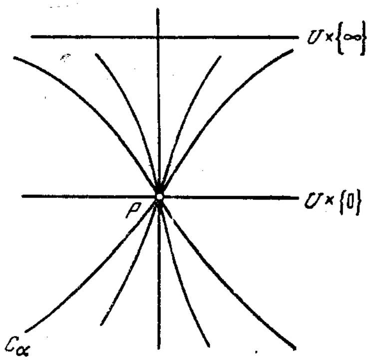
б) *Пусть V — рациональная поверхность. V является относительно минимальной моделью в том и только в том случае, когда она изоморфна либо проективной плоскости P^2, либо некоторой геометрически линейчатой поверхности с проективной прямой в качестве базы.*

в) *Всякая геометрически линейчатая поверхность (рациональная или иррациональная) получается из тривиальной поверхности последовательным применением конечного числа элементарных преобразований.*

Эта теорема будет доказана в следующих параграфах; случаи иррациональных и рациональных поверхностей придется разбирать отдельно, ибо они требуют разных методов *. Прежде чем приступить к доказательству, отметим простое свойство элементарных преобразований, которое в соединении с пунктом в) теоремы 1 дает нам более точные сведения о линейчатых поверхностях.

Предложение 1. *Пусть (V, π, B) — локально тривиальное косое произведение со слоем P^1 и с проективной структурной группой. Тогда то же верно для поверхности (V', π', B), где $V' = \mathrm{elm}_P V$, $P \in V$ — любая точка.*

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что для некоторой окрестности Зариского U точки $Q = \pi(P) \in B$, для которой $\pi^{-1}(U) \simeq U \times P^1$, открытое множество $\mathrm{elm}_P(\pi^{-1}(U) \subseteq V'$ (в очевидном определении) остается изоморфно $U \times P^1$, причем этот изоморфизм совместим с проекцией на первый множитель $U \times P^1 \to U$. Выберем на P^1 аффинные координаты так, чтобы у точки $P \in U \times P^1 = \pi^{-1}(U)$ на своем слое вторая координата была нулем. Рассмотрим некоторый локальный параметр τ в точке $Q \in B$ и выберем U так, чтобы в окрестности $U \ni Q$ функция τ не имела больше нулей и полюсов. Рассмотрим на $U \times P^1$ систему кривых $\{C_\alpha\}$, $\alpha \in k \cup \{\infty\}$, полагая



$$C_\alpha = ((Q', \alpha\tau(Q')) \,/\, Q' \in U), \alpha \in k,$$
$$C_\infty = U \times \{\infty\}.$$

Обозначим символом C'_α собственный образ кривой C_α в открытом множестве $\mathrm{elm}_P(\pi^{-1}(U))$ относительно отображения elm_P. Легко видеть, что система кривых $\{C'_\alpha\} \in \mathrm{elm}_P(U \times P_1)$ обладает следующими свойствами:

а) $C'_\alpha \cap C'_\beta = \phi$ при $\alpha \neq \beta$;

б) через каждую точку любого слоя $(\pi')^{-1}(P') \in \mathrm{elm}_P(U \times P^1)$, $P' \in U$ проходит некоторая кривая C'_α;

в) всякая кривая C'_α является сечением (образом сечения) относительно канонической проекции π': $\mathrm{elm}_P(U \times P^1) \to U$.

Набор сечений $\{C'_\alpha\}$ определяет изоморфизм $\mathrm{elm}_P(U \times P^1) \simeq U \times P^1$, который, очевидно, совместим с проекцией на U. Предложение доказано. □ Отсюда с помощью теоремы 1 вытекает

* Часть теоремы 1, относящаяся к рациональным поверхностям, доказана в статье Нагаты [38]. Там же впервые введены элементарные преобразования. Мы следуем в основном методу Нагаты. Справедливость аналогичного результата для иррациональных поверхностей, по-видимому, является новой.

Следствие. *Всякая относительно минимальная модель линейчатой поверхности, за исключением проективной плоскости, обладает структурой косого произведения с базой B, слоем P^1 и проективной структурной группой.*

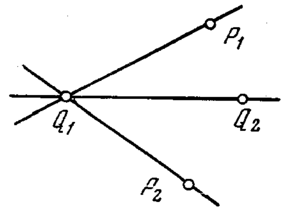
Наш последний результат будет относиться только к рациональным поверхностям, для которых классификацию линейчатых поверхностей с помощью пункта в) теоремы 1 удается довести до полного описания последних.

Лемма 1. *Пусть $P_1, P_2 \in P^1 \times P^1$ — точки, не лежащие одновременно ни на одной кривой вида $P \times P^1$ или $P^1 \times Q$. Рассматривая $P^1 \times P^1$ как линейчатую поверхность с проекцией на второй множитель, имеем:*

$$\mathrm{elm}_{P_2} \circ \mathrm{elm}_{P_1}(P^1 \times P^1) \simeq P^1 \times P^1.$$

Доказательство. Пусть P^2 — проективная плоскость, Q_1, Q_2 — две точки на ней, l — собственный образ прямой $Q_1 Q_2$ на поверхности $\mathrm{dil}_{(Q_1, Q_2)} P^2$. Поверхность $P^1 \times P^1$ изоморфна поверхности

$$\mathrm{cont}_l \circ \mathrm{dil}\, P_{(Q_1, Q_2)} P^2.$$



При этом изоморфизме пучки прямых на P^2, проходящих через точки Q_1, Q_2, отождествляются с двумя системами образующих на квадрике $P^1 \times P^1$. Отождествим $P^1 \times P^1$ с $\mathrm{cont}_l \circ \mathrm{dil}_{(Q_1, Q_2)} P^2$ и будем обозначать через P_1, P_2 как точки, фигурирующие в условии леммы, так и их бирегулярные образы на P^2 относительно этого отождествления. Тогда, как легко видеть,

$$\mathrm{elm}_{(P_2, P_1)}(P^1 \times P^1) = \mathrm{cont}_{(l, l_1, l_2)} \circ \mathrm{dil}_{(Q_1, Q_2, P_1, P_2)} P^2,$$

где l_1, l_2 — образы прямых Q_1P_1, Q_1P_2 соответственно. Далее

$$\mathrm{cont}_{(l, l_1, l_2)} \circ \mathrm{dil}_{(Q_1, Q_2, P_1, P_2)} = \mathrm{cont}_l \circ \mathrm{dil}_{(Q_1, Q_2)} \circ c(Q_1, P_1, P_2),$$

где $c(Q_1, P_1, P_2)$ — стандартное квадратичное преобразование плоскости с центрами Q_1, P_1, P_2. Это дает требуемый изоморфизм и доказывает лемму.

Теперь мы в состоянии установить следующий результат. На тривиальной поверхности $P^1 \times P^1$ выберем некоторое сечение $b_0 = P \times P^1$ и набор точек $Q_1, \ldots, Q_n \in b_0$. Положим

$$F_0 = P^1 \times P^1,\ F_n = \mathrm{elm}_{(Q_1, \ldots, Q_n)}(P^1 \times P^1),\ n \geqslant 1.$$

Символом b_n обозначим собственный образ сечения b_0 на F_n.

Предложение 2. *Всякая поверхность V, которую можно получить из $P^1 \times P^1$ последовательностью элементарных преобразований, изоморфна одной из поверхностей F_n, $n \geqslant 0$. Поверхность F_n с точностью до изоморфизма определяется числом n.*

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{elm}_Q F_0 \simeq F_1$ вне зависимости от положения точки Q в силу однородности поверхности F_0.

Проведем индукцию по числу элементарных преобразований, примененных к F_0. Предположим, что применение $\leqslant n$ преобразований приводит к поверхности F_r, $r \leqslant n$; докажем, что применение еще одного преобразования к F_r приводит либо к поверхности F_{r-1}, либо к F_{r+1}, тем самым оправдывая индукцию.

Можно считать, что $r \neq 0$. Если $Q \in b_r$, то $\mathrm{elm}_Q F_r \simeq F_{r+1}$. Если $Q \notin b_r$, то, пользуясь леммой 1 и перестановочностью элементарных преобразований в разных точках, получаем $\mathrm{elm}_Q F_r \simeq F_{r-1}$.

Это рассуждение не проходит, если Q лежит на одном из слоев, полученных в результате предшествующих бирациональных преобразований.

Тогда следует совершить еще пару элементарных преобразований с центрами Q_1 на b_r и Q_2 вне b_r, лежащих на разных слоях и притом не на тех, которые появились в результате предшествующих элементарных преобразований, а затем применить лемму 1 к преобразованию $\mathrm{elm}_{(Q_1,\, Q_2)}$. Это же соображение показывает, что F_n зависит лишь от n, но не от выбора точек $Q_1, \ldots, Q_n$. Предложение доказано.

Предложение 3. b_n — *единственная неприводимая кривая на поверхности* F_n *с отрицательным индексом самопересечения:* $b_n^2 = -n$.

Следствие. *Любая относительно минимальная линейчатая поверхность изоморфна* F_n, $n \neq 1$; *поверхности* F_n, F_m *при* $m \neq n$ *неизоморфны.*

Доказательство. Равенство $b_n^2 = -n$ вытекает из определения F_n. Пусть s — какой-нибудь слой F_n; классы b_n и s порождают группу одномерных циклов F_n с точностью до линейной эквивалентности: это очевидно для F_0, а при применении elm_P положение не меняется. Пусть $C \subset F_n$ — любая неприводимая кривая, не совпадающая с b_n и s; положим $(C, s) = d$, $(C, b_n) = d_0$. Так как $s^2 = 0$, имеем

$$C \sim db_n + (d_0 + dn)\, s,$$

откуда

$$C^2 = 2d\,(d_0 + n) \geqslant 0,$$

ибо $d \geqslant 0$, $d_0 \geqslant 0$. Утверждение доказано.

Замечание. Поскольку всякая рациональная линейчатая поверхность $F_n \xrightarrow{\pi} P^1$ имеет каноническое сечение с образом b_n, ее можно рассматривать как косое произведение с аффинной структурной группой.

§ 2. Доказательство теоремы 1 для иррациональных поверхностей

Пусть $V \xrightarrow{\pi} B$ — неособая линейчатая поверхность вместе с ее отображением на свой образ в многообразии Альбанезе; $V_0 = B \times P^1 \to B$ — тривиальная модель поля $k(V)$. Существует такая неособая модель V' поля $k(V)$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & V' \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_0"] \arrow[dd, "\pi'"] & \\ V \arrow[dr, "\pi"'] & & V_0 \arrow[dl, "\pi_0"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

где отображения V, V', V_0 на B естественные, а отображения $V' \to V$ и $V' \to V_0$ регулярны: действительно, в качестве V' можно взять неособую модель, доминирующую над графиком бирационального соответствия между V и V_0.

Лемма 2. *Всякая исключительная кривая* l *1-го рода на* V' *является неприводимой компонентой прообраза некоторой точки* $Q \in B$.

Доказательство. Это очевидно, ибо l — рациональная кривая, а род $B \geqslant 1$. (Отметим, что здесь существенно используется иррациональность поверхности V; для рациональной поверхности не только доказательство, но и результат перестает быть верен, что и служит главной причиной усложнения ситуации.)

Следствие. *Линейчатая иррациональная поверхность* V *содержит только конечное число исключительных кривых 1-го рода.*

(Это следствие также неверно для рациональных поверхностей.)

Лемма 3. *Прообраз* $(\pi')^{-1}(Q) \in V'$ *всякой точки* $Q \in B$ *связан и является объединением неособых рациональных кривых.*

Доказательство. Действительно, $(\pi')^{-1} = f_0^{-1} \circ \pi_0^{-1}$; кроме того, $\pi_0^{-1}(Q) \simeq P^1$, а f_0^{-1} разлагается в произведение конечного числа раздутий, каждое из которых добавляет неособую рациональную кривую и не нарушает связности. Лемма доказана. □

Назовем *взвешенным деревом* конечное дерево (граф без циклов), каждой вершине которого приписано целое число — ее вес. Поставим в соответствие каждому прообразу точки $(\pi')^{-1}(Q) \subset V'$ граф D'_Q, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами слоя $(\pi')^{-1}(Q)$, две вершины соединены симплексом в том и только в том случае, когда соответствующие компоненты пересекаются, и каждой вершине поставлено в соответствие целое неотрицательное число — индекс пересечения соответствующей компоненты, взятый с обратным знаком. Очевидно, D'_Q является взвешенным деревом (при этом веса неотрицательны). В дальнейшем мы будем рассматривать только взвешенные деревья и называть их просто деревьями.

Пусть D — некоторое дерево. Определим две операции, позволяющие получать из D новое взвешенное дерево D'.

Добавим к D одну новую вершину с весом 1, соединим ее одним симплексом с одной из старых вершин дерева D и увеличим вес этой старой вершины на единицу. Мы будем говорить, что так построенное новое дерево D' получилось из D элементарным раздутием 1-го рода, или что D получено из D' элементарным сжатием 1-го рода.

Добавим к D одну новую вершину с весом 1, соединим ее двумя симплексами с двумя вершинами дерева D, которые в D были соединены симплексами, устраним этот симплекс и увеличим веса его вершин на единицу каждый. Будем говорить, что новое дерево D' получено из D элементарным раздутием 2-го рода, или что D получено из D' элементарным сжатием 2-го рода. Оправдание этих определений состоит в следующем очевидном результате.

Лемма 4. *Пусть* $f\colon V' \to V$ — *регулярное отображение, сжимающее исключительную кривую 1-го рода* l *на* V', *лежащую над точкой* $Q \in B$; D'_Q, D_Q — *деревья прообразов точки* Q *на* V' *и* V *соответственно. Тогда* D'_Q *получается из* D_Q *элементарным раздутием 1-го или 2-го рода в зависимости от того, лежит образ* $f(l)$ *на одной неприводимой компоненте прообраза* Q *или на пересечении двух таких компонент. Наоборот, применяя элементарное раздутие или сжатие к дереву* D'_Q, *мы получаем дерево, соответствующее прообразу* Q *на поверхности, полученной из* V' *раздутием точки или сжатием некоторой компоненты слоя над* Q.

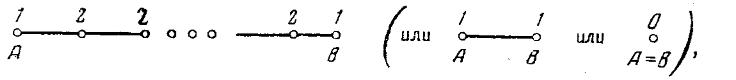
Произведение элементарных раздутий мы будем называть просто раздутием дерева; аналогично, произведение элементарных сжатий назовем сжатием.

Пусть $Q \in B$; дерево D'_Q прообраза Q на V' получается раздутием дерева, состоящего из одной вершины с весом нуль, которая соответствует прообразу Q на V_0. Отображение f затем индуцирует сжатие дерева D'_Q, причем, если модель V минимальна, в образе D_Q дерева D'_Q не должно быть ни одной вершины с весом единица. Мы покажем, в частности, что тогда D_Q состоит снова из одной вершины с весом нуль, т. е. прообраз точки Q на V является прямой. Наши последующие рассуждения будут относиться просто к взвешенным деревьям; затем мы интерпретируем их с помощью леммы 4.

Назовем *простым деревом* связное дерево, вес каждой вершины которого равен числу выходящих из нее симплексов. Концевой вершиной назовем вершину веса 1, концевым симплексом — симплекс, у которого есть вершина веса 1. Простое дерево вполне определяется своим графом.

Лемма 5. а) *Дерево является простым в том и только в том случае, если оно получается из одновершинного простого дерева последовательностью* *элементарных раздутий 1-го рода. Каждое сжатие простого дерева дает простое дерево.*

б) *Пусть D — простое дерево, A, B — две его вершины. Тогда существует простое дерево вида*



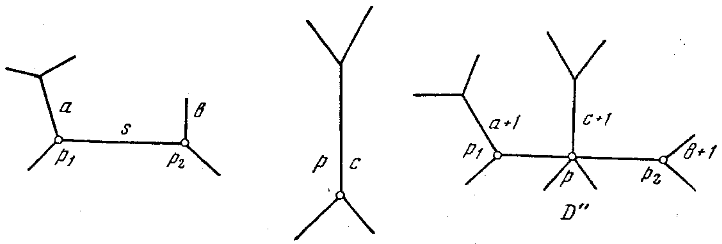
(2)

которое получается из D сжатием и из которого можно получить сжатиями A, B.

Доказательство. Первые два утверждения немедленно следуют из определений индукцией по числу вершин.

Последнее утверждение также почти очевидно: соединим A с B последовательностью симплексов и будем применять к D последовательно элементарные сжатия, пока в получающихся деревьях не останется концевых вершин, кроме A и B. Это возможно, ибо по определению простого дерева и элементарного сжатия последнее уничтожает концевые симплексы и только их. Но всякое простое дерево, имеющее концевые вершины только A и B, имеет вид, показанный на диаграмме (2). Лемма доказана.

Пусть теперь D — произвольное дерево, D' — простое дерево. Выберем любой симплекс s дерева D и любую вершину p дерева D'. Соединим вершину p двумя симплексами с концами p_1, p_2 симплекса s, устраним симплекс s и увеличим прежние веса вершин p, p_1, p_2 на единицу каждый. Будем говорить, что так построенное новое дерево D'' получено прививкой дерева D' к D; вершину p будем называть *привитой* вершиной.



Лемма 6. *Дерево D получается раздутием одновершинного простого дерева в том и только в том случае, когда оно получается из некоторого простого дерева D_0 последовательностью прививок простых деревьев.*

Доказательство. Пусть D получается последовательностью прививок простых деревьев. Сожмем последнее привитое дерево к той его концевой вершине, которой оно привито; затем устраним эту концевую вершину элементарным сжатием 2-го рода. Новое дерево является сжатием D и получается последовательностью меньшего числа прививок; индукция по числу прививок позволит сжать D к простому дереву, которое сжимается к одновершинному простому дереву по лемме 5 б).

Для доказательства обратного утверждения применим индукцию по числу вершин. Одновершинное простое дерево удовлетворяет утверждению. Пусть оно доказано для деревьев D с числом вершин r. Дерево D' с $r+1$ вершиной получается из некоторого дерева D элементарным раздутием. Если оно второго рода, то это прививка одновершинного простого дерева.

Предположим теперь, что D' получается из D элементарным раздутием 1-го рода. Тогда новая вершина соединяется симплексом со старой, принадлежащей в точности одному из простых деревьев, прививавшихся последовательно. Легко видеть, что можно сначала добавить эту вершину, а затем прививать все дерево: в существенном это сводится к ассоциативности сложения целых чисел. Лемма доказана. □

Обозначим символом Δ класс деревьев, получающихся раздутием из одновершинного простого дерева.

Лемма 7. а) *Сжатие любого дерева класса Δ принадлежит этому классу.*

б) *Если дерево класса Δ не имеет вершин веса* 1, *то оно является одновершинным простым деревом.*

Доказательство. Первое утверждение нужно проверить для элементарных сжатий; для этого достаточно провести рассуждение из второй части доказательства леммы 6 в обратном направлении. Второе утверждение немедленно вытекает из леммы 6.

Действительно, дерево, прививаемое последним, всегда дает хотя бы одну вершину веса 1, кроме случая, когда это последнее дерево единственное и само состоит из одной вершины. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть дерево D класса Δ получено последовательностью прививок к простому дереву D_0. Если дерево D можно сжать к своей вершине A, то A принадлежит D_0.*

Доказательство. Предположим, что A принадлежит какому-то из последовательности привитых деревьев D_1, отличному от D_0. Пусть $p \in D_1$ — привитая вершина этого дерева. Если $p \neq A$, то вес p в дереве D не меньше двух, ибо D принадлежит классу Δ; так как это остается верным в силу леммы 7 а) для любого сжатия дерева D, содержащего A, мы никогда не сможем сжать вершину p, не сжав предварительно A, так что этот случай невозможен.

Предположим теперь, что дерево D_1 состоит из единственной вершины A. В процессе сжатия D к вершине A мы должны в каком-то месте прийти к дереву, которое в силу леммы 7 а) принадлежит классу Δ и получается прививкой A к простому дереву D_0', являющемуся сжатием дерева D_0. Но дерево D_0' содержит симплекс, на который привита вершина A, и вес вершин этого симплекса $\geqslant 2$, так что их нельзя сжать, не сжав предварительно A. Полученное противоречие доказывает лемму.

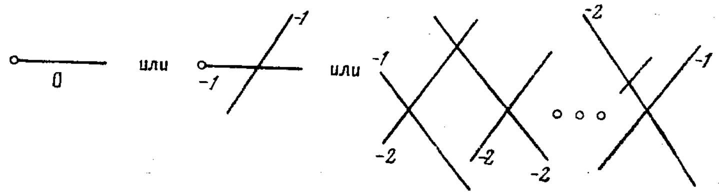
Следствие. *Пусть дерево D принадлежит классу Δ и сжимаемо к двум своим вершинам A, B. Тогда D сжимаемо к дереву вида* (2).

Доказательство. В силу леммы 8 вершины A, B принадлежат простому дереву D_0. Мы можем сжать дерево D до D_0, а затем применить лемму 5 б) к D_0.

Теперь докажем, что геометрическое истолкование полученных нами результатов приводит к доказательству той части теоремы 1, которая относится к иррациональным поверхностям.

В самом деле, пусть в диаграмме (1) поверхность V относительно минимальна. Тогда дерево каждого слоя $\pi^{-1}(Q)$ не должно содержать вершин веса единица. С другой стороны, такое дерево является сжатием дерева слоя $(\pi')^{-1}(Q)$, принадлежащего классу Δ. В силу леммы 7 б) дерево слоя $\pi^{-1}(Q)$ является одновершинным, т. е. $\pi^{-1}(Q) \simeq P^1$.

Далее, пусть в дереве D_Q' слоя $(\pi')^{-1}(Q)$ A, B — вершины, соответствующие собственным прообразам слоев $\pi^{-1}(Q)$ и $\pi_0^{-1}(Q)$. Тогда в силу следствия из леммы 8 и леммы 4 поверхность V' можно выбрать так, что слой $(\pi')^{-1}(Q)$ будет иметь вид



где крайние кривые являются собственными прообразами слоев $\pi^{-1}(Q)$ и $\pi_0^{-1}(Q)$ соответственно. Но, очевидно, это и есть ограничение над Q графика произведения элементарных преобразований, примененных к V_0.

Таким образом, все наши утверждения доказаны.

§ 3. Циклы над поверхностью

Введем несколько определений *. Условимся временно отождествлять всякую поверхность V с подмножеством локальных подколец поля $k(V)$, элементами которого являются локальные кольца точек V (рациональных над полем k). Различные модели поля $k(V)$ тем самым отождествляются с различными множествами локальных подколец; допустимые множества, как известно, можно охарактеризовать аксиоматически.

Будем говорить, что точка P' одной из моделей доминирует над точкой P другой модели, $P' > P$, если отношение доминации выполнено для соответствующих локальных колец. Всякую точку, доминирующую над какой-нибудь точкой модели V поля $k(V)$ (в частности, всякую точку V), мы будем называть точкой (лежащей) *над* V.

Для всякой точки P над V существует единственная точка $Q \in V$ с условием $P > Q$. Если $P = P_n > P_{n-1} > \ldots > P_0 = Q$ — последовательность максимальной длины, то точка P, согласно классической терминологии, является бесконечно близкой к Q порядка n. Мы будем говорить, что точка P лежит над точкой Q.

Циклом над V называется элемент свободной абелевой группы, порожденной неприводимыми кривыми на V и точками над V. Тем самым группа циклов является прямой суммой группы дивизоров на V и группы нульмерных циклов над V.

Для всякого цикла $C - \Sigma m_i P_i$ (в обозначениях такого вида мы молчаливо подразумеваем, что C — дивизор, P_i — точки над V) определим *арифметический род*, полагая

$$p_a(C - \Sigma m_i P_i) = p_a(C) - \Sigma m_i(m_i - 1)/2.$$

Для всякой пары циклов $C - \Sigma m_i P_i$, $D - \Sigma n_i P_i$ определим их индекс пересечения, полагая

$$(C - \Sigma m_i P_i, D - \Sigma n_i P_i) = (C, D) - \Sigma m_i n_i.$$

(Иначе говоря, индекс пересечения билинеен, подгруппы дивизоров и нульмерных циклов ортогональны, наконец, $P^2 = -1$ и $(P, Q) = 0$ при $P \neq Q$.)

Пусть $Z(V)$ — группа циклов над V (с этого места все поверхности полные и неособые). Группа $Z(V)$ обладает сильными функториальными свойствами относительно бирациональных преобразований, которые можно резюмировать следующим образом.

Пусть $f = \mathrm{dil}_P\colon V \to V'$. Определим гомоморфизм (не сохраняющий размерность чистого цикла!) $f_*\colon Z(V) \to Z(V')$, полагая $f_*(P) = \mathrm{dil}_P P$, $f_*(Q) = f(Q)$ при $Q \neq P$, $f_*(C)$ — полный образ кривой C относительно f. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. *Для всякого бирационального отображения $f\colon V \to V'$ существует гомоморфизм $f_*\colon Z(V) \to Z(V')$, который можно определить, разлагая f в произведение отображений вида dil_P и cont_l и пользуясь формулой $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$. Гомоморфизм f_* определен однозначно; $Z(V)$ превращается таким образом в ковариантный функтор на категории полных неособых поверхностей над k, в которой морфизмами являются бирациональные отображения.*

Лемма 9. *Для любого бирационального отображения $f\colon V \to V'$ и любых циклов $Z, Z' \in Z(F)$ имеют место тождества*

$$(Z, Z') = (f_*(Z), f_*(Z')), \tag{3}$$

$$p_a(Z) = p_a(f_*(Z)). \tag{4}$$

Доказательство. В силу предложения 4 можно считать, что $f = \mathrm{dil}_P$. Тогда обе формулы немедленно получаются из формул, описывающих поведение арифметического рода и индекса пересечения *дивизориальных* циклов при раздутии точки.

Теперь отметим, что для любой функции $\varphi \in k(V)$ и любого бирационального отображения $f\colon V \to V'$ имеет место соотношение

$$f_*((\varphi)) \doteq (f_*\varphi),$$

где $f_*\varphi$ — функция на V', индуцированная φ. Следовательно, подгруппа главных дивизоров $Z_l(V)$ в группе $Z(V)$ изоморфно отображается при всех гомоморфизмах f_*. Тем самым, f_* переносится на факторгруппу $Z(V)/Z_l(V)$. Аналогично обстоит дело с арифметическим родом и индексом пересечения, которые, как легко видеть, зависят лишь от класса циклов $\mathrm{mod}\, Z_l(V)$. Смежный класс цикла Z по подгруппе $Z_l(V)$ мы будем обозначать символом $\|Z\|$ и называть иногда линейной системой. Линейная эквивалентность циклов, как обычно, обозначается символом $\sim$.

Опишем в качестве примера действие $(\mathrm{elm}_P)_*$ на F_n: этот результат понадобится нам в дальнейшем. Заметим, что группа $Z(F_n)/Z_l(F_n)$ порождена классами базы b_n, слоя s_n и всех точек над F_n.

Лемма 10. *Пусть $f = \mathrm{dil}_P\colon F_n \to F_{n\pm 1}$. Тогда имеем:*

а) *при* $P \in b_n$:

$$f_*(b_n) \sim b_{n+1} + s_{n+1} - P^*,$$

$$f_*(s_n) \sim s_{n+1},$$

$$f_*(P) \sim s_{n+1} - P^*,$$

где P^* — собственный образ слоя F_n, проходящего через точку P;

б) *при* $P \notin b_n$:

$$f_*(b_n) \sim b_{n-1} - P^*,$$

$$f_*(s_n) \sim s_{n-1},$$

$$f_*(P) \sim s_{n-1} - P^*,$$

где P^* — собственный образ слоя F_n, проходящего через точку P.

Доказательство этой леммы получается непосредственным применением определений.

§ 4. Доказательство теоремы 1 для рациональных поверхностей

Мы докажем здесь следующий результат, который в соединении с предложениями 2 и 3 устанавливает справедливость теоремы 1 для рациональных поверхностей.

Предложение 5. *Всякая неособая рациональная поверхность, не имеющая исключительных кривых 1-го рода, изоморфна либо проективной плоскости P^2, либо одной из поверхностей F_n, $n \neq 1$.*

---

* Изложение теории линейных систем с предписанными базисными условиями в этом параграфе является вариантом метода Нагаты [39].

Предварительно установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 11. *Пусть $L \subset P^2$ — линейный класс эквивалентности прямой на проективной плоскости. Линейная система $M = dL - \Sigma m_i P_i$ $(d \neq 0)$ циклов над P^2 не может одновременно обладать следующими свойствами:*

1) $M^2 = -1$, $p_a(M) = 0$,
2) $m_0 \geqslant m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k \geqslant 0$,
3) $m_0 \geqslant \sum_{i=1}^{h} m_i$ *для некоторого* h, $1 \leqslant h \leqslant k$,
4) $m_0 + m_1 \leqslant d$,
5) $m_0 + 2m_{h+1} \leqslant d$.

Доказательство. Соотношения 1) можно переписать в виде

$$d^2 - \sum_{i=0}^{k} m_i^2 = -1,\ d(d-1) - \sum_{i=0}^{k} m_i(m_i - 1) = 0.$$

Отсюда следует равенство

$$3d - \sum_{i=0}^{k} m_i = 1.$$

Пользуясь свойствами 2), 3), находим

$$1 = 3d - \sum_{i=0}^{k} m_i \leqslant 3d - m_0 - m_1 - \sum_{i=h+1}^{k} m_i,$$

откуда

$$\sum_{i=h+1}^{k} m_i + 1 \leqslant 3d - m_0 - m_1. \tag{5}$$

Но $m_{h+1} \geqslant 0 > -1$, так что $d^2 < \sum_{i=0}^{k} m_i^2 + m_{h+1}$;

пользуясь свойствами 2), 3), 4) и неравенством (5), находим

$$\begin{aligned} d^2 &< \sum_{i=0}^{k} m_i^2 + m_{h+1} \leqslant m_0^2 + m_1 \sum_{i=1}^{h} m_i + m_{h+1} \sum_{i=h+1}^{k} m_i + m_{h+1} \leqslant \\ &\leqslant m_0^2 + m_1 \sum_{i=1}^{h} m_i + m_{h+1}(3d - m_0 - m_1) \leqslant \\ &\leqslant m_0^2 + m_1 m_0 + m_{h+1}(3d - m_0 - m_1) = \\ &= (m_0 + m_1)(m_0 - m_{h+1}) + 3dm_{h+1} \leqslant \\ &\leqslant d(m_0 - m_{h+1}) + 3dm_{h+1} = d(m_0 + 2m_{h+1}), \end{aligned}$$

что противоречит свойству 5), ибо $d \neq 0$.

Лемма 12. *Пусть $C - \sum_{i=1}^{k} m_i P_i$ — линейная система над F_n, обладающая следующими свойствами:*

1) $(C, b_n) = d_0 \geqslant 0$, $(C, s_n) = d \geqslant 0$,
2) $0 \leqslant m_i \leqslant \frac{d}{2}$ *для всех* i, $0 \leqslant i \leqslant k$,
3) $C^2 = -1$, $p_a(C) = 0$.

Тогда либо $n = 1$, C — класс $\|b_1\|$, и все $m_i = 0$, либо $C = 0$, $k = 0$, $m_0 = 1$.

Доказательство. Можно считать, что точки P_i занумерованы так, что $m_i \geqslant m_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Предположим сначала, что $m_0 \neq 0$ и либо $d \neq 0$, либо $d_0 \neq 0$.

1) Пусть $n \geqslant 2$. Сделаем элементарные преобразования с центрами в $(n-1)$-й точке в общем положении (не лежащих на базе b_n). При этом в силу леммы 10 система $C - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i$ перейдет в следующую систему на поверхности F_1:

$$C' = \|(dn + d_0)s_1 + db_1 - \sum_{i=0}^{n-1} dP_i^* - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i\|$$

(точку P_i и ее собственный образ мы обозначаем одним и тем же символом). После преобразования cont_{b_1} система C' перейдет в систему

$$C'' = (nd + d_0)L - ((n-1)d + d_0)Q - \sum_{i=0}^{n-1} dP_i^* - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i$$

на плоскости P^2, где Q — образ b_1, а бирегулярно соответствующие точки, как всегда, обозначаются одной и той же буквой. Система C'' обладает всеми свойствами, перечисленными в лемме 11, с $h = n$. Следовательно, рассматриваемый случай исключается.

2) Предположим теперь, что $n = 0$. В силу симметрии F_0 относительно перестановки прямых сомножителей можно считать, что $d_0 \geqslant d$. Под действием преобразования $(\mathrm{elm}_P)_*$, $P \neq P_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$ система

$$C - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i = \|db_0 + d_0 s_0 - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i\|$$

перейдет в систему

$$\|(d + d_0)s_1 + db_1 - dP^* - \Sigma m_i P_i\| \text{ на } F_1.$$

Применим затем преобразование $(\mathrm{cont}\, b_1)_*$; в результате мы придем к системе

$$(d + d_0)L - d_0 Q - dP^* - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i$$

на плоскости P^2, которая удовлетворяет условиям леммы 11 с $h = 1$. Полученным противоречием исключается и этот случай.

3) Остается разобрать возможность $n = 1$.

Если $m_0 \leqslant d_0$, применим преобразование cont_{b_1} к нашей системе. Получающаяся система

$$(d + d_0)L - d_0 Q - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i$$

удовлетворяет условиям леммы 11 с $h = 1$ и приводит к противоречию.

Случай $m_0 > d_0$ сводится к случаю $m_0 \leqslant d_0$ преобразованием $\mathrm{dil}_{P_0} \circ \mathrm{cont}_{b_1}$. Действительно, наша система перейдет тогда в систему

$$\|(d + d_0 - m_0)s_1 + m_0 b_1 - d_0 P - \sum_{i=1}^{k} m_i P_i\|$$

на поверхности F_1.

Тем самым в единственном случае, не приведшем нас к противоречию, $n = 1$ и либо $m_0 = 0$, либо $d = d_0 = 0$.

Если $m_0 = 0$, то в силу условия 1) леммы 12 и предложения 3 имеем $C = \|b_1\|$.

Если же $d = d_0 = 0$, то $m_0 = 1$, $m_i = 0$ при $i \geqslant 1$, ибо $\Sigma m_i^2 = 1$. Лемма доказана.

Л е м м а 13. *Всякую линейную систему на поверхности* F_n

$$\| db_n + d_0 s_n - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i \|, \; m_i \geqslant 0,$$

можно перевести последовательностью элементарных преобразований в систему на поверхности F_r *вида*

$$\| db_r + d_0' s_r - \sum_{i=0}^{k} m_i' P_i' \|, \quad d \geqslant 0,$$

где $0 \leqslant m_i' \leqslant \frac{d}{2}$ *для всех* i, $0 \leqslant i \leqslant k'$, *для которых* $P_i' \in F_r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $m_0 > \frac{d}{2}$. Применим преобразование elm_{P_0} в силу леммы 10, наша система перейдет тогда в систему

$$\| db_{n+1} + (d + d_0 - m_0) s_{n+1} - (d - m_0) P^* - \sum_{i=1}^{k} m_i P_i \|,$$

если $P_0 \in b_n$, или в систему

$$\| db_{n-1} + (d_0 - m_0) s_{n-1} - (d - m_0) P^* - \sum_{i=1}^{k} m_i P_i \|,$$

если $P_0 \notin b_n$. Так как $d - m_0 < \frac{d}{2}$, количество коэффициентов m_i с $m_i > \frac{d}{2}$ уменьшилось на единицу. Продолжая таким образом, мы придем к требуемой системе. Лемма доказана.

Для формулировки последней леммы введем следующее определение. Назовем цикл $C - \Sigma m_i P_i$ над V *правильным*, если выполнены следующие условия:

а) если $P_i > P_j$, то $m_i \leqslant m_j$,

б) $C > 0$, и для любой точки $P_i \in V$ имеет место неравенство $m_i \leqslant m(P_i, C)$ (кратность точки P_i на цикле C).

Л е м м а 14. *Пусть* $f\colon V \to V'$ — *регулярное отображение,* $C - \Sigma m_i P_i$ — *правильный цикл над* V, *причем ни одна из компонент* C *не стягивается отображением* f. *Тогда* $f_*(C - \Sigma m_i P_i)$ — *правильный цикл над* V'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить это для случая $f = \mathrm{cont}_l$. Тогда имеем $f_*(C) = C' - (C, l) P$, где $P = \mathrm{cont}_l\, l$, C' — собственный образ цикла C.

Условие а) выполнено, потому что если $P_i > P$, то P_i лежит над точкой $P_k \in l$, и, значит, $(C, l) \geqslant m(P_k, C) \geqslant m_k \geqslant m_i$. Условие б) выполнено, потому что $(C, l) = m(P, C)$. Лемма доказана.

Применять ее нам придется в случае, когда цикл над V является просто эффективным дивизором C. Заметим, что в этом случае лемма верна, даже если не предполагать f регулярным, но фундаментальные точки f не лежат на C: действительно, $f_*(C) = f_{2*} \circ f_{1*}(C)$, где f_1 — отображение раздутия, так что $f_{1*}(C)$ — эффективный дивизор, а f_2 — регулярное отображение сжатия.

Приступим теперь к доказательству предложения 5. Предположим, что существует неособая поверхность V, не доминирующая бирационально ни над P^2, ни над F_n. Тогда существует подобная поверхность, такая, что $\bar V = \mathrm{dil}_P V$ для некоторой точки $P \in V$ уже доминирует над P^2 или над F_n. Всегда можно считать, что $\bar V$ доминирует над F_n, ибо если $\bar V$ доминирует над P^2, то на P^2 есть фундаментальная точка Q, не являющаяся образом $l = \mathrm{dil}_P(P)$, так что $\bar V$ доминирует над $\mathrm{dil}_Q P^2 \simeq F_1$.

Пусть $f\colon \bar V \to F_n$ — рассматриваемое отображение доминации. Рассмотрим систему

$$f_*(\| l \|) = (dn + d_0) s_n + db_n - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i \qquad (6)$$

на поверхности F_n. Все точки P_i, лежащие *на* F_n, являются фундаментальными относительно f. Применяя преобразование elm_P с центром в такой точке и определяя отображение g по коммутативности из диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bar V \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ F_n \arrow[r, "\mathrm{elm}_P"] & F_{n\pm 1} \end{tikzcd}$$

мы получим тем самым новое отображение доминации g. Пользуясь леммой 13, мы сможем добиться, таким образом, выполнения неравенств $m_i \leqslant \frac{d}{2}$ для всех i, для которых $P_i \in F_n$; в силу леммы 14 тогда эти неравенства будут справедливы для всех i. Будем считать, что это верно уже для отображения f.

Пользуясь сохранением арифметического рода и индекса пересечения при бирациональных преобразованиях, мы сможем применить тогда к системе (6) лемму 12 (неравенства $d \geqslant 0$, $(dn + d_0) \geqslant 0$ следуют из того, что система $\| (dn + d_0) s_n + db_n \|$ содержит собственный f-образ кривой l).

Если $n = 1$, $\| (dn + d_0) s_n + db_n \| = \| b_1 \|$, $m_i = 0$, то $\bar V$ доминирует над $\mathrm{cont}_{b_1} F_1 = P^2$ и, значит, V доминирует над P^2, вопреки предположению.

Если же $d = d_0 = 0$, то отображение $f\colon \bar V \to F_n$ сжимает l в точку, и, значит, V доминирует над F_n, также вопреки предположению.

Доказательство предложения 5 и теоремы 1 закончено.

§ 5. Численные инварианты

В этом и следующем параграфах мы докажем известную теорему Нетера о структуре группы бирациональных автоморфизмов проективной плоскости P^2. Излагаемое ниже доказательство является вариантом доказательства Александера [3].

Т е о р е м а 2. *Всякий бирациональный автоморфизм проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем констант можно представить в виде произведения проективного автоморфизма и стандартных квадратичных преобразований Кремоны* (напомним, что стандартное квадратичное преобразование Кремоны $c(P_1, P_2, P_3)$ с центром в тройке точек на плоскости P^2 переводит каждую точку в прямую, проходящую через другие две точки).

Прежде всего опишем действие преобразования $c(P_1, P_2, P_3)$ на линейную систему $dL - \sum_{i=1}^{k} m_i P_i$ циклов над P^2 (L — система прямых на P^2). Нижеследующий результат проверяется ссылкой на определение f_*: нужно представить $c(P_1, P_2, P_3)$ в виде произведения трех раздутий и трех сжатий и посмотреть, как каждое из них действует на точки и прямые.

Л е м м а 15. *Положим* $a = d - (m_1 + m_2 + m_3)$, $c = c(P_1, P_2, P_3)$, *тогда*

$$c_*\Big(dL - \sum_{i=1}^{k} m_i P_i\Big) = (d + a) L - \sum_{i=1}^{3} (m_i + a) P_i + \sum_{i \geqslant 4} m_i P_i^*,$$

где P_i^* — *собственный образ точки* P_i.

Пусть теперь f: $P^2 \to P^2$ — некоторый бирациональный автоморфизм плоскости. Основной объект, с которым мы будем работать,— линейная система

$$f_*(L) = dL - \sum_{i=0}^{k} m_i P_i. \tag{7}$$

Точки P_i, $i = 0, \ldots, k$ мы будем называть фундаментальными точками системы (7). Набор чисел $(d, m_0, \ldots, m_k)$ является численной характеристикой автоморфизма f, и мы сначала изучим ее свойства. Число d назовем *степенью* автоморфизма f и системы $f_*(L)$.

Прежде всего, учитывая, что f_* сохраняет арифметический род и индекс самопересечения, получаем

$$\sum_{i=0}^{k} m_i^2 = d^2 - 1, \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{k} m_i (m_i - 1) = (d-1)(d-2). \tag{9}$$

Перенумеруем точки P_i так, чтобы выполнялись неравенства $m_0 \geqslant m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k$, и будем называть m_0 старшей кратностью системы (7). Из равенства (8) следует, что при $d = 1$ все m_i равны нулю, так что f — проективный автоморфизм.

Впредь мы всегда будем считать, что $d \geqslant 2$, и, следовательно, $m_0 \neq 0$ и $m_1 \neq 0$. В силу леммы 14 и применения к ней из равенства (7) следует, что точка P_0 лежит *на плоскости* P^2 и, кроме того, $d > m_0$.

Определим число $j \geqslant \frac{1}{2}$ формулой

$$2j = d - m_0$$

и целое число h условиями

$$m_h > j \geqslant m_{h-1}.$$

Л е м м а 16.

$$\text{а) } 2j \geqslant m_1; \text{ б) } h \geqslant 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство а) равносильно неравенству $m_0 + m_1 \leqslant d$. Для доказательства этого последнего заметим, что в силу (7)

$$d - m_0 - m_1 = (f_*(L), L - P_0 - P_1),$$

а индекс пересечения справа неотрицателен, потому что его можно вычислять на поверхности $\mathrm{dil}_{(P_0, P_1)} P^2$, где полный образ цикла $l - P_0 - P_1$, l — прямая, проходящая через точки P_0, P_1^*, совпадает с собственным образом l' прямой l, т. е. является кривой, а в образе системы L существует цикл, дивизориальная часть которого эффективна и не содержит l' в качестве компоненты.

Для доказательства неравенства б) умножим равенство (9) на некоторое число s, равенство (8) — на $1 - s$ и сложим получившиеся соотношения:

$$\sum_{i=0}^{k} m_i (m_i - s) = (d-1)(d - 3s + 1). \tag{10}$$

В равенстве (10) положим $s = j$, отбросим слева все члены с $i > h$, которые неположительны, а справа вычтем $3j - 1$:

$$\sum_{i=0}^{h} m_i (m_i - j) > d(d - 3j) = d(m_0 - j).$$

Перенося первый член вправо, получим $\sum_{i=1}^{h} m_i (m_i - j) > 2j(m_0 - j)$. Учитывая, что $2j \geqslant m_1 \geqslant m_i$, получим

$$\sum_{i=1}^{h} (m_i - j) > m_0 - j. \tag{11}$$

Так как $m_1 - j \leqslant m_0 - j$, отсюда следует, что $h \geqslant 2$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из формулы (11) следует, что $\sum_{i=1}^{h} m_i > d - (h-3)j$, откуда

$$\sum_{i=1}^{h} m_i > d, \text{ если } h \geqslant 3. \tag{12}$$

Далее, так как $h \geqslant 2$ и $m_r, m_s \geqslant j$ для любых $r, s \leqslant h$, имеем

$$m_0 + m_r + m_s > m_0 + 2j = d. \tag{13}$$

Мы скоро увидим, что именно это неравенство является мотивировкой введения числа h.

§ 6. Алгоритмы упрощения

Мы изучим теперь, как действует на численную характеристику системы (7) стандартное преобразование Кремоны, одним из центров которого является точка P_0.

Если бы среди точек $P_0, \ldots, P_h$ нашлись две, отличные от P_0 и лежащие на P^2, скажем P_r, P_s, то, применяя к $f_*(L)$ отображение $(c(P_0, P_r, P_s))_*$ и пользуясь леммой (15) и неравенством (13), мы немедленно пришли бы к системе, степень которой меньше d. Это условие, однако, далеко не всегда выполнено и при неблагоприятном расположении точек $P_0, \ldots, P_h$ на и над плоскостью «упростить» систему $f_*(L)$ можно лишь специально подобранной последовательностью квадратичных преобразований. При этом удобнее следить за изменением параметров j, h, чем d.

Мы опишем сейчас в серии лемм упрощающие преобразования в зависимости от расположения точек P_i. Отметим прежде всего, что при применении стандартного квадратичного преобразования c с одним из центров P_0 (которыми мы только и будем пользоваться) параметр j может либо сохранить прежнее значение, либо уменьшиться.

В самом деле, пусть d', m' — соответственно степень и старшая кратность новой линейной системы. Тогда

$$2j = d - m_0 = (f_*(L), L - P_0) = (c_*(L), c_*(L - P_0)).$$

Но в силу леммы 15

$$c_*(L - P_0) = L - P_0.$$

Поэтому последний индекс пересечения равен $d' - m_0'$, где m_0' — новая кратность точки P_0. Но

$$d' - m_0' \geqslant d' - m' = 2j'.$$

Этим установлена справедливость нашего замечания. Отметим, что $j' < j$ в том и только в том случае, когда P_0 перестает быть точкой старшей кратности.

Будем говорить, что система вида (7) с параметрами (j', h') проще системы с параметрами (j, h), если $(j', h') < (j, h)$ относительно лексикографического порядка. Во всех нижеследующих леммах мы применяем к системе (7) одно стандартное квадратичное преобразование и предполагаем, что степень получившейся системы $\geqslant 2$, не оговаривая это специально.

Лемма 17. *Предположим, что в системе (7) две разные точки из множества $P_1, \ldots, P_n$, скажем, P_r, P_s, лежат на плоскости P^2. Тогда система $c_* \circ f_* (L)$, $c = c (P_0, P_r, P_s)$, проще системы (7).*

Доказательство. Имеем в силу леммы 15

$$c_* \circ f_* (L) = (d + a) L - (m_0 + a) P_0 - (m_t + a) P_t - (m_s + a) P_s - \\ - \Sigma m_i P_i^*, \ i \neq 0, r, s,$$

где $a = d - m_0 - m_r - m_s$. Если P_0 перестает быть точкой максимальной кратности, то новая система проще старой в силу сделанного выше замечания, так как тогда $j' < j$. В противном случае $j' = j$, но тогда $h' = h - 2$, потому что $m_r + a = d - m_0 - m_s = 2j - m_s < j = j'$, и аналогично $m_s + a < j'$, тогда как остальные кратности не изменились. Лемма доказана.

Лемма 18. *Предположим, что точек P_r, P_s, удовлетворяющих условиям леммы 17, найти нельзя. Пусть A, B — две точки на P^2, такие, что на прямых P_0A, P_0B и AB не лежит ни одна из точек P_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и направления P_0A, P_0B не соответствуют ни одной из точек, лежащих над P_0. Положим $c = c (P_0, A, B)$. Тогда*

а) *для системы $c_* \circ f_* (L)$ имеем $j' = j$ и $h' = h + 2$;*

б) *над точкой максимальной кратности P_0 системы $c_* \circ f_* (L)$ не лежит никакая другая фундаментальная точка этой системы.*

Доказательство. а) Так как $d - m_0 > 0$, P_0 остается точкой максимальной кратности. Фундаментальными точками системы $c_* \circ f_* (L)$ будут еще собственные образы точек $P_1, \ldots, P_k$ с прежними кратностями и точки A, B с кратностями $d - m_0 = 2j$ каждая (лемма 15). Но $j' = j$, и поэтому множество фундаментальных точек с кратностями $\geqslant j'$ будет состоять из образов точек $P_1, \ldots, P_h$ и точек A, B. Следовательно, $h' = h + 2$.

б) Точка P_0 остается точкой максимальной кратности. Точки A, B выбраны так, что собственные образы фундаментальных точек системы (7), лежавших над P_0, после преобразования c будут лежать на и над прямой AB, остальные фундаментальные точки не смогут стать бесконечно близкими к P_0. Лемма доказана.

Лемма 19. *Предположим, что в системе (7) ни одна из фундаментальных точек не лежит над P_0, но для некоторых r, $s \leqslant h$ точка P_r бесконечно близка к P_s, порядка 1. Выберем точку C на плоскости так, чтобы на прямых P_0C и P_sC не лежала никакая фундаментальная точка и направление P_sC не соответствовало точке P_r. Положим $c = c (P_0, P_s, C)$. Тогда:*

а) *на прямой P_0P_s не лежит ни одна фундаментальная точка системы (7) кратности $> j$ и направление этой прямой не соответствует ни одной такой точке над P_s;*

б) *система $c_* \circ f_* (L)$ либо проще системы (7), либо $j' = j$, $h' = h$ и количество фундаментальных точек системы $c_* \circ f_* (L)$, лежащих на плоскости и имеющих кратность $\geqslant j$, больше аналогичного числа для системы (7).*

Доказательство. а) Если бы на прямой $l = P_0P_s$ лежала такая точка P_t (возможно, бесконечно близкая к P_s), то, как выше в подобных случаях, имело бы место неравенство

$$d - m_0 - m_s - m_t = (L - P_0 - P_s - P_t, f_* (L)) = \\ = (g_* (l - P_0 - P_s - P_t), g_* \circ f_* (L)) \geqslant 0, \ g = \mathrm{dil}_{(P_0, P_s, P_t)},$$

противоречащее неравенству (13).

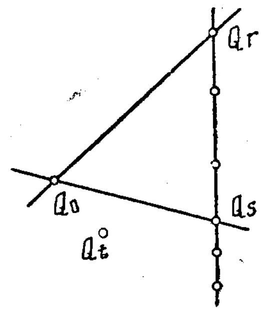
б) Можно считать, что P_0 остается точкой максимальной кратности. По лемме 15, кратность C будет $d - m_0 - m_s < j = j'$, а кратностями точек P_0 и P_1 станут соответственно числа $d - m_s > j = j'$ по предположению о максимальности и $d - m_0 = 2j > j'$. Поэтому $h' = h$.

Все разные фундаментальные точки на плоскости системы (7) будут иметь разные образы, снова лежащие на плоскости в силу выбора точки C и утверждения а). Кроме того, на прямой P_0C появится фундаментальная точка — образ точки P_r, и она не совпадет ни с P_0, ни с C. Этим устанавливается второе утверждение и завершается доказательство леммы.

Теперь мы можем описать алгоритм упрощения системы (7).

Если система (7) удовлетворяет условию леммы 17, то ее можно либо упростить преобразованием, описанным в этой лемме, либо сразу прийти с помощью этого преобразования к проективному автоморфизму, соответствующему системе степени 1.

В противном случае применим к системе (7) преобразование леммы 18, а затем несколько раз подряд преобразование леммы 19. Если по дороге мы добьемся упрощения системы, то цикл закончен; если придем к системе степени единица, то алгоритм закончен. Если ни одно из этих событий не случится, мы придем в силу лемм 18, 19 к системе с параметрами $(j, h + 2)$, у которой все фундаментальные точки $Q_1, \ldots, Q_{h+2}$ кратности $> j$ лежат на плоскости. Поскольку $h + 2 \geqslant 4$, в силу неравенства (12) точки $Q_1, \ldots$ $\ldots, Q_{h+2}$ не лежат все на одной прямой. Аналогично, в силу неравенства (13), точки Q_0, Q_r, Q_s, r, $s \leqslant h + 2$ не лежат на одной прямой.



Тогда можно найти точки Q_r, Q_s, r, $s \leqslant h + 2$, такие, что есть еще две точки Q_u, Q_v, u, $v \leqslant h + 2$, не лежащие ни на одной из прямых Q_0Q_r, Q_rQ_s, Q_0Q_s. (Действительно, если на прямой Q_r, Q_s лежат все, кроме одной, из точек Q, скажем, Q_t, возьмем вместо пары Q_r, Q_s пару Q_s, Q_t). После этого применим последовательно пару квадратичных преобразований $c (Q_0, Q_r, Q_s)$ и затем $c (Q_0, Q_u, Q_v)$. По лемме 17 мы придем либо к системе степени 1, либо к системе с меньшим j, либо к системе с параметрами $(j, h - 2)$, т. е. достигнем желательного упрощения.

Мы описали цикл алгоритма, позволяющий перейти от системы (7) к более простой системе последовательностью квадратичных преобразований. Интегрируя этот цикл и учитывая, что последовательность линейных систем, из которых каждая следующая проще предыдущей, обрывается, мы придем к системе степени единица, то есть к соотношению вида:

$$c_r \circ c_{r-1} \circ \ldots \circ c_1 \circ f = g,$$

где c_i — квадратичные автоморфизмы плоскости, а g — проективный автоморфизм. Очевидно, это утверждение устанавливает справедливость теоремы 2.

§ 7. Бирегулярная классификация линейчатых поверхностей

Основным шагом при бирегулярной классификации рациональных поверхностей было снабжение любой рациональной минимальной модели структурой линейчатой поверхности. Линейчатые поверхности (не только рациональные) описываются при помощи элементарных преобразований (см. теорему 1, § 1). Этот метод дает точную классификацию рациональных поверхностей, однако в случае иррациональных линейчатых поверхностей его уже недостаточно. Классификация иррегулярных линейчатых поверхностей основывается на изучении их как локально-тривиальных расслоений над алгебраической кривой со слоем — проективной прямой и группой дробнолинейных преобразований.

Множество классов бирегулярной эквивалентности алгебраических проективных одномерных расслоений есть $H^1(X, \mathbf{PGL}(1))$. Это же верно для алгебраических расслоений с любой группой G, т. е. множество классов расслоений находится во взаимно однозначном соответствии с $H^1(X, \mathbf{G})$, где G — пучок ростков отображений базы X в G. Каждое проективное пространство P можно рассматривать как многообразие одномерных подпространств векторного пространства E. Для каждого проективного расслоения F можно построить векторное расслоение E, такое, что каждый слой F_X расслоения F есть многообразие одномерных подпространств слоя E_X расслоения E. Таким векторным расслоением E проективное расслоение E определяется однозначно и для каждого F такое E существует. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть точную последовательность пучков:

$$(1) \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{SL}(2) \to \mathbf{PGL}(1) \to (1), \tag{1}$$

где $SL(2)$ — специальная линейная группа 2-го порядка, а Z_2 — группа из двух элементов, и соответствующую ей точную последовательность, которую можно написать в силу коммутативности Z_2:

$$H^1(X, \mathbf{Z}_2) \to H^1(X, \mathbf{SL}(2)) \to H^1(X, \mathbf{PGL}(1)) \to H^2(X, \mathbf{Z}_2).$$

$H^2(X, Z_2)=0$, так как $\dim X=1$. Таким образом, если через $P(E)$ обозначить проективизацию векторного расслоения E, то любая линейчатая поверхность имеет вид $P(E)$ для некоторого E. Очевидно, что если L — одномерное расслоение, то $P(E\otimes L)=P(E)$ и $\det(E\otimes L)=\det E\otimes L^2$. Поэтому, если $\det E$ фиксирован, то $P(E)=P(E')$ в том и только том случае, когда $E'=L\otimes E$ и $L^2=1$. Таких L — конечное число 2^{2g}. С точностью до этого числа мы и проведем классификацию.

Итак, задача классификации линейчатых поверхностей сведена к задаче классификации двумерных алгебраических векторных расслоений с тривиальным детерминантом над произвольной алгебраической кривой X. Заметим прежде всего, что для кривой рода 0 классификация двумерных расслоений, проведенная Гротендиком [14], совпадает с классификацией рациональных линейчатых поверхностей. Чтобы продемонстрировать идеи и методы работы с расслоениями, мы кратко воспроизведем здесь результаты Гротендика, разумеется, в наших частных случаях.

Итак, пусть X — неособая рациональная прямая и E — двумерное векторное расслоение над X с тривиальным детерминантом (т. е. матрицы φ_{ij}, задающие расслоение E, имеют единичный определитель). На алгебраической кривой каждое сечение задает одномерное подрасслоение (в силу существования локальной униформизирующей, см. [5]). Покажем, что расслоение E имеет сечение. Воспользуемся теоремой Римана — Роха для расслоений на кривой (см. [5]):

$$\dim H^0(X, \mathbf{E}) - \dim H^1(X, \mathbf{E}) = \deg E + r(1-g),$$

где $\deg E$ — степень определителя E, в нашем случае 0, r — размерность слоя, в нашем случае — 2 и g — род базисной кривой, в нашем случае 0. Таким образом,

$$\dim H^0(X, \mathbf{E}) \geqslant 2.$$

Возьмем любое сечение $S \in \Gamma(X, E)$ и определяемое им эффективное подрасслоение L_S. Каждое одномерное расслоение определяется целым числом n — степенью дивизора, который оно определяет. Поэтому L_S определяется положительным целым числом n — $L_S = L(n)$. Имеет место точная последовательность:

$$0 \to L(n) \to E \to L(-n) \to 0.$$

Препятствием к распадению этой тройки является (см. [6]) элемент из $H^1(X, \mathbf{Hom}(L(-n), L(n)))$, где $\mathbf{Hom}(L, L')$ — пучок ростков гомоморфизмов L в L'; ясно, что $\mathbf{Hom}(L(-n), L(n)) = L^*(-n) \otimes L(n) = L(2n)$, и, так как $n \geqslant 0$, по теореме Римана — Роха имеем $H^1(X, \mathbf{L}(2n)) = 0$, т. е. $E = L(n) \oplus L(-n)$.

Покажем теперь, что каждое E имеет только одно эффективное подрасслоение. Действительно, пусть есть другое подрасслоение $L'(n')$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L(n) \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "j"] & L^*(n) \arrow[r] & 0, \\ & & L'(n') \arrow[u, "i'"] \arrow[ur, "ji'"'] & & \\ & & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \tag{2}$$

т. е. определен гомоморфизм $L'(n')$ в $L^*(n)$ или сечение $S \in H^0(X, \mathbf{Hom}(L'(n'), L^*(n)))$. Но $\mathbf{Hom}(L'(n'), L^*(n)) = L'^*(n') \otimes L^*(n) = L(-m)$, $m \geqslant 0$, и поэтому либо $E = L(0) \otimes L(0)$, либо ji' — нулевой гомоморфизм, т. е. $L'(n)'$ принадлежит ядру j и тем самым совпадает с $L(n)$, что и требовалось доказать. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *На кривой рода 0 любое двумерное расслоение E с тривиальным детерминантом однозначно определяется целым неотрицательным числом $n(E)$ — степенью своего единственного эффективного подрасслоения. А именно, если $n(E) = n$, то $E = L(\eta) \oplus L(-n)$. Нетрудно проверить, что данная классификация совпадает с классификацией Нагаты, т. е. число $n(E)$ совпадает с числом элементарных преобразований, определяющих поверхность F, соответствующую E.*

Пусть теперь X — эллиптическая кривая. Классификацию расслоений любой размерности над такими кривыми получил Атиа [5]. Как и в рациональном случае, мы сразу получим бесконечную серию классов расслоений, если рассмотрим все расслоения вида $E = L(n) \oplus L^*(\eta)$, где η — дивизор, определяющий $L(\eta)$. Действительно, в прямом произведении оба слагаемых определены однозначно и поэтому различные классы определяют различные расслоения. Но многообразия J_n классов дивизоров степени n — это главное однородное пространство якобиева многообразия J кривой X. Таким образом, мы получаем счетное число якобиевых многообразий. В рациональном случае прямые произведения или разложимые расслоения составляли все множество классов. В эллиптическом случае наряду с серией разложимых расслоений впервые появляются неразложимые расслоения. Перейдем к описанию неразложимых расслоений. Напомним основной принцип, который легко следует из диаграммы (2): у каждого расслоения E с тривиальным определителем может быть только одно эффективное подрасслоение. Докажем, что у неразложимого расслоения E всегда существует эффективное подрасслоение. Пусть $O \in X$ — точка, такая, что $O^2 \nsim C^2$. Тогда по теореме Римана — Роха $\dim H^0(X, E \oplus L(O)) \geqslant 2$, т. е. имеются по крайней мере два линейно независимые сечения S и S'. Существует точка $C \in X$, такая, что $L_{S_C} = L_{S'_C}$, так как в противном случае $E = L_S \oplus L_{S'}$. Но тогда существует линейная комбинация $S = \alpha_0 S + \alpha_1 S'$, $\alpha_i \in k$, такая, что $S(C) = 0$, т. е. E имеет подрасслоение вида $L\left(\eta \frac{C}{O}\right)$, где η — эффективный. Имеем расширение

$$0 \to L(\eta C O^{-1}) \to E \to L^*(\eta C O^{-1}) \to 0,$$

которое задается $h \in H^1(X, \mathbf{L}(\eta^2 C^2 O^{-2}))$. Но очевидно, что $H^1(X, \mathbf{L}(\eta^2 C^2 O^{-2})) = 0$ во всех случаях, кроме $C = O$, $\eta = 1$, т. е. если E имеет тривиальное подрасслоение $\dim H^1(X, \mathbf{L}^2(1)) = 1$ в этом случае и так как пропорциональные коциклы определяют одно и то же расслоение E (см. [20]), то существует единственное неразложимое расслоение E_2 с тривиальным детерминантом. Имеем:

Теорема 2. *Для кривой рода 1 множество классов двумерных расслоений E с тривиальным определителем состоит из серии разложимых расслоений (J_n, $n > 0$, J_n — бирегулярно эквивалентно якобиеву многообразию X) и еще одной точки.*

Сделаем еще одно замечание о серии разложимых расслоений. Линейчатые поверхности, которые они определяют, имеют следующий вид. Пусть X' и X'' — бирегулярные образы кривой X в некотором P^N, причем X' и X'' не пересекаются. Пусть φ: $X' \to X''$ — бирегулярное отображение X' на X''. Проведем через $P \in X'$ и $\varphi(P) \in X''$ прямую в P^N, и пусть никакие две такие прямые не пересекаются. Тогда мы получим линейчатую поверхность F, у которой соответствующее двумерное расслоение разложимо. Так как у рациональных кривых все расслоения разложимы, то таким способом можно получить все линейчатые поверхности. Именно таким путем получил их классификацию Андреотти [4].

Классификация расслоений над кривой произвольного рода требует более глубокого изучения инвариантов расслоения.

Как всегда, мы имеем серию разложимых расслоений. И задача заключается в классификации неразложимых.

Исследование двумерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода основывается на описании их инвариантов. Определения этих инвариантов и основные результаты, связывающие их между собой, приведены в работах [53] и [54]. Мы приведем их здесь, подчеркивая наглядную сторону новых понятий и идею классификации.

Итак, пусть X — произвольная, неособая алгебраическая кривая рода g, множество классов расслоений над которой мы хотим описать.

Полная система инвариантов не для всех классов расслоений одинакова. У расслоения имеется инвариант, называемый дефектом расслоения, обозначаемый символом $d(E)$, который может принимать только два значения: 0 и 1. В зависимости от значения этого инварианта мы имеем две различные системы инвариантов, которые мы обозначим через

$$n(E),\ c(E),\ d(E)\begin{array}{l} \overset{0}{\nearrow}\ \xi(E),\ \mathrm{O}(E) \\ \underset{1}{\searrow}\ h(E). \end{array}$$

Ниже дается их определение.

1) Для определения $n(E)$ фиксируется любая точка O кривой X, не являющаяся точкой Вейерштрасса. Любой дивизор ξ эквивалентен дивизору вида $\eta \mathrm{O}^{-n}$, где η — эффективный дивизор. Если мы выберем такое представление с минимальным показателем n, то и n и η будут определены однозначно (см. [53, гл. I]). Показатель n, определенный таким образом, называется высотой дивизора. Так как каждое одномерное расслоение определяет класс дивизоров, то корректно определен инвариант расслоения L — $n(L)$ — высота этого расслоения. Обозначим символом Sp (E) множество одномерных подрасслоений двумерного расслоения E. Тогда Sp (E) — не пусто ([53, гл. I, § 2]). Инвариант $n(E)$ определяется тогда следующим образом:

$$n(E) = \min_{L \in \mathrm{Sp}(E)} n(L).$$

Легко видеть, что это определение эквивалентно следующему:

$$\dim \Gamma(E \otimes L(\mathrm{O}^{n(E)-1})) = 0,\ \dim \Gamma(E \otimes L(\mathrm{O}^{n(E)})) = i > 0.$$

2) Инвариант $c(E)$ является дивизором на X и определяется как наибольший общий делитель нулей всех сечений расслоения $E \otimes L(\mathrm{O}^{n(E)})$.

3) Легко видеть, что целое число $i > 0$ может быть либо 1, либо 2. Дефект E — $d(E) = 2 - i$.

Очевидно, что если $d(E) = 1$, то E содержит единственное одномерное подрасслоение L вида $L(c(E)\,\mathrm{O}^{-n(E)})$.

3) Если $d(E) = 1$, то имеет место расширение

$$0 \to L(c(E)\,\mathrm{O}^{-n(E)}) \to E \to L(c^{-1}(E)\,\mathrm{O}^{n(E)}) \to 0,$$

которое определяется коциклом [6]

$$a \in H^1(X, \mathbf{L}^2(\mathbf{c}(\mathbf{E})\,\mathbf{O}^{-\mathbf{n}(\mathbf{E})})).$$

Так как такое подрасслоение единственно, то ясно, что точка h, соответствующая a в $P(H^1(X, \mathbf{L}^2(\mathbf{c}(\mathbf{E})\,\mathbf{O}^{-\mathbf{n}(\mathbf{E})}))$ — проективном пространстве, соответствующем векторному пространству, является инвариантом E — $h(E)$. Очевидно, что если $d(E) = 1$, то $n(E)$, $c(E)$ и $h(E)$ определяют класс E.

4) Пусть теперь $d = 0$. Для определения $\xi(E)$ рассмотрим два различных одномерных подрасслоения L_1 и L_2 расслоения E. Пусть L — такое одномерное расслоение, что $L_1 \otimes L = L_1'$ и $L_2 \otimes L = L_2'$ соответствуют эффективным дивизорам. Тогда каждое L_i' определяет в $E \otimes L$ сечение S_i. Рассмотрим те точки $\mathrm{P} \in X$, в которых имеет место равенство

$$\alpha_1 S_1(\mathrm{P}) = \alpha_2 S_2(\mathrm{P})$$

и α_1 или $\alpha_2 \neq 0$. Такой точке P сопоставляется точка $(\alpha_1 : \alpha_2) \in P^1$ проективной прямой, которую обозначим через $Z(\mathrm{P})$. Обозначим через $\xi(L_1, L_2)$ дивизор, являющийся произведением всех таких точек P. Нетрудно видеть, пользуясь диаграммой (2), что $\xi(L_1, L_2) \in |L_1^* \otimes L_2^*|$, где через $|L|$ мы обозначим линейный ряд дивизора, который определяет L. Можно доказать [53, гл. I], что если L_1 и L_2 выбрать так, что $n(L_1) = n(L_2) = n(E)$, то дивизор $\xi(L_1, L_2)$ не зависит от выбора L_1 и L_2. Он обозначается через $\xi(E)$. Ясно, что $\xi(E) \in |\mathrm{O}^{2n(E)} c(E)^{-2}|$ и $\deg \xi(E) = 2n(E) - 2 \deg c(E)$.

5) Пусть $m = 2n(E) - 2\deg c(E)$ и $\xi(E) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{P}_i$. Положим

$$V(L_1, L_2) = (Z(\mathrm{P}_1), \ldots, Z(\mathrm{P}_m)) \in (P^1)^m,$$

где $n(L_1) = n(L_2) = n(E)$. Так как любое такое подрасслоение определяет сечение расслоения $E \otimes L(\mathrm{O}^{n(E)})$ и однозначно определяется одномерным пространством, натянутым на это сечение (см. [53], гл. I), то переход к другой паре L_1', L_2' совершается при помощи дробнолинейного преобразования γ пространства $P(\Gamma(E \otimes L(\mathrm{O}^{n(E)})))$. Можно легко доказать следующую формулу:

$$V(\gamma(L_1), \gamma(L_2)) = (\hat{\gamma}(z(\mathrm{P}_1)), \ldots, \hat{\gamma}(Z(\mathrm{P}_m))),$$

где $\hat{\gamma}$ — некоторый автоморфизм группы $PGL(1)$ дробнолинейных преобразований в себя.

Пусть группа $G = PGL(1)$ действует на $(P^1)^m$ по закону

$$g(Z_1, \ldots, Z_m) = (g(Z_1), \ldots, g(Z_m)).$$

Обозначим через U фактор-пространство $(P^1)^m/G$. Таким образом, каждое расслоение определяет однозначно точку в пространстве U. Эта точка является инвариантом класса и обозначается через $\mathrm{O}\,(E)$. Заметим, что U — предсхема, но не схема. Но ее можно профильтровать (т. е. построить последовательность замкнутых подпредсхем $U = F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_N$ так, что $\dim F_i > \dim F_{i+1}$ и $F_i - F_{i+1}$ — алгебраическое многообразие [36]. Имеет место теорема (см. работу [54]):

Теорема 3. *Инварианты $n\,(E)$, $c\,(E)$, $\xi\,(E)$ и $\mathrm{O}\,(E)$ однозначно определяют класс расслоения без дефекта.*

Ввиду этой теоремы классификация расслоений будет получена, если описать, какие наборы значений могут пробегать эти инварианты, когда E пробегает все расслоения рассматриваемого нами типа.

Укажем сначала, какие значения могут принимать целочисленные инварианты: $n\,(E)$, $\deg c\,(E)$, $m = \deg \xi\,(E) = 2n\,(E) - 2 \deg c\,(E)$ в зависимости от $d\,(E)$.

1) $d\,(E) = 1,\ g - 1 \geqslant n\,(E) \geqslant -\frac{g-1}{2},\ 0 \leqslant \deg c\,(E) \leqslant g.$

2) $d\,(E) = 0,\ g \geqslant n\,(E) \geqslant -\frac{g-1}{2},\ 0 \leqslant \deg c\,(E) \leqslant g - 1.$

Опишем, какие значения могут принимать непрерывные инварианты при фиксированных дискретных.

Пусть $\deg c\,(E) = k$. В качестве $c\,(E)$ может быть взят любой эффективный дивизор η степени k, такой, что $\dim |\eta| = 0$ и η O [53, гл. I, § 1]. Если мы обозначим через J_k многообразие классов дивизоров степени k и через $S^k\,(X)$ — симметрическое произведение базы X, то существует регулярное отображение $P_k : S^k\,(X) \to J_k$, отождествляющее эквивалентные дивизоры. Если мы обозначим символом $\widetilde{S}^k\,(X)$ максимальное открытое множество $S^k\,(X) - \mathrm{O} \times S^{k-1}\,(X)$, на котором отображение P_k бирегулярно, то $\widetilde{S}^k\,(X)$ будет областью изменения $c\,(E)$. Заметим, что $\dim \widetilde{S}'^k\,(X) = k$.

1) Пусть $d\,(E) = 1$, $c\,(E) = \eta$ и $n\,(E) = n$, $h\,(E)$ пробегает тогда пространство $P\,(n, \eta) = P\,(H^1\,(X, \mathbf{L}\,(\mathbf{O}^{-2n}\eta^2)))$.

Доказывается, что если это пространство непусто, то существует в нем открытое в смысле Зариского множество $\widetilde{P}\,(n, \eta)$, являющееся областью изменения $h\,(E)$ [53, гл. III]. Таким образом, подсчет констант показывает, что многообразие $C\,(n, k, d)$ классов расслоений с $n\,(E) = n$, $\deg c\,(E) = k$ имеет размерность $g + 2n - k$.

2) Пусть $d\,(E) = 0$, $n\,(E) = n$, $c\,(E) = \eta$. Тогда $\xi\,(E)$ пробегает аффинное пространство $|\mathrm{O}^{2n}\eta^{-2}| - |\mathrm{O}^{2n-1}\eta^{-2}|$. Существует открытое подмножество $\widetilde{U}$, которое пробегает $\mathrm{O}\,(E)$ [54]. Таким образом, размерность многообразия классов расслоений $n\,(E) = n$, $\deg c\,(E) = k$ равна $4n - 3k - g - 3$.

Отсюда видно, что максимальную размерность имеет компонента расслоений с $n\,(E) = g$, $k = 0$ и $d = 0$. Эта размерность равна $3g - 3$. Опишем более подробно эту компоненту. Будем называть многообразие (необязательно полное) рациональным, если из него можно выкинуть такое собственное подмногообразие, что оставшееся многообразие будет бирегулярно эквивалентно аффинному пространству.

Доказывается, что предсхема $\widetilde{U}$ — схема, и поэтому компонента максимальной размерности $\widetilde{U} \times (|\mathrm{O}^{2g}| - |\mathrm{O}^{2g-1}|)$ — рациональное многообразие. Имеем теорему:

Теорема 4. *Компонента максимальной размерности многообразия линейчатых поверхностей $V \subset A\,(V)$ — фиксированной кривой X рода g есть $3g - 3$-мерное рациональное многообразие.*

В [54] строится фильтрация многообразий $C\,(n, k, d) \supset C\,(n, k, d, 1) \supset \ldots \supset C\,(n, k, d, N)$, такая, что $C\,(n, k, d, i)$ — база семейства расслоений, над каждой точкой его лежит расслоение с данными инвариантами. Однако существует препятствие к представимости основного функтора и решению универсальной задачи. Построенные семейства являются универсальными объектами только, если допускать и аналитические отображения баз (локальные сечения конечных накрытий). Для алгебраической представимости приходится вводить функтор жесткости, после чего универсальная задача становится разрешимой. Накрывающей категорией при этом является категория квазирасслоений [53].

Глава VI

ПОВЕРХНОСТИ ОСНОВНОГО ТИПА

Известно, что линейным системам на алгебраическом многообразии соответствуют отображения многообразия в проективное пространство. Особый интерес представляют отображения, соответствующие канонической системе и ее кратным. Дело в том, что если $|nK|$ дает бирациональное вложение для двух многообразий V_1 и V_2, то необходимым и достаточным условием бирациональной эквивалентности V_1 и V_2 является проективная эквивалентность образов этих многообразий при отображении, соответствующем $|nK|$.

В теории алгебраических кривых доказывается, что если род кривой $p > 1$, то каноническая система дает бирациональное вложение или отображение степени два на рациональную поверхность; при этом если $p > 2$ и кривая негиперэллиптическая, то $|K|$ дает бирациональное вложение, если $p > 2$ и кривая гиперэллиптическая, то бирациональное вложение дает $|2K|$, для $p = 2$ бирациональное вложение дает $|3K|$.

В данной главе рассматриваются аналогичные вопросы для алгебраических поверхностей над полем комплексных чисел.

По нашему мнению, кривым рода, большего единицы, соответствуют поверхности, которые мы называем «поверхностями основного типа» и наиболее простое определение которых состоит в требовании отсутствия эллиптического пучка и существования какого-нибудь кратного рода, большего единицы.

Среди результатов этой главы отметим следующие:

1) для поверхности основного типа с $p_g > 3$ система $|3K|$ дает бирациональное вложение (теорема 2);

2) существует поверхность основного типа с $p_g=3$, для которой $|3K|$ не дает бирационального вложения (теорема 6);

3) для любой поверхности основного типа система $|9K|$ дает бирациональное вложение.

Всюду в этой главе топология понимается в смысле Зариского.

§ 1. Леммы

В этом параграфе мы докажем несколько почти не связанных между собой лемм, важных для дальнейшего.

Л е м м а 1. *Пусть V — неособая алгебраическая поверхность, $|R|$ — линейная система на V, не имеющая неподвижных кривых и базисных точек и такая, что соответствующее ей отображение V в проективное пространство является отображением на кривую.*

Тогда существуют неприводимая 1-мерная алгебраическая система $\{R_1^*\}$ на V и открытое подмножество U в пространстве параметров для $|R|$ — такие, что любой точке $t^{(0)} \in U$ соответствует цикл $R(t^{(0)}) \in |R|$, у которого все неприводимые компоненты — некратные, неособые — являются членами системы $\{R_1^*\}$ и, кроме того, слоями некоторого дифференцируемого расслоенного пространства $V' \to E'$, где V' получено из V выбрасыванием конечного числа кривых, а E' — из кривой E, параметризующей систему $\{R_1^*\}$, выбрасыванием конечного числа точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы Бертини вытекает, что регулярное отображение f, соответствующее системе $|R|$: $V \to C$ (через C мы обозначаем образ отображения), можно получить как композицию двух регулярных отображений: f_1: $V \to E$, f_2: $E \to C$, где E — алгебраическая кривая и $V \to E$ — отображение, у которого общий слой неприводим. Обозначим алгебраическую систему слоев отображения f_1: $V \to E$ через $\{R_1^*\}$.

Следуя Кодаире [25], легко показать, что если есть регулярное отображение f_1 поверхности V на кривую E, то можно выбросить из E такое конечное число точек, что если оставшееся множество обозначить через E', $f_1^{-1}(E')$ — через V', то регулярное отображение $V' \to E'$ обладает следующими свойствами:

1) оно не имеет кратных слоев,

2) каждый слой является неособой неприводимой кривой,

3) отображение $V' \to E'$ задает на V' структуру дифференцируемого расслоенного пространства.

На C можно найти конечное число точек, прообразы которых при f_2 попадают в $E - E'$ или же содержат кратные компоненты. Выбросим из C все такие точки и оставшееся множество обозначим через C''. Пусть

$$E'' = f_2^{-1} C'', V'' = f_1^{-1} E''. \tag{1}$$

Очевидно, прообразом любой точки $Q \in C''$ является полная кривая без кратных компонент на V'', неприводимые компоненты которой — это некоторые слои отображения $V' \to E'$.

Пространство параметров системы $|R|$ совпадает с пространством параметров системы гиперплоских сечений кривой C при ее вложении в проективное пространство, соответствующем отображению f. Но, очевидно, те гиперплоские сечения, которые проходят через одну из точек $C - C''$, дают подмногообразие меньшего числа измерений в пространстве параметров. Кроме того, также и те гиперплоские сечения кривой C, в разложении которых на простые дивизоры содержатся кратные компоненты, дают подмногообразие меньшего числа измерений в пространстве параметров (это следует из того, что такие сечения соответствуют гиперплоскостям, касательным к C в какой-нибудь ее точке).

Мы можем найти теперь такое открытое множество U в пространстве параметров системы $|R|$, что для любой точки $t^{(0)} \in U$ соответствующий цикл $R(t^{(0)}) \in |R|$ является объединением прообразов конечного числа точек на C'', т. е. $R(t^{(0)})$ не содержит кратных компонент и имеет неприводимыми компонентами неособые кривые, являющиеся слоями дифференцируемого расслоения $V' \to E'$.

Л е м м а 2. *Пусть V — неособая алгебраическая поверхность, $|L|$ и $|M|$ — бесконечные линейные системы на V, причем M — неприводима, геометрический род общей кривой*

$$M \in |M| \, p_M \geqslant 2, |L| = |K + M + C|, \text{ где } C \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\dim H^0(V, O[K + C]) > 0, \tag{3}$$

$$H^1(V, O[K + C]) = 0. \tag{4}$$

Тогда отображение V в проективное пространство, соответствующее системе $|L|$, является либо бирациональным вложением, либо отображением *степени два на рациональную поверхность, а при $(C\cdot M)\geqslant 3$ отображение всегда является бирациональным вложением.*

Доказательство. Используя то, что $\dim H^0(V, O[K+C])>0$, выберем неотрицательный * цикл $C'\in|K+C|$. Удалив из V кривую C' и базисные точки системы $|M|$, получим открытое множество U'. Ясно, что отображения f_L и f_M, соответствующие системам $|L|$ и $|M|$, регулярны на U'.

По известной теореме Бертини [8], почти все кривые системы $|M|$ имеют особые точки только в базисных точках $|M|$. Пусть P^l — пространство параметров системы $|M|$ и W — подмногообразие в P^l, соответствующее кривым из $|M|$, имеющим особые точки и вне базисных точек или приводимым или имеющим род, меньший $P_{|M|}$. Каждой точке $P_0\in U'$ соответствует гиперплоскость $H(P_0)\subset P^l$, параметризующая кривые из $|M|$, проходящие через P_0. Заметим, что слой отображения f_M, содержащий точку P_0, является подмногообразием меньшей размерности на V, и потому множество точек $P'\in U'$, для которых $H(P')=H(P_0)$, лежит на подмногообразии меньшей размерности в U'.

Так как W может содержать лишь конечное число гиперплоскостей вида $H(P)$, то на U' можно найти лишь конечное число подмногообразий меньшей размерности, для точек которых соответствующие гиперплоскости $H(P)$ принадлежат W. Выбросим из U' эти подмногообразия. Мы получим открытое множество U'', такое, что для любой точки $P\in U''$ соответствующее $H(P)\not\subset W$. Это значит, что для любой точки $P\in U''$ существует кривая $M\in|M|$, проходящая через P, неприводимая, рода $P_{|M|}$ и имеющая особенности только в базисных точках $|M|$, т. е. вне U''.

Допустим, что существуют точки $P_1, P_2, P_3\in U''$, которые все различны и $f_L(P_1)=f_L(P_2)=f_L(P_3)$.

Так как P_1, P_2, P_3 не лежат на C', то из существования кривой $M\in|M|$, проходящей через P_1, но не через P_2 и P_3, вытекало бы существование кривой $C'+M\in|L|$, проходящей через P_1, но не через P_2 и P_3, и точки $f_L(P_i)$, $i=1, 2, 3$, не совпадали бы. Итак, любая кривая $M\in|M|$, проходящая через P_1, проходит также через P_2 и через P_3. Проведем через P_1 кривую $M\in|M|$ — неприводимую, рода $P_{|M|}$, и не имеющую особенностей на U''. Пусть $\widetilde M$ — неособая модель кривой M. Известно [49], что существует такой положительный дивизор $\mathfrak{c}$ на $\widetilde M$ с носителем в прообразах особых точек M на $\widetilde M$, что если через $[L]_{\widetilde M}$ обозначить расслоенное пространство прямых над $\widetilde M$, индуцированное расслоением $[L]$ над V при отображении $\widetilde M\to V$, через $\overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}}$ — прямой образ пучка $O_{\widetilde M}(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}$ при отображении $\widetilde M\to M$, то имеет место вложение

$$\overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}}\subset O[L]_M; \qquad (5)$$

отсюда имеем

$$0\to H^0(M, \overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}})\to H^0(M, O[L]_M). \qquad (6)$$

Так как $M\cap U''$ не содержит особых точек, то $M\cap U''$ — бирегулярно эквивалентно некоторому открытому множеству $\widetilde U''$ на $\widetilde M$, не содержащему точек из $\mathfrak c$. Отсюда следует, что отображение множества U'', даваемое сечениями из группы $H^0(M, \overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}})$, совпадает с отображением множества $\widetilde U''$, даваемым сечениями из группы $H^0(\widetilde M, O_{\widetilde M}[-\mathfrak c][L]_{\widetilde M})$. Но $O_{\widetilde M}[-\mathfrak c][L]_{\widetilde M}=O_{\widetilde M}[(K+M)_{\widetilde M}-\mathfrak c+(C)_{\widetilde M}]$. Кодаира показывает в

* Мы называем цикл D неотрицательным, если $D\geqslant 0$.

[25], что $[(K+M)_{\widetilde M}-\mathfrak c]$ является каноническим расслоением над $\widetilde M$. С другой стороны, в теории алгебраических кривых хорошо известно, что если род кривой $p\geqslant 2$, то отображение в проективное пространство, соответствующее каноническому классу, является либо бирациональным вложением, либо отображением степени два на рациональную прямую.

Отсюда следует, что отображение множества $U''\cap M$, даваемое сечениями из группы $H^0(M, \overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}})$, имеет степень, не бóльшую двух. Но тогда существует сечение $\varphi_{P_1}\in H^0(M, \overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}})$, равное нулю в P_1 и не равное нулю одновременно в P_2 и P_3. φ_{P_1} мы можем считать элементом группы $H^0(M, O[L]_M)$. Так как $H^1(V, O[K+C])=0$, то имеем эпиморфизм

$$H^0(V, O[K+M+C])\to H^0(M, O[K+C+M]_M)\to 0. \qquad (7)$$

Взяв сечение в $H^0(V, O[K+M+C])$, отображающееся при этом эпиморфизме в φ_{P_1}, получаем, что в $H^0(V, O[K+M+C])$ существует сечение, обращающееся в нуль в P_1, но не равное нулю одновременно в P_2 и P_3. Мы видим, таким образом, что не существует трех точек на U'', имеющих один образ при отображении f_L. Значит, f_L отображает U'' на алгебраическую поверхность и степень отображения не превосходит двух. Если эта степень равна единице, то отображение множества U'', а с ним и V, является бирациональным вложением.

Пусть теперь степень f_L равна двум. Очевидно, U'' можно уменьшить до открытого множества U''' так, чтобы для каждой точки $P\in U'''$ существовала единственная точка $P'\in U'''$ со свойствами $P'\neq P$, $f_L(P')=f_L(P)$. Назовем точку P' сопряженной с точкой P. Очевидно, почти все кривые из $|M|$ не лежат в $V-U'''$, неприводимы, имеют род $P_{|M|}$ и особые точки только в базисных точках $|M|$. Пусть M — некоторая кривая с такими свойствами. Очевидно, для любой точки $P\in M\cap U'''$ сопряженная точка $P'\in M\cap U'''$. Отсюда следует, что f_L дает на M отображение $f_L|M$ степени два. Но из (7) вытекает, что f_L на $M\cap U'''$ совпадает с отображением, даваемым группой сечений $H^0(M, O[K+M+C]_M)$.

Выбросим из $\widetilde U'''$ неподвижные точки системы $|(K+M+C)_{\widetilde M}-\mathfrak c|$ (если они есть), а из U''' — их образы. После выбрасывания мы получим бирегулярно эквивалентные открытые множества $\widetilde U^{IV}$ и $U^{IV}\cap M$. Так как сечения группы $H^0(M, \overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}})$ не имеют общих нулей на $U^{IV}\cap M$, то существует регулярное отображение g многообразия $f_L(M\cap U^{IV})$ на многообразие $\widetilde f_{L,M}(M\cap U^{IV})$, где $\widetilde f_{L,M}$ — отображение, соответствующее группе $H^0(M, \overline{O(-\mathfrak c)[L]_{\widetilde M}})$. При этом имеет место такая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & f_L(M\cap U^{IV}) \arrow[d, "g"] \\
M\cap U^{IV} \arrow[ur, "f_L|M"] \arrow[r, "\widetilde f_{L,M}"'] & \widetilde f_{L,M}(M\cap U^{IV})
\end{tikzcd}$$

Для степеней отображений имеем равенство

$$d(\widetilde f_{L,M})=d(g)\cdot d(f_L|M). \qquad (8)$$

Очевидно, $\widetilde f_{L,M}$ на $M\cap U^{IV}$ — это все равно, что отображение множества $\widetilde U^{IV}$ с помощью группы $H^0(\widetilde M, O[(K+M+C)_{\widetilde M}-\mathfrak c])$, откуда следует, что $d(\widetilde f_{L,M})\leqslant 2$. Так как $d(f_L|M)=2$, то $d(g)=1$, $d(\widetilde f_{L|M})=2$ и $\widetilde f_{L,M}(M\cap U^{IV})$ — рациональная кривая. Из $d(g)=1$ получаем, что $f_L(M\cap U^{IV})$ — рациональная кривая.

Итак, M отображается на рациональную кривую. Мы получаем, что поверхность $f_L(V)$ содержит бесконечную линейную систему рациональных кривых, т. е. является рациональной поверхностью.

Остается разобрать случай $(C\cdot M)\geqslant 3$. Покажем, что в этом случае степень не может быть равна двум. Для этого возьмем любую точку $P \in U'''$ и кривую $M \in |M|$, проходящую через точку P, неприводимую, рода P_M и имеющую особые точки лишь в базисных точках $|M|$. Сопряженная к P точка P' лежит на $M \cap U'''$.

Обозначим соответствующие точкам P и P' точки на $\widetilde{U}'''$ через $\widetilde{P}, \widetilde{P}'$. Рассмотрим точную последовательность:

$$0 \to H^0(\widetilde{M}, O(-\widetilde{P}-\widetilde{P}')[K_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}]) \to H^0(\widetilde{M}, O(-\widetilde{P}')[K_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}]) \to$$
$$\to \mathbf{C}_{\widetilde{P}} \to H^1(\widetilde{M}, O(-\widetilde{P}-\widetilde{P}')[K_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}]), \qquad (9)$$

здесь $\mathbf{C}_{\widetilde{P}}$ — пучок на $\widetilde{M}$, слой которого в точке $\widetilde{P}$ — комплексная прямая, а в остальных нуль. Так как $(C\cdot M)\geqslant 3$, то степень дивизора $-\widetilde{P}-\widetilde{P}'+K_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}\geqslant 2P_{\widetilde{M}}-2+1$ ($P_{\widetilde{M}}$ — род кривой $\widetilde{M}$). Отсюда

$$H^1(\widetilde{M}, O(-\widetilde{P}-\widetilde{P}')[K_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}])=0.$$

Получаем эпиморфизм

$$H^0(\widetilde{M}, O(-\widetilde{P}')[K_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}]) \to \mathbf{C}_{\widetilde{P}} \to 0.$$

Отсюда следует, что в группе $H^0(\widetilde{M}, O[K_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}])$ существует сечение $\varphi_{\widetilde{P}}$, равное нулю в точке $\widetilde{P}'$ и отличное от нуля в точке $\widetilde{P}$. Но тогда в группе $H^0(M, \overline{O(-c)[(K+M)_{\widetilde{M}}+(C)_{\widetilde{M}}]})$ существует сечение $\varphi_{P'}$, равное нулю в P' и отличное от нуля в P. $\varphi_{P'}$ можно рассматривать как элемент группы $H^0(M, O[K+M+C])$. Тогда эпиморфизм (7) показывает, что в группе $H^0(V, O[K+M+C])$ существует сечение, равное нулю в P' и отличное от нуля в P.

Значит, P' и P имеют разные образы при отображении f_L, и мы пришли к противоречию с тем, что степень f_L равна двум. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть V — неособая алгебраическая поверхность, $\{R_1\}$ — 1-мерная неприводимая алгебраическая система на V, являющаяся системой слоев регулярного отображения V на кривую E, S_1 — связная кривая на V, такая, что $(R_1S_1)>0$. Тогда почти для всех кривых системы $\{R_1\}$*

$$H^1(V, O[K+R_1+S_1])=0.$$

Доказательство. Пользуясь доказательством леммы 1, получаем, что E и V можно уменьшить до открытых подмножеств E' на E и V' на V так, что существует регулярное отображение V' на E', слои которого — полные неособые кривые системы $\{R_1\}$, ни один слой не является компонентой S_1, и, кроме того, это отображение задает на V' структуру дифференцируемого расслоенного пространства с базой E' и слоями — кривыми системы $\{R_1\}$. Заметим теперь, что для любых точек $(C_1), (C_2) \in E'$ соответствующие кривые $R_1(C_1)$ и $R_1(C_2)$ гомеоморфны и любой 1-мерный цикл на $R_1(C_2)$ гомологичен на V' некоторому 1-мерному циклу на $R_1(C_1)$. Отсюда следует, что если α — 1-мерный дифференциал 1-го рода на V, обращающийся в нуль на $R_1(C_1)$, то интегралы α по всем 1-мерным циклам на $R_1(C_2)$ — нули, а следовательно, α обращается в нуль также на $R_1(C_2)$. Мы получаем, что если α обращается в нуль на некоторой кривой $R_1(C_0)$, $(C_0)\in E'$, то α — нуль на всех кривых $R_1(C)$, $(C)\in E'$. Предположим теперь, что α обращается в нуль не только на $R_1(C_0)$, но и на S_1. Рассмотрим многозначную функцию $f(P)=\int_{P_0}^{P}\alpha$. Ясно, что на всех кривых $R_1(C)$, $(C)\in E'$, $f(P)$ является константой.

Так как $f(P)$ константа также и на S_1, и $(R_1\cdot S_1)>0$, то $f(P)$ должна принимать на всех $R_1(C)$, $(C)\in E'$ одно и то же значение, т. е. $f(P)$ — константа на всем V', а значит, и на всем V. Отсюда следует, что $\alpha=0$. Мы доказали, таким образом, что не существует нетривиальных 1-мерных дифференциалов 1-го рода на V, которые обращаются в нуль на $R_1(C_0)$ и на S_1. Для завершения доказательства остается заметить, что $R_1(C_0)+S_1$ — связная кривая, и сослаться на следующий результат Кодаиры [25]: для кривой C на неособой алгебраической поверхности V $\dim H^1(V, O[K+C])=m-1+k$, где m — число компонент связности кривой C, а k — число линейно независимых 1-мерных дифференциалов 1-го рода на V, обращающихся в нуль на C.

Лемма 4. *Пусть V — неособая алгебраическая поверхность без исключительных кривых 1-го рода с $(K^2)>0$, $p_g=0$. Тогда иррегулярность V $q=0$.*

Доказательство. Арифметический род V $p_a=1-q+p_g=1-q$, а 2-мерное число Бетти $b_2=h^{2,0}+h^{1,1}+h^{0,2}=2p_g+h^{1,1}=h^{1,1}$. Формула Нетера дает нам

$$p_a=\frac{1}{12}((K^2)+2-4q+b_2),$$

или

$$1-q=\frac{1}{12}((K^2)+2-4q+h^{1,1}).$$

Отсюда

$$(K^2)+h^{1,1}=10-8q.$$

Так как $(K^2)>0$, $h^{1,1}>0$, то $10-8q>0$, $q\leqslant 1$.

Предположим, что $q=1$. Тогда $(K^2)+h^{1,1}=2$, $(K^2)=1$, $h^{1,1}=1$. Равенство $h^{1,1}=1$ означает, что 2-мерные (в вещественном смысле) алгебраические циклы на V гомологичны над полем рациональных чисел кратным гиперплоского сечения, т. е. циклам вида rH (r — рациональное число, H — гиперплоское сечение V). Отсюда следует, в частности, что на V нет эффективных алгебраических циклов C с $(C^2)=0$.

С другой стороны, равенство $q=1$ означает, что отображение Альбанезе является регулярным отображением V на эллиптическую кривую. Любой слой C этого отображения является эффективной кривой и, очевидно, $(C^2)=0$.

Предположение $q=1$ привело нас к противоречию. Остается $q=0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Следующие три условия для алгебраической поверхности эквивалентны.*

1) *Для некоторого $n>0$ $P_n\geqslant 2$ и V не имеет пучка эллиптических кривых.*

2) *Для некоторого $n'>0$ $P_{n'}>0$ и на минимальной модели V $(K^2)>0$.*

3) *Для некоторого $n''>0$ система $|n''K|$ отображает V на алгебраическую поверхность.*

Доказательство. Выведем 2) из 1). Нам дано, что V неособая, не имеет исключительных кривых 1-го рода, не имеет эллиптического пучка и для некоторого $n>0$ $P_n\geqslant 2$. Надо доказать, что $(K^2)>0$.

Покажем прежде всего, что для любой неприводимой кривой D на V $(K\cdot D)\geqslant 0$. Действительно, так как D — неприводима, то $(K\cdot D)+(D^2)\geqslant -2$ или $(K\cdot D)\geqslant -2-(D^2)$. При $(D^2)<0$ имеем $(K\cdot D)\geqslant -2+1=-1$;

при этом равенство здесь может иметь место только, если $(D^2) = -1$, что вместе с $(K \cdot D) = -1$ характеризует исключительную кривую 1-го рода. Это противоречит минимальности V. Пусть теперь $(D^2) \geqslant 0$. Тогда, взяв эффективную кривую из $|nK|$, получаем $(nK \cdot D) \geqslant 0$, т. е. $(K \cdot D) \geqslant 0$.

Так как $P_n \geqslant 2$, то $|nK|$ — бесконечная система. Пусть $|R|$ — подвижная часть системы $|nK|$, S — неподвижная часть. Если бы было $(K^2) \leqslant 0$, то мы имели бы $n(K(R+S)) \leqslant 0$. Так как $(K \cdot R) \geqslant 0$, $(K \cdot S) \geqslant 0$, то отсюда $(K \cdot S) = 0$, $(K \cdot R) = 0$.

Последнее равенство дает $(R \cdot R) + (R \cdot S) = 0$. Так как $|R|$ — система без неподвижных частей, то $(R \cdot S) \geqslant 0$, $(R \cdot R) \geqslant 0$, и мы имеем $(R \cdot S) = 0$, $(R \cdot R) = 0$. Равенство $(R \cdot R) = 0$ показывает, что к системе $|R|$ можно применить лемму 1 ($|R|$ не имеет неподвижных точек и отображает V на кривую). По лемме 1 существует 1-мерная неприводимая алгебраическая система $\{R_1^*\}$, такая, что почти для всякой $R \in |R|$ имеем $R = \sum_i R_1^{(i)}$, где $R_1^{(i)}$ — неособые, неприводимые кривые из системы $\{R_1^*\}$. Равенства $(R \cdot S) = 0$, $(R \cdot R) = 0$ теперь дают нам $(R_1 \cdot S) = 0$, $(R_1 R) = 0$, $(R_1^2) = 0$. Отсюда $n(K \cdot R_1) = 0$, $(K \cdot R_1) = 0$, $2p_{R_1} - 2 = ((K + R_1) R_1) = 0$. Это показывает, что $\{R_1^*\}$ — пучок эллиптических кривых. Следовательно, предположение $(K^2) \leqslant 0$ привело нас к противоречию с условием 1).

Выведем 3) из 2). Нам дано, что при некотором $n' > 0$, $P_{n'} > 0$ и $(K^2) > 0$. Надо доказать, что существует $n'' > 0$ такое, что $|n''K|$ отображает V на алгебраическую поверхность, т. е. $|n''K|$ — бесконечная система, не составленная из пучка. Так как $(K^2) > 0$ и $P_{n'} > 0$, то в $n'K$ должна иметься положительная кривая. Для гиперплоского сечения H поверхности V $n'(K \cdot H) > 0$ и $(K \cdot H) > 0$. Тогда, очевидно, при $m > 1$ имеем $\dim H^2(V, O[mK]) = \dim H^0(V, O[-(m-1)K]) = 0$.

Теорема Римана — Роха дает нам:

$$\dim H^0(V, O[mK]) \geqslant \frac{(mK(mK-K))}{2} + 1 - q + p_g > bm^2 \text{ при } m > m_0,$$

где b — некоторая положительная константа. Это неравенство показывает, что при $m > m_0$ $|mK|$ — бесконечная система.

Предположим теперь, что система $|mK|$ при $m > m_0$ составлена из пучка, и пусть C_m — алгебраическая кривая, на которую $|mK|$ отображает поверхность V.

Пусть $|R_m|$ — подвижная часть системы $|mK|$. Используя σ-процессы, можно заменить V поверхностью $\bar{V}$ так, чтобы собственный образ $|\bar{R}_m|$ системы $|R_m|$ не имел базисных точек на $\bar{V}$ и системе $|\bar{R}_m|$ соответствовало бы регулярное отображение поверхности $\bar{V}$ на C_m. Пусть H_C — гиперплоское сечение кривой C_m в ее проективном вложении, соответствующем отображению $\bar{V} \to C_m$. Очевидно, кривые системы $|\bar{R}_m|$ — это прообразы сечений H_C кривой C_m, откуда следует, что

$$\dim H^0(\bar{V}, O_{\bar{V}}[\bar{R}_m]) \leqslant \dim H^0(C_m, O_{C_m}[H_C]). \tag{10}$$

Если через $a(H_C)$ обозначить степень дивизора H_C на C, то из теоремы Римана — Роха для кривой нетрудно вывести

$$\dim H^0(C_m, O_{C_m}[H_C]) \leqslant a(H_C) + 1.$$

Но $a(H_C)$ — не превосходит числа неприводимых компонент кривой $\bar{R}_m$ на $\bar{V}$, которое, конечно, совпадает с числом неприводимых компонент соответствующей кривой R_m на V. Последнее же число не превосходит

$(R_m \cdot H)$ и $\leqslant m(K \cdot H)$. Окончательно мы получаем при $m > m_0$

$$bm^2 < \dim H^0(V, O[mK]) \leqslant m(K \cdot H) + 1 \tag{11}$$

(здесь использованы равенства

$$\dim H^0(V, O[mK]) = \dim H^0(V, O[R_m]) = \dim H^0(\bar{V}, O_{\bar{V}}[\bar{R}_m]).$$

Можно взять m_0 столь большим, чтобы при $m > m_0$ было $bm^2 > m(K \cdot H) + 1$, и тогда предположение о составленности $|mK|$ при $m > m_0$ из пучка ведет к противоречию.

Для завершения доказательства леммы остается вывести 1) из 3). Здесь следует предположить, что существует $n'' > 0$, при котором $|n''K|$ дает отображение V на алгебраическую поверхность, и доказать, что на V нет пучка эллиптических кривых (то, что $P_{n''} \geqslant 2$, сразу вытекает из нашего предположения).

Будем доказывать от противного. Пусть на V имеется пучок эллиптических кривых $\{R_1\}$, т. е. 1-мерная неприводимая алгебраическая система эллиптических кривых. Пусть E_1 — кривая, параметризующая систему $\{R_1\}$. В произведении $E_1 \times V$ существует неприводимый цикл Γ, такой, что кривая $R_1(t) \in \{R_1\}$, соответствующая любой точке $(t) \in E_1$, получается так:

$$R_1(t) = P_{r_V}[\Gamma((t) \times V)].$$

Очевидно, Γ является алгебраической поверхностью с пучком эллиптических кривых $\{R_1'\}$, являющихся слоями регулярного отображения $\Gamma \to E_1$.

Пусть $\tilde{\Gamma}$ — неособая модель поверхности Γ. Тогда существуют регулярные отображения $f_1\colon \tilde{\Gamma} \to E_1$ и $f_2\colon \tilde{\Gamma} \to V$. Очевидно, на $\tilde{\Gamma}$ имеется пучок эллиптических кривых (обозначим его $\{\tilde{R}_1\}$), причем общий слой при отображении $\tilde{\Gamma} \to E_1$ совпадает с общей кривой пучка $\{\tilde{R}_1\}$. Отсюда следует, что $(\tilde{R}_1^2) = 0$ и почти все кривые пучка $\{\tilde{R}_1\}$ — неособые [25]. Так как $\{\tilde{R}_1\}$ — пучок эллиптических кривых, то из неособости почти всех кривых пучка следует $((K_{\tilde{\Gamma}} + \tilde{R}_1)\tilde{R}_1) = 2p_{\tilde{R}_1} - 2 = 0$. Из $(\tilde{R}_1^2) = 0$ получаем $(K_{\tilde{\Gamma}} \cdot \tilde{R}_1) = 0$. Докажем теперь, что система $|n''K_{\tilde{\Gamma}}|$ не составлена из пучка.

Пусть $\varphi_0^{(n'')}, \varphi_1^{(n'')}, \ldots, \varphi_N^{(n'')}$ — базис пространства регулярных двойных дифференциалов степени n'' на V. Образ V при отображении, соответствующем системе $|n'' K_V|$, — это многообразие с общей точкой $\left(1, \frac{\varphi_1^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}, \ldots, \frac{\varphi_N^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}\right)$.

Так как этот образ является поверхностью, то среди функций $\frac{\varphi_1^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}, \ldots, \frac{\varphi_N^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}$ имеются две алгебраически независимых, скажем, $\frac{\varphi_1^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}, \frac{\varphi_2^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}$.

Дифференциалы $\varphi_0^{(n'')}, \varphi_1^{(n'')}, \varphi_2^{(n'')}$ индуцируют при отображении $f_2\colon \tilde{\Gamma} \to V$ дифференциалы $f_2^*\varphi_0^{(n'')}, f_2^*\varphi_1^{(n'')}, f_2^*\varphi_2^{(n'')}$ на $\tilde{\Gamma}$, причем

$$f_2^*\left(\frac{\varphi_1^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}\right) = \frac{f_2^*\varphi_1^{(n'')}}{f_2^*\varphi_0^{(n'')}}; \quad f_2^*\left(\frac{\varphi_2^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}\right) = \frac{f_2^*\varphi_2^{(n'')}}{f_2^*\varphi_0^{(n'')}}.$$

Из алгебраической независимости функций $\frac{\varphi_1^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}, \frac{\varphi_2^{(n'')}}{\varphi_0^{(n'')}}$ теперь вытекает алгебраическая независимость функций $\frac{f_2^*\varphi_1^{(n'')}}{f_2^*\varphi_0^{(n'')}}, \frac{f_2^*\varphi_2^{(n'')}}{f_2^*\varphi_0^{(n'')}}$. Эти функции принадлежат подполю поля функций на $\widetilde{\Gamma}$, соответствующему образу $\widetilde{\Gamma}$ при отображении с помощью системы $|n''K_{\widetilde{\Gamma}}|$. Мы получаем, что это подполе имеет степень трансцендентности два и, следовательно, $|n''K_{\widetilde{\Gamma}}|$ не составлена из пучка. Отсюда, пользуясь бесконечностью системы $\{\widetilde{R}_1\}$, совсем просто вывести, что $n(K_{\widetilde{\Gamma}}\cdot\widetilde{R}_1)>0$ и $(K_{\widetilde{\Gamma}}\cdot\widetilde{R}_1)>0$. Мы приходим к противоречию с равенством $(K_{\widetilde{\Gamma}}\cdot\widetilde{R}_1)=0$. Лемма доказана. Лемма 5 приводит нас к определению поверхности «основного типа».

Определение. *Алгебраическая поверхность называется поверхностью основного типа, если она удовлетворяет любому из трех условий, эквивалентность которых доказывается в лемме* 5.

Замечание. Поверхность основного типа не может содержать пучка рациональных кривых, так как у поверхности с пучком рациональных кривых все $P_n=0$ (линейчатая поверхность).

§ 2. Отображения поверхностей основного типа с помощью кратных канонического класса

Докажем прежде всего такую теорему:

Теорема 1. *Пусть V — алгебраическая поверхность основного типа, n — натуральное число, удовлетворяющее условию: $P_n\geqslant 2$. Тогда*

1) *при $P_n=2$ система $|(3n+2)K|$ дает бирациональное вложение V,*

2) *при $P_n=3$ система $|(2n+2)K|$ (если $|nK|$ составлена из пучка) или система $|(3n+1)K|$ (если $|nK|$ не составлена из пучка) дают бирациональное вложение V,*

3) *при $P_n=3$, $P_{n-1}>0$ (считается $P_0=1$, так как $H^0(V, O[0\cdot K])=1$) система $|(2n+1)K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность,*

4) *при $P_n>3$ система $|(n+2)K|$ (если $|nK|$ составлена из пучка) или система $|(2n+1)K|$ (если $|nK|$ не составлена из пучка) дают бирациональное вложение V.*

Доказательство. Так как $P_n\geqslant 2$, то $|nK|$ — бесконечная система. Заметим, что теорему достаточно доказать для любой поверхности, бирационально эквивалентной V. Поэтому мы можем считать, что V — неособая поверхность и, кроме того, что подвижная часть системы $|nK|$, мы обозначим ее через $|R|$, не имеет базисных точек. (Последнего всегда можно добиться, применяя к V конечное число σ-процессов.) Мы можем считать также, что на V нет исключительных кривых 1-го рода, индекс пересечения которых с R равен нулю.

Рассмотрим вначале случай, когда $|R|$ составлена из пучка. Тогда, очевидно, $|R|$ удовлетворяет всем требованиям леммы 1. Применяя эту лемму, получаем, что существуют неприводимая алгебраическая система $\{R_1^*\}$ на V и открытое множество U в пространстве параметров для $|R|$, такие, что любой точке $t^{(0)}\in U$ соответствует кривая $R(t^{(0)})\in|R|$, у которой неприводимые компоненты — все неособые, не кратные в $R(t^{(0)})$, принадлежат $\{R_1^*\}$ и являются слоями дифференцируемого расслоенного пространства $V'\to E_1'$, где V' и E_1' — открытые подмножества соответственно на V и на кривой E_1, параметризующей систему $\{R_1^*\}$. Так как $\{R_1^*\}$ не может быть пучком эллиптических кривых или рациональных кривых (V — поверхность основного типа), то $((K^*+R_1^*)R_1^*)>0$ и из $(R_1^{*2})=0$ получаем $(K\cdot R_1^*)>0$, $n(K\cdot R_1^*)>0$. Сравнивая это с $(R\cdot R_1^*)=0$, приходим к выводу: у неподвижной части системы $|nK|$ имеется неприводимая компонента S_1 с $(S_1\cdot R_1^*)>0$.

По лемме 3 множество E_1' можно уменьшить до открытого E_1'' таким образом, чтобы для любой кривой $R_1(t)\in\{R_1^*\}$, параметризуемой точкой (t) из E_1'', имело место равенство

$$H^1(V, O[K+R_1(t)+S_1])=0. \tag{12}$$

Доказательство леммы 2 показывает, кроме того, что число линейно независимых 1-мерных дифференциалов 1-го рода на V, обращающихся в нуль на $R_1(t)+S_1$, равно нулю.

Пусть $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$, $R_1^{(3)}$ — три различные неприводимые неособые кривые из $\{R_1^*\}$, параметризуемые точками из E_1''.

Мы докажем, что система $\left|2K+\sum_{i=1}^{3}R_1^{(i)}+S_1\right|$ дает бирациональное вложение поверхности V.

Рассмотрим точную последовательность

$$\begin{gathered}0\to H^0(V, O[K+R_1^{(1)}])\to H^0(V, O[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}])\to\\ \to H^0(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]_{R_1^{(2)}})\to H^1(V, O[K+R_1^{(1)}])\to\\ \to H^1(V, O[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}])\to\\ \to H^1(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]_{R_1^{(2)}}).\end{gathered} \tag{13}$$

Так как $R_1^{(1)}\cap R_1^{(2)}$ — пустое множество, то дивизор $R_1^{(1)}\cdot R_1^{(2)}$ на $R_1^{(2)}$ линейно эквивалентен нулю и потому дивизоры на $R_1^{(2)}$ $(K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)})R_1^{(2)}$ и $(K+R_1^{(2)})R_1^{(2)}$ линейно эквивалентны. Но $(K+R_1^{(2)})R_1^{(2)}$ — канонический дивизор на $R_1^{(2)}$ ($R_1^{(2)}$ — неособая кривая) и тем самым $(K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)})R_1^{(2)}$ — тоже канонический дивизор на $R_1^{(2)}$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\dim H^1(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]_{R_1^{(2)}})=\\ =\dim H^1(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}[K_{R_1^{(2)}}])=\dim H^0(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}})=1.\end{gathered} \tag{14}$$

Так как $R_1^{(1)}$ и $R_1^{(2)}$ — слои в расслоенном пространстве $V'\to E_1'$, то все 1-мерные циклы на $R_1^{(2)}$ гомологичны 1-мерным циклам на $R_1^{(1)}$ и обратно. Поэтому любой 1-мерный дифференциал 1-го рода на V, обращающийся в нуль на $R_1^{(1)}$, обращается в нуль и на $R_1^{(2)}$, т. е. на $R_1^{(1)}+R_1^{(2)}$.

Обозначим число 1-мерных дифференциалов 1-го рода на V, обращающихся в нуль на $R_1^{(1)}$, через k. Число компонент связности кривой $R_1^{(1)}$, очевидно, равно единице, а кривой $R_1^{(1)}+R_1^{(2)}$ — двум, так как $(R_1^{(1)}\cdot R_1^{(2)})=0$. Из уже цитированного выше результата Кодаиры [25] вытекает:

$$\begin{gathered}\dim H^1(V, O[K+R_1^{(1)}])=1-1+k=k,\\ \dim H^1(V, O[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}])=2-1+k=1+k.\end{gathered} \tag{15}$$

Из (13), (14) и (15) следует, что отображение

$$H^1(V, O[K+R_1^{(1)}])\to H^1(V, O[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}])$$

является мономорфизмом и последовательность (13) переходит в такую:

$$0 \to H^0(V, O\,[K+R_1^{(1)}]) \to H^0(V, O\,[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]) \to$$
$$\to H^0(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}\,[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]_{R_1^{(2)}}) \to 0. \qquad (16)$$

Так как V является поверхностью основного типа, то род кривой $p_{R_1^{(i)}} \geqslant 2$ для $i = 1, 2, 3$. Поэтому

$$\dim H^0(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}\,[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]_{R_1^{(2)}}) =$$
$$= \dim H^0(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}\,[K_{R_1^{(2)}}]) \geqslant 2.$$

Отсюда $\dim H^0(V, O\,[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]) \geqslant 2$, т. е. $|K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}|$ — бесконечная линейная система. Последовательность (16) показывает, что $R_1^{(2)}$ не является неподвижной кривой для $|K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}|$.

Из теории алгебраических кривых известно, что каноническая система на кривой не имеет неподвижных точек. Отсюда следует, что сечения из группы $H^0(R_1^{(2)}, O_{R_1^{(2)}}\,[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}]_{R_1^{(2)}})$ не имеют общего нуля на $R_1^{(2)}$, и (16) показывает, что и сечения из группы $H^0(V, O\,[K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}])$ не имеют общего нуля на $R_1^{(2)}$. Это означает, что на $R_1^{(2)}$ нет базисных точек системы $|K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}|$ и неподвижные компоненты этой системы не имеют общих точек с $R_1^{(2)}$. Очевидно, во всех этих рассуждениях $R_1^{(1)}$ и $R_1^{(2)}$ можно было бы поменять ролями и в последних утверждениях $R_1^{(2)}$ заменить на $R_1^{(1)}$.

Докажем теперь, что $\dim H^0(V, O\,[K+R_1^{(i)}]) > 0$, $i = 1, 2, 3$. Если геометрический род $p_g > 0$, то это сразу ясно. Если $p_g = 0$, то, так как V — поверхность основного типа, лемма 4 показывает, что иррегулярность V $q = 0$. По теореме Римана — Роха для поверхностей имеем

$$\dim H^0(V, O\,[K+R_1^{(i)}]) \geqslant \frac{(K+R_1^{(i)})\,R_1^{(i)}}{2} + 1 - q + p_g = p_{R_1^{(i)}}.$$

Из $p_{R_1^{(i)}} \geqslant 2$ получаем $\dim H^0(V, O\,[K+R_1^{(i)}]) > 0$. Пусть $|M|$ — подвижная часть системы $|K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}|$. Если через Z обозначить неподвижную часть системы $|K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}|$, то $|M| = |K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}-Z|$. Так как $R_1^{(2)}$ не входит в Z и $|K+R_1^{(1)}|$ есть неотрицательный цикл, то Z входит в $|K+R_1^{(1)}|$.

Любая кривая из $|K+R_1^{(1)}|$ имеет вид $Z+C_1$, где C_1 — неотрицательный цикл. Тогда

$$Z+C_1+R_1^{(2)} \in |K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}|$$

и

$$C_1+R_1^{(2)} \in |M|.$$

Сделаем теперь столько σ-процессов в базисных точках $|M|$, чтобы собственный образ $|M|$ уже не имел базисных точек. Поверхность, полученную в результате из V, обозначим $\widetilde{V}$. Собственный образ на $\widetilde{V}$ любой линейной

системы $|L|$ на V обозначим через $\overline{L}$, а полный образ через $|\widetilde{L}|$. Имеет место равенство $\widetilde{L} = \overline{L} + \sum_L S^{(i)}$, где $\sum_L S^{(i)}$ — некоторая совокупность кривых, вклеенных при σ-процессах.

Канонический класс K' поверхности $\widetilde{V}$ выражается через $\widetilde{K}$ по формуле $K' = \widetilde{K} + \sum S^{(i)}$, где $\sum S^{(i)}$ — некоторая совокупность кривых, вклеенных при σ-процессах.

Мы имеем

$$\overline{M} + \sum\nolimits_M S^{(i)} = \widetilde{M} = \widetilde{K} + \widetilde{R}_1^{(1)} + \widetilde{R}_1^{(2)} - \widetilde{Z} = K' - \sum \widetilde{S}^{(i)} +$$
$$+ \overline{R}_1^{(1)} + \sum\nolimits_{R_1^{(1)}} S^{(i)} + \overline{R}_1^{(2)} + \sum\nolimits_{R_1^{(2)}} S^{(i)} - \overline{Z} - \sum\nolimits_Z S^{(i)}.$$

Отсюда

$$\overline{M} = K' + \overline{R}_1^{(1)} + \overline{R}_1^{(2)} - \overline{Z} + Y_S,$$

где Y_S — некоторый цикл на $\widetilde{V}$, все компоненты которого — кривые, вклеенные при σ-процессах.

С другой стороны, $\overline{M} = \overline{C}_1 + \overline{R}_1^{(2)} + Y'_S$, где Y'_S — неотрицательный цикл, состоящий из кривых, вклеенных при σ-процессах.

Рассмотрим теперь $(\overline{M}^2)$.

$$(\overline{M}^2) = (\overline{M}\cdot\overline{M}) = ((\overline{C}_1 + \overline{R}_1^{(2)} + Y'_S)\cdot\overline{M}).$$

Так как на $R_1^{(2)}$ нет неподвижных точек системы $|M|$, то $\overline{R}_1^{(2)}$ не имеет общих точек ни с $\overline{Z}$, ни с Y_S, т. е. $(\overline{R}_1^{(2)}\cdot\overline{Z}) = (\overline{R}_1^{(2)}\cdot Y_S) = 0$. Из $(R_1^{(1)}\cdot R_1^{(2)}) = 0$ следует $(\overline{R}_1^{(1)}\cdot\overline{R}_1^{(2)}) = 0$. Используя все это, получаем

$$(\overline{R}_1^{(2)}\cdot\overline{M}) = (\overline{R}_1^{(2)}\,(K' + \overline{R}_1^{(2)})) + (\overline{R}_1^{(2)}\cdot\overline{R}_1^{(1)}) - (\overline{R}_1^{(2)}\overline{Z}) + (\overline{R}_1^{(2)}Y_S) =$$
$$= (K' + \overline{R}_1^{(2)})\overline{R}_1^{(2)}) = 2p_{\overline{R}_1^{(2)}} - 2 \geqslant 2\cdot 2 - 2 = 2.$$

Так как $\overline{M}$ не имеет неподвижных компонент, то

$$(\overline{M}\cdot\overline{C}_1) \geqslant 0, \ (\overline{M}\cdot Y'_S) \geqslant 0. \quad \text{Итак,}$$
$$(\overline{M}\cdot\overline{M}) = ((\overline{C}_1 + \overline{R}_1^{(2)} + Y'_S)\cdot\overline{M}) \geqslant 2. \qquad (17)$$

Так как $|\overline{M}|$ не имеет неподвижных точек, то ее составленность из пучка влекла бы $(\overline{M}^2) = 0$ — в противоречии с (17). Следовательно, система $|\overline{M}|$ не составлена из пучка, а значит, и система $|M|$ на V не составлена из пучка. С помощью теоремы Бертини мы получаем теперь, что $|M|$ — неприводимая линейная система.

Так как $|M|$ не имеет неподвижных компонент, то $(M\cdot S_1) \geqslant 0$. Очевидно, $(R_1^{(3)}\cdot M) = (R_1^{(2)}\cdot M) = ((K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)} - Z)\,R_1^{(2)})$.

Так как $|K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}|$ не имеет неподвижных точек на $R_1^{(2)}$, то $(Z\cdot R_1^{(2)}) = 0$. Поэтому $(R_1^{(3)}\cdot M) = ((K + R_1^{(2)})\,R_1^{(2)}) = 2p_{R_1^{(2)}} - 2 \geqslant 2$.

Предположим теперь, что $(M\cdot S_1) > 0$. Обозначим $R_1^{(3)} + S_1 = C$ и заметим, что $(C\cdot M) = (R_1^{(3)}\cdot M) + (S_1\cdot M) \geqslant 2 + 1 = 3$.

Так как V не содержит пучка эллиптических или рациональных кривых, то геометрический род общей кривой $M \in |M|$ $p_M \geqslant 2$. Это обстоятельство, а также равенство (12) с $R_1^{(3)}$ вместо $R_1(t)$ и то, что $\dim H^0(V, O\,[K + C]) = \dim H^0(V, O\,[K + R_1^{(3)} + S_1]) > 0$, позволяют применить к системам $|K + M + C|$ и $|M|$ лемму 2. Из $(C\cdot M) \geqslant 3$ получаем, что $|K+M+C|$ дает бирациональное отображение поверхности V в проективное пространство.

Говорят, что система $|D_1|$ является частью системы $|D|$ (обозначение $|D_1| \subseteq |D|$), если для кривой $D_1 \in |D_1|$ существует такая кривая $D \in |D|$, что $D = D_1 + D_2$, где $D_2 \geqslant 0$.

Ясно, что поле функций $\mathscr{K}_{D_1}$ на многообразии, получаемом при отображении V, соответствующем системе $|D_1|$, является подполем поля $\mathbf{C}(V)$ (поле функций на V), порожденным функциями $f \in \mathbf{C}(V)$, для которых $(f) + D_1 \geqslant 0$. Поле $\mathscr{K}_D$, соответствующее системе $|D|$, порождается функциями $f \in \mathbf{C}(V)$, для которых $(f) + D \geqslant 0$. Очевидно, $\mathscr{K}_{D_1} \subseteq \mathscr{K}_D \subseteq \mathbf{C}(V)$. Если $|D_1|$ дает бирациональное вложение V, то $\mathscr{K}_{D_1} = \mathbf{C}(V)$. Но тогда $\mathscr{K}_D = \mathbf{C}(V)$, и $|D|$ также дает бирациональное вложение V. Очевидно,

$$|K+M+C| = |K+M+R_1^{(3)}+S_1| \subseteq$$
$$\subseteq |K+K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)}+R_1^{(3)}+S_1| = \left|2K+\sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)}+S_1\right|.$$

Мы получаем, что $\left|2K+\sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)}+S_1\right|$ дает бирациональное вложение поверхности V в проективное пространство.

Пусть теперь $(S_1 \cdot M) = 0$. Так как $|M|$ не содержит неподвижной части, то S_1 является фундаментальной кривой для $|M|$. Это означает, что в $|M|$ есть кривая вида $B + n_1S_1$, где B уже не содержит S_1, $B \neq 0$, так как иначе мы имели бы $M = n_1S_1$ и из $(M \cdot S_1) = 0$ следовало бы $(M^2) = 0$. Из связности $B + n_1S_1$ (неприводимость $|M|$ и принцип вырождения) следует, что $(B \cdot S_1) > 0$. Из $(M \cdot S_1) = ((B + n_1S_1) S_1) = 0$ получаем $(S_1^2) < 0$. Так как S_1 — неприводимая кривая, то $((K+S_1) S_1) \geqslant -2$, $(K \cdot S_1) \geqslant -2 - (S_1^2) \geqslant -1$. Но $(R_1^{(1)} \cdot S_1) = (R_1^{(2)} \cdot S_1) \geqslant 1$, и поэтому

$$((K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}) S_1) \geqslant -1+1+1 \geqslant 1.$$

Сравнивая это с $(M \cdot S_1) = 0$, получаем, что в $|K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}|$ имеются неподвижные компоненты, пересекающиеся с S_1 (заметим, что S_1 не входит в Z, так как $(Z \cdot R_1^{(1)}) = 0$, а $(S_1 \cdot R_1^{(1)}) > 0$). Пусть S' — компонента связности носителя Z, пересекающаяся с S_1.

Предположим, что $(S' \cdot M) > 0$. Пусть вначале $R_1^{(3)}$ не входит в S'. Докажем, что $H^1(V, O\,[K + R_1^{(3)} + S' + S_1]) = 0$. По уже цитированному результату Кодаиры [25]

$$H^1(V, O\,[K + R_1^{(3)} + S' + S_1]) = m - 1 + k,$$

где m — число компонент связности кривой $R_1^{(3)} + S' + S_1$, а k — число 1-мерных дифференциалов 1-го рода на V, обращающихся в нуль на $R_1^{(3)} + S_1 + S'$.

Из $(R_1^{(3)} \cdot S_1) > 0$, $(S' \cdot S_1) > 0$ следует, что $m = 1$, а из того, что $R_1^{(3)}$ параметризуется точкой из E_1'', следует, что число 1-мерных дифференциалов 1-го рода на V, обращающихся в нуль на $R_1^{(3)} + S_1$, равно нулю, но тогда и $k = 0$. Итак,

$$H^1(V, O\,[K + R_1^{(3)} + S' + S_1]) = 0.$$

Так как $\dim H^0(V, O\,[K + R_1^{(3)} + S' + S_1]) > 0$, $((R_1^{(3)} + S' + S_1) \cdot M) = (R_1^{(3)} \cdot M) + (S' \cdot M) \geqslant 2 + 1 = 3$, то применение леммы 2 к системам

$|K + M + (R_1^{(3)} + S' + S_1)|$ и $|M|$ показывает, что $|K + M + (R_1^{(3)} + S' + S_1)|$ дает бирациональное вложение V. Но $|K + M + (R_1^{(3)} + S' + S_1)| \subseteq |K + M + Z + R_1^{(3)} + S_1| = |K + K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)} + R_1^{(3)} + S_1| = \left|2K + \sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)} + S_1\right|$, откуда следует, что $\left|2K + \sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)} + S_1\right|$ дает бирациональное вложение.

Пусть теперь $R_1^{(3)}$ входит в S', т. е. и в Z. Рассмотрим точную последовательность

$$H^1(V, O\,[K + R_1^{(3)} + S_1]) \to H^1(V, O\,[K + 2R_1^{(3)} + S_1]) \to$$
$$\to H^1(R_1^{(3)}, O_{R_1^{(3)}}\,[(K + R_1^{(3)}) R_1^{(3)} + R_1^{(3)} \cdot R_1^{(3)} + S_1 \cdot R_1^{(3)}]).$$

Так как $R_1^{(3)}$ — неособая кривая, $(K + R_1^{(3)}) \cdot R_1^{(3)}$ — канонический класс на $R_1^{(3)}$ и $(S_1 \cdot R_1^{(3)}) > 0$, то

$$H^1(R_1^{(3)}, O_{R_1^{(3)}}\,[(K + R_1^{(3)}) \cdot R_1^{(3)} + R_1^{(3)} \cdot R_1^{(3)} + S_1 \cdot R_1^{(3)}]) = 0.$$

Но также $H^1(V, O\,[K + R_1^{(3)} + S]) = 0$, и, следовательно,

$$H^1(V, O\,[K + 2R_1^{(3)} + S_1]) = 0.$$

Так как $H^0(V, O\,[K + 2R_1^{(3)} + S_1]) > 0$, $((2R_1^{(3)} + S_1) \cdot M) = (2R_1^{(3)} \cdot M) \geqslant 4$, то применение леммы 2 к системам $|K + M + (2R_1^{(3)} + S_1)|$ и $|M|$ показывает, что $|K + M + (2R_1^{(3)} + S_1)|$ дает бирациональное вложение V.

Заметим, что

$$K + M + (2R_1^{(3)} + S_1)| \subseteq |K + M + Z + R_1^{(3)} + S_1| = |K + K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)} +$$
$$+ R_1^{(3)} + S_1\Big| = \left|2K + \sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)} + S_1\right|,$$

откуда следует, что $\left|2K + \sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)} + S_1\right|$ дает бирациональное вложение V.

Покажем теперь, что предположения $(S_1 \cdot M) = 0$, $(S' \cdot M) = 0$ ведут к противоречию. Итак, пусть $(S_1 \cdot M) = 0$, $(S' \cdot M) = 0$.

Пусть $S' = \sum_{j=1}^{N'} S_j'$ — разложение S' на неприводимые компоненты и $S = \sum_{j=1}^{N'} m_j S_j'$ — дивизор в Z, носителем которого является S'. Так как $(M \cdot S_j') = 0$ для всех $j = \overline{1, N'}$, то

$$(M \cdot S) = \sum_{j=1}^{N'} m_j (M \cdot S_j') = 0.$$

Так как S' — компонента связности в носителе Z, то $((Z - S) \cdot S) = 0$. Поэтому

$$(M \cdot S) = ((K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)} - Z) \cdot S) = ((K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}) \cdot S) - (S \cdot S) -$$
$$- ((Z - S) \cdot S) = ((K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}) \cdot S) - (S \cdot S).$$

Из $(M \cdot S) = 0$ следует

$$(S \cdot S) = ((K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}) \cdot S). \tag{18}$$

Так как $(S'_j\cdot M)=0$, то S'_j — фундаментальная кривая для $|M|$. Отсюда следует, что в $|M|$ имеется связная кривая вида $B_j+n_{1j}S'_j$, где $B_j\neq 0$ (из $B_j=0$ и $(S'_j\cdot M)=0$ следовало бы $(M^2)=0$) и $(B_j\cdot S'_j)>0$.

Из $(M\cdot S'_j)=(B\cdot S'_j)+n_{1j}(S'^2_j)=0$ получаем $(S'^2_j)<0$.

Так как S'_j — неприводимая кривая, то $(K\cdot S'_j)+(S'^2_j)\geqslant -2$, $(K\cdot S'_j)\geqslant -2-(S'^2_j)\geqslant -1$. Единственный случай, когда $(K\cdot S'_j)<0$ — это $(K\cdot S'_j)=-1$ и $(S'^2_j)=-1$. Очевидно, эти условия характеризуют исключительную кривую 1-го рода. Из $(Z\cdot R)=0$ следует $(S'_j\cdot R)=0$. Но в начале доказательства теоремы было замечено, что можно считать, что на V нет исключительных кривых 1-го рода, индекс пересечения которых с R равен нулю.

Итак, $(K\cdot S'_j)\geqslant 0$. Так как $(R_1^{(1)}\cdot S'_j)=(R_1^{(2)}\cdot S'_j)=0$, то $((K+R_1^{(1)}+R_1^{(2)})S'_j)\geqslant 0$. Формула (18) дает теперь

$$(S\cdot S)\geqslant 0. \tag{19}$$

Для того чтобы прийти к противоречию, остается показать, что

$$(S\cdot S)<0. \tag{19a}$$

Доказательство, которое мы дадим, фактически повторяет доказательство Мамфорда [35] отрицательной определенности матрицы, составленной из индексов пересечения кривых, получающихся при разрешении нормальной особой точки на поверхности.

Возьмем кривую $M\in|M|$, проходящую через некоторую точку кривой S_1. Так как $(M\cdot S_1)=0$, то мы должны иметь

$$M=n_1S_1+\sum_k m'_kS'_k+B',$$

где $n_1>0$, все $m'_k>0$, $B'\geqslant 0$, B' не содержит S_1 и ни одной из S'_j. Докажем, что k в $\sum\limits_k m'_kS'_k$ пробегает все значения от 1 до N'. Если бы это было не так, то из связности S_1+S' и S' следует, что нашлось бы S'_l, не входящее в $\sum\limits_k m'_kS'_k$, но пересекающееся с $S_1+\sum\limits_k m'_kS'_k$. Это означало бы, что $(M\cdot S'_l)>0$ в противоречии с $(M\cdot S'_l)=0$.

Так как $(M\cdot S'_i)=0$, то

$$\sum_{k=1}^{N'} m'_k(S'_k\cdot S'_i)=-((B'+n_1S_1)\cdot S'_i)\leqslant 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{N'}(m'_kS'_k\cdot m'_iS'_i)\leqslant 0.$$

Кроме того, из связности S_1+S' вытекает, что существуют значения i, для которых $\sum\limits_{k=1}(m'_kS'_k\cdot m'_iS'_i)<0$.

Положим $(m'_k\cdot S'_k\cdot m'_iS'_i)=a_{ki}$. Мы получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{N'}a_{ki}\leqslant 0$, причем существуют значения i, для которых $\sum\limits_{k=1}^{N'}a_{ki}<0$. Так как при $k\neq i$ $a_{ki}\geqslant 0$, то последнее показывает, что найдутся значения i, для которых $a_{ii}<0$.

Если доказать теперь, что равенство $\sum\limits_{k=1}^{N'}\sum\limits_{i=1}^{N'}a_{ki}\alpha_k\alpha_i=0$ возможно только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{N'}=0$, то мы получим, что матрица $\|a_{ki}\|$ отрицательно определена.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{N'}\sum\limits_{i=1}^{N'}a_{ki}\alpha_k\alpha_i=0$. Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N'}a_{ki}\alpha_k\alpha_i=\sum_{i=1}^{N'}\Big(\sum_{k=1}^{N'}a_{ki}\Big)\alpha_i^2-\sum_{1\leqslant k<i\leqslant N'}a_{ki}(\alpha_i-\alpha_k)^2.$$

Мы получаем $\sum\limits_{i=1}^{N'}\Big(\sum\limits_{k=1}^{N'}a_{ki}\Big)\alpha_i^2-\sum\limits_{1\leqslant k<i\leqslant N'}a_{ki}(\alpha_i-\alpha_k)^2=0$, и из неравенства $a_{ki}\geqslant 0$ при $k\neq i$, $\sum\limits_{k=1}^{N'}a_{ki}\leqslant 0$ следует

$$\sum_{i=1}^{N'}\Big(\sum_{k=1}^{N'}a_{ki}\Big)\alpha_i^2=0. \tag{20}$$

$$\sum_{1\leqslant k<i\leqslant N'}a_{ki}(\alpha_i-\alpha_k)^2=0. \tag{21}$$

Так как существует i, для которого $\sum\limits_{k=1}^{N'}a_{ki}<0$, то (20) показывает, что существует i, для которого $\alpha_i=0$. Из связности S' следует, что от любого i до любого индекса k найдется последовательность индексов $i_0=i,\ i_1,\ i_2,\ldots,\ i_r=k$, такая, что для любых соседних членов последовательности i_p, i_{p+1} $(S'_{i_p}\cdot S'_{i_{p+1}})>0$, т. е. $a_{i_pi_{p+1}}>0$.

Из (21) получаем последовательно $\alpha_i=\alpha_{i_1}=\ldots=\alpha_k$, т. е. все α_k нули.

Мы можем написать

$$(S\cdot S)=\sum_{k=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N'}(m_kS'_k\cdot m_iS'_i)=\sum_{k=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N'}(m'_kS'_k\cdot m'_iS'_i)\left(\frac{m_k}{m'_k}\right)\left(\frac{m_i}{m'_i}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N'}a_{ki}\left(\frac{m_k}{m'_k}\right)\left(\frac{m_i}{m'_i}\right),$$

так как величины $\dfrac{m_k}{m'_k}$ не нули.

Итак, мы доказали, что $\Big|2K+\sum\limits_{i=1}^{3}R_1^{(i)}+S_1\Big|$ дает бирациональное вложение поверхности V.

Обозначим через m' число неприводимых компонент, на которые разлагается общая кривая системы $|R|$. Так как $|R|$ не содержит неподвижных частей, то всегда существуют кривые $R\in|R|$, у которых все неприводимые компоненты параметризуются точками из E_1. Пусть $m'\geqslant 3$. Тогда можно считать, что $R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_1^{(3)}$ — компоненты некоторой кривой $R\in|R|$, т. е. $\Big|\sum\limits_{i=1}^{3}R_1^{(i)}\Big|\subseteq|R|$. Мы имеем

$$\Big|2K+\sum_{i=1}^{3}R_1^{(i)}+S_1\Big|\subseteq|2K+R+S_1|\subseteq|2K+nK|=|(n+2)K|,$$

т. е. при $m'\geqslant 3$ система $|(n+2)K|$ дает бирациональное вложение поверхности V.

При $m' = 2$ мы можем, очевидно, считать, что $|2R| \supseteq \left|\sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)}\right|$. Тогда

$$\left|2K + \sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)} + S_1\right| \subseteq |2K + 2R + S_1| \subseteq |2K + 2nK| = |(2n+2)K|,$$

т. е. при $m' = 2$ система $|(2n+2)K|$ дает бирациональное вложение V.

При $m' = 1$ мы можем считать, что $|3R| \supseteq \left|\sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)}\right|$, т. е.

$$\left|2K + \sum_{i=1}^{3} R_1^{(i)} + S_1\right| \subseteq |2K + 3R + S_1| \subseteq |2K + 3nK| = |(3n+2)K|,$$

и $|(3n+2)K|$ дает бирациональное вложение V. Так как $|(n+2)K| \subseteq \subseteq |(2n+2)K| \subseteq |(3n+2)K|$, то можно сказать, что при $m' \geqslant 2$ система $|(2n+2)K|$ и при любом m' система $|(3n+2)K|$ дают бирациональное вложение V.

При $P_n = 2$ система $|nK|$ обязательно составлена из пучка, и мы получаем, что для случая $P_n = 2$ утверждение теоремы полностью доказано.

Примем в дальнейшем, что $P_n > 2$, и посмотрим, какое ограничение на P_n накладывает условие $m' \leqslant 2$. Итак, допустим, что $m' \leqslant 2$, $P_n > 2$.

Рассмотрим регулярное отображение V на кривую X, соответствующее системе $|R|$. Дивизор гиперплоского сечения кривой X при вложении X в проективное пространство, соответствующем отображению $f_R\colon V \to X$, обозначим через H. Мы уже ссылались на то место из [25], где доказано, что можно взять открытые подмножества V' на V и X' на X так, что каждой точке из X' соответствует неособая (быть может, приводимая) кривая из V', разным точкам из X' соответствуют гомеоморфные кривые, т. е. во всяком случае кривые, имеющие одно и то же число неприводимых компонент. Пусть это число будет h. Тогда, если степень дивизора H равна $a(H)$, то ясно, что число m' неприводимых компонент у почти всех кривых из $|R|$ равно $a(H)\cdot h$. Отсюда, так как $m' \leqslant 2$, то $a(H)\cdot h \leqslant 2$, $a(H) \leqslant 2$. Ясно, однако, что $\dim H^0(X, O_X[H]) \geqslant \dim H^0(V, O[R])$.

Пусть $\widetilde{X}$ — неособая модель кривой X, $[H]_{\widetilde{X}}$ — расслоение над $\widetilde{X}$, индуцированное расслоением $[H]$ над X, $\overline{O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}}$ — прямой образ пучка $O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}$ при отображении $\widetilde{X} \to X$. Очевидно, имеет место вложение $O_X[H] \subseteq \overline{O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}}$.

Получаем $\dim H^0(X, O_X[H]) \leqslant \dim H^0(X, \overline{O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}})$. Но $\dim H^0(X, \overline{O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}}) = \dim H^0(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}})$. По теореме Римана — Роха для кривой $\widetilde{X}$ имеем

$$\dim H^0(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}) = a(H) + 1 - p_{\widetilde{X}} + \dim H^0(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}[K_{\widetilde{X}} - (H_{\widetilde{X}})]).$$

Так как $(H)_{\widetilde{X}}$ — положительный дивизор на $\widetilde{X}$, то из отсутствия неподвижных точек у канонической системы на кривой получаем при $p_{\widetilde{X}} \neq 0$

$$\dim H^0(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}[K_{\widetilde{X}} - (H)_{\widetilde{X}}]) \leqslant p_{\widetilde{X}} - 1.$$

Отсюда при $p_{\widetilde{X}} \neq 0$

$$\dim H^0(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}) \leqslant a(H) \leqslant 2.$$

Следовательно, и $\dim H^0(V, O[R]) \leqslant 2$. Так как $|R|$ — подвижная часть системы $|nK|$, то

$$P_n = \dim H^0(V, O[nK]) = \dim H^0(V, O[R]) \leqslant 2.$$

Мы приходим к противоречию с предположением $P_n > 2$.

Остается случай $p_{\widetilde{X}} = 0$, т. е. $\widetilde{X}$ — рациональная кривая. Тогда $\dim H^0(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}[H)] = a(H) + 1 \leqslant 3$. Как и выше, отсюда получается $P_n \leqslant 3$. Вместе с $P_n > 2$ это дает нам $P_n = 3$. Тогда $\dim H^0(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}[H]_{\widetilde{X}}) = 3$ и $a(H) = 2$. Из $m' = a(H)\cdot h \leqslant 2$ получаем $m' = 2$, $h = 1$ и $|R| = = |R_1^{(1)} + R_1^{(2)}|$. Равенство $h = 1$ означает, что точкам из X' соответствуют неприводимые кривые из V. Но эти кривые должны быть компонентами кривых из $|R|$. Так как X — рациональная кривая, то мы получаем, что кривые из $\{R_1^{\bullet}\}$ линейно эквивалентны.

Мы получаем, что $R_1^{(1)}$ и $R_1^{(2)}$ меняются в бесконечной линейной системе. Из результатов [25] следует теперь, что $H^1(V, O[K + R_1^{(1)}]) = 0$. Выше мы уже доказали, что $H^0(V, O[K + R_1^{(1)}]) > 0$. Так как род кривой $R_1^{(2)} p_{R_{(1)}^{(2)}} \geqslant 2$ и $|R_1^{(2)}|$ — бесконечная неприводимая система, то к системам $|K + R^{(2)} + R_1^{(1)}|$ и $|R_1^{(2)}|$ можно применить лемму 2. Из этой леммы мы получаем, что $|K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность. Очевидно,

$$|K + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}| \subseteq |K + nK| \subseteq |(2n+1)K|.$$

Пусть f_1 — рациональное отображение, соответствующее системе $|K + + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}|$, f — отображение, соответствующее системе $|(2n+1)K|$.

Очевидно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & f(V) \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_1"'] & f_1(V), \end{tikzcd}$$

где g — рациональное отображение $f(V)$ на $f_1(V)$. Для степеней отображений мы имеем

$$d(f_1) = d(g)\, d(f).$$

Так как $d(f_1) \leqslant 2$, то $d(f) \leqslant 2$. В случае $d(f) = 1$ $|(2n+1)K|$ дает бирациональное вложение, в случае же $d(f) = 2$ будет $d(f_1) = 2$, $d(g) = 1$, т. е. $f(V)$ бирационально эквивалентно $f_1(V)$ и $f(V)$, так же как $f_1(V)$, является рациональной поверхностью.

Мы получаем, таким образом, что f при $m' \leqslant 2$ является либо бирациональным вложением, либо отображением степени два на рациональную поверхность. Предположим, что

$$\dim H^0(V, O[(n-1)K]) > 0.$$

Тогда $|(n+2)K| \subseteq |(n+2)K + (n-1)K| = |(2n+1)K|$ и при $P_n = 3$, $m' > 2$ система $|(2n+1)K|$ дает бирациональное вложение V. Мы получаем, что условия $P_n = 3$, $\dim H^0(V, O[(n-1)K]) > 0$ и $|nK|$ составлена из пучка — влекут утверждение: $|(2n+1)K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность.

Выше мы показали, что из условий $m' \leqslant 2$, $P_n > 2$ следуют равенства $m' = 2$, $P_n = 3$.

Отсюда следует прежде всего, что $P_n > 3$ влечет $m' \geqslant 3$ и, значит, если $P_n > 3$ и $|nK|$ составлена из пучка, то $|(n+2)K|$ дает бирациональное вложение.

Если $P_n = 3$, то мы получаем $m' \geqslant 2$, откуда следует, что при условиях $P_n = 3$ и $|nK|$ составлена из пучка — система $|(2n+2)K|$ дает бирациональное вложение V. Мы видим, что в случае, когда $|nK|$ составлена из пучка, все утверждения теоремы доказаны.

Пусть теперь система $|nK|$, и тем самым система $|R|$, не составлена из пучка. Из теоремы Бертини следует тогда, что $|R|$ — бесконечная неприводимая система. Так как V не содержит пучка рациональных или эллиптических кривых, то род общей кривой $R \in |R|$ $p_R \geqslant 2$. Докажем, что $\dim H^0(V, O[K+R]) > 0$.

Если $p_g > 0$, то это сразу ясно. Если же $p_g = 0$, то из леммы 4 следует $q = 0$. Теорема Римана—Роха дает нам $\dim H^0(V, O[K+R]) \geqslant \frac{((K+R)R)}{2} + 1 - q + p_g = \frac{((K+R)R)}{2} + 1$. Заметив, что $\frac{((K+R)R)}{2} + 1 \geqslant p_R \geqslant 2$, получаем $\dim H^0(V, O[K+R]) > 0$. Так как R — связная кривая, меняющаяся в бесконечной линейной системе, то из результатов [25] следует, что

$$H^1(V, O[K+R]) = 0.$$

Теперь, очевидно, можно применить лемму 2 к системам $|K+R+R|$ и $|R|$, которая показывает нам, что в случае $(R\cdot R) \geqslant 3$ $|K+R+R|$ дает бирациональное вложение, а при $(R\cdot R) \leqslant 2$ $|K+R+R|$ дает либо бирациональное вложение, либо отображение степени два на рациональную поверхность.

Разберем случай $(R\cdot R) \leqslant 2$. Напишем точную последовательность

$$0 \to H^0(V, O_V) \to H^0(V, O_V[R]) \to H^0(R, O_R[R\cdot R]). \tag{22}$$

Так как $|R|$ не имеет базисных точек (см. начало доказательства), то по теореме Бертини R можно считать неособой кривой.

Применяя теорему Римана—Роха к R, получаем

$$\dim H^0(R, O_R[R\cdot R]) = (R\cdot R) + 1 - p_R + \dim H^0(R, O_R[K_R - R\cdot R]).$$

Так как $p_R \neq 0$ и $(R\cdot R) > 0$, то $\dim H^0(R, O_R[K_R - R\cdot R]) \leqslant p_R - 1$ и, значит, $\dim H^0[R, O_R[R\cdot R]) \leqslant (R\cdot R) \leqslant 2$. Далее, $\dim H^0(V, O_V) = 1$ и (22) показывает, что $\dim H^0(V, O_V[R]) \leqslant \dim H^0(V, O_V) + \dim H^0(R, O_R[R\cdot R]) \leqslant 1 + 2 = 3$. Отсюда $P_n = H^0(V, O[nK]) = H^0(V, O[R]) \leqslant 3$. Так как $|nK|$ не составлена из пучка, то $P_n > 2$ и, значит, $P_n = 3$.

Так как $|K+R+R| \subseteq |K+nK+nK| = |(2n+1)K|$, то мы получаем, что условия $P_n > 3$, $|nK|$ не составлена из пучка — влекут утверждение: $|(2n+1)K|$ дает бирациональное вложение V, а из условий $P_n = 3$, $|nK|$ не составлена из пучка следует, что $|(2n+1)K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность.

Заметим теперь, что $(R\cdot R) \geqslant 2$. Действительно, несоставленность $|R|$ из пучка влечет $(R^2) > 0$, а из $(R)^2 = 1$ следовало бы, что образом V при регулярном отображении f_R, соответствующем $|R|$, является поверхность 1-й степени, т. е. плоскость, и f_R имеет степень единица. Но тогда V было бы рациональной поверхностью, что противоречит условию теоремы.

Из $(R\cdot R) \geqslant 2$ получаем $2(R\cdot R) \geqslant 4 > 3$.

Применяя лемму 2 к системам $|K+R+2R|$ и $|R|$, получаем, что $|K+R+2R| = |K+3R|$ дает бирациональное вложение V.

Так как $|K+3R| \subseteq |K+3nK| = |(3n+1)K|$, то мы получаем, что из условий $P_n = 3$, $|nK|$ не составлена из пучка следует, что $|(3n+1)K|$ дает бирациональное вложение V. Все утверждения теоремы доказаны.

Наиболее важным следствием из теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Пусть V — алгебраическая поверхность основного типа. Тогда, если геометрический род V $p_g > 3$, то $|3K|$ дает бирациональное вложение V, если же $p_g = 3$, то $|3K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность.*

Доказательство. Так как $P_1 = P_g \geqslant 3$, то за число n, о котором говорится в теореме 1, можно принять единицу.

Если еще заметить, что при $n = 1$ $P_{n-1} = P_0 = 1$ и $2n+1 = n+2 = 3$, то утверждения теоремы 2 сразу вытекают из пунктов 4) и 3) теоремы 1. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что для поверхностей основного типа при $p_g \leqslant 3$ уже небольшие кратные канонического класса дают бирациональное вложение и, в частности, любая поверхность основного типа бирационально вкладывается с помощью $|9K|$.

Теорема 3. *Пусть V — алгебраическая поверхность основного типа. Тогда*

1) *при $p_g = 0$ система $|7K|$ дает бирациональное вложение V,*
2) *при $p_g = 2$ система $|5K|$ дает бирациональное вложение V,*
3) *при $p_g = 3$ система $|4K|$ дает бирациональное вложение V,*
4) *при любом p_g система $|9K|$ дает бирациональное вложение V.*

Доказательство. Ясно, что можно считать V неособой поверхностью без исключительных кривых 1-го рода. Тогда $(K^2) > 0$ (лемма 5). Формула Нетера дает нам

$$p_a = \frac{1}{12}((K^2) + 2 - 4q + b_2),$$

или, так как

$$p_a = 1 - q + p_g; \quad b_2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2} = 2p_g + h^{1,1},$$

$$12 - 12q + 12p_g = (K^2) + 2 - 4q + 2p_g + h^{1,1}.$$

Отсюда

$$q = \frac{10(p_g+1) - (K^2) - h^{1,1}}{8}. \tag{23}$$

1) Пусть $p_g = 0$. Из леммы 5 следует тогда, что $q = 0$.

Теорема Римана—Роха дает нам

$$P_n = \dim H^0(V, O[nK]) \geqslant \frac{(nK(nK-K))}{2} + 1 - q + p_g = \frac{n(n-1)}{2}(K^2) + 1. \tag{24}$$

При $n = 2$ и $n = 3$ мы получаем отсюда

$$P_2 \geqslant \frac{2(2-1)}{2}(K^2) + 1 = (K^2) + 1 \geqslant 2 \tag{25}$$

$$P_3 \geqslant \frac{3(3-1)}{2}(K^2) + 1 = 3K^2 + 1 \geqslant 4. \tag{26}$$

Последнее неравенство показывает нам, что можно применить пункт 4) теоремы 1 при $n = 3$. Замечая, что при $n = 3$ $n+2 = 5$, $2n+1 = 7$, получим: система $|5K|$ или система $|7K|$ дают бирациональное вложение V.

Из (25) следует, что $|2K|$ содержит положительный цикл, а значит, $|5K| \subseteq |7K| \subseteq |9K|$. Это показывает, что при $p_g = 0$ $|7K|$ всегда дает бирациональное вложение V, а также и $|9K|$ всегда дает бирациональное вложение V.

2) Пусть $p_g = 2$. Тогда применение пункта 1) теоремы 1 с $n = 1$ показывает ($3n + 2 = 5$ при $n = 1$), что $|5K|$ дает бирациональное вложение V. Так как здесь $p_g > 0$ и, значит, $|K|$ содержит неотрицательный цикл, то $|5K| \subseteq |9K|$, т. е. $|9K|$ также дает бирациональное вложение V.

3) Пусть $p_g = 3$. Замечая, что при $n = 1$ $2n + 2 = 3n + 1 = 4$, применяем пункт 2) теоремы 1 и получаем: $|4K|$ дает бирациональное вложение V. Так как $|4K| \subseteq |9K|$, то $|9K|$ также дает бирациональное вложение V.

4) Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть случай $p_g = 1$. Формула (23) дает нам при $p_g = 1$

$$q = \frac{20 - (K^2) - h^{1,1}}{8}.$$

Отсюда видно, что $q \leqslant 2$. По теореме Римана—Роха получаем

$$P_n = \dim H^0(V, O, [nK]) \geqslant \frac{n(n-1)}{2}(K^2) + 1 - q + p_g \geqslant \frac{n(n-1)}{2}(K^2).$$

При $n = 3$ и $n = 4$ имеем

$$P_3 \geqslant 3(K^2) \geqslant 3, \qquad (27)$$

$$P_4 \geqslant \frac{4(4-1)}{2}(K^2) = 6(K^2) \geqslant 6. \qquad (28)$$

Отсюда видно, что можно применить пункт 4) теоремы 1 при $n = 4$. Замечая, что при $n = 4$ $n + 2 = 6$, $2n + 1 = 9$, получаем: система $|6K|$ или система $|9K|$ дают бирациональное вложение V.

Из (27) следует, что $|3K|$ содержит положительный цикл и, значит, $|6K| \subseteq |9K|$. Мы получаем, что всегда $|9K|$ дает бирациональное вложение V. Теорема доказана.

Полученные нами результаты можно несколько улучшить, если предполагать V регулярной поверхностью основного типа.

Докажем вначале такую теорему:

Т е о р е м а 4. *Пусть V — регулярная алгебраическая поверхность основного типа, n — натуральное число, удовлетворяющее условию $P_n \geqslant 2$. Тогда:*

1) *при $p_g = 0$ система $|(2n+1)K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность;*

2) *при $p_g > 0$ система $|(n+1)K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение степени два на рациональную поверхность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $P_n \geqslant 2$, то $|nK|$ — бесконечная система. Мы можем считать, что V — неособая поверхность и что подвижная часть системы $|nK|$ (обозначим ее через $|R|$) не имеет базисных точек.

Предположим вначале, что $|R|$ составлена из пучка, и пусть $\{R_1^*\}$ — неприводимая алгебраическая система, о которой говорится в лемме 1. Пусть $R_1^{(1)}$ и $R_1^{(2)}$ — любые две кривые из системы $\{R_1^*\}$. Так как V — регулярная поверхность, то $R_1^{(1)}$ и $R_1^{(2)}$ линейно эквивалентны. Пусть f — функция, для которой $R_1^{(1)}$ является дивизором нулей, а $R_1^{(2)}$ — дивизором полюсов.

Возьмем любую кривую $R_1 \in \{R_1^*\}$, отличную от $R_1^{(2)}$. Так как $(R_1^{(2)} \cdot R_1) = 0$, то f регулярна на R_1 и тем самым является константой на R_1. Из связности R_1 (неприводимость $\{R_1^*\}$ и принцип вырождения) следует, что f принимает на всей кривой R_1 одно и то же постоянное значение c и, значит, является компонентой дивизора нулей функции $f - c$. Так как этот дивизор должен быть гомологичен циклу $R_1^{(1)}$ и R_1 — гомологично $R_1^{(1)}$, то R_1 совпадает с дивизором нулей $f - c$. Мы получаем, что все кривые $R_1 \in \{R_1^*\}$ являются линиями уровня функции f и, значит, $\{R_1^*\}$ — линейная система. Обозначим ее $|R_1|$. Очевидно, $|R_1| \subseteq |R| \subseteq |nK|$.

Пусть теперь $|R|$ не составлена из пучка. Тогда по теореме Бертини $|R|$ является неприводимой системой. Обозначим ее также через $|R_1|$. Мы получаем, что во всех случаях существует бесконечная линейная неприводимая система $|R_1|$, являющаяся частью системы $|nK|$.

Так как V — поверхность основного типа, то геометрический род p_{R_1} общей кривой $R_1 \in |R|$ не меньше двух.

Пусть $p_g > 0$. Тогда $H^0(V, O_V[K]) > 0$. Из регулярности V следует, что $H^1(V, O_V[K]) = 0$. К системам $|K + R_1|$ и $|R_1|$ мы можем теперь применить лемму 2, из которой получаем, что система $|K + R_1|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность.

Утверждение теоремы для $p_g > 0$ теперь сразу следует из того, что

$$|K + R_1| \subseteq |K + R| \subseteq |K + nK| = |(n+1)K|.$$

Пусть $p_g = 0$. По теореме Римана — Роха имеем

$$\dim H^0(V, O[K+R_1]) \geqslant \frac{((K+R_1)R_1)}{2} + 1 - q + p_g = \frac{((K+R_1)R_1)}{2} + 1 = p_{R_1} \geqslant 2.$$

Далее, $H^1(V, O[K + R_1]) = 0$, так как R_1 — связная кривая и на V нет 1-мерных дифференциалов 1-го рода. Применим теперь лемму 2 к системам $|K + R_1 + R_1|$ и $|R_1|$. Мы получаем: система $|K + 2R_1|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность. Остается заметить, что $|K + 2R_1| \subseteq |K + 2nK| = |(2n+1)K|$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. *Пусть V — регулярная алгебраическая поверхность основного типа. Тогда:*

1) *при $p_g \geqslant 2$ система $|2K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность;*

2) *при $p_g = 1$ система $|3K|$ дает либо бирациональное вложение, либо отображение степени два на рациональную поверхность, а система $|7K|$ дает бирациональное вложение V;*

3) *при $p_g = 0$ система $|5K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность;*

4) *для любой регулярной поверхности основного типа система $|7K|$ дает бирациональное вложение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть $p_g \geqslant 2$. Тогда утверждение теоремы сразу следует из пункта 2) теоремы 4 при $n = 1$.

2) Пусть $p_g = 1$. Теорема Римана — Роха дает нам

$$\dim H^0(V, O[2K]) \geqslant \frac{2(2-1)}{2}(K^2) + 1 - q + p_g = (K^2) + 2 \geqslant 3.$$

Применяя пункт 2) теоремы 4, при $n = 2$ получаем, что $|3K|$ дает либо бирациональное вложение, либо отображение степени два на рациональную поверхность. Применим также пункты 2) и 4) теоремы 1 при $n=2$. Замечая, что при $n = 2$ $n + 2 = 4$, $2n + 1 = 5$, $2n + 2 = 6$, $3n + 1 = 7$ и что при $p_g > 0$ $|4K| \subseteq |5K| \subseteq |6K| \subseteq |7K|$, получаем, что $|7K|$ дает бирациональное вложение поверхности V.

3) Пусть $p_g = 0$. По теореме Римана — Роха имеем

$$\dim H^0(V, O[2K]) \geqslant (K^2) + 1 - q + p_g = (K^2) + 1 \geqslant 2.$$

Применяя пункт 1) теоремы 4, при $n = 2$ $(2n + 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5)$ получаем, что система $|5K|$ дает либо бирациональное вложение V, либо отображение V степени два на рациональную поверхность.

Утверждение 4) легко вытекает из утверждения 2) и из результатов теоремы 2 и теоремы 3. Теорема доказана.

Результаты теорем 2, 3 и 5 удобно свести в таблицу. Заметим при этом, что по лемме 4 любая поверхность основного типа с $p_g = 0$ является регулярной.

Таблица результатов теорем 2, 3 и 5
(имеются в виду только поверхности основного типа)

Геометрический род	Иррегулярность	Кратное канонического класса, дающее бирациональное вложение	Кратное канонического класса, дающее либо бирациональное вложение, либо отображение степени два на рациональную поверхность
$p_g > 3$	Произвольная	$3K$	
$p_g \geqslant 2$	$q=0$		$2K$
Произвольный	Произвольная	$9K$	
	$q=0$	$7K$	
$p_g=0$		$7K$	$5K$
$p_g=1$	Произвольная	$9K$	
	$q=0$	$7K$	$3K$
$p_g=2$	Произвольная	$5K$	
$p_g=3$	Произвольная	$4K$	$3K$

§ 3. О регулярных поверхностях основного типа с $p_g = 3$, для которых $|3K|$ не дает бирационального вложения

Имеет место следующая

Теорема 6. *Для того чтобы алгебраическая поверхность V была регулярной поверхностью основного типа с $p_g = 3$ и $3K$, не дающим бирационального вложения, необходимо и достаточно, чтобы в классе поверхностей, бирационально эквивалентных V, существовала поверхность V', задаваемая в 3-мерном аффинном пространстве уравнением $z^2 = F_8(x, y)$, где $F_8(x, y)$ — многочлен 8-й степени от (x, y), не имеющий кратных множителей, и кривая C на плоскости (x, y) с уравнением $F_8(x, y) = 0$ обладает следующими свойствами:*

1) *C ни в одной точке не касается бесконечно удаленной прямой;*

2) *C не имеет особых точек в точках пересечения с бесконечно удаленной прямой;*

3) *любая особая точка C является либо квадратичной особенностью, либо особой точкой 3-го порядка, которая после одного σ-процесса на плоскости в этой точке переходит в точки кратности не выше второй на собственном образе кривой C.*

Доказательство. Пусть V — произвольная регулярная поверхность основного типа с $p_g = 3$, для которой $|3K|$ не дает бирационального вложения. Мы можем считать, что V — неособая поверхность.

Пусть $|\overline{K}|$ — подвижная часть канонической системы $|K|$, S — ее неподвижная часть. Допустим, что $|\overline{K}|$ составлена из пучка.

Сделаем столько σ-процессов на V, чтобы система $|\overline{K}|$ не имела неподвижных точек. Пусть $\{R_1\}$ — 1-мерная неприводимая алгебраическая система на V, из которой составлена $|\overline{K}|$. Пусть E — кривая, параметризующая систему $\{R_1\}$, и E' — открытое подмножество на этой кривой, соответствующее неособым членам из $\{R_1\}$.

Если среди исключительных кривых 1-го рода на V имеется такая, исключение которой оставляет элементы $\{R_1\}$, параметризуемые точками из E', неособыми, то исключим ее. Мы получим из V поверхность V_1. Опять исключим на ней исключительную кривую 1-го рода, исключение которой оставляет неособыми элементы $\{R_1\}$, параметризуемые точками из E' (если такая кривая 1-го рода существует), и будем продолжать этот процесс дальше. Так как 2-мерное число Бетти на каждом шаге понижается, то этот процесс должен остановиться. Это означает, что мы можем предполагать V поверхностью, на которой нет исключительных кривых 1-го рода, исключение которых оставляет элементы $\{R_1\}$, параметризуемые точками из E', неособыми.

Последнее утверждение можно и так сформулировать: на V нет такой исключительной кривой 1-го рода T_1, что $(R_1\cdot T_1) \leqslant 1$. Так как V — регулярная поверхность, то все элементы системы $\{R_1\}$ линейно эквивалентны. Отсюда следует, что если $\{R_1\}$ не является линейным пучком, то $\{R_1\}$ можно включить в неприводимую линейную систему, размерность которой больше единицы. Но это противоречило бы тому, что $|\overline{K}|$ составлена из пучка.

Итак, $\{R_1\}$ — линейный пучок. Будем его в дальнейшем обозначать $|R_1|$. Заменим на момент V бирационально эквивалентной поверхностью $\widetilde{V}$ (с помощью σ-процессов) так, чтобы $|R_1|$ не имела базисных точек, т. е. чтобы элементы из $|R_1|$ были слоями отображения $\widetilde{V} \to E$.

Пусть $\overline{K}$ гомологично mR_1. Легко показать, что функции из $L_{\widetilde{V}}(\overline{K})$ ($f \in L_{\widetilde{V}}(\overline{K})$, если $((f)+\overline{K}) > 0$) индуцированы функциями из $C(E)$ при отображении $\widetilde{V} \to E$, и точнее — функциями из $L_E(mP)$, где P — произвольная точка на E. Так как E — прямая, то $\dim L_E(mP) = m + 1$. Мы имеем $m + 1 = \dim L_C(mP) = \dim L_{\widetilde{V}}(\overline{K}) = p_g(V) = 3$. Отсюда $m = 2$. Возвращаясь к V, мы получаем, что $|\overline{K}| = |2R_1|$. Рассмотрим вначале случай $(R_1^2) > 0$. Тогда, замечая, что

$$\dim H^0(V, O[K + 3R_1]) > 0, \quad H^1(V, O[K + 3R_1]) = 0$$

(последнее следует из связности кривой $R_1^{(1)} + R_1^{(2)} + R_1^{(3)}$, где $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$, $R_1^{(3)}$ — произвольные различные неприводимые элементы из $|R_1|$), $(3R_1\cdot R_1) \geqslant 3$, и применяя лемму 2 к системам $|M| = |R_1|$ и $|L| = |K + R_1 + 3R_1|$, получаем, что система $|K + 4R_1|$ дает бирациональное вложение V в проективное пространство. Так как

$|K+4R_1|=|K+2\bar{K}|\subseteq|3K|$, то и $|3K|$ дает бирациональное вложение V. Это противоречит нашему предположению относительно поверхности V.

Итак, мы можем считать, что на V $(R_1^2)=0$. Но тогда из $\frac{((K+R_1)R_1)}{2}+1\geqslant 2$ получаем

$$2\leqslant((K+R_1)R_1)=(K\cdot R_1)=((\bar{K}+S)\cdot R_1)=((2R_1+S)\cdot R_1)=(S\cdot R_1).$$

Это означает, что в S найдется неприводимая кривая S_1 с условием $(R_1\cdot S_1)>0$.

Рассмотрим точную последовательность

$$0\to H^0(V, O[K])\to H^0(V, O[K+R_1])\to H^0(R_1, O[K+R_1]_{R_1})\to 0, \quad (29)$$

где R_1 — произвольный неособый элемент из $|R_1|$. $(K+R_1)_{R_1}$ — это канонический класс на R_1, и из того, что каноническая система на R_1 не имеет неподвижных точек, мы получаем, что сечения из $H^0(R_1, O[K+R_1]_{R_1})$ не имеют общего нуля. Формула (29) показывает тогда, что сечения из $H^0(V, O[K+R_1])$ не имеют общего нуля на R_1, а это означает, что система $|K+R_1|$ не имеет неподвижных точек на R_1, т. е., в частности, ее неподвижная часть не пересекается с R_1. Пусть Z — неподвижная часть системы $|K+R_1|$, а D — ее подвижная часть. Так как $\dim|K+R_1|\geqslant\dim|K|=2$, то $|D|$ — бесконечная система. Отсюда следует, что ее общая кривая не имеет кратных компонент, не имеет компонентой S_1 и для связности кривой $D+S_1$ достаточно условие $(D\cdot S_1)>0$.

Допустим, что $(D\cdot S_1)=0$.

Докажем, что в этом случае

$$(Z\cdot S_1)>0. \quad (30)$$

Так как $(S_1\cdot R_1)>0$, $(Z\cdot R_1)=0$, то S_1 не может входить в Z и $(Z\cdot S_1)\geqslant 0$. Если бы было $(Z\cdot S_1)=0$, то

$$((K+R_1)\cdot S_1)=(D\cdot S_1)+(Z\cdot S_1)=0,$$

т. е. $(R_1\cdot S_1)=-(K\cdot S_1)$, и было бы $(K\cdot S_1)<0$. Так как $|K|$ содержит эффективные циклы ($p_g=3$), то из $(K\cdot S_1)<0$ следует $(S_1^2)<0$. Из $((K+S_1)\cdot S_1)\geqslant -2$ мы получаем

$$(K\cdot S_1)=-1,\ S_1^2=-1,\ \frac{((K+S_1)S_1)}{2}+1=0,$$

$$(R_1\cdot S_1)=-(K\cdot S_1)=1.$$

Но эти условия характеризуют исключительную кривую 1-го рода на V, для которой $(R_1\cdot S_1)=1$. Это противоречит нашему выбору поверхности V. Тем самым (30) доказано.

Пусть S' — компонента связности носителя Z, пересекающаяся с S_1.

Предположим вначале, что $(S'\cdot D)>0$. Из $(S'\cdot S_1)>0$, $(S'\cdot D)>0$ следует, что в системе $|D+S'+S_1|$ существует связная кривая без кратных компонент и, значит,

$$H^1(V, O[K+D+S'+S_1])=0.$$

Далее,

$$((D+S'+S_1)\cdot R_1)=((K+R_1-Z+S'+S_1)R_1)=((K+R_1)R_1)+$$
$$+(S_1\cdot R_1)\geqslant 2p(R_1)-2+(S_1\cdot R_1)\geqslant 2+1=3.$$

Теперь, замечая, что $H^0(V, O[K+D+S'+S_1])\neq 0$, и применяя лемму 2 к системам $|M|=|R_1|$ и $|L|=|K+R_1+D+S'+S_1|$, мы получаем, что $|K+R_1+D+S'+S_1|$ дает бирациональное вложение V. Так как

$$|K+R_1+D+S'+S_1|\subseteq|K+R_1+D+Z+S_1|=$$
$$=|K+R_1+K+R_1+S_1|=|2K+\bar{K}+S|\subseteq|3K|,$$

то $|3K|$ дает бирациональное вложение V. Это противоречит нашему предположению относительно V.

Пусть теперь $(S'\cdot D)=0$. Заметим, что $|D|$ не составлена из пучка. Действительно, из (29) следует, что в $L_V(D)$ есть функция f_1, отличная от постоянной на R_1, а из $|R_1|\subseteq|D|$ следует, что в $L_V(D)$ есть непостоянная функция f_2, равная постоянной на R_1. Так как f_1 и f_2 алгебраически независимы, то $|D|$ дает отображение V на алгебраическую поверхность, т. е. не составлена из пучка. $(S'\cdot D)=0$ означает, что S' — фундаментальная кривая системы $|D|$. Повторяя рассуждение, применявшееся при доказательстве формулы (19а), мы получаем $(S_2^2)<0$, где S_2 — дивизор в Z, носителем которого является S' и $(S_1'^2)<0$, где S_1' — произвольная компонента S_2. Однако

$$(S_2^2)=((D+S_2)S_2)=((D+S_2+Z-S_2)S_2)=$$
$$=((D+Z)S_2)=((K+R_1)S_2)=(K\cdot S_2).$$

Из $(K\cdot S_2)<0$ мы получаем, что в S_2 существует неприводимая компонента S_1', такая, что $(K\cdot S_1')<0$. Соединяя это с $(S_1'^2)<0$ и $((K+S_1')S_1')\geqslant -2$, мы имеем $(S_1'^2)=-1$, $(K\cdot S_1')=-1$; $\frac{((K+S_1')S_1')}{2}+1=0$. Значит, S_1' — исключительная кривая 1-го рода с $(S_1'\cdot R_1)=0$. Это противоречит нашему выбору V.

Итак, предположение $(D\cdot S_1)=0$ во всех случаях приводит нас к противоречию. Остается $(D\cdot S_1)>0$. Но тогда $D+S_1$ — связная кривая,

$$H^1(V, O[K+D+S_1])=0, \quad H^0(V, O[K+D+S_1])\neq 0,$$

$((D+S_1)R_1)=((K+R_1)R_1)+(S_1R_1)\geqslant 2+1=3$ и применение леммы 2 к системам $|M|=|R_1|$ и $|L|=|K+R_1+D+S_1|$ показывает, что $|K+R_1+D+S_1|$ дает бирациональное вложение V. Но тогда, так как

$$|K+R_1+D+S_1|\subseteq|2K+2R_1+S_1|=|2K+\bar{K}+S_1|\subseteq|3K|,$$

то и $|3K|$ дает бирациональное вложение V. Окончательно мы получаем, что для регулярной поверхности основного типа с $p_g=3$, обладающей тем свойством, что $|3K|$ не дает бирационального вложения, подвижная часть канонической системы не может быть составлена из пучка.

Будем считать дальше V минимальной моделью. Докажем, что $|K|$ не имеет неподвижной части. Допустим противное, т. е. что $S\neq 0$, и покажем, что в S найдется тогда неприводимая компонента S_1 с $(\bar{K}\cdot S_1)>0$.

Если бы это было не так, мы имели бы $(\bar{K}\cdot S)=0$. Пусть $\bar{S}$ — носитель S. Из $(\bar{K}\cdot\bar{S})=0$ следует, что $\bar{S}$ — фундаментальная кривая системы $\bar{K}$. Так же, как при доказательстве формулы (19а), можно установить здесь, что $(S^2)<0$ и что для любой неприводимой компоненты S_i дивизора S имеет место $(S_i^2)<0$. Так как $(S^2)<0$, то в S найдется неприводимая компонента S_i с условием $(S\cdot S_i)<0$. Из $(\bar{K}\cdot S)=0$ мы получаем

$$(\bar{K}, S_i)=0,\ ((\bar{K}+S)S_i)<0,\ (K\cdot S_i)<0,\ (S_i^2)<0.$$

Соединяя неравенства $(K \cdot S_i) < 0$, $(S_i^2) < 0$ с неравенством $((K+S_i)\, S_i) \geqslant -2$, получаем

$$(K \cdot S_i) = -1,\ (S_i^2) = -1,\ \frac{((K+S_i)\, S_i)}{2} + 1 = 0,$$

т. е. S_i — исключительная кривая 1-го рода на V. Это противоречит минимальности V.

Итак, $(\bar{K} \cdot S) > 0$, и пусть S_1 — такая неприводимая компонента в S, что $(\bar{K} \cdot S_1) > 0$. Пусть V' — поверхность, на которую $|\bar{K}|$ отображает V, d — степень отображения $f\colon V \to V'$ с помощью $|\bar{K}|$, m — степень V' в проективном вложении, соответствующем отображению f. Легко видеть, что $(\bar{K}^2) \geqslant d \cdot m$. Если бы было $d \cdot m = 1$, то $d = 1$, $m = 1$ и V являлось бы рациональной поверхностью. Следовательно, $d \cdot m \geqslant 2$ и $(\bar{K}^2) \geqslant 2$. Так как $|\bar{K}|$ не составлена из пучка, то по теореме Бертини — это неприводимая система. Из $(\bar{K} \cdot S_1) > 0$ следует, что в $|\bar{K} + S_1|$ существует связная кривая без кратных компонент и тем самым

$$H^1(V, O[K + \bar{K} + S_1]) = 0.$$

Замечая еще, что $H^0(V, O[K + \bar{K} + S_1]) \neq 0$ и $((\bar{K} + S_1)\, \bar{K}) = (\bar{K}^2) + (S_1 \cdot \bar{K}) \geqslant 2 + 1 = 3$, и применяя лемму 2 к системам $|M| = |\bar{K}|$ и $|L| = |K + \bar{K} + \bar{K} + S_1|$, получаем, что $|K + \bar{K} + \bar{K} + S_1|$ дает бирациональное вложение V. Так как $|K + \bar{K} + \bar{K} + S_1| \subseteq |3K|$, то $|3K|$ дает бирациональное вложение V.

Предположение $S \neq 0$ привело нас к противоречию, и, следовательно, $|K|$ — система без неподвижной части. Если бы было $(K^2) \geqslant 3$, то, применяя лемму 2 к системам $|M| = |K|$ и $|L| = |K + K + K|$, мы получили бы, что $|3K|$ дает бирациональное вложение V.

Следовательно, $(K^2) \leqslant 2$, а приведенные выше рассуждения с $f\colon V \to V'$ показывают теперь, что $(K^2) = 2$. Допустим, что $|K|$ имеет базисные точки. Сделаем тогда столько σ-процессов на V, чтобы собственный образ системы $|K|$ — система $|K'|$ — не имел базисных точек. Тогда отображение f регулярно, и $(K'^2) = m \cdot d$. Но, очевидно, $(K'^2) < 2$, и мы приходим к противоречию с тем, что $d \cdot m \geqslant 2$. Итак, $|K|$ — неприводимая линейная система без неподвижной части и базисных точек и $(K^2) = 2$.

Из теоремы Бертини следует, что общая кривая системы $|K|$ — неособая. Из $(K^2) = d \cdot m = 2$ и $d > 1$ мы получаем $d = 2$, $m = 1$, т. е. $|K|$ осуществляет регулярное отображение степени два поверхности V на проективную плоскость $\mathscr{P}^2$. Образами кривых системы $|K|$ при этом отображении являются прямые плоскости $\mathscr{P}^2$. На плоскости $\mathscr{P}^2$ имеется такое множество A, состоящее из конечного числа точек, что для каждой точки $P \in \mathscr{P}^2 - A$. $f^{-1}(P)$ состоит из конечного числа точек (одной или двух). Кривая ветвления отображения f — это такая кривая $C \subset \mathscr{P}^2$, что для любой точки $P \in \mathscr{P}^2 - (C \cup A)$ $f^{-1}(P)$ состоит ровно из двух точек, а для точки $P' \in C - (C \cap A)$ $f^{-1}(P')$ состоит из одной точки. Пусть l — такая прямая на $\mathscr{P}^2$, что $l \cap A = \phi$, l не является компонентой C, l не проходит через особые точки C и нигде не касается ее и $f^{-1}(l)$ — неособый элемент K_l из системы $|K|$. Для любой точки $P \in l - l \cap C$ $f^{-1}(P)$ состоит из двух точек, для точки $P' \in l \cap C$ $f^{-1}(P')$ состоит из одной точки. Мы получаем, что $f|_{K_l}\colon K_l \to l$ — это регулярное отображение кривой K_l на прямую l, имеющее степень два и множество точек ветвления у которого совпадает с множеством $C \cap l$.

Так как $f|_{K_l}$ — накрытие 2-й степени, то все точки ветвления имеют порядок ветвления, равный единице. Из $(K^2) = 2$ следует, что геометрический род кривой K_l

$$p(K_l) = \frac{(K_l(K_l + K))}{2} + 1 = 3.$$

Для эйлеровой характеристики кривой K_l мы имеем $2p(K_l) - 2 = 2 \cdot (-2) + \Delta$, где Δ — число точек ветвления отображения $f|_{K_l}$. Отсюда

$$\Delta = 2p(K_l) - 2 - 2 \cdot (-2) = 2 \cdot 3 - 2 + 4 = 8.$$

Так как l не проходит через особые точки C и нигде не касается ее, то $C \cdot l = 8$, т. е. C — это кривая 8-й степени на $\mathscr{P}^2$. Из теоремы 3 следует (это, впрочем, легко и непосредственно доказать), что для достаточно большого n система $|nK|$ дает бирациональное вложение V. Отсюда легко вытекает, что существует такая функция z на V, что полюс z сосредоточен на K_l и z — примитивный элемент поля $\mathbf{C}(V)$ над $\mathbf{C}(x, y)$, где (x, y) — аффинные координаты на $S^2 = \mathscr{P}^2 - l$.

Пусть W' — аффинное многообразие с общей точкой (x, y, z). Так как на $V' = V - K_l$ x, y, z — регулярные функции, то существует регулярное отображение $g'\colon V' \to W'$. Для любой точки $(c_1, c_2, c_3) \in W'$ продолжение специализации $(x \to c_1,\ y \to c_2;\ z \to c_3)$ в поле $\mathbf{C}(V)$ может иметь центром только точку из V', так как в любой точке из K_l одна из функций $\frac{1}{x}$ или $\frac{1}{y}$ регулярна и равна нулю. Отсюда следует, что g' — отображение V' на все W'. Над каждой точкой $x = c_1$, $y = c_2$ функция z может иметь только конечную специализацию (полюс z находится на K_l), и поэтому z должна удовлетворять такому уравнению над $\mathbf{C}(x, y)$:

$$z^2 + \mathscr{P}(x, y)\, z + Q(x, y) = 0,$$

где $\mathscr{P}(x, y)$, $Q(x, y)$ — многочлены. Заменяя z на $z + \frac{\mathscr{P}(x, y)}{2}$, можно считать, что z удовлетворяет уравнению

$$z^2 = G(x, y),$$

$G(x, y)$ — многочлен.

Пусть $G(x, y) = \prod_{j=1}^{m} [G_j(x, y)]^{n_j}$ — разложение $G(x, y)$ на неприводимые множители, $n_j = 2k_j + \varepsilon_j$, где $\varepsilon = 0$ или 1 в зависимости от четности n_j. Рассмотрим функцию

$$z_1 = \frac{z}{\left[\prod_{j=1}^{m} G_j(x, y)\right]^{k_j}}.$$

z_1 удовлетворяет уравнению

$$z_1^2 = \prod_{j=1}^{m} [G_j(x, y)]^{\varepsilon_j}. \tag{31}$$

Пусть W'' — многообразие в пространстве $S^3 = S^3(x, y, z)$, задаваемое этим уравнением. Из вида уравнения (31) следует, что z_1 может иметь над любой точкой $x = c_1$, $y = c_2$ из S^2 только конечную специализацию. Это означает, что z_1 — регулярная функция на V', полюса которой сосредоточены на K_l. Кроме того, ясно, что z_1 — примитивный элемент поля $\mathbf{C}(V)$ над $\mathbf{C}(x, y)$.

Как и выше для g', мы получаем, что существует регулярное бирациональное отображение $g''V'$ на W''. Если через e обозначить проекцию W''

на $S^2 = S^2(x, y)$, то $f' = e \circ g''$, где f' — ограничение f на V'.

Для любой точки $P = (c_1, c_2) \in S^2$, с условием $\prod_{j=1}^{m} [G_j(c_1, c_2)]^{\varepsilon_j} \neq 0$, $e^{-1}_{(P)}$ состоит из двух точек, а значит, и $f'^{-1}(P)$ состоит по меньшей мере из двух точек, т. е. $P \notin (C - (A \cap C))$. С другой стороны, если $P \notin (C - (A \cap C))$, то f' — локально бирегулярно действует на P, а значит, и e должно локально бирегулярно действовать над P, т. е. P не принадлежит кривой C_e с уравнением $\prod_{j=1}^{m} [G_j(x, y)]^{\varepsilon_j} = 0$. Мы получаем, что $C = C_e$, и так как многочлен $\prod_{j=1}^{m} [G_j(x, y)]^{\varepsilon_j}$ не имеет кратных множителей, то он должен быть многочленом 8-й степени. Обозначим его через $F_8(x, y)$. По самому выбору прямой l мы получаем, что кривая $F_8(x, y) = 0$, совпадающая с кривой C, нигде не касается бесконечно удаленной прямой и не имеет на этой прямой особых точек. Итак, доказано, что V бирационально эквивалентно многообразию W'' с уравнением $z^2 = F_8(x, y)$, где $F_8(x, y)$ не имеет кратных множителей и задает на плоскости кривую, не касающуюся бесконечно удаленной прямой и не имеющую на ней особых точек. Для завершения доказательства теоремы 6 остается показать, что для того, чтобы поверхность

$$z^2 = F_8(x, y),$$

где $F_8(x, y)$ не имеет кратных множителей и задает кривую C, удовлетворяющую условиям 1), 2) теоремы 6, была регулярной поверхностью основного типа с $p_g = 3$ и $3K$, не дающим бирационального вложения, необходимо и достаточно выполнение условия 3).

Пусть X — поверхность в 3-мерном аффинном пространстве, имеющая уравнение

$$z^2 = F_8(x, y),$$

где $F_8(x, y)$ удовлетворяет условиям 1), 2). Перейдя к однородным координатам (x_0, x_1, x_2, x_3), $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$, получим для X такое уравнение в $\mathcal{P}^3$:

$$x_0^6 x_3^2 - \Phi(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{32}$$

где $\Phi(x_0, x_1, x_2)$ — однородный многочлен 8-й степени, соответствующий $F_8(x, y)$. $\Phi(x_0, x_1, x_2)$ не имеет кратных множителей, а условия 1), 2) эквивалентны тому, что кратных множителей не имеет многочлен $\Phi(0, x_1, x_2)$. Мы можем считать также, что $\Phi(0, 0, 1) \neq 0$. Легко убедиться, что X имеет при $x_0 = 0$ единственную особую точку $P_0 = (0, 0, 0, 1)$ и для любой другой особой точки X $x_3 = 0$.

Пусть U — открытое подмножество в $\mathcal{P}^3$, определенное условием

$$x_3 \neq 0.$$

Введем в U неоднородные координаты

$$y_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_3}, \quad y_3 = \frac{x_0}{x_3}.$$

Уравнение X в этих координатах приобретает вид

$$y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2) = 0. \tag{33}$$

P_0 имеет координаты $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Сделаем σ-процесс на U в точке P_0. Для этого рассмотрим $U \times \mathcal{P}^2$ (однородные координаты в $\mathcal{P}^2$: η_0, η_1, η_2) и в этом произведении подмножество $\overline{U}$, определенное уравнениями

$$\eta_1 y_1 = \eta_0 y_2; \quad \eta_2 y_1 = \eta_0 y_3; \quad \eta_2 y_2 = \eta_1 y_3.$$

Пусть A_j $(j = 0, 1, 2)$ — открытое подмножество в $\overline{U}$, определенное условием $\eta_j \neq 0$. Ясно, что в A_0 можно ввести такие локальные координаты:

$$\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}, \frac{\eta_2}{\eta_0}, y_1\right), \text{ в } A_1: \left(\frac{\eta_0}{\eta_1}, \frac{\eta_2}{\eta_1}, y_2\right), \text{ в } A_2: \left(\frac{\eta_0}{\eta_2}, \frac{\eta_1}{\eta_2}, y_3\right).$$

Пусть S — проективная плоскость, которая вклеилась при σ-процессе, $\overline{X}$ — собственный образ $X \cap U$ в $\overline{U}$.

Рассмотрим A_0. Там $y_2 = \frac{\eta_1}{\eta_0} y_1$, $y_3 = \frac{\eta_2}{\eta_0} y_1$. Подставляя это уравнение в (33), получаем

$$\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right)^6 y_1^6 - \Phi\left(\frac{\eta_2}{\eta_0} y_1, y_1, \frac{\eta_1}{\eta_0} y_1\right) = 0.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right)^6 y_1^6 - y_1^8 \Phi\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}, 1, \frac{\eta_1}{\eta_0}\right) = 0.$$

Сокращая на y_1^6, получим уравнение

$$\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right)^6 - y_1^2 \Phi\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}, 1, \frac{\eta_1}{\eta_0}\right) = 0, \tag{34}$$

которое является уравнением $\overline{X}$ в A_0.

Обозначим

$$\frac{\eta_2}{\eta_0} = u, \quad \frac{\eta_1}{\eta_0} = v.$$

Тогда (34) принимает вид

$$F(y_1, u, v) = u^6 - y_1^2 \Phi(u, 1, v) = 0. \tag{35}$$

Найдем особые точки $\overline{X}$ в A_0. Рассматриваем систему уравнений:

$$\begin{cases} F(y_1, u, v) = u^6 - y_1^2 \Phi(u, 1, v) = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} = 6u^5 - y_1^2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u, 1, v) = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = -y_1^2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(u, 1, v) = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1} = -2y_1 \Phi(u, 1, v) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Ясно что $\overline{X}$ может иметь особые точки только на $\overline{X} \cap S$, т. е. при $y_1 = 0$, $u = 0$.

Легко проверить, что все точки с $y_1 = 0$, $u = 0$ удовлетворяют (36). $u = 0$, $y_1 = 0$ — это прямая $\eta_2 = 0$ на S. Рассмотрение множеств A_1, A_2 не добавляет других особенностей на $\overline{X}$. Итак, в результате σ-процесса $X \cap U$ приобрело прямую $\eta_2 = 0$, $y_1 = 0$, которая является кривой особенностей на $\overline{X}$.

Сделаем теперь σ-процесс на $\overline{U}$ вдоль прямой $\eta_2 = 0$, $y_1 = 0$. Для этого рассмотрим два произведения $A_0 \times \mathcal{P}^1$, $A_1 \times \mathcal{P}^1$ (однородные координаты в $\mathcal{P}^1$ (ξ_0, ξ_1) или (ξ_0', ξ_1')) и затем в первом произведении подмножество $\widetilde{U}_0$, определенное уравнением

$$u\xi_1 = y_1\xi_0,$$

во втором произведении — подмножество $\widetilde{U}_1$, определенное уравнением

$$u'\xi_1' = y_2\xi_0' \qquad \left(u' = \frac{\eta_2}{\eta_1}\right).$$

Подмножества в $\widetilde{U}_0$ и $\widetilde{U}_1$, определенные соответственно условиями $\eta_1 \neq 0$ и $\eta_0 \neq 0$ (мы обозначим их $\widetilde{U}_0'$ и $\widetilde{U}_1'$), нужно склеить по такому правилу: если $(Q_1(\xi_0, \xi_1))$ — точка из $\widetilde{U}_0'$ $(Q \in A_0)$, то ей следует поставить в соответствие точку

$$(Q(\xi_0', \xi_1')) \in \widetilde{U}_1', \text{ где } \frac{\xi_1'}{\xi_0'} = v_Q^2 \frac{\xi_1}{\xi_0},$$

и v_Q обозначает значение $v = \frac{\eta_1}{\eta_0}$ в точке Q. Обозначим через $\overline{U}_1$ многообразие, которое получается из $\overline{U}$ в результате σ-процесса вдоль кривой $u = 0$, $y_1 = 0$, через $\overline{X}_1$ — собственный образ $\overline{X}$ на $\overline{U}_1$ и через S_1 — поверхность, которая вклеилась в $\overline{U}$. Введем четыре открытых множества A_{01}, A_{02}, A_{11}, A_{12}. При этом A_{01}, A_{02} — это подмножества $\widetilde{U}_0$, определенные соответственно условиями $\xi_0 \neq 0$ и $\xi_1 \neq 0$, а A_{11}, A_{12} — подмножества $\widetilde{U}_1$, определенные соответственно условиями $\xi_0' \neq 0$ и $\xi_1' \neq 0$. Положим

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = t_1, \quad \frac{\xi_0}{\xi_1} = t_1', \quad \frac{\xi_1'}{\xi_0'} = s_1, \quad \frac{\xi_0'}{\xi_1'} = s_1', \quad v' = \frac{1}{v}.$$

Тогда локальные координаты в A_{01} — это (u, v, t_1), в A_{02} — (y_1, v, t_1'), в A_{11} — (u, v', s_1), в A_{12} — (y_2, v', s_1').

Найдем локальное уравнение $\overline{X}_1$ в A_{01}. Для этого в (35) подставим $y_1 = ut_1$:

$$u^6 - y_1^2\Phi(u, 1, v) = u^6 - u^2t_1^2\Phi(u, 1, v) = 0.$$

Сокращая на u^2, получим нужное нам уравнение:

$$u^4 - t_1^2\Phi(u, 1, v) = 0. \tag{37}$$

Найдем пересечение $\overline{X}_1 \cap A_{01} \cap S_1$. Для этого в (37) положим $u = 0$, получим $t_1^2\Phi(0, 1, v) = 0$. Отсюда: 1) $t_1 = 0$ — это кривая $u = 0$, $t_1 = 0$; 2) $\Phi(0, 1, v) = 0$. Пусть $v_1, \ldots, v_8$ корни многочлена $\Phi(0, 1, v)$ (все различны). Мы получаем 8 кривых S_{1k}, определяемых условиями $u = 0$, $v = v_k$, $k = \overline{1,8}$. Особые точки $\overline{X}_1 \cap A_{01}$ могут лежать только на $\overline{X}_1 \cap A_{01} \cap S_1$. Сразу видно, что каждая точка кривой $u = 0$, $t_1 = 0$ является особой для $\overline{X}_1$. Пусть теперь P — точка на кривой S_{1k}, $t_1 \neq 0$ в P. Так как v_k — некратный корень $\Phi(0, 1, v)$ ($\Phi(0, 1, v)$ — не имеет кратных корней), то $\frac{\partial\Phi}{\partial v}(0, 1, v_k) \neq 0$. Далее,

$$\frac{\partial}{\partial v}(u^4 - t_1^2\Phi(u, 1, v)) = -t_1^2\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u, 1, v).$$

При $u = 0$, $t_1 \neq 0$, $v = v_k$ это выражение отлично от нуля. Следовательно, P — неособая точка на $\overline{X}_1$.

Рассмотрим теперь $\overline{X}_1$ в A_{02}. Подставив в (35) $u = t_1'y_1$, получим

$$u^6 - y_1^2\Phi(u, 1, v) = t_1'^6y_1^6 - y_1^2\Phi(t_1'y_1, 1, v) = 0.$$

Сокращая на y_1^2, получим уравнение $\overline{X}_1$ в A_{02}:

$$t_1'^6y_1^4 - \Phi(t_1'y_1, 1, v) = 0. \tag{38}$$

Пересечение $\overline{X}_1 \cap S_1 \cap A_{02}$ получим, полагая в (38) $y_1 = 0$, т. е. $\Phi(0, 1, v) = 0$.

Мы получаем уже обнаруженные раньше 8 кривых S_{1k}.

Если в $\overline{X}_1 \cap A_{02}$ и есть особенности $\overline{X}_1$, то они могут быть только в точках $y_1 = 0$, $t_1' = 0$, $v = v_k$. Но

$$\frac{\partial}{\partial v}(t_1'^6y_1^4 - \Phi(t_1'y_1, 1, v)) = -\frac{\partial\Phi}{\partial v}(t_1'y_1, 1, v).$$

При $t_1' = 0$, $y_1 = 0$, $v = v_k$ это выражение отлично от нуля. Следовательно, в $A_{02} \cap \overline{X}_1$ нет особых точек $\overline{X}_1$.

Рассмотрение множеств A_{11}, A_{12} ничего нового не добавляет, и мы получаем, что $\overline{X}_1$ имеет кривую особенностей l_1, уравнения которой в A_{01}: $u = 0$, $t_1 = 0$; в A_{11}: $u' = 0$, $s_1 = 0$.

Сделаем теперь σ-процесс на $\overline{U}_1$ вдоль кривой l_1. Для этого рассмотрим два произведения $A_{01} \times \mathscr{P}^1$ и $A_{11} \times \mathscr{P}^1$ (однородные координаты в $\mathscr{P}^1$ (ζ_0, ζ_1) или (ζ_0', ζ_1')) и затем в первом произведении подмножество V_0, определенное уравнением $u\zeta_1 = t_1\zeta_0$, и во 2-м произведении — подмножество V_1, определенное уравнением

$$u'\zeta_1' = s_1\zeta_0'.$$

Подмножества в V_0 и V_1, определенные соответственно условиями $v \neq 0$ и $v' \neq 0$ (мы обозначим их V_0' и V_1'), нужно склеить по такому правилу: если $(Q(\zeta_1, \zeta_0))$ — точка из V_0' $(Q \in A_{01})$, то ей следует поставить в соответствие точку $(Q(\zeta_1', \zeta_0')) \in V_1'$, где

$$\frac{\zeta_1'}{\zeta_0'} = v_Q^2\frac{\zeta_1}{\zeta_0}.$$

Пусть в результате σ-процесса из $\overline{U}_1$ получилось многообразие $\overline{U}_2$, собственный образ $\overline{X}_1$ на $\overline{U}_2$ обозначим через $\overline{X}_2$, вклеенную в $\overline{U}_1$ поверхность — через S_2.

Рассмотрим четыре открытых множества в $\overline{U}_1$: A_{011}, A_{012}, A_{111}, A_{112}. При этом A_{011} и A_{012} — это подмножества в V_0, определенные соответственно условиями $\zeta_0 \neq 0$, и $\zeta_1 \neq 0$, A_{111}, A_{112} — подмножества в V_1, определенные соответственно условиями $\zeta_0' \neq 0$, $\zeta_1' \neq 0$. Положим $\frac{\zeta_1}{\zeta_0} = t$, $\frac{\zeta_0}{\zeta_1} = t'$. Локальные координаты в A_{011} — это (u, v, t), в A_{012} — (t_1, v, t'). Найдем уравнение $\overline{X}_2$ в A_{011}. Для этого подставим в (37) $t_1 = u\frac{\zeta_1}{\zeta_0} = ut$: $u^4 - t_1^2\Phi(u, 1, v) = u^4 - u^2t^2\Phi(u, 1, v) = 0$. Сокращая на u^2, получаем нужное уравнение:

$$u^2 - t^2\Phi(u, 1, v) = 0. \tag{39}$$

Особые точки $\overline{X}_2$ могут быть только на $\overline{X}_2 \cap S_2$. Найдем $\overline{X}_2 \cap S_2 \cap A_{011}$. Положим в (39) $u = 0$. Получим

$$t^2\Phi(0, 1, v) = 0.$$

Отсюда: 1) $t = 0$ — это кривая $u = 0$, $t = 0$; 2) $\Phi(0, 1, v) = 0$ дает нам 8 кривых S_{2k}, определенных условиями $u = 0$, $v = v_k$, $k = \overline{1,8}$.

Из отсутствия кратных корней у $\Phi(0, 1, v)$ следует, что особые точки $\overline{X}_2$ заполняют кривую $u = 0$, $t = 0$, а вне ее их нет.

Сделаем теперь σ-процесс на $\overline{U}_2$ вдоль этой кривой.

Пусть $\overline{U}_3$ — то, что получается из $\overline{U}_2$ в результате этого σ-процесса, $\overline{X}_3$ — собственный образ $\overline{X}_2$ на $\overline{U}_3$, S_3 — вклеенное многообразие, $\overline{A}_{011}$ — то, что получается при σ-процессе из A_{011}. Тогда $\overline{A}_{011}$ можно покрыть двумя открытыми множествами A_{0111} и A_{0112}, причем локальные координаты в A_{0111} — это s, t, v, в A_{0112} — s', u, v и $s' = \frac{1}{s}$, $u = st$. Уравнения для $\overline{X}_3$ в A_{0111} и A_{0112} соответственно имеют вид

$$s^2 - \Phi(st, 1, v) = 0,$$

$$1 - s'^2\Phi(u, 1, v) = 0.$$

Легко проверить, что $\overline{X}_3$ — неособое многообразие.

Перейдем теперь к рассмотрению регулярных дифференциалов различных степеней на X.

Любой регулярный дифференциал m-й степени на X — $\varphi^{(m)}$ должен иметь вид

$$\varphi^{(m)} = \mathcal{P}(y_1, y_2, y_3)\left[\frac{dy_1 \wedge dy_3}{\frac{\partial}{\partial y_2}(y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2))}\right]^m, \tag{40}$$

где $\mathcal{P}(y_1, y_2, y_3)$ — многочлен степени не выше $m(8-4) = 4m$ от y_1, y_2, y_3, удовлетворяющий еще некоторым дополнительным условиям. Чтобы найти эти условия, рассмотрим дифференциал $\varphi^{(m)}$ на $\overline{X}_3$ и потребуем там его регулярность. Легко видеть, что вопрос о регулярности $\varphi^{(m)}$ на $\overline{X}_3$ возникает только в прообразе точки P_0 $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ при отображении $\overline{X}_3 \to X \cap U$. Этот прообраз состоит из кривой $s^2 - \Phi(0, 1, v) = 0$, $t = 0$ на $\overline{X}_3$ и из кривых $\overline{S}_{2k}$, $\overline{S}_{1k}$, $k = \overline{1,8}$, где $\overline{S}_{ik}$ обозначает собственный образ кривой S_{ik} на $\overline{V}_3$.

Легко проверить, что достаточно все рассмотрения провести на A_{0111}. Заметим, что

$$y_1 = ut_1 = u \cdot ut = u^2t = s^2t^3,$$

$$y_2 = \frac{\eta_1}{\eta_0}y_1 = vy_1 = vs^2t^3;$$

$$y_3 = \frac{\eta_2}{\eta_0}y_1 = uy_1 = s^3t^4.$$

Итак,

$$\begin{aligned} y_1 &= s^2t^3; \\ y_2 &= vs^2t^3; \\ y_3 &= s^3t^4. \end{aligned} \tag{41}$$

Отсюда

$$dy_1 = 2st^3ds + 3s^2t^2\,dt;$$

$$dy_3 = 3s^2t^4\,ds + 4s^3t^3dt;$$

$$dy_1 \wedge dy_3 = -s^4t^6\,ds \wedge dt;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}(y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2)) = -\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}(s^3t^4, s^2t^3, vs^2t^3) = -(s^2t^3)^7\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}(st, 1, v) =$$

$$= -s^{14}t^{21}\frac{\partial\Phi}{\partial v}(st, 1, v),$$

$$\frac{dy_1 \wedge dy_3}{\frac{\partial}{\partial y_2}(y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2))} = \frac{ds \wedge dt}{s^{10}t^{15}\frac{\partial\Phi}{\partial v}(st, 1, v)}.$$

Рассмотрим 8 точек P_k, $k = \overline{1,8}$ на $\overline{X}_3$ с координатами $t = 0$, $s = 0$, $v = v_k$, $k = \overline{1,8}$. Легко проверить, что в каждой точке P_k функции s и t — локальные координаты на $\overline{X}_3$ (это следует из того, что

$$\frac{\partial}{\partial v}(s^2 - \Phi(st, 1, v))_{\substack{s=0,\\ t=0,\\ v=v_k}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial v}(0, 1, v_k) \neq 0).$$

Пусть $m = 1$. Представим $P(y_1, y_2, y_3)$ в виде

$$P(y_1, y_2, y_3) = \sum_{j=0}^{4}\sum_{r=0}^{4-j} B_{j,r}(y_1, y_2)\,y_3^j,$$

где $B_{j,r}(y_1, y_2)$ — однородный многочлен от y_1, y_2 степени r.

Выражая y_1, y_2, y_3 через v, s и t, мы получаем в окрестности точки P_k выражение следующего вида:

$$P(y_1, y_2, y_3) = \sum_{k_1=0}^{12} s^{k_1} \sum_{\max(0, k_1-8) \leqslant j \leqslant \frac{k_1}{3}} t^{\frac{3k_1-j}{2}} \cdot B_{j, \frac{k_1-3j}{2}}(1, v)\ ^*,$$

а для дифференциала (40) выражение

$$\varphi^{(1)} = \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{12} s^{k_1} \sum\limits_{\max(0, k_1-8) \leqslant j \leqslant \frac{k_1}{3}} t^{\frac{3k_1-j}{2}} \cdot B_{j, \frac{k_1-3j}{2}}(1, v)}{s^{10}t^{15}\frac{\partial\Phi}{\partial v}(st, 1, v)}\,ds \wedge dt.$$

Так как в точке P_k $\frac{\partial\Phi}{\partial v}(st, 1, v) = \frac{\partial\Phi}{\partial v}(0, 1, v_k) \neq 0$, то регулярность $\varphi^{(1)}$ требует регулярности в P_k функции

$$\mathcal{H}(s, t) = \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{12} s^{k_1} \sum\limits_{\max(0, k_1-8) \leqslant j \leqslant \frac{k_1}{3}} t^{\frac{3k_1-j}{2}} B_{j, \frac{k_1-3j}{2}}(1, v)}{s^{10}t^{15}}.$$

Итак, пусть $\mathcal{H}(s, t)$ — регулярная функция в P_k, $k = \overline{1, 8}$.

Индукцией по k_1 докажем, что для $0 \leqslant k_1 \leqslant 10$, $B_{j, \frac{k_1-3j}{2}}(1, v) \equiv 0$ для j с условием $\max(0, k_1 - 8) \leqslant j \leqslant \frac{k_1}{3}$.

1) Пусть $k_1 = 0$. Надо доказать, что $B_{0,0}(1, v) \equiv 0$. Из регулярности $\mathcal{H}(s, t)$ в P_k следует, что в P_k числитель выражения для $\mathcal{H}(s, t)$ равен нулю. Но при $s = 0$, $t = 0$, $v = v_k$ этот числитель равен $B_{0,0}(1, v_k)$, откуда $B_{0,0}(1, v_k) = 0$, и, так как $B_{0,0}(1, v)$ многочлен нулевой степени, то $B_{0,0}(1, v) \equiv 0$.

---

* Здесь считается $B_{j, \frac{k_1-3j}{2}} \equiv 0$, когда $k_1 - 3j$ — нечетное число.

2) Пусть $0 < k_1' \leqslant 10$, и наше утверждение доказано для $k_1 < k_1'$. Но это означает, что

$$\mathscr{H}(s, t) = \frac{\sum\limits_{k_1=k_1'}^{12} s^{k_1} \sum\limits_{\max(0, k_1-8) \leqslant j \leqslant \frac{k_1}{3}} t^{\frac{3k_1-j}{2}} B_{j, \frac{k_1-3j}{2}}(1, v)}{s^{10} t^{15}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k_1=k_1'}^{12} s^{k_1-k_1'} \sum\limits_{\max(0, k_1-8) \leqslant j \leqslant \frac{k_1}{3}} t^{\frac{3k_1-j}{2}} B_{j, \frac{k_1-3j}{2}}(1, v)}{s^{10-k_1'} t^{15}}.$$

Рассмотрим числитель этого выражения на кривой $s = 0$ в окрестности точки P_k на $\overline{X}_3$. Из уравнения для $\overline{X}_3$: $s^2 - \Phi(st, 1, v) = 0$ следует, что при $s = 0$ $\Phi(0, 1, v) = 0$ и в окрестности точки P_k на кривой $s=0$ $v = v_k$. Следовательно, числитель приобретает вид при $s = 0$:

$$\sum_{\max\left(0, k_1'-8\right) \leqslant j \leqslant \frac{k_1'}{3}} t^{\frac{3k_1'-j}{2}} B_{j, \frac{k_1'-3j}{2}}(1, v_k). \tag{42}$$

Пусть вначале $k_1' < 10$. Тогда (42) должно быть нулем на кривой $s = 0$, и, значит, все $B_{j, \frac{k_1'-3j}{2}}(1, v_k)$ с $\max(0, k_1' - 8) \leqslant j \leqslant \frac{k_1'}{3}$ — нули. Так как $r \leqslant 4$, то $B_{j, r}$ — многочлен степени не выше 4-й, и поэтому из $B_{j, r}(1, v_k) = 0$ для всех $k = \overline{1,8}$ следует $B_{j, r}(1, v) = 0$.

Пусть теперь $k_1' = 10$. Тогда (42) должно делиться на t^{15}. Для j мы имеем

$$10 - 8 \leqslant j \leqslant \frac{10}{3}, \text{ т. е. } 2 \leqslant j \leqslant 3.$$

Если $j=3$, то $\frac{k_1' - 3j}{2} = \frac{1}{2}$ — не целое число и $B_{j, \frac{k_1-3j}{2}} \equiv 0$ (по определению).

Мы получаем в (42) единственный член

$$t^{14} B_{2,2}(1, v_k).$$

Отсюда $B_{2,2}(1, v_k) = 0$ и $B_{2,2}(1, v) \equiv 0$. Этим сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Итак, в нашем распоряжении только $k_1 = 11$ и $k_1 = 12$. При $k_1 = 11$ для j имеем $3 \leqslant j \leqslant \frac{11}{3}$, т. е. $j = 3$ и $\frac{k_1 - 3j}{2} = 1$; при $k_1 = 12$ необходимо $j = 4$ и $\frac{k_1 - 3j}{2} = 0$. Мы получаем, что регулярность $\varphi^{(1)}$ на $\overline{X}_3$ требует, чтобы среди $B_{j,r}(y_1, y_2)$ были отличны от нуля только $B_{3,1}(y_1, y_2)$ и $B_{4,0}(y_1, y_2)$.

Для $P(y_1, y_2, y_3)$ мы получаем такое необходимое условие:

$$P(y_1, y_2, y_3) = B_{3,1}(y_1, y_2)\, y_3^3 + B_{4,0}(y_1, y_2)\, y_3^4 = y_3^3(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3).$$

Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что выражение

$$\varphi^{(m)} = \frac{y_3^{3m} Q_m(y_1, y_2, y_3)(dy_1 \wedge dy_3)^m}{\left(\frac{\partial}{\partial y_2}(y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2))\right)^m} \tag{43}$$

($Q_m(y_1, y_2, y_3)$ — однородный многочлен степени m от y_1, y_2, y_3) является регулярным двойным дифференциалом степени m на $\overline{X}_3$.

Чтобы выполнялось $p_g = 3$, мы должны потребовать от X лишь такие особенности при $x_0 \neq 0$, которые не накладывают новых ограничений на $\varphi^{(1)} = \dfrac{y_3^3 Q_1(y_1, y_2, y_3)}{\frac{\partial}{\partial y_2}(y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2))}$.

Вернемся к уравнению X в $S^3 = S^3(x, y, z)$:

$$z^2 - F_8(x, y) = 0.$$

Назовем поверхность X, у которой уравнение в $S^3(x, y, z)$ имеет вид

$$z^2 - F(x, y) = 0,$$

двойной плоскостью канонического вида, а если еще у $F(x, y)$ нет кратных множителей,— двойной плоскостью нормального вида.

Пусть Y — двойная плоскость нормального вида, для которой точка Q_0 $x = y = z = 0$ является особой точкой. Особые точки могут лежать только на кривой C_Y, имеющей уравнение $F(x, y) = 0$, и должны быть особыми точками этой кривой. Пусть Q_0 — особая точка кратности s на кривой C_Y. Сделаем σ-процесс в точке Q_0 пространства $S^3(x, y, z)$. Прямой образ Y обозначим через $\overline{Y}$, прямой образ плоскости $S^2(x, y)$ $(z = 0)$ — через $\overline{S}^2$, а то, что получилось из S^3,— через $\overline{S}^3$. Тогда $\overline{S}^3$ можно покрыть тремя открытыми множествами B_1, B_2, B_3, причем можно ввести такие локальные координаты x, u_1, v_1 в B_1, y, u_2, v_2 в B_2 и z, u_3, v_3 в B_3, что

$$y = u_1 x, \quad z = v_1 x;$$
$$x = u_2 y, \quad z = v_2 y;$$
$$x = u_3 z, \quad y = v_3 z.$$

Уравнение $\overline{Y}$ в B_1 имеет вид

$$v_1^2 - x^{s-2} F_1(x, u_1) = 0, \tag{44}$$

где $F_1(x, u_1) = 0$ — уравнение прямого образа кривой C_Y в $\overline{S}^2 \cap B_1$ (x, u_1 — локальные координаты в $\overline{S}^2$). Из (44) мы видим, что $\overline{Y} \cap B_1$ — двойная плоскость канонического вида в B_1.

Рассмотрим дифференциал

$$\frac{dx \wedge dz}{\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - F(x, y))}.$$

Мы имеем $dz = x\,dv_1 + v_1\,dx$, $dx \wedge dz = x\,dx \wedge dv_1$,

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - F(x, y)) = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -x^{s-1}\frac{\partial F_1(x, u_1)}{\partial u_1} =$$
$$= x\left(-x^{s-2}\frac{\partial F_1(x, u_1)}{\partial u_1}\right) = x\frac{\partial}{\partial u_1}(v_1^2 - x^{s-2}F_1(x, u_1)),$$

$$\frac{dx \wedge dz}{\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - F(x, y))} = \frac{dx \wedge dv_1}{\frac{\partial}{\partial u_1}(v_1^2 - x^{s-2}F_1(x, u_1))}. \tag{45}$$

Рассмотрение $\overline{Y}$ в B_2 не вносит ничего нового. Что же касается $\overline{Y} \cap B_3$, то там имеется лишь одна точка из прообраза Q_0 при σ-процессе, которая не входит в $(\overline{Y} \cap B_1) \cup (\overline{Y} \cap B_2)$,— точка $u_3 = v_3 = 0$. Однако легко видеть, что эта точка не лежит на $\bar{Y}$. Поэтому $\bar{Y}\cap B_3$ мы не будем рассматривать. Равенство (45) показывает, что если при разрешении точки Q_0 последовательными σ-процессами мы получаем только двойные плоскости нормального вида, то Q_0 не накладывает никаких новых ограничений на двойной дифференциал. Если же на некотором шаге мы не получаем двойной плоскости нормального вида, то это означает, что поверхность приобретает кривую особенностей, которая заведомо наложит некоторое ограничение на двойной дифференциал.

Из уравнения (44) видно, что для того, чтобы $\bar{Y}$ была двойной плоскостью нормального вида, необходимо и достаточно неравенство $s\leqslant 3$, т. е. $s=2$ или $s=3$. Если $s=2$, то (44) приобретает вид

$$v_1^2-F_1(x, u_1)=0.$$

Так как σ-процесс не повышает кратность особых точек, то мы получаем, что кривая $F_1(x, u_1)=0$ на $\bar{S}^2\cap B_1$ может иметь в прообразах точки Q_0 самое большее особенности 2-го порядка, т. е. мы опять пришли к рассмотрению двойной плоскости нормального вида с двойной точкой на кривой ветвления. Это показывает, что последующие σ-процессы снова повторят эту ситуацию и мы никогда не встретимся с двойной плоскостью не нормального вида, т. е. при $s=2$ точка Q_0 не накладывает никаких ограничений на двойной дифференциал.

Пусть теперь $s=3$. Уравнение (44) приобретает вид

$$v_1^2-xF_1(x, u_1)=0.$$

Если кривая $F_1(x, u_1)=0$ имеет среди прообразов точки Q_0 особенности третьего порядка, то, так как в этих прообразах $x=0$, $v_1^2-xF(x, u_1)=0$ будет двойной плоскостью с особой точкой, для которой кратность на кривой ветвления равна четырем. А это, как мы видели выше, ведет к тому, что при следующем σ-процессе не получится двойной плоскости нормального вида.

Пусть теперь любой прообраз Q_{0i} точки Q_0 на кривой $F_1(x, u_1)=0$ имеет кратность, не превосходящую двух. Если эта кратность равна единице, то мы для $\bar{Y}\cap B_1$ получаем особую точку, для которой кратность на кривой ветвления равна двум. Как замечено выше, из такой особенности уже не может возникнуть ограничений на двойной дифференциал.

Пусть теперь Q_{0i} — точка кратности два на $F_1(x, u_1)=0$. Пусть $F(x, y)=f_3(x, y)+f_4(x, y)+\ldots$ — представление $F(x, y)$ в виде суммы однородных многочленов третьей, четвертой, пятой и т. д. степеней. Тогда

$$F_1(x, u_1)=f_3(1, u_1)+xf_4(1, u_1)+x^2f_5(1, u_1)+\ldots$$

Пусть точка Q_{0i} имеет координаты $x=0$, $u=c_i$. Мы имеем в точке Q_{0i}:

$$F_1=f_3(1, c_i)=0;$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=f_4(1, c_i)=0;$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}=\frac{\partial f_3}{\partial u_1}(1, c_i)=0;$$

и так как $f_3(1, u_1)$ — многочлен не выше 3-й степени,

$$F_1(x, u_1)=\frac{\partial^2 f_3}{\partial u_1^2}(1, c_i)\frac{(u_1-c_i)^2}{2}+\frac{\partial^3 f_3}{\partial u_1^3}(1, c_i)\frac{(u_1-c_i)^3}{6}+$$
$$+x\frac{\partial f_4}{\partial u_1}(1, c_i)(u_1-c_i)+x^2f_5(1, c_i)+H,$$

где H содержит члены выше чем 2-й степени относительно x и u_1-c_i.

Так как кратность Q_{0i} равна двум, то по крайней мере одна из величин

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial u_1^2}(1, c_i),\quad \frac{\partial f_4}{\partial u_1}(1, c_i),\ f_5(1, c_i)$$

должна быть отлична от нуля.

Сделаем σ-процесс в точке Q_{0i} на $\bar{S}^3$. Здесь достаточно рассмотреть пространство B_1' с координатами (u, u', v'), где $u=u_1-c_i$, $u'=\frac{x}{u}$, $v'=\frac{v_1}{u}$, и в нем поверхность, задаваемую уравнением

$$v'^2-uu'\Big[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial u_1}(1,\ c_i)+\frac{\partial f_4}{\partial u_1}(1, c_i)u'+$$
$$+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_3}{\partial u_1^3}(1, c_i)u+f_5(1, c_i)u'^2+H_1\Big]=0, \tag{46}$$

где H_1 состоит из членов выше чем 1-й степени относительно u, u', и обязательно содержащих u. Нас интересуют особые точки поверхности (46) при $u=0$. Эти особые точки могут быть только для значений u', удовлетворяющих уравнению

$$u'\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial u_1^2}(1, c_i)+\frac{\partial f_4}{\partial u_1}(1, c_i)u'+f_5(1, c_i)u'^2\Big)=0. \tag{47}$$

Так как

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial u_1^2}(1, c_i)+\frac{\partial f_4}{\partial u_1}(1, c_i)u'+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_3}{\partial u_1^3}(1, c_i)u+f_5(1, c_i)u'^2+H_1=0 \tag{48}$$

— уравнение прямого образа кривой $F_1(x, u_1)=0$ после σ-процесса и σ-процесс не повышает кратностей, то корни уравнения (47) могут давать только особые точки 2-го порядка на кривой (48). Ненулевому корню уравнения (47) будет соответствовать особая точка на поверхности (46), у которой кратность на кривой ветвления не превосходит трех. Легко проверить, что возникающая кубичная особенность понижает кратность после σ-процесса.

Рассмотрим теперь корень $u'=0$. Если $\frac{\partial^2 f_3}{\partial u_1^2}(1, c_i)\neq 0$, то кривая (48) не проходит через точку $u=u'=0$ и на поверхности (46) этому корню соответствует особенность, имеющая на кривой ветвления кратность два.

Пусть теперь $\frac{\partial^2 f_3}{\partial u_1^2}(1, c_i)=0$. Так как $f_3(1, c_i)=\frac{\partial f_3}{\partial u_1}(1, c_i)=0$, то обязательно должно быть $\frac{\partial^3 f_3}{\partial u_1^3}(1, c_i)\neq 0$. Но это показывает, что точка $u=u'=0$ является простой на кривой (48) и, значит, поверхность в ней имеет особую точку, для которой кратность на кривой ветвления равна трем. Однако легко проверить, что эта кубичная особенность такова, что после одного σ-процесса на кривой

$$uu'\Big(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}(1, c_i)u'+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_3}{\partial u_1}(1, c_i)u+f_5(1, c_i)u'^2+H_1\Big)=0$$

она понижает свою кратность. Этим доказано, что если двойная плоскость нормального вида Y

$$z^2-F(x, y)=0$$

такова, что особая точка Q_0 на ней является либо квадратичной особенностью на кривой ветвления, либо кубичной особенностью, понижающей свою кратность после одного σ-процесса, то после σ-процесса на Y в точке Q_0 мы опять встретимся с двойными плоскостями нормального вида, на которых особые точки, соответствующие Q_0, рассматриваемые как особенности кривой ветвления, опять будут обладать тем же свойством.

Это показывает, что необходимым и достаточным условием того, чтобы особенность на X при $x_0 \neq 0$ не накладывала новых ограничений на дифференциал $\varphi^{(1)}$, является выполнение условия 3) теоремы 6.

Следовательно, это условие 3) является необходимым и достаточным для того, чтобы было $p_g(X) = 3$. Этим завершается доказательство необходимости в теореме 6.

Мы можем считать теперь, что для X выполнено условие 3) и что, следовательно, все двойные дифференциалы 1-го рода на X имеют вид

$$\varphi^{(1)} = \frac{y_3^8 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)\, dy_1 \wedge dy_3}{\frac{\partial}{\partial y_2} (y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2))} = \frac{(a_1 x + a_2 y + a_3)\, dx \wedge dz}{\frac{\partial}{\partial y} (z^2 - F(x, y))}.$$

Пусть X_1 — неособая модель X, которая над $U \cap X$ совпадает с $\bar{X}_3$. Несложный анализ показывает тогда, что каноническая система $|K|$ на X_1 состоит из подвижной части $|\bar{K}|$ без базисных точек, общий элемент которой является прообразом прямой $a_1 x + a_2 y + a_3$ на $S^2 = S^2(x, y)$ при проекции X_1 на плоскость $S^2(x, y)$, и из неподвижной части

$$S = 3 \sum_{k=1}^{8} \bar{S}_{0k} + 2 \sum_{k=1}^{8} \bar{S}_{1k} + \sum_{k=1}^{8} \bar{S}_{2k},$$

где $\bar{S}_{0k}$ — собственные образы на $\bar{X}_3$ прямых

$$x_0 = 0, \quad x_2 = v_k x_1 \text{ на } X.$$

При этом

$$(K \cdot \bar{S}_{ik}) = 0, \quad i = 0, 1, 2; \quad k = \overline{1,8};$$

$$(\bar{S}_{0k} \cdot \bar{S}_{1k'}) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq k', \\ 1 & \text{при } k = k'; \end{cases}$$

$$(\bar{S}_{1k} \cdot \bar{S}_{2k'}) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq k'; \\ 1 & \text{при } k = k'; \end{cases}$$

$$(\bar{S}_{0k} \cdot \bar{S}_{2k'}) = 0; \quad k = \overline{1,8}; \quad k' = \overline{1,8}.$$

Так как все $\bar{S}_{ik}$, $i = 0, 1, 2$, $k = \overline{1,8}$ — неособые рациональные кривые, то мы имеем

$$((K + \bar{S}_{ik'})\, \bar{S}_{ik'}) = -2.$$

Отсюда

$$\left(\left(\bar{K} + 3 \sum_{k=1}^{8} \bar{S}_{0k} + 2 \sum_{k=1}^{8} \bar{S}_{1k} + \sum_{k=1}^{8} \bar{S}_{2k} + \bar{S}_{0k'}\right) \bar{S}_{0k'}\right) = -2,$$

$$4(\bar{S}_{0k'}^2) + 2 = -2,$$

$$(\bar{S}_{0k'}^2) = -1.$$

Это показывает, что все $\bar{S}_{0k}$ — исключительные кривые 1-го рода на X_1. После исключения $\bar{S}_{0k}$ исключительными кривыми 1-го рода станут $\bar{S}_{1k}$

и т. д. Исключив все кривые $\bar{S}_{ik}$, мы придем к поверхности X_2, на которой $|K|$ уже не имеет неподвижной части, т. е. X_2 — минимальная модель для X_1.

Чтобы найти (K^2) на X_2, достаточно подсчитать $(\bar{K}^2)$ на X_1. Но $(\bar{K}^2)$ равно числу точек пересечения прообразов двух общих прямых на $S^2(x, y)$, т. е. равно двум (так как $|\bar{K}|$ — система без базисных точек). Итак, на X_2 $(K^2) = 2$.

Так как $|K|$ не составлена из пучка, то X — поверхность основного типа. Общая кривая из $|K|$ на X_2 неприводима. Это же верно и для $|2K|$. Из цитированных выше результатов Кодаиры [25] следует, что

$$H^1(X_2, O[K + 2K]) = 0.$$

По теореме Римана—Роха мы получаем

$$P_3(X) = \dim H^0(X_2, O[3K]) = 3(K^2) + p_g - q + 1 = 10 - q.$$

Однако из выражения (43) для φ^m следует, что линейно независимых регулярных двойных дифференциалов 3-й степени на X не меньше, чем однородных многочленов 3-й степени от y_1, y_2, y_3, т. е. не меньше, чем 10. Мы получаем $10 - q \geqslant 10$, откуда $q = 0$, $P_3(X) = 10$, и все регулярные двойные дифференциалы 3-й степени на X имеют вид

$$\frac{y_3^9 Q_3(y_1, y_2, y_3)\,(dy_1 \wedge dy_3)^3}{\left[\frac{\partial}{\partial y_2}(y_3^6 - \Phi(y_3, y_1, y_2))\right]^3}.$$

Пусть $Q_3^{(j)}(y_1, y_2, y_3)$ $(j = \overline{0,9})$ — базис пространства однородных многочленов 3-й степени. Образ X при отображении, соответствующем $|3K|$,— это многообразие W с общей точкой

$$\left(1, \frac{Q_3^{(1)}(y_1, y_2, y_3)}{Q_3^{(0)}(y_1, y_2, y_3)}, \ldots, \frac{Q_3^{(9)}(y_1, y_2, y_3)}{Q_3^{(0)}(y_1, y_2, y_3)}\right).$$

Так как $x = \frac{y_1}{y_3}$, $y = \frac{y_2}{y_3}$, то

$$\frac{Q_3^{(j)}(y_1, y_2, y_3)}{Q_3^{(0)}(y_1, y_2, y_3)} = \frac{Q_3^{(j)}(x, y, 1)}{Q_3^{(0)}(x, y, 1)},$$

откуда следует, что $\mathbf{C}(W)$ — подполе поля $\mathbf{C}(x, y)$, т. е. W — рациональная поверхность. Следовательно, $|3K|$ не дает бирационального вложения X. Окончательно мы получаем, что если поверхность X задана в $S^3(x, y, z)$ уравнением

$$z^2 - F_8(x, y) = 0,$$

где $F_8(x, y)$ не имеет кратных множителей, и кривая $F_8(x, y) = 0$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3) теоремы 6, то X — поверхность основного типа, ее геометрический род равен трем, иррегулярность равна нулю и $|3K|$ не дает бирационального вложения X. Это завершает доказательство достаточности в теореме 6.

Теорема доказана.

Глава VII

ПОВЕРХНОСТИ С ПУЧКОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В этой главе исследуются поверхности с пучком эллиптических кривых. Описываются связи этого класса поверхностей с другими классами алгебраических поверхностей (поверхности с $(K^2) = 0$, поверхности с $\varkappa = 1$). Наконец, излагается классификация поверхностей с пучком эллиптических кривых, точнее, самих пучков. По этому последнему вопросу имеются работы [25, 42, 57] и [40]. Результаты этих работ мы излагаем без доказательств, доказывая только те утверждения, которые непосредственно в этих работах не содержатся.

Основное поле k предполагается полем комплексных чисел. Большинство рассуждений сохраняет силу для случая, когда k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 (или с еще более слабыми ограничениями на характеристику). Мы специально отмечаем места, в которых предположение $k = \mathbf{C}$ существенно для наших рассуждений.

§ 1. Основные понятия

Определение. *Поверхностью с пучком эллиптических кривых называется такая тройка (V, B, π), состоящая из неособой поверхности V, неособой кривой B и регулярного отображения $\pi: V \to B$, что общий слой расслоения π является неособой кривой рода 1.*

Две поверхности с пучком эллиптических кривых (V, B, π) и (V', B, π') называются бирегулярно (соответственно бирационально) эквивалентными, если существует такое бирегулярное (соответственно бирациональное) отображение $f: V \to V'$, что $\pi' f = \pi$.

Поверхность с эллиптическим пучком (V, B, π) называется минимальной моделью, если слои расслоения π не содержат исключительных кривых 1-го рода, т. е. (согласно теореме Кастельнуово, гл. II, § 4) неособых рациональных кривых C с $(C^2) = -1$.

Всякая поверхность с эллиптическим пучком бирационально эквивалентна минимальной модели — преобразование, сжимающее исключительную кривую 1-го рода, содержащуюся в слое, в точку, очевидно, коммутирует с проекцией.

Замечание. Поверхность (V, B, π) с пучком эллиптических кривых может быть минимальной моделью в смысле определения этого параграфа, в то время как поверхность V не является минимальной моделью в смысле главы II. В качестве примера рассмотрим две плоские неособые кубические кривые $G = 0$ и $H = 0$, имеющие 9 различных точек пересечения: $P_1, \ldots, P_9$. Обозначим через V поверхность, которая получается применением σ-процесса к точкам $P_1, \ldots, P_9$ плоскости. Полные прообразы на V плоских кривых $\lambda G + \mu H = 0$ определяют на V пучок эллиптических кривых. Полученная поверхность с пучком является минимальной моделью в смысле определения этого параграфа. Это легко непосредственно проверить, если предположить, что никакие три точки из P_i не лежат на одной прямой и никакие шесть — на одной кривой 2-го порядка или без всяких ограничений вывести из данного в § 6 описания возможных типов вырожденных слоев. Однако V, конечно, не является минимальной моделью в смысле определения главы II.

Введенное понятие минимальной модели поверхности с эллиптическим пучком аналогично понятию относительно минимальной модели произвольной поверхности. Однако оно также играет роль в абсолютно минимальной модели, как показывает следующий результат.

Теорема 1. *Если (V, B, π) и (V', B, π') — две поверхности с пучком эллиптических кривых, $f: V' \to V$ — бирациональное отображение V' на V и если V является минимальной моделью, то отображение f регулярно.*

Доказательство. Пусть F_β и F'_β — общие слои расслоений π и π'. Обозначим через ξ и ξ' общие точки кривых F_β и F'_β, а через $\mathfrak{o}_\xi$, $\mathfrak{o}_{\xi'}$, $\mathcal{O}_\xi$, $\mathcal{O}_{\xi'}$ — их локальные кольца на кривых F_β и $F_{\beta'}$ и на поверхностях V и V' соответственно. Очевидно, что отображение f индуцирует бирегулярный изоморфизм между F_ξ и F'_β. Поэтому

$$f(\xi') \in \mathfrak{o}_\xi, \quad f(\mathfrak{o}') \in \mathfrak{o}_\xi \otimes k(\beta).$$

Отсюда легко следует, что исключительные кривые отображений f и f^{-1} содержатся в слоях расслоений π и π'. Если бы отображение f не было регулярным, то на V существовали бы исключительные кривые 1-го или 2-го рода. Исключительных кривых 1-го рода на V не существует по определению минимальной модели. Докажем, что не существует и исключительных кривых 2-го рода.

Для этого заметим, что если существует исключительная кривая 2-го рода, то существует и неприводимая исключительная кривая 2-го рода. Действительно, доказательство этого факта, данное в главе II (теорема 1, § 5), дословно сохраняется в нашем случае (мы не можем непосредственно применить теорему 1, гл. II, § 5 ввиду разного смысла термина «минимальная модель»).

Если бы на V была неприводимая исключительная кривая 2-го рода C, содержащаяся в слое F_0, то, согласно теореме 1, гл. II, § 1, мы имели бы

$$(C^2) \geqslant 0.$$

Пусть

$$F_0 = nC + \sum n_i C_i, \quad n > 0.$$

Очевидно, что $(F_0 \cdot C) = 0$, так как при вычислении $(F_0 \cdot C)$ мы можем заменить F_0 на любой другой слой. Поэтому

$$(C^2) = -\frac{1}{n} \sum n_i (C_i \cdot C) \leqslant 0.$$

Следовательно, должно быть $(C^2) = 0$, что возможно только если все $(C_i \cdot C) = 0$. Это значит, что C совпадает со связной компонентой F_0, что ввиду связности F_0 возможно только при $F_0 = nC$. Но тогда мы получаем, что $p_a(C) = 1$, в то время как согласно теореме 1 (§ 1, гл. II) $p_a(C) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Две бирационально эквивалентные минимальные модели бирегулярно эквивалентны. Бирациональный автоморфизм минимальной модели бирегулярен.*

Рассмотрим один пример применения теоремы 1. Пусть (V, B, π) — поверхность с пучком, описанная в замечании. Очевидно, что $B = P^1$ (точка на B задается отношением $(\lambda : \mu)$). Прямые $L_i = \sigma(P_i)$, $i = 1, \ldots, 9$, отображаются проекцией π бирегулярно на B. Поэтому можно определить такие бирегулярные отображения $s_i: B \to L_i$, что $\pi s_i = 1$. Взяв точку $F_\beta \cdot L_1$ за 0, мы можем определить на общем слое F_β структуру одномерного абелева многообразия. Отображения φ_i, $i = 1, \ldots, 9$:

$$\varphi_i(v) = v + s_i \pi(v)$$

являются бирегулярными преобразованиями, если $v \in F_\beta$ — сдвигами на точки $s_i(\beta)$. Поэтому они являются бирациональными, а ввиду следствия — и бирегулярными автоморфизмами V. Образованная этими автоморфизмами группа является, как легко показать, свободной абелевой группой с 8-ю образующими $\varphi_2, \ldots, \varphi_9$. Мы получаем, таким образом, пример поверхности, которая имеет бесконечную группу автоморфизмов, но не имеет, как легко проверить, алгебраической группы (или, при $k = \mathbf{C}$, группы Ли) автоморфизмов.

С другой стороны, на V есть кривые с отрицательными квадратами (например, L_i). При помощи построенных автоморфизмов мы можем получить бесконечное число таких кривых. Таким образом, мы получаем пример поверхности, содержащей бесконечное число кривых с отрицательным квадратом (и даже исключительных кривых 1-го рода).

§ 2. Строение слоев

Лемма 1. *Пусть V — поверхность, π — ее регулярное отображение на кривую B, F_0 — один из слоев расслоения π и $F_0 = \sum n_i C_i$, $n_i > 0$, где C_i — неприводимые кривые. Если $D = \sum m_i C_i$, то $(D^2) \leqslant 0$.*

Доказательство. Предположим, что $(D^2) > 0$. Тогда из теоремы Римана—Роха следует, что при любом E при достаточно большом n, $l(nD - E) > 0$. Возьмем за E гиперплоское сечение поверхности V и положим

$$nD - E \sim D_1 > 0.$$

Тогда, если F — любой слой расслоения π, то

$$n(D \cdot F) = (E \cdot F) + (D_1 \cdot F). \tag{1}$$

Так как все компоненты цикла D содержатся в F_0, то $(D \cdot F) = 0$. С другой стороны, $(E \cdot F) > 0$, а $(D_1 \cdot F) \geqslant 0$, так как мы можем взять за F, в частности, неприводимый слой. Таким образом, (1) приводит нас к противоречию. Лемма доказана.

Утверждение леммы 1 можно выразить иначе. Для этого рассмотрим пространство X (над полем рациональных чисел), базисом которого являются неприводимые компоненты $C_1, \ldots, C_k$ слоя F_0. Индекс пересечения $(C \cdot D)$ определяет в X скалярное произведение и квадратичную форму

$$\psi(C) = (C^2). \tag{2}$$

Лемма утверждает, что эта форма неположительна.

Теорема 2 (см. Зариский [22]). *Если в обозначениях леммы 1 слой F_0 связан и $(D^2) = 0$, то $D = rF_0$, где r — рациональное число.*

Так как $(F_0 \cdot C_i) = 0$ для всех $C_1, \ldots, C_k$, то квадратичная форма ψ, определенная (2), имеет ранг $\leqslant k - 1$. Утверждение теоремы 2 равносильно тому, что этот ранг в точности равен $k - 1$. Пусть ранг ψ равен $l \leqslant k-2$. В пространстве X обозначим через Y подпространство, состоящее из всех D, для которых $(D \cdot C) = 0$ для всех $C \in X$. Очевидно, что в факторпространстве X/Y форма ψ отрицательно определена. Мы можем выбрать $C_1 \ldots C_l$

так, чтобы они образовывали базис в X/Y, и тогда

$$(x_1 C_1 + \ldots + x_l C_l)^2 < 0 \tag{3}$$

для всех $x_1, \ldots, x_l$, не равных одновременно 0.

Положим

$$C_{l+1} = L + D,$$

где $D \in Y$, а L является линейной комбинацией $C_1 \ldots C_l$. Пусть

$$L = L_1 - L_2,$$

где $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ и L_1 и L_2 не имеют общих компонент. Тогда, с одной стороны, $(C_{l+1} \cdot L_1) \geqslant 0$, так как C_{l+1} и L_1 не имеют общих компонент, а, с другой,

$$(C_{l+1} \cdot L_1) = (L_1^2) - (L_1 \cdot L_2) \leqslant 0.$$

Это значит, что $(L_1^2) = 0$ и $(L_1 \cdot L_2) = 0$. Но ввиду (3) отсюда следует, что $L_1 = 0$,

$$C_{l+1} + L_2 \in Y$$

и, в частности, $((C_{l+1} + L_2) \cdot C_i) = 0$. Это значит, что циклы C_i, являющиеся компонентами $C_{l+1} + L_2$, не пересекаются с другими циклами, а это, в свою очередь, означает, что одни и другие циклы составляют две связные компоненты слоя F_0, что противоречит условию.

§ 3. Канонический класс

Лемма 2. *На поверхности с пучком эллиптических кривых канонический класс содержит дивизор, состоящий из компонент слоев.*

Действительно, пусть F_β — общий слой расслоения $\pi: V \to B$. Так как канонический класс кривой F_β равен 0, то $K \cdot F_\beta \sim 0$. Если $D \in K$, $D \cdot F_\beta = (f)$, то $\overline{D} = D - (f) \in K$ и $(\overline{D} \cdot F_\beta) = 0$. Как мы видели в § 7, гл. IV, отсюда следует, что D состоит из компонент слоев.

Замечание. Из доказательства леммы следует, что любой эффективный дивизор канонического класса состоит из компонент слоев.

Теорема 3. *На минимальной модели поверхности с пучком эллиптических кривых $(K^2) = 0$.*

Нам надо доказать, что невозможно

a) $(K^2) > 0$, b) $(K^2) < 0$.

a) Из теоремы Римана—Роха следует, что при любом E и при некотором $n > 0$, $l(nK - E) > 0$. Возьмем за E гиперплоское сечение поверхности V и пусть

$$nK - E \sim D > 0.$$

Так как слой F является эллиптической кривой и $(F^2) = 0$, то $(K \cdot F) = 0$. Поэтому

$$0 = n(K \cdot F) = (E \cdot F) + (D \cdot F).$$

Но $(E \cdot F) > 0$, а $(D \cdot F) \geqslant 0$, что приводит к противоречию.

b) Согласно лемме 2 в каноническом классе имеется представитель K вида

$$K = \sum_{0}^{m} K_i,$$

где K_i состоит из компонент слоя F_i.

Так как $(K_i \cdot K_j) = 0$ при $i \neq j$, то

$$(K^2) = \sum (K_i^2)$$

и нам достаточно доказать, что все $(K_i^2) \geqslant 0$.

Пусть $(K_0^2) < 0$ и C_0 — неприводимая компонента слоя F_0, входящая в K_0. Если $F_0 = nC_0$, то $(C_0^2) = 0$ и, значит, $(K_0^2) = 0$. Если F_0 содержит еще другие компоненты $F_0 = nC_0 + \sum_1^k n_i C_i$, то

$$0 = (F_0 \cdot C_0) = n\,(C_0^2) + \sum n_i\,(C_i \cdot C_0).$$

При этом $(C_i \cdot C_0) \geqslant 0$ и хоть для одного i, $(C_i \cdot C_0) > 0$, иначе C_0 было бы связной компонентой слоя F_0, что противоречит его связности. Поэтому $(C_0^2) < 0$. Хоть для одной компоненты C_0 цикла F_0 мы имеем $(C_0 \cdot K_0) < 0$. Действительно, если $(C_i \cdot K_0) \geqslant 0$ для $i = 0, \ldots, k$, то $(C_i \cdot K_0) = 0$ для всех i — иначе для некоторого C_j было бы $(C_j \cdot K_0) > 0$, а так как для всех j, $(C_j \cdot K_0) \geqslant 0$, то $(F_0 \cdot K_0) > 0$, в то время как $(F_0 \cdot K_0) = 0$. Этим доказано, что если для всех i, $(C_i \cdot K_0) \geqslant 0$, то $(C_i \cdot K_0) = 0$. Но тогда $(K_0^2) = 0$, что противоречит предположению.

Мы доказали существование неприводимой компоненты C_0 дивизора K_0, для которой $(C_0 \cdot K_0) < 0$. Но тогда установленные нами неравенства

$$(C_0 \cdot K) = (C_0 \cdot K_0) < 0, \quad (C_0^2) < 0$$

показывают, что

$$p_a(C_0) = \frac{(C_0 \cdot K) + (C_0^2)}{2} + 1 \leqslant 0,$$

что возможно только при $p_a(C_0) = 0$, $(C_0^2) = -1$. Это означает, что C_0 — исключительная кривая 1-го рода, являющаяся компонентой слоя, а это противоречит минимальности V.

Теорема 4. *На минимальной модели поверхности с пучком эллиптических кривых канонический класс содержит дивизор, являющийся рациональной комбинацией слоев.*

Доказательство. Пусть K — дивизор канонического класса, состоящий из компонент слоев $K = \Sigma K_i$. Так как согласно теореме 3 $(K_i^2) = 0$, то из теоремы 1 следует, что $K_i = r_i F_i$, где r_i — некоторое рациональное число. Это и есть утверждение теоремы.

Замечание. Из замечания к лемме 2 следует, что любой эффективный дивизор канонического класса является рациональной комбинацией слоев.

Определение. Слой F_0 называется кратным, если

$$F_0 = \sum n_i C_i, \quad n_i > 1.$$

Следствие теоремы 4. *Если расслоение $\pi\colon V \to B$ не содержит кратных слоев, то канонический класс содержит дивизор, который является целочисленной линейной комбинацией слоев.*

§ 4. Поверхности с эллиптическим пучком и поверхности с $(K^2) = 0$

Теорема 5. *Предположим, что поверхность V не является рациональной или линейчатой поверхностью, является минимальной моделью и для нее $(K^2) = 0$. Тогда или $12K = 0$ или существует такое m, что для*

всех достаточно больших n линейная система $|mnK|$ не имеет неподвижных кривых и базисных точек и составлена из пучка эллиптических кривых. Указанным свойством этот пучок однозначно определяется.

Доказательство. Рассмотрим два случая: A) Все $P_n \leqslant 1$ и B) некоторое $P_n \geqslant 2$.

A) Рассмотрим отдельно случаи $p = 0$ и $p = 1$. Если $p = 0$ и $q = 0$, то, при $P_2 = 0$, согласно теореме Кастельнуово (гл. III, § 2), поверхность является рациональной, а при $P_2 = 1$, согласно замечанию в конце § 1, гл. VIII, мы имеем дело с поверхностью Энриквеса, для которой $2K = 0$, и, значит, тем более $12K = 0$. Если $p = 0$ и $q > 1$, то согласно теореме 5 (§ 3, гл. IV) V является линейчатой поверхностью. Наконец, при $p = 0$, $q = 1$, согласно теоремам 11 и 12 (§ 8, гл. IV), V представляется в виде $(B \times C)/G$, где B — эллиптическая кривая, C — кривая произвольного рода g, а G — конечная группа автоморфизмов без неподвижных точек поверхности $B \times C$. Если $g = 0$, то поверхность V линейчатая. Если $g > 1$, то согласно замечанию к лемме 14 (гл. IV) $P_n(V)$ принимает сколь угодно большие значения и мы имеем дело со случаем B). Остается рассмотреть случай, когда $g = 1$, т. е. когда и B и C — эллиптические кривые.

Согласно теореме Энриквеса (теорема 13, гл. IV), если V — не линейчатая поверхность, то $P_{12}(V) > 0$, т. е. $12K \sim D > 0$. Докажем, что $D = 0$. Действительно, если $f\colon B \times C \to V$ — проекция, то канонический класс $\overline{K}$ поверхности $B \times C$ имеет вид $f^*(K)$. Поэтому если $D > 0$, $D \neq 0$, то

$$12\overline{K} = f^*(12K) = f^*(D)$$

и, очевидно, что $f^*(D) > 0$, $f^*(D) \neq 0$. Это, однако, противоречит тому, что $B \times C$ — абелево многообразие, так что $\overline{K} = 0$ и $12\overline{K} = 0$.

Рассмотрим теперь случай $p = 1$ и значит $P_2 = 1$. Тогда

$$p_a(V) = 1 - q + p = 2 - q = \frac{\chi}{12} = \frac{2 - 4q + 2p + h^{1,1}}{12} = \frac{4 - 4q + h^{1,1}}{12}.$$

Так как $h^{1,1} > 0$, то отсюда следует, что $q \leqslant 2$. Если $q = 0$, то по теореме Римана — Роха

$$l(-K) + l(2K) \geqslant 2,$$

т. е. $l(-K) \geqslant 1$. Так как $l(K) \geqslant 1$, то отсюда следует, что $K = 0$.

Случай $q = 1$ невозможен согласно теореме 1 (гл. VIII). Наконец, при $q = 2$, V является абелевым многообразием согласно теореме 3 (гл. VIII) и, значит, опять $K = 0$.

B) Пусть $P_\nu \geqslant 2$ при некотором ν, т. е. $l(\nu K) \geqslant 2$.

Согласно теореме Бертини система $|\nu K|$ составлена из пучка C_λ. Если D — неподвижная часть этой системы, то

$$\nu K \sim D + \sum C_i, \tag{4}$$

где C_i — кривые пучка C_λ и $(C_\lambda^2) \geqslant 0$. С другой стороны, $(C_i \cdot K) \geqslant 0$ и $(D \cdot K) \geqslant 0$ — иначе, согласно лемме гл. II, § 4, поверхность V была бы линейчатой или не была бы минимальной моделью. Так как $(K^2) = 0$, то из (4) следует, путем умножения обеих частей на K, что $(C_i \cdot K) = 0$. Умножая теперь обе части (4) на C_i, мы получаем отсюда (и из того, что $(C_i^2) \geqslant 0$), что $(C_i^2) = 0$ и $(C_i \cdot C_j) = 0$. Таким образом, $p_a(C_i) = 1$ и различные кривые C_i не пересекаются. Из теоремы Бертини следует, что C_λ является пучком эллиптических кривых, причем ввиду $(C_\lambda^2) = 0$ он не имеет фундаментальных точек. Он определяет регулярное отображение V на некоторую кривую B.

Остается доказать утверждение о неподвижных компонентах системы $|nK|$. Согласно замечанию к теореме 4 дивизор $D + \Sigma C_i$ является рациональной линейной комбинацией слоев. Пусть ν' — общий знаменатель коэффициентов этой комбинации. Положим $m = \nu \cdot \nu'$. Тогда $|mK|$ содержит целочисленную линейную комбинацию слоев:

$$mK \sim \sum n_i F_{b_i}, \quad n_i > 0.$$

Так как при достаточно большом n класс $n (\Sigma n_i b_i)$ на кривой B не содержит неподвижных компонент, то класс mnK на V тоже не содержит неподвижных компонент.

Следствие. *Если поверхность V является минимальной моделью и не линейчатая, то для нее $\varkappa = 1$ тогда и только тогда, когда $(K^2) = 0$, $12K \neq 0$.*

§ 5. Якобиево расслоение

В этом и следующих параграфах мы изложим результаты работ [25, 42, 40] и [57] по классификации поверхностей с пучком эллиптических кривых. Мы не будем приводить доказательств большинства излагаемых результатов. Читатель может найти их в указанных работах.

Пусть $\pi: V \to B$ — расслоение, слои которого определяют пучок эллиптических кривых на поверхности V. Если β — общая точка кривой B, то слой F_β — кривая рода 1, определенная над полем $k(B)$. Таким образом, к изучению поверхностей V можно применить теорию кривых рода 1. Такова точка зрения работ [42, 56] и [57].

На кривой F_β, вообще говоря, нельзя ввести структуру одномерного абелева многообразия над полем $k(B)$; для этого необходимо, чтобы она имела рациональную точку над этим полем. Задание рациональной точки на кривой F_β над полем $k(B)$ равносильно заданию рационального (а значит, и регулярного) отображения $\sigma: B \to V$, такого, что $\pi\sigma = 1$. Образ $\sigma B = C$ характеризуется тем, что это неприводимая кривая на V и $(C \cdot F) = 1$, где F — любой слой расслоения π. Мы будем называть такую кривую C сечением расслоения π. С каждым расслоением π можно связать другое расслоение, имеющее ту же базу и уже обладающее сечением. Для этого нужно рассмотреть якобиеву кривую A_β кривой F_β. Кривая A_β обладает тем свойством, что существует бирациональное отображение φ кривой F_β на A_β, определенное над некоторым конечным расширением поля $k(B)$, которое устанавливает изоморфизм между группой классов дивизоров нулевой степени кривой F_β, определенных над любым полем $K \supset k(B)$, и группой точек на кривой A_β, определенных над тем же полем. Дальше будет удобно считать кривые F_β (и соответствующие поверхности V с пучком эллиптических кривых) различными, если отображения φ различны — не отличаются на автоморфизм одномерного абелева многообразия A_β. Общая точка кривой A_β определяет некоторую алгебраическую поверхность, которая ввиду включения $k(B) \subset k(A_\beta)$ снабжена пучком эллиптических кривых с базой B.

Обозначим через J неособую минимальную модель этой поверхности с пучком эллиптических кривых. Мы будем называть J якобиевым расслоением расслоения $\pi: V \to B$. Так как кривая A_β имеет рациональную точку над полем $k(B)$ — нулевую точку, то расслоение J имеет сечение σ, которое мы будем называть нулевым сечением. Для каждого расслоения π: $V \to B$ существует такое накрытие $C \to B$, что расслоение $V \times_B C$ над C имеет сечение. Всякое расслоение, имеющее сечение, изоморфно своему якобиеву расслоению.

Принцип дальнейшей классификации заключается в том, что сначала классифицируются расслоения, имеющие сечение, а потом — все расслоения, имеющие заданное якобиево расслоение. Произвольное расслоение следующим образом связано со своим якобиевым расслоением. Пусть $C \to B$ — некоторое нормальное накрытие с группой Галуа G и $\widetilde{J}_C$ — неособая минимальная модель расслоения $J \times_B C$ над C. Группа G, естественно, действует на $\widetilde{J}_C$. Сечения $\sigma: C \to \widetilde{J}_C$ образуют группу, которая является, очевидно, G-операторной группой. Обозначим эту группу через $\mathfrak{A}_J(C)$. Тогда все расслоения $\pi: V \to B$, для которых расслоение $V \times_B C$ над C имеет сечение, находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H^1(G, \mathfrak{A}_J(C))$.

Групповую структуру можно перенести при помощи этого соответствия на множество всех расслоений V, имеющих J якобиевым расслоением, для которых $V \times_B C$ имеет сечение. Для любых двух расслоений V_1 и V_2 над B с общим якобиевым расслоением можно найти такое накрытие $C \to B$, что $V_1 \times_B C$ и $V_2 \times_B C$ имеют сечение. Пользуясь этим, можно ввести групповую операцию во все множество расслоений на эллиптические кривые $\pi: V \to B$, имеющих заданное якобиевое расслоение J. Получаемая группа обозначается через $\mathfrak{H}(B, J)$. Она является периодической группой.

Пусть $\pi: V \to B$ — расслоение на эллиптические кривые, имеющие якобиево расслоение J. Пусть $C \to B$ — такое накрытие, что $V \times_B C$ имеет сечение над C и $u \in H^1(G, \mathfrak{A}_J(C))$ — элемент, соответствующий V. Таким образом, u является одномерным коциклом, т. е. имеет вид $u_g \in \mathfrak{A}_J(C)$, $g \in G$. Так как u_g является сечением $\widetilde{J}_C$ над C, то преобразование $x \to g(x) + u_g(\pi(x))$ является (ввиду того, что $\widetilde{J}_C$ — минимальная модель) бирегулярным автоморфизмом $\widetilde{J}_C$. Таким образом, мы имеем отображение φ: $:G \to \mathrm{Aut}(\widetilde{J}_C)$, которое является мономорфизмом. Теперь можно указать, как определяется V по $\widetilde{J}_C$ и u_g:

$$V \simeq \widetilde{J}_C / \varphi(G). \tag{5}$$

§ 6. Слои якобиевого расслоения

В работах [25] и [40] описаны все типы вырожденных слоев, которые могут встретиться в якобиевых расслоениях. Для того чтобы изложить это описание, напомним, что общий слой F_β бирационально эквивалентен над $k(B)$ — кривой, заданной уравнением

$$y^2 = x^3 + p \cdot x + q, \quad p, q \in k(B).$$

Пусть $b \in B$, t — локальный параметр в точке b и $\nu(f)$ — показатель функции $f \in k(B)$ в точке b. Можно предполагать, что в (6) $\nu(p) \geqslant 0$, $\nu(q) \geqslant 0$ и $\min(\nu(p) - 4, \nu(q) - 6) < 0$. Положим

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2.$$

Слой F_b является вырожденным тогда и только тогда, когда $\nu(\Delta) > 0$. Рассмотрим два случая:

A) при $k = 0$ или 1 имеет место представление

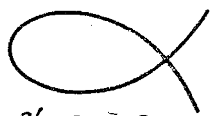
$$p = t^{2k} a, \quad q = t^{3k} b, \quad \nu(a) = \nu(b) = 0, \quad n = \nu(4a^3 + 27b^2) > 0.$$

B) такое представление не имеет места.

Случай A при $k = 0$ мы будем обозначать в зависимости от значения n через A'_n, а при $k = 1$ — через A''_n. Число n может принимать любые целые положительные значения.

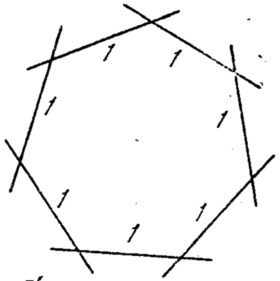
В случае B число $\nu(\Delta)$ может принимать только значения 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10. Мы будем обозначать эти случаи через B_n, $n = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$.

Описание вырожденных слоев во всех этих случаях дается ниже. При этом Θ_i — рациональные кривые без особых точек, кроме случая A_1', когда Θ имеет одну двойную точку с разделенными касательными, и случая B_2, когда Θ имеет одну двойную точку с двойной касательной. Пересечения



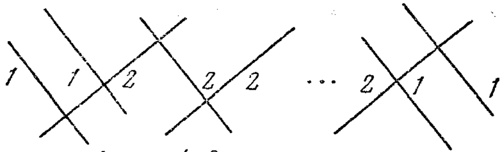
$A_1'; A_b = A_b^0$

Рис. 1



$A_n', n>1; A_b/A_b^0 = Z_n$

Рис. 2



A_n''; при $n \equiv 0(2)$, $A_b/A_b^0 = Z_2 \times Z$; при $n \not\equiv 0(2)$, $A_b/A_b = Z_4$

Рис. 3

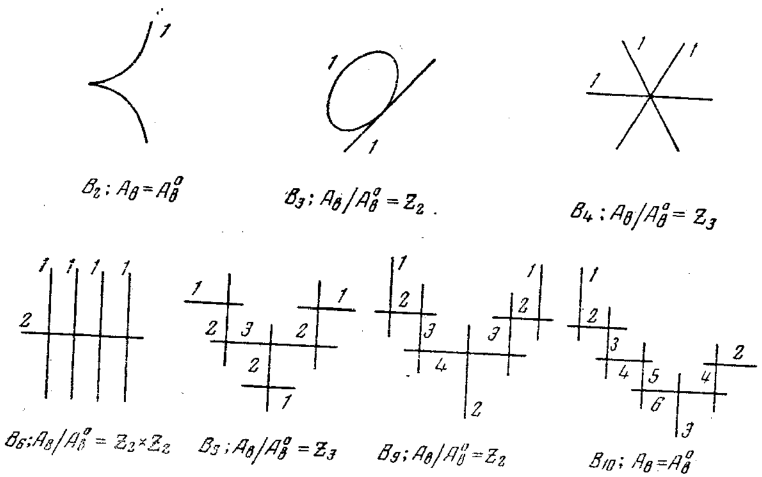


Рис. 4

кривых Θ_i указаны на чертежах. Все кривые в точках пересечения трансверсальны, кроме случая B_3, когда Θ_1 и Θ_2 имеют касание первого порядка.

Слои имеют следующее строение (рис. 1—4):

$$A_1': \quad F_b = \Theta,$$

$$A_n',\ n > 1: F_b = \Theta_1 + \ldots + \Theta_n,$$

$$A_n'': \ F_b = \Theta_0 + \Theta_1 + 2\Theta_2 + \ldots + 2\Theta_{n+2} + \Theta_{n+3} + \Theta_{n+4},$$

$$B_2: F_b = \Theta,$$

$$B_3: F_b = \Theta_1 + \Theta_2,$$

$$B_4: F_b = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,$$

$$B_6: F_b = 2\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4,$$

$$B_8: F_b = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + 2\Theta_4 + 2\Theta_5 + 2\Theta_6 + 3\Theta_7,$$

$$B_9: F_b = \Theta_1 + \Theta_2 + 2\Theta_3 + 2\Theta_4 + 2\Theta_5 + 3\Theta_6 + 7\Theta_7 + 4\Theta_8,$$

$$B_{10}: F_b = \Theta_1 + 2\Theta_2 + 2\Theta_3 + 3\Theta_4 + 3\Theta_5 + 4\Theta_6 + 4\Theta_7 + 5\Theta_8 + 6\Theta_9.$$

Из рассмотрения отдельных случаев видно, что всегда $\nu(\Delta) = \chi(F_b)$.

Более тонкие свойства вырожденных слоев связаны с рассмотрением групповой структуры на них. Групповая операция на общем слое F_β расслоения J определяет регулярное отображение $F_\beta \times F_\beta \to F_\beta$. Это отображение можно рассматривать как рациональное отображение $J \times_B J \to J$. Оказывается, что если J — минимальная модель, то это отображение регулярно и определяет структуру алгебраической группы на множестве неособых точек каждого слоя F_b. Обозначим эту группу через A_b. В частности, та компонента, которая пересекает нулевое сечение, образует подгруппу A_b^0, связную компоненту единицы группы A_b. Группа $A_b = A_b^0$ является эллиптической кривой, если слой F_b неособый, является мультипликативной группой в случае A_n' и аддитивной группой во всех остальных случаях. Группа A_b/A_b^0 указана на рис. 1—4.

Наконец, укажем, каковы якобиевы расслоения, вообще не имеющие вырожденных слоев.

Определение. Пусть A — эллиптическая кривая (с фиксированной групповой структурой) над полем k, B — произвольная кривая, $\bar{B} \to B$ — нормальное неразветвленное накрытие, группа Галуа G которого изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов кривой A (как абелева многообразия) и φ: $G \to \operatorname{Aut} A$ — соответствующий изоморфизм. Определим действие G на $\bar{B} \times A$ по правилу

$$\sigma(\bar{b} \times a) = \sigma\bar{b} \times a\varphi(\sigma)^{-1}.$$

Расслоение $(\bar{B} \times A)/G \to B$ не имеет вырожденных слоев. Такие расслоения называются косыми произведениями. Имеет место

Теорема 6. *Всякое якобиево расслоение без вырожденных слоев является косым произведением.*

Следствие. *Если B — рациональная кривая, то якобиево расслоение без вырожденных слоев над B имеет вид $B \times F$, где F — эллиптическая кривая.*

§ 7. Локальная классификация

Для того чтобы расслоение V над B на эллиптические кривые было изоморфно своему якобиеву расслоению, необходимо и достаточно, чтобы оно имело сечение.

Всякое сечение s над B дает локальное сечение в любой точке $b \in B$. Под этим подразумевается отображение s_b: $B \to V$, задаваемое формальными степенными рядами по степеням локального параметра t в точке b, и такое, что $\pi s_b = 1$. Иными словами, локальное сечение — это рациональная точка на кривой F_β над полем степенных рядов $k\{t\}$. Важным, необходимым условием для существования сечения является существование локального сечения в любой точке $b \in B$. В связи с этим мы введем также понятие локального изоморфизма расслоений — это изоморфизм, задаваемый формальными степенными рядами по степеням локального параметра t в точке b. Иными словами, расслоения $\pi: V \to B$ и $\pi': V' \to B$ локально изоморфны в точке $b \in B$, если кривые F_β и F'_β изоморфны над полем степенных рядов $k\{t\}$.

Мы изложим сейчас классификацию расслоения с точностью до локального изоморфизма в заданной точке $b \in B$. Для любого расслоения $V \to B$ существует такое накрытие $C \to B$, имеющее одну точку ветвления над точкой $b \in B$, что $V \times_B C$ формально изоморфно $J \times_B C$, где J — якобиево расслоение V.

Обозначим через $\widetilde{V} \to C$ минимальную неособую модель расслоения $V \times_B C$. Тогда расслоения $\widetilde{V} \to C$ и $\widetilde{J} \to C$ — изоморфны. Так как, кроме того, имеется естественная проекция $\widetilde{J} \to J$, то мы получаем отображение $\widetilde{V} \to J$. Пусть U_b и $\widetilde{F}_c$ — слои расслоений $\widetilde{J}$ и $\widetilde{V}$, лежащие над точкой b и ее прообразом $c \in C$ соответственно. Отображение $\widetilde{V} \to J$ определяет отображение $\widetilde{F}_c \to U_b$, которое, как легко видеть, является неразветвленным циклическим накрытием. Группа Галуа H этого накрытия, естественно, изоморфна подгруппе группы Галуа G накрытия $C \to B$ в точке b. У группы G имеется некоторый выделенный характер ψ_0. Действительно, соответствующее расширение получается присоединением элемента $\sqrt[n]{t}$ к $k\{t\}$. Характер ψ_0 определен тем, что $\psi_0(\sigma) = \sqrt[n]{t}^{\,1-\sigma}$. Ограничение характера ψ_0 определяет некоторый характер на группе Галуа H накрытия $\widetilde{F}_c \to U_b$. Таким образом, мы имеем некоторое неразветвленное накрытие $\widetilde{F}_c \to U_b$ и некоторый характер группы Галуа H этого накрытия. Так как группа H (в случае $k = \mathbf{C}$) является факторгруппой группы $H_1(U_b)$, то мы тем самым имеем некоторый характер ψ группы $H_1(U_b)$:

$$\psi \in \mathrm{Char}\, H_1(U_b),$$

где Char обозначает группу периодических характеров, а $H_1(U_b)$ — одномерная группа Бетти с целочисленными коэффициентами.

Характер ψ является основным инвариантом расслоения с точки зрения формального изоморфизма. Его, однако, удобно заменить другим инвариантом. Для этого рассмотрим открытое множество $A_b^0 \subset U_b$ и естественное отображение $j: H_1(U_b) \to \overline{H}_1(A_b^0)$, где $\overline{H}_1$ — группа гомологий с произвольными носителями (если слой U_b особый, то A_b^0 некомпактно).

Для всех типов слоев легко проверить, что j является изоморфизмом и, следовательно, определяет изоморфизм j^* групп Char $H_1(U_b)$ и Char $\overline{H}_1(A_b^0)$.

Так как A_b^0 является многообразием, то группа Char $\overline{H}_1(A_b^0)$ изоморфна $H_1(A_b^0, \mathbf{Q/Z})$, где $\mathbf{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел. В результате мы имеем изоморфизм групп Char $H_1(U_b)$ и $H_1(A_b^0, \mathbf{Q/Z})$. Элемент группы $H_1(A_b^0, \mathbf{Q/Z})$, соответствующий при этом изоморфизме характеру ψ, который мы сопоставили расслоению V, мы обозначим через $h_b(V)$.

Основной результат локальной классификации следующий:

Теорема 7. *При $k = \mathbf{C}$ расслоения $\pi: V \to B$ и $\pi': V' \to B$ тогда и только тогда локально изоморфны в точке $b \in B$, когда $h_b(V) = h_b(V')$.*

Для несколько более общего класса полей k аналогичный результат получен в работах [42] и [57].

Следствие 1. *Инвариант $h_b(V)$ может быть отличен от 0, только если слой U_b неособый или имеет тип A'_n.*

Действительно, в остальных случаях A_b^0 — аддитивная группа, которая односвязна.

Следствие 2. *Для произвольного расслоения $\pi: V \to B$ особый слой F_b или изоморфен соответствующему слою U_b якобиева расслоения или же (в случае, когда U_b — неособый или типа A'_n) является кратным и получается из U_b умножением на некоторое целое число.*

Если слой U_b — особый, но не типа A'_n, утверждение следует из следствия 1. В оставшихся случаях проверка легко получается непосредственной конструкцией слоя F_b по формуле (5).

Следствие 3. *Если расслоение $V \to B$ не имеет других вырожденных слоев кроме кратных неособых слоев, то существует такое накрытие $C \to B$, что расслоение $V \times_B C$ над C изоморфно $C \times F$, где F — эллиптическая кривая.*

Для доказательства достаточно выбрать C таким, что $V \times_B C \simeq J \times_B C$, и применить следствие 2 и теорему 6.

Следствие 4. *Расслоение $V \to B$ тогда и только тогда имеет локальное сечение в точке $b \in B$, когда слой F_b — не кратный.*

Доказательство очевидно.

Следствие 5. *Расслоение $V \to B$ тогда и только тогда имеет локальное сечение в точке $b \in B$, когда оно имеет дифференцируемое сечение в некоторой окрестности этой точки.*

Действительно, если V не имеет локального сечения, то слой F_b имеет вид mD, $m > 1$. Если бы расслоение имело дифференцируемое сечение s, то мы имели бы $(s \cdot F_b) = 1$, в то время как $(s \cdot F) = m(s \cdot D) > 1$.

§ 8. Классификация расслоений

Для расслоения $\pi: V \to B$ и любой точки $b \in B$ определен инвариант $h_b(V) \in H^1(A_b^0, \mathbf{Q/Z})$. Легко видеть, что $h_b(V) = 0$, если F_b является невырожденным слоем расслоения π. Таким образом, для заданного V, $h_b(V) \neq 0$ только для конечного числа точек $b \in B$. Поэтому сопоставление

$$V \to \{h_b(v),\ b \in B\}$$

определяет гомоморфизм

$$\varphi:\ \mathfrak{H}(B, J) \to \sum_{b \in B} H_1(A_b^0, \mathbf{Q/Z}).$$

Нашей ближайшей целью является описание ядра и коядра гомоморфизма φ. Начнем с описания коядра.

Теорема 8. *Если J не является прямым произведением $B \times A$, где A — эллиптическая кривая, то гомоморфизм φ эпиморфен. Если $J \simeq B \times A$, то коядро гомоморфизма φ изоморфно группе точек конечного порядка многообразия A.*

Ядро гомоморфизма φ состоит из тех расслоений, которые, согласно теореме 7, имеют локальное сечение в любой точке $b \in B$. Иначе говоря, они локально изоморфны J в любой точке базы. Мы будем называть такие расслоения локально тривиальными, а группу, состоящую из таких расслоений, обозначать через $\mathfrak{h}(B, J)$.

Теперь предположим, что $k = \mathbf{C}$. Исследование группы $\mathfrak{h}(B, J)$ может быть проведено по классическому образцу исследования одномерных векторных расслоений. А именно, оно основано на сравнении алгебраической и дифференциальной структуры расслоений $V \in \mathfrak{h}(B, J)$.

Обозначим через $\mathfrak{h}_0(B, J)$ подгруппу группы $\mathfrak{h}(B, J)$, состоящую из тех расслоений, которые, как дифференцируемые расслоения, изоморфны J. Иначе эти расслоения характеризуются тем, что они обладают дифференцируемым сечением.

Теорема 9. *Группа $\mathfrak{D}(B, J) = \mathfrak{h}(B, J)/\mathfrak{h}_0(B, J)$ конечна.*

Мы опишем сначала группу $\mathfrak{h}_0$, а потом группу $\mathfrak{D}$ и покажем, что $\mathfrak{h}$ является их прямой суммой.

Пусть $V \in \mathfrak{h}_0(B, J)$ и задается коциклом $u_\sigma \in H'(G, \mathfrak{A}_J(C))$. Из условия $V \in \mathfrak{h}_0(B, J)$ легко следует, что

$$u_\sigma = s - \sigma s, \qquad \sigma \in G, \tag{6}$$

где $s\colon C \to \widetilde{J}$ — дифференцируемое сечение расслоения $\widetilde{J}$, а сечение σs определяется формулой

$$(\sigma s)(c) = s(\sigma^{-1}c).$$

Как u_σ, так и s и σs являются двумерными циклами многообразия $\widetilde{J}$. Через $\hat{u}_\sigma$, $\hat{s}$ и $\widehat{\sigma s}$ мы обозначим соответствующие им двумерные коциклы — элементы группы $H^2(\widetilde{J}, \mathbf{Z})$. Пусть $P^{2,0}$ — оператор сопоставления элементу из $H^2(\widetilde{J}, \mathbf{Z})$ его составляющей типа (2, 0). Так как u_σ является алгебраическим циклом, то по теореме Лефшетца $P^{2,0}\hat{u}_\sigma = 0$. Поэтому из (6) мы получаем, что

$$P^{2,0}\hat{s} = \sigma P^{2,0}\hat{s}. \tag{7}$$

Отображение $f\colon \widetilde{J} \to J$ определяет вложение

$$f^*\colon\; H^2(J, \mathbf{C}) \to H^2(\widetilde{J}, \mathbf{C}).$$

Как известно (и легко проверяется), при этом элементы из $H^{2,0}(J, \mathbf{C})$ отображаются в точности в элементы из $H^{2,0}(\widetilde{J}, \mathbf{C})$, инвариантные относительно действия группы G. Равенство (7) показывает тогда, что существует такой элемент $x \in H^{2,0}(J, \mathbf{C})$, что

$$f^*x = P^{2,0}\hat{s}.$$

Непосредственная проверка показывает, что элемент x определяется заданием расслоения V однозначно с точностью до слагаемого типа $P^{2,0}J$, $y \in H^2(J, \mathbf{Z})$.

Класс смежности в группе $H^{2,0}(J, \mathbf{C})/P^{2,0}H^2(I, \mathbf{Z})$, определенный элементом x, обозначим через $\gamma(V)$.

Теорема 10. *Отображение*

$$\gamma\colon\; \mathfrak{h}_0(B, J) \to H^{2,0}(J, \mathbf{C})/P^{2,0}H^2(J, \mathbf{Z})$$

определяет изоморфизм группы $\mathfrak{h}_0(B, J)$ и периодической части группы $H^{2,0}(J, \mathbf{C})/P^{2,0}H^2(J, \mathbf{Z})$.

Гомоморфизм

$$P^{2,0}\colon\; H^2(J, \mathbf{Z}) \to H^{2,0}(J, \mathbf{C})$$

имеет, согласно теореме Лефшетца, в качестве ядра группу $H^2_a(J)$, состоящую из алгебраических циклов. Фактор-группа

$$H^2_t(J) = H^2(J, \mathbf{Z})/H^2_a(J)$$

называется группой трансцендентных циклов. Эта группа вкладывается при помощи гомоморфизма $P^{2,0}$ в группу $H^{2,0}(J, \mathbf{C})$. С другой стороны, если Y — подгруппа неограниченно делимой группы X, то периодическая часть группы X/Y изоморфна, как легко видеть, группе $Y \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. В соединении с теоремой 9 это дает нам следующий результат.

Теорема 11. *Группа $\mathfrak{h}_0(B, J)$ изоморфна $H^2_t(J) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.*

Нам остается выяснить структуру группы $\mathfrak{D}(B, J)$.

Теорема 12. *Если расслоение J имеет хотя бы один вырожденный слой, или если оно имеет вид $B \times A$, где A — эллиптическая кривая, то $\mathfrak{D}(B, J) = 0$. Если J не имеет вырожденных слоев, но $J \neq B \times A$, то группа $\mathfrak{D}(B, J)$ изоморфна, в зависимости от типа группы автоморфизмов слоя, группе порядка* 1, 2, 3 *или* 4 (*в последнем случае* $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$).

Доказательство основывается на результатах работы [57]. Предположим, что J имеет хотя бы один вырожденный слой. Из предшествующего следует, что группа $\mathfrak{D}(B, J)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathfrak{h}(B, J)$ по подгруппе неограниченно делимых элементов. Согласно работе [57] эта факторгруппа изоморфна группе тех сечений s расслоения J, которые имеют конечный порядок в группе $\mathfrak{A}_J(B)$ всех сечений и для любого $b \in B$ пересекают слой F_b в некоторой точке, принадлежащей подмножеству A^0_b. Нам надо доказать, что такое сечение s равно нулевому сечению o.

Прежде всего заметим, что если $s \neq$ o, то s не пересекается с нулевым сечением. Действительно, в терминологии работы [57] s определяет для любого $b \in B$ отличную от 0 точку конечного порядка на кривой F_β, рациональную над полем $k\{t\}$ степенных рядов по степеням локального параметра t точки b. При этом эта точка принадлежит связной компоненте α^0_b группы всех точек α_b кривой F_β, рациональных над $k\{t\}$. С другой стороны, при специализации $\beta \to b$ точки конечного порядка в группе α^0_b изоморфно отображаются на точки конечного порядка группы A^0_b. Это значит, что $s \cdot A^0_b \neq 0$, а так как это верно для любого $b \in B$, то отсюда следует, что s не пересекается с нулевым сечением.

Пусть $ms =$ o. Тогда дивизор $ms \cdot F_\beta - m$o$\cdot F_\beta$ эквивалентен 0 на F_β и, следовательно, определяет некоторую функцию f на F_β и, значит, на J. К этой функции мы хотим применить лемму 8 главы IV. Это невозможно сделать непосредственно, поскольку лемма относится к расслоениям без вырожденных слоев, в то время как J имеет вырожденные слои. Чтобы все же применить результат леммы 8, выбросим из J в каждом вырожденном слое F_b все компоненты, отличные от A^0_b. Оставшееся открытое множество обозначим через J^0. Легко проверить, что доказательство леммы 8 сохраняет смысл без всяких изменений для поверхности J^0, если рассматривать в формулировке леммы только такие дивизоры C_i на J, которые пересекаются с особыми слоями F_b только в точках множеств A^0_b. Такими дивизорами являются s и o. Дивизор $ms - m$o, как мы видели, не разветвлен, и мы можем теперь применить лемму 8. Она дает нам, в частности, что все слои расслоения J^0 изоморфны, что возможно только, если расслоение J не имеет вырожденных слоев. Таким образом, если J имеет вырожденный слой, то $s =$ o.

Случай $J = B \times A$ разбирается на основании того описания группы $\mathfrak{D}(B, J)$, которое дано в работе [25]. В этом случае $\mathfrak{D}(B, J)$ является периодической подгруппой группы $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, следовательно, равна 0.

Пусть теперь J не имеет вырожденных слоев, и следовательно, является косым произведением, но не является прямым произведением. Тогда J имеет вид $(C \times A)/G$, где $f\colon C \to B$ — неразветвленное накрытие с группой Галуа G, A — эллиптическая кривая, задан неединичный гомоморфизм φ:

$G \to \operatorname{Aut} A$ и G действует на $C \times A$ по правилу

$$\sigma(c \times a) = \sigma(c) \times a\varphi(\sigma)^{-1}. \tag{8}$$

Согласно работе [57], группа $\mathfrak{D}(B, J)$ изоморфна группе сечений конечного порядка расслоения J. Выясним, какими могут быть такие сечения. Пусть s: $B \to J$ — периодическое сечение. Оно определяет сечение

$$s^*: \quad C \to J \times_B C, \quad s^*(c) = (sf)(c) \times c.$$

Сечение s^* обладает свойством

$$\sigma s^*(c) = s^*(\sigma c),$$

где σ действует на $J \times_B C$ по правилу

$$\sigma(x \times c) = x \times \sigma(c). \tag{9}$$

В нашем случае $J \times_B C \simeq A \times C$, и при этом изоморфизме действие (8) автоморфизма σ переходит в (9).

Ввиду этого s^* может быть записано в виде

$$s^*(c) = u(c) \times c, \tag{10}$$

где u: $C \to A$ — регулярное отображение. Правило (10) дает

$$u(\sigma(c)) = u(c)\varphi(\sigma)^{-1}. \tag{11}$$

Так как s — сечение конечного порядка, то для некоторого $m > 1$

$$ms^*(c) = 0, \qquad mu(c) = 0.$$

Таким образом, $u(c)$ — элемент периода m в A. Число таких элементов конечно, а тогда из регулярности отображения u следует, что это отображение постоянно

$$u(c) = u_0 \in A.$$

Условие (11) показывает, что

$$\varphi(\sigma) u_0 = u_0. \tag{12}$$

Как известно, σ может быть автоморфизмом порядка 2, 3, 4 или 6. Легко проверить, что решения уравнения (12) образуют в этих случаях группы соответственно порядков 4 (изоморфна $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$), 3, 2 и 1.

§ 9. Один частный случай

Применим полученную классификацию расслоений на эллиптические кривые к исследованию одного типа поверхностей, который встречался нам уже раньше (§ 7, гл. IV). Именно, рассмотрим поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, для которых отображение Альбанезе $\pi: V \to B$ имеет в качестве слоев эллиптические кривые. Мы видели в § 7, гл. IV, что в этом случае слои могут быть только неособые или кратностями неособых кривых. Из следствия 2 теоремы 7 следует, что якобиево расслоение J расслоения V не имеет вырожденных слоев и является, следовательно, косым произведением

$$J \simeq (C \times A)/G.$$

Прежде всего установим, что V тогда и только тогда имеет нужные нам инварианты, когда J не является прямым произведением (т. е. $\varphi(G) \neq 1$).

Для этого нам надо провести рассуждения, весьма близкие тем, которые содержатся в § 8, гл. IV. Заметим, что согласно формуле (5) § 5 расслоение V является фактором расслоения $\tilde{J} \simeq J \times_B \bar{C}$ для некоторого накрытия $\bar{C} \to B$ с группой Галуа $\bar{G}$. Мы можем выбрать $\bar{C}$ так, чтобы накрытие $C \to B$ было его фактором. Тем самым задан гомоморфизм ψ: $\bar{G} \to G$. Тогда, как легко видеть, $\tilde{J} \simeq \bar{C} \times A$. Нетрудно интерпретировать действие группы $\bar{G}$ на $\tilde{J}$. Простое вычисление показывает, что

$$\bar{\sigma}(\bar{c} \times a) = \bar{\sigma}(\bar{c}) \times a \cdot u(\bar{\sigma})^{-1},$$

где $u(\bar{\sigma})$ — автоморфизм кривой A (но не соответствующего абелева многообразия), а u: $\bar{G} \to \operatorname{Aut} A$ — гомоморфизм группы $\bar{G}$ в группу автоморфизмов кривой A. При этом $u(\bar{\sigma})$ является комбинацией автоморфизма и сдвига абелева многообразия A

$$u(\bar{\sigma})(a) = \varphi\psi(\bar{\sigma})(a) + v(\bar{\sigma}),$$

где $v(\bar{\sigma})$ — точка A.

Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 13, § 8, гл. IV, мы видим, что

$$\Omega^i(V) \simeq \Omega^i(\bar{C} \times A)^{\bar{G}}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$\Omega^1(V) \simeq \Omega^1(B) \oplus \Omega^1(A)^{\varphi(G)}$$

и, значит, $q = 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi(G) \neq 1$, т. е. когда J — не прямое произведение.

Аналогично

$$\Omega^2(V) \simeq (\Omega^1(\bar{C}) \oplus \Omega^1(A))^{\bar{G}}.$$

Пусть H — ядро гомоморфизма $\psi: \bar{G} \to G$. Так как

$$(\Omega^1(\bar{C}) \otimes \Omega^1(A))^{\bar{G}} = ((\Omega^1(\bar{C}) \otimes \Omega^1(A))^H)^G,$$

$$\Omega^1(\bar{C})^H \simeq \Omega^1(C), \ \Omega^1(A)^H = \Omega^1(A), \ \Omega^1(C)^G \simeq \Omega^1(B),$$

то

$$\Omega^2(V) \simeq \Omega^1(B) \otimes \Omega^1(A)^{\varphi(G)},$$

откуда следует, что $p = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(G) \neq 1$.

Применяя теперь развитую в предшествующих параграфах классификацию, мы приходим к следующему результату.

Теорема 13. *Поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, для которых слои расслоения Альбанезе π: $V \to B$ имеют род 1, классифицируются следующим образом. Якобиево расслоение расслоения V имеет вид*

$$J \simeq (C \times A)/G,$$

где f: $C \to B$ — нетождественное неразветвленное накрытие с группой G, A — эллиптическая кривая φ: $G \to \operatorname{Aut} A$ — вложение G в группу автоморфизмов A (как абелева многообразия) и G действует на $C \times A$ по правилу $\sigma(c \times a) = \sigma(c) \times a\varphi(\sigma)^{-1}$. Структура группы $\mathfrak{H}(B, J)$ всех расслоений V

с заданным якобиевым расслоением определяется из точной последовательности (F_b — слой J над точкой $b \in B$):

$$0 \to \mathfrak{h}(B, J) \to \mathfrak{H}(B, J) \to \sum_{b \in B} H_1(F_b, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0$$

и соотношения

$$\mathfrak{h}(B, J) = \mathfrak{D}(B, J), \tag{13}$$

причем $\mathfrak{D}(B, J)$ имеет порядок 1, 2, 3 или 4 в зависимости от того, имеет ли группа $\varphi(G)$ порядок 6, 4, 3 или 2.

Проверки здесь требует только соотношение (13). Оно следует из того, что $\mathfrak{D}(B, J) = \mathfrak{h}(B, J) / \mathfrak{h}_0(B, J)$, и того, что $\mathfrak{h}_0(B, J) = 0$. Последнее утверждение вытекает из того, что $H_t^2(J) = 0$. Действительно, из того, что $\chi = 0$, $q = 1$, следует, что $b_2 = 2$. С другой стороны, мы имеем заведомо два негомологичных алгебраических цикла в J — например, слой и сечение. Значит, ранг группы $H_a^2(J)$ также равен двум. Так как, согласно критерию Лефшетца, группа $H_t^2(J) = H^2(J, \mathbf{Z})/H_a^2(J)$ не имеет кручения, то она должна быть равна 0.

Замечание. При рассмотрении нашего класса поверхностей Энриквес [59, гл. X, § 11] утверждает, что V имеет пучок эллиптических кривых, трансверсальных слоям расслоения π: $V \to B$. Легко видеть, однако, что на V имеется эллиптическая кривая, отличная от слоев расслоения π, только если V не имеет кратных слоев. Действительно, пусть L такая кривая. По условию $(L \cdot F_b) = r > 0$. Так как база B является, как и L, эллиптической кривой, то проекция π определяет на L структуру неразветвленного накрытия B. Это значит, что $L \cdot F_b$ состоит для любого $b \in B$ из r различных точек. Но если F_b — кратный слой $F_b = m \cdot U$, $m > 1$, то, очевидно, что $L \cdot F_b$ состоит из m раз взятых точек $L \cdot U$.

Таким образом, классификация Энриквеса охватывает, по-видимому, только те расслоения, которые не имеют кратных слоев. Как мы видели, это локально всюду тривиальные расслоения. Они образуют конечную подгруппу $\mathfrak{D}(B, J) = \mathfrak{h}(B, J)$ группы $\mathfrak{H}(B, J)$. Расслоения, соответствующие элементам бесконечной факторгруппы $\Sigma H_1(F_b, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ этой группы, в классификации Энриквеса, по-видимому, пропущены.

Глава VIII

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С $\varkappa = 0$

В настоящей главе изучаются келеровы (иногда только алгебраические) поверхности с $\varkappa = 0$.

Существование кратно-канонической модели поверхности F означает, что для некоторого натурального числа n_0 число $P_{n_0} = \dim H^0(F, \Omega(n_0K))$ больше нуля, где через K обозначено каноническое расслоенное пространство прямых; нульмерность такой модели эквивалентна требованию $P_n \leqslant 1$ для всех $n > 0$.

§ 1 посвящен отысканию возможных значений целочисленных инвариантов поверхностей указанного типа.

В § 2, 3, 4 такие поверхности классифицируются; мы заранее предполагаем, что все рассматриваемые поверхности являются минимальными моделями, т. е. не содержат исключительных кривых первого рода.

§ 1. Значения инвариантов

Мы начинаем этот параграф несколькими леммами, чтобы закончить его таблицей возможных значений целочисленных инвариантов поверхностей с $\varkappa = 0$.

1. Лемма 1. *Пусть F — неособая келерова поверхность с $\varkappa \geqslant 0$. Тогда $(K^2) \geqslant 0$. Кроме того, если θ — неприводимая компонента эффективного дивизора $D \in |nK|$ (n — любое допустимое), то $(D \cdot \theta) \geqslant 0$.*

Доказательство. Поскольку $\varkappa \geqslant 0$, найдется такое число n, что система $|nK|$ содержит эффективный дивизор D. Пусть $D = \Sigma \rho_i \theta_i$, где $\rho_i > 0$, θ_i — неприводимая кривая. Согласно формуле дополнения, $(D\theta_i) = n(2p_a(\theta_i) - 2 - (\theta_i^2))$. Допустим, $(D\theta_i) < 0$. Тогда $2p_a(\theta_i) - 2 - (\theta_i^2) < 0$. Это возможно лишь в случае, когда $(\theta_i^2) \geqslant 0$ (значения $(\theta_i^2) = -1$, $p_a(\theta_i) = 0$ исключаются предположением о минимальности поверхности F). Поскольку заведомо $(\theta_i\theta_j) \geqslant 0$ при $i \neq j$, приходим к противоречию. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть F — неособая келерова поверхность с $\varkappa = 0$. Тогда $p_a(F) \geqslant 0$.*

Действительно, $12p_a = (K^2) + \chi \geqslant \chi \geqslant 4p_a - 2 - 2p \geqslant 4p_a - 4$.

Лемма 2. *Пусть F — неособая келерова поверхность с $\varkappa \geqslant 0$, $(K^2) > 0$. Тогда $\varkappa > 0$.*

Доказательство. По теореме Римана — Роха

$$\dim H^0(F, \Omega(nK)) + \dim H^0(F, \Omega((1-n)K)) \geqslant \frac{n(n-1)}{2}(K^2) + p_a.$$

Поскольку $\varkappa \geqslant 0$, $\dim H^0(F, \Omega((1-n)K)) \leqslant 1$ при $n > 1$.

Следствие. *Пусть F — неособая поверхность с $\varkappa = 0$. Тогда $(K^2) = 0$. Кроме того, если θ — неприводимая компонента эффективного дивизора $D \in |nK|$ (n — любое допустимое), то $(D\theta) = 0$.*

Это утверждение тривиально вытекает из лемм 1 и 2.

Лемма 3. *Пусть F — неособая келерова поверхность, $P_n = 1, P_m = 1$, $m \neq n$. Тогда либо $\varkappa > 0$, либо $P_d = 1$, где $d = (m, n)$.*

Доказательство. Обозначим через D_0, D_1 эффективные дивизоры систем $|nK|$, $|mK|$ соответственно и рассмотрим эффективные дивизоры $\frac{m}{d} D_0$, $\frac{n}{d} D_1$. Эти дивизоры принадлежат системе $\left|\frac{mn}{d} K\right|$. Если они различны, $P_{mn/d} > 1$ и $\varkappa > 0$. Если они совпадают, эффективен один из дивизоров $D_0 - D_1$ или $D_1 - D_0$ (в зависимости от относительной величины чисел m, n). Этот дивизор (обозначим его через D_2) принадлежит системе $|(m-n)K|$ (или $|(n-m)K|$). Утверждение нашей леммы следует теперь из существования алгоритма Эвклида отыскания общего наибольшего делителя.

Лемма 4. *Пусть F — неособая келерова поверхность с $\varkappa = 0$. Тогда либо $p_g = 1$, либо $2K \sim 0$, либо $p_g = q - 1 = 0$.*

Доказательство. Допустим $p_g = 0$, $q \neq 1$. Тогда, поскольку $\varkappa = 0$, то $p_a > 0$, $q = 0$, $P_2 \neq 0$. Согласно лемме 3, $P_3 = 0$. По теореме Римана — Роха, $\dim H^0(F, \Omega(3K)) + \dim H^0(F, \Omega)(-2K)) \geqslant p_a > 0$. Следовательно, $\dim H^0(F, \Omega(-2K)) > 0$, что вместе с $P_2 \neq 0$ дает $2K \sim 0$.

II. Результаты предыдущего пункта позволяют определить те значения инвариантов p_a, p, q, (K^2), которые могут соответствовать поверхностям с $\varkappa = 0$.

Пусть $p = 0$. Тогда, согласно следствию леммы 1, $q = 0$ или 1.

Пусть $p = 1$. Тогда $q = 0$, или 1, или 2.

Поверхности с $p = 0$, $q = 1$ исследованы в главе VII.

Поверхности с $p = 0$, $q = 0$ (поверхности Энриквеса) будут изучены в главе X.

Замечание. Из результатов этого параграфа следует, что поверхности Энриквеса определяются следующими значениями инвариантов: $p = q = P_3 = 0$, $P_2 = 1$.

В § 3 будут описаны проективные модели поверхностей с $p = 1$, $q = 0$. Вопросу о «числе модулей» таких поверхностей посвящена глава IX.

В § 4 доказывается, что келеровы поверхности с $p = 1$, $q = 2$ являются комплексными торами.

§ 2. Поверхности с $\varkappa = 0$, $p = q = 1$

В этом параграфе доказывается следующая

Теорема 1. *Не существует алгебраических поверхностей с $\varkappa = 0$, $p_g = 1$, $q = 1$.*

Доказательству этой теоремы предпошлем простую лемму.

Лемма 1. *Пусть $(K^2) = 0$ и $P_n > 0$. Тогда все неприводимые компоненты эффективного дивизора $D \in |nK|$ имеют арифметический род 0 или 1.*

Доказательство леммы. По формуле дополнения

$$p_a(\theta) = \frac{(\theta(K+\theta))}{2} + 1$$

для всякой неприводимой кривой θ. Согласно следствию леммы 2, $(K\theta) = 0$, если θ — компонента D. Следовательно, $(\theta^2) \leqslant 0$. Теперь имеем

$$0 \leqslant p_a(\theta) = 1 + \frac{(\theta^2)}{2} \leqslant 1.$$

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $A(F)$ многообразие Альбанезе поверхности F с $\varkappa = 0$, $p = q = 1$, являющееся неособой

кривой рода 1, и через α — естественное отображение $F \to A(F)$. Через D обозначим эффективный дивизор системы $|K|$. Мы рассмотрим два случая.

1) Образом всякой неприводимой компоненты дивизора D является точка (или пустое множество, если $D = 0$). Обозначим через Γ_C «слой» отображения α над точкой $C \in A(F)$. Как известно, для общей точки $c \in A(F)$ Γ_C есть неособая кривая. Очевидно, $(\Gamma_C^2) = (\Gamma_C K) = 0$. По теореме Римана — Роха

$$\dim H^0(F, \Omega(\Gamma_C - K)) + \dim H^0(F, \Omega(2K - \Gamma_C)) = 1 + \dim H'(F, \Omega(\Gamma_C - K)). \quad (*)$$

Поскольку $\varkappa = 0$, $\dim H^0(F, \Omega(2K - \Gamma_C)) = 0$, поэтому из равенства (*) следует, что $\dim H^0(F, \Omega(\Gamma_C)) \geqslant 2$ (если $D > 0$, это очевидно, если $D = K = 0$, то

$$\dim H'(F, \Omega(\Gamma_C - K)) = \dim H'(F, \Omega(\Gamma_C + K)) \geqslant 1$$

по теореме Кодаиры [25, теорема 2.3]).

Рассмотрим линейную систему $|\Gamma_C|$. Обозначим ее неподвижную часть через θ, подвижную — через $|H_\nu|$: $|\Gamma_C| = \theta + |H_\nu|$. Поскольку (θ), $(H_{\nu_0}) \subset (\Gamma_C)$ (через (M) обозначается носитель дивизора M) при подходящем индексе ν_0, то $(\theta\Gamma_C) = (H_\nu\Gamma_C) = (H_\nu K) = 0$. Поскольку, кроме того, $(H_\nu^2) = 0$, система $|H_\nu|$ составлена из пучка L, общую кривую которого можно считать неприводимой. Так как $(L\Gamma_C) = 0$, все кривые пучка L принадлежат слоям отображения α.

Как и выше, можно доказать, что линейная система $|L_0|$ имеет положительную размерность, где L_0 — неприводимая кривая из пучка L, и что подвижная часть L_1 этой системы (являющаяся линейным пучком) имеет нулевой индекс пересечения с кривыми пучка L. Из неприводимости пучков L, L_1 следует теперь их совпадение. Последнее, однако, означает, что существует регулярное отображение кривой P^1 рода 0, параметризующей пучок L, на кривую $A(F)$ рода 1. Получаем противоречие.

2) Среди неприводимых компонент дивизора D найдется хотя бы одна, образом которой при отображении α является кривая $A(F)$.

Обозначим через θ неприводимую компоненту дивизора D, существование которой мы сейчас потребовали. Из леммы 1 следует, что θ — неособая кривая рода 1. Пусть $D = s\theta + \tilde{D}$, где θ не является компонентой дивизора $\tilde{D}$. Очевидно, что дивизоры θ и $\tilde{D}$ не имеют общих точек. Отсюда легко следует, что канонический пучок прямых над кривой θ совпадает с пучком $(s+1)\,\theta|_\theta$, где $\theta|_\theta$ — пучок прямых над кривой θ, индуцированный с помощью вложения $\theta \subset F$ из пучка прямых на F, связанного с дивизором θ. Следовательно, $(s+1)\,\theta|_\theta \sim 0$, где через 0 обозначен тривиальный пучок прямых на θ.

По теореме Римана — Роха

$$\dim H^0(F, \Omega(D - (2s+2)\theta)) + \dim H^0(F, \Omega((2s+2)\theta)) = \frac{((D-(2s+2)\theta)(2s+2)\theta)}{2} + 1 + \dim H'(F, \Omega(D - (2s+2)\theta)).$$

Поскольку $\varkappa = 0$, то $\dim H^0(F, \Omega(D - (2s+2)\theta)) = 0$, $\dim H^0(F, \Omega((2s+2)\theta)) = 1$. Так как индекс пересечения, стоящий в правой части, равен нулю, то $\dim H'(F, \Omega(D - (2s+2)\theta)) = 0$. Напишем теперь точную последовательность групп когомологий, связанную с точной последовательностью пучков:

$$0 \to \Omega(D - (2s+2)\theta) \to \Omega(D - (2s+1)\theta) \to \Omega_\theta(D - (2s+1)\theta|_\theta) \to 0;$$

$$0 \to H^0(F, \Omega(D - (2s+2)\theta)) \to H^0(F, \Omega(D - (2s+1)\theta)) \to H^0(\theta, \Omega_\theta(D - (2s+1)\theta|_\theta)) \to 0.$$

Поскольку $D-(2s+1)\,\theta|_\theta \sim \widetilde{D}-(s+1)\,\theta|_\theta \sim -(s+1)\,\theta|_\theta \sim 0$, то $\dim H^0(\theta, \Omega_\theta(D-(2s+1)\,\theta|_\theta)) = 1$ и, следовательно, $\dim H^0(F, \Omega(D-(2s+1)\,\theta)) > 0$. Получаем противоречие с предположением $\varkappa = 0$. Теорема 1 доказана.

§ 3. Поверхности с $\varkappa = q = 0,\ p = 1$

В этом параграфе будут указаны проективные модели алгебраических поверхностей с $\varkappa = q = 0$, $p = 1$. Начнем с трех существенных лемм.

Лемма 1. $K(F) \sim 0$.

Доказательство. По теореме Римана — Роха

$$\dim H^0(F, \Omega(-K)) + \dim H^0(F, \Omega(2K)) \geqslant p_a(F) = 2.$$

Так как $\varkappa = 0$, то $\dim H^0(F, \Omega(2K)) \leqslant 1$, а потому $\dim H^0(F, \Omega(-K)) \geqslant 1$, откуда и следует наше утверждение.

Следствие. *Если D — неприводимый дивизор на поверхности F, то $H^1(F, \Omega(D)) = 0$.*

Это утверждение непосредственно следует из теоремы Кодаиры [25, теорема 2.5].

Замечание. Из доказательства леммы следует, что поверхности рассматриваемого типа определяются следующими значениями инвариантов: $q = 0$, $p = P_2 = 1$.

Лемма 2. *Если D — неприводимый дивизор на поверхности F и $(D^2) > 0$, то общая кривая полной линейной системы $|D|$ неособа.*

Доказательство. Согласно теореме Бертини, достаточно доказать, что система $|D|$ не имеет базисных точек. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что система $|D|$ высекает на кривой D полную линейную систему без неподвижных точек.

Согласно Кодаире ([25], § 1), имеет место точная последовательность

$$0 \to H^0(\widetilde{D}, \Omega(D|_{\widetilde{D}} - \mathfrak{c})) \to H^0(D, \Omega_D(D|_D)) \to H^0(M) \to$$
$$\to H^1(\widetilde{D}, \Omega(D|_{\widetilde{D}} - \mathfrak{c})) \to H^1(D, \Omega_D(D|_D)) \to 0, \qquad (1)$$

где через $\widetilde{D}$ обозначена неособая модель кривой D, через $\mathfrak{c}$ — дивизор на $\widetilde{D}$, зависящий от особенностей кривой D, через $D|_{\widetilde{D}}$ — расслоенное пространство прямых над кривой $\widetilde{D}$, индуцированное из пучка прямых, соответствующего дивизору D, с помощью естественного отображения $\widetilde{D} \to F$, а через M — некоторый пучок, сосредоточенный в прообразах особых точек кривой D. Как известно, канонический класс $K(\widetilde{D})$ задается формулой $K(\widetilde{D}) \sim K(F)|_{\widetilde{D}} + D|_{\widetilde{D}} - \mathfrak{c}$, а поскольку $K(F) \sim 0$, то $K(\widetilde{D}) \sim D|_{\widetilde{D}} - \mathfrak{c}$. Вычислим размерность группы $H^1(D, \Omega_D(D|_D))$. Рассмотрим для этого точную последовательность групп когомологий, соответствующую последовательности пучков

$$0 \to \Omega(0) \to \Omega(D) \to \Omega_D(D|_D) \to 0; \qquad (2)$$
$$H^1(F, \Omega(D)) \to H^1(D, \Omega_D(D|_D)) \to H^2(F, \Omega(0)) \to H^2(F, \Omega(D)).$$

Согласно лемме 1 и теореме двойственности, группы на концах этой точной последовательности тривиальны, а $\dim H^2(F, \Omega(0)) = \dim H^0(F, \Omega(K)) = 1$. Итак, $\dim H^1(D, \Omega_D(D|_D)) = 1$. Теперь точная последовательность (1) приобретает вид:

$$0 \to H^0(\widetilde{D}, \Omega(D|_{\widetilde{D}} - \mathfrak{c})) \xrightarrow{i} H^0(D, \Omega_D(D|_D)) \xrightarrow{j} H^0(M) \to 0.$$

Из мономорфности отображения i следует, что сечения из $H^0(D, \Omega_D(D|_D))$ не имеют общих нулей вне точек дивизора $\mathfrak{c}$, а из эпиморфности отображения j, что они не имеют общих нулей и в точках дивизора $\mathfrak{c}$.

Из точной последовательности групп когомологий

$$H^0(F, \Omega(D)) \xrightarrow{r} H^0(D, \Omega_D(D|_D)) \to H^1(F, \Omega(0)) \approx 0,$$

соответствующей точной последовательности пучков (2), заключаем, что отображение ограничения r эпиморфно, а потому сечения из группы $H^0(F, \Omega(D))$ не имеют общих нулей на D. Итак, система $|D|$ не имеет базисных точек. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если общая кривая неприводимой линейной системы $|D|$, $(D^2) > 0$, не гиперэллиптична, то эта система дает бирациональное отображение поверхности F в проективное пространство; если эта кривая гиперэллиптична, но имеет род, больший двух, то такое отображение дает система $|2D|$.*

Доказательство. Согласно лемме 2, общая кривая системы $|D|$ неособа. В зависимости от рода и гиперэллиптичности этой кривой, она может быть вложена в проективное пространство системой $|K(D)| = |D|_D|$ или $|2K(D)| = |2D|_D|$. Пусть $|sK(D)|$ дает бирациональное вложение кривой D в проективное пространство. Докажем, что тогда система $|sD|$ дает бирациональное отображение поверхности F. Действительно, из точной последовательности

$$H^0(F, \Omega(sD)) \xrightarrow{r} H^0(D, \Omega_D(sD/D)) \to H^1(F, \Omega((s-1)D))$$

(соответствующей точной последовательности пучков

$$0 \to \Omega((s-1)D) \to \Omega(sD) \to \Omega_D(sD|_D)) \to 0)$$

заключаем (следствие леммы 1 и регулярность F), что отображение r эпиморфно. Поэтому ограничение $|sD|_D|$ системы $|sD|$ на кривой D совпадает с $|sK(D)|$. С другой стороны, если x_0 — любая точка некоторой кривой $D \in |D|$, и x_1 — точка поверхности F, склеивающаяся с x_0 при отображении, соответствующем системе $|sD|$, то точка x_1 также лежит на кривой D. Поэтому отображение $|sD|$ взаимно однозначно почти во всех точках почти всех кривых системы $|D|$, т. е. это отображение бирационально. Лемма доказана.

Обозначим через π минимально возможное значение арифметического рода неприводимых кривых D на поверхности F, удовлетворяющих условию $(D^2) > 0$. Мы имеем

$$\pi = \frac{(D^2)}{2} + 1.$$

Кроме того, из теоремы Римана — Роха и следствия леммы 1 заключаем, что $\dim |D| = \pi$.

Теорема 2. *Если $\pi = 2$, неприводимая система $|D|$ отображает поверхность F на проективную плоскость P^2 с неоднородными координатами x, y. Так как $(D^2) = 2$, поле функций $k(F)$ на поверхности F является расширением второй степени поля рациональных функций $k(x, y)$ и уравнение поверхности F имеет вид $z^2 = F^n(x, y)$. Так как всякий дивизор $\{ax + by + c = 0\}$ принадлежит системе $|D|$, он имеет род два, а потому $n = 6$.*

Если $\pi > 2$, а общая кривая системы $|D|$ не гиперэллиптична, эта система отображает поверхность F в пространство P^π, причем степень образа равна $(D^2) = 2\pi - 2$, а отображение бирационально.

Если $\pi > 2$, а общая кривая системы $|D|$ гиперэллиптична, то система $|2D|$ бирационально отображает поверхность F в пространство $P^{4\pi-3}$, а образ имеет степень $8\pi - 8$. Система $|D|$ в этом случае двулистно отображает нашу поверхность на рациональную поверхность степени $\pi - 1$ в P^{π}*.

Отметим, что, как следует из результатов Г. Н. Тюриной (гл. IX), описанные отображения определены для общей поверхности рассматриваемого типа однозначно, с точностью до проективной эквивалентности.

§ 4. Поверхности с $\varkappa = 0$, $p = 1$, $q = 2$

В этом параграфе будет доказано, что всякая келерова поверхность с $\varkappa = 0$, $p = 1$, $q = 2$ без исключительных кривых 1-го рода бирегулярно эквивалентна алгебраическому тору. Доказательство сводится к изучению канонического класса поверхности и ее отображения Альбанезе.

Теорема 3. *Пусть F — алгебраическая поверхность без исключительных кривых с $\varkappa = 0$, $p = 1$, $q = 2$. Тогда поверхность F является абелевым многообразием.*

Доказательство состоит в разборе трех a priori возможных случаев: 1) отображение Альбанезе α поверхности F является отображением на ее многообразие Альбанезе $A(F) = T^2$, а канонический класс $K(F)$ эквивалентен нулю; 2) $\alpha(F) = A(F)$, а $K \not\sim 0$; 3) $\alpha(F)$ — кривая в $A(F)$.

1) Рассмотрим первый случай. Обозначим через ω_1, ω_2 два линейно независимых голоморфных дифференциала первой степени на поверхности F. Так как $\alpha(F) = T^2$, то $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Так как $K \sim 0$, дифференциал второй степени $\omega_1 \wedge \omega_2$ вообще не имеет нулей, т. е. отображение α локально биголоморфно. Это означает, что поверхность F является неразветвленным накрытием над своим многообразием Альбанезе — тором T^2, т. е. сама является двумерным абелевым многообразием (а отображение α взаимно однозначно).

Два оставшихся случая будут приведены к противоречию.

2) Напомним, что, согласно леммам 2, § 1 и 1, § 2 $(K^2) = 0$ и K (будучи эффективным дивизором, так как $p = 1$) состоит из рациональных и эллиптических компонент.

Докажем, что канонический класс не содержит неприводимых компонент геометрического рода нуль. Действительно, пусть H такая компонента. Тогда $\omega_1|_H = \omega_2|_H = 0$, а потому кривая H стягивается при отображении α. Если обозначить через $\theta_1, \ldots, \theta_k$ неприводимые компоненты дивизора K геометрического рода 1, а через $s_1, \ldots, s_k$ — кратности этих компонент, то эффективный дивизор $K - s_1\theta_1 - \ldots - s_k\theta_k$ будет состоять из компонент геометрического рода нуль, стягиваться в некоторое число точек при отображении α и иметь нулевой индекс самопересечения. Это, однако, противоречит теореме Мамфорда [35] об отрицательной определенности матрицы индексов пересечений, возникающей при разрешении нормальной особой точки.

Пусть теперь θ — неособая эллиптическая компонента K. Так как кривая θ эллиптична, существует отличный от нуля голоморфный дифференциал первой степени ω на поверхности F, ограничение которого на кривой θ равно нулю. Это означает, что образ $\alpha(\theta)$, нетривиальный по той же теореме Мамфорда, целиком лежит в некотором смежном классе группы T^2 по подгруппе, являющейся эллиптической кривой T^1. Кроме того, дифференциал ω индуцирует голоморфное отображение φ: $F \to T^1$.

Рассмотрим на поверхности F алгебраическую систему $\{L\}$ слоев отображения φ. Очевидно, $(L^2) = (L\theta) = 0$. Если H — произвольная неприводимая компонента кривой системы $\{L\}$, содержащей θ, то $(H\theta) = 0$, так как

* См. примечание при корректуре в конце главы.

$(L\theta) = (\theta^2) = 0$. Таким образом, кривая θ является связной компонентой своего слоя при отображении φ.

Рассматривая теперь нормализацию кривой T^1 в поле $k(F)$, мы найдем неособую алгебраическую кривую Γ и такое регулярное отображение $F \to \Gamma$, что кривая θ является топологическим, а дивизор $s\theta$ — алгебраическим слоем над некоторой точкой из Γ (через $s - 1$ обозначен порядок нуля дифференциала ω на кривой θ). Так как род кривой Γ не превосходит единицы, дивизор $2s\theta$ на поверхности F должен меняться в линейной системе. Так как $2s\theta \leqslant 4K$, это противоречит предположению, что $\varkappa = 0$.

3) Если c — точка из $\alpha(F)$, обозначим через Γ_C (алгебраический) «слой» над этой точкой ($(\Gamma_C^2) = 0$). Пусть θ — рациональная кривая на поверхности F. Так как $\omega_1|_\theta = \omega_2|_\theta = 0$, то кривая θ лежит в некотором слое отображения α.

Если θ — компонента эффективного дивизора K, не лежащая ни в каком слое, то, следовательно, $(\theta^2) = 0$, $(\theta\Gamma_C) > 0$. Так как $((\theta+\Gamma_C)^2) > 0$, то для всех, кроме, возможно, конечного числа, неприводимых кривых D на поверхности F имеем: $(\theta + \Gamma_C)D > 0$. Если, в частности, D — компонента некоторого слоя, то $(\theta D) > 0$, и кривые θ, D имеют общую точку. Так как $p_g(\theta) = 1$, существует ненулевой голоморфный дифференциал ω первой степени на поверхности F, равный нулю на θ. Легко заметить, однако, что интегрирование этого дифференциала вдоль пути, целиком лежащего в слоях отображения α и на кривой θ, дает нуль. Так как, с другой стороны, таким путем можно соединить, согласно доказанному, почти всякую пару точек поверхности F, мы приходим к противоречию, откуда заключаем, что все компоненты эффективного дивизора K лежат в слоях отображения α и $(K\Gamma_C) = 0$.

По теореме Римана—Роха и цитированной в § 2 теореме Кодаиры мы можем заключить для общего слоя Γ_{C_0}, что

$$\dim H^0(F, \Omega(K + \Gamma_{C_0})) = \dim H'(F, \Omega(K + \Gamma_{C_0})) = m - 1 + 2 \geqslant 2,$$

где через m обозначено число связных компонент слоя Γ_{C_0}. Если обозначить через θ неподвижную, а через $|D_\nu|$ подвижную части системы $|\Gamma_{C_0} + K|$, то легко заметить, что $(\theta\Gamma_C) = (D_\nu\Gamma_C) = (D_\nu K) = 0$, а потому $(D_\nu^2) = 0$. Система $|D_\nu|$, следовательно, составлена из кривых неприводимого пучка L. Так как $(L\Gamma_C) = 0$, то кривые пучка L лежат в слоях, а потому $\dim H'(F, \Omega(K + L_0)) = 2$ (та же теорема Кодаиры). Так как $(LK) = 0$, получаем по теореме Римана—Роха

$$\dim H^0(F, \Omega(K + L_0)) = \dim H'(F, \Omega(K + L_0)) = 2,$$

где через L_0 обозначена неприводимая кривая пучка L. Обозначим через θ_1 и $|\bar{D}_\nu|$ неподвижную и подвижную части системы $|K + L_0|$; находим, что $(\theta_1\Gamma_C) = (\bar{D}_\nu\Gamma_C) = 0$, что $(\bar{D}_\nu^2) = 0$ и что все кривые системы $|\bar{D}_\nu|$ лежат в слоях. Отсюда следует, что $(\bar{D}_\nu L) = 0$, а, значит, и $(L\bar{L}) = 0$, где через $\bar{L}$ обозначен неприводимый пучок, из кривых которого составлена система $|\bar{D}_\nu|$. Равенство $(L\bar{L}) = 0$ влечет совпадение пучков L и $\bar{L}$. Имеем теперь: $L_0 + K = L_1 + \ldots + L_s + \theta_1$, где $L_1, \ldots, L_s$ — кривые пучка L.

Если L_0 есть компонента дивизора θ_1, то

$$K = L_1 + \ldots + L_s^* + (\theta_1 - L_0).$$

Так как род кривой Γ, параметризующей пучок L, не превосходит двух, отсюда следует, что дивизор $3K$ должен меняться в линейной системе, а это противоречит предположению $\varkappa = 0$.

Если L_0 не есть компонента дивизора θ_1, то один из дивизоров $L_1, \ldots, L_s$ совпадает с L_0, а потому $K - \theta_1 \geqslant 0$. Случай $K - \theta_1 > 0$ аналогичен уже рассмотренному, и мы можем считать поэтому, что $K = \theta_1$. Отсюда следует, однако, что $|\bar{D}_\nu| = |L_0|$ и L есть линейный пучок на поверхности F, все кривые которого лежат в слоях. Но в этом случае отображение α индуцирует нетривиальное отображение прямой P^1, параметризующей пучок L, в тор T^2, что также невозможно. Тем самым, теорема 3 полностью доказана.

Замечание. Отметим, что условие $\varkappa = 0$ нами использовано не полностью: именно, для верности этого доказательства достаточно было бы предполагать, что $P_4 = p = 1$.

Теорема 4. *Келерово многообразие F с $\varkappa = 0$, $q = 2$ без исключительных кривых 1-го рода бирегулярно эквивалентно комплексному тору.*

Доказательство. Обозначим через $t(F)$ степень трансцендентности поля $k(F)$ мероморфных функций на поверхности F. Если $t(F) = 2$, наша теорема сводится к теореме 3, так как поверхность F в этом случае алгебраична. Если $t(F) = 0$, наша теорема доказана Кодаирой [25, теорема 5.3].

Рассмотрим случай, когда $t(F) = 1$. Известно (см. [25], § 4), что в этом случае существует единственное регулярное отображение Φ поверхности F на неособую кривую Δ, индуцирующее изоморфизм полей функций $k(F)$ и $k(\Delta)$. Только конечное число слоев этого отображения приводимо, общий же слой является неособой эллиптической кривой; всякий неприводимый дивизор на поверхности F является компонентой одного из слоев.

Согласно лемме 1, § 1, и ее следствию, $p_g(F) \geqslant 0$, $(K^2) = 0$. Пусть K_0 — связная компонента канонического класса. Так как $(K_0^2) = 0$, из теоремы 2, § 2, гл. 7 следует, что $K_0 = r\Gamma_{C_0}$, где Γ_{C_0} — некоторый слой отображения Φ, а $r \geqslant 0$ — рациональное число. Если $r > 0$, найдется, очевидно, такое n, что система $|nK|$ имеет положительную размерность (достаточно выбрать n столь большим, чтобы положительную размерность имела система $|nrC_0|$ на кривой Δ). Так как $\varkappa = 0$, отсюда следует, что $K = 0$.

Изучим теперь отображение Альбанезе α поверхности F. Обратимся к случаям, рассмотренным при доказательстве теоремы 3.

Первый из них, если он имеет место, приводит к нужному результату. Второй невозможен, согласно доказанному.

Если имеет место третий случай, оба голоморфных дифференциала первой степени, существующие на поверхности F, обращаются в нуль на слоях отображения Φ (так как эти слои обязаны быть компонентами слоев отображения α). Но отсюда следует, что $\dim H^1(F, \Omega(\Gamma_C)) = 2$ [25, теорема 2.3] и, по теореме Римана—Роха, что $\dim|\Gamma_C| = 1$. Это, однако, противоречит теореме 2.5 той же работы Кодаиры, утверждающей, что $\dim H^1(F, \Omega(K + \Gamma_C)) = 0$, если кривая Γ_C неприводима и $\dim|\Gamma_C| \geqslant 1$. Тем самым теорема 4 доказана.

Примечание при корректуре. Поверхности такого типа существуют при $\pi = 3$ и изучены в моей работе «О куммеровых поверхностях и поверхностях Энриквеса специального типа» (Изв. АН СССР, 1965); для случая $\pi > 3$, кажется, ничего не известно.

Глава IX

О ПРОСТРАНСТВЕ МОДУЛЕЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ с $q = 0$ и $K = 0$

В настоящей главе исследуется локальная структура пространства модулей компактной комплексной келеровой поверхности, для которой $q = 0$ и $K = 0$. Рассмотрим несколько примеров таких поверхностей.

1. Алгебраические поверхности. В § 3 главы VIII настоящей книги доказано, что алгебраическая поверхность, у которой $q = 0$ и все кратные роды равны 1, бирационально эквивалентна поверхности такого типа. Поверхностью с $q = 0$ и $K = 0$ является, например, неособая поверхность 4-й степени в трехмерном проективном пространстве $P_3(C)$, пересечение трех квадрик в $P_5(C)$ и т. д. В книге Энриквеса [59] говорится, что для любого $\pi \geqslant 2$ найдется поверхность с $q = 0$ и $K = 0$, на которой существует кривая рода π и не существует кривых меньшего рода. (Это утверждение будет доказано в § 5 из других соображений.)

2. Поверхности без мероморфных функций. В статье Кодаиры [25] доказано, что если на поверхности V с $q = 0$ не существует мероморфных функций, кроме постоянных, и, кроме того, поверхность V не содержит исключительных кривых первого рода, то каноническое расслоение поверхности V тривиально ($K = 0$). В § 4 будет доказано, что такие поверхности действительно существуют и, более того, любая поверхность с $q = 0$, $K = 0$ деформируется на поверхность без мероморфных функций.

3. Поверхность Куммера [00]. На двумерном комплексном торе T^2 действует группа второго порядка, образующая g которой переводит точку $t \in T^2$ в точку $-t$. Эта группа имеет 16 неподвижных точек. Отождествим точки t и $g(t)$. Получим многообразие с 16 особыми точками. Эти особенности можно разрешить при помощи σ-процесса. Полученная неособая поверхность называется поверхностью Куммера $K(T^2)$. Известно клеточное разбиение и когомологии этой поверхности. В частности, $q(K(T^2)) = 0$. Можно показать, что для поверхности $K(T^2)$, как и для тора, каноническое расслоение тривиально.

В конце этой главы будет доказано, что все компактные келеровы поверхности с $q = 0$ и $K = 0$ диффеоморфны.

Глава начинается с доказательства общей теоремы о подмножестве алгебраических структур в семействе комплексных структур компактных келеровых многообразий. Доказывается, что точки базы семейства комплексных структур, соответствующие алгебраическим многообразиям, выделяются комплексно-аналитическими условиями.

В § 2 доказана теорема о том, что комплексная структура на многообразии комплексной размерности n с тривиальным каноническим расслоением в некотором смысле однозначно определяется классом когомологий n-мерной формы, голоморфной в этой структуре. Более точно, пространство модулей такого многообразия локально реализуется как подмногообразие в проективном пространстве $P_N(C)$, однородными координатами которого являются интегралы голоморфных форм k_t многообразия V_t по фиксированному базису n-мерных гомологий.

В случае поверхности с $q=0$ и $K=0$, пространство модулей локально реализуется в виде 20-мерной квадрики в $P_{21}(C)$, матрица которой совпадает с матрицей пересечений поверхности. В последних двух параграфах при помощи этой реализации доказывается несколько теорем об алгебраических поверхностях рассматриваемого типа. В заключение доказывается, что все компактные келеровы поверхности с $q=0$ и $K=0$ c-гомотопны, а следовательно, диффеоморфны между собой.

§ 1. Деформации комплексных структур алгебраических многообразий

Комплексно-аналитическим семейством комплексных структур называется тройка $(\mathcal{V}, M, \pi)$, где π — голоморфное отображение комплексного многообразия $\mathcal{V}$ на комплексное многообразие M, которое является гладким локально тривиальным расслоением [26]. В частности, из определения следует, что прообраз V_t при отображении π каждой точки $t \in M$ диффеоморфен одному и тому же многообразию X.

В настоящем параграфе исследуется множество $A \subset M$ таких точек $t \in M$, что $V_t = \pi^{-1}(t)$ — алгебраическое многообразие.

1. Поскольку семейство $(\mathcal{V}, M, \pi)$ является гладким локально-тривиальным расслоением, ограничение $\pi^{-1}(U)$ расслоения $\mathcal{V}$ над всякой стягиваемой окрестностью $U \subset M$ диффеоморфно прямому произведению $X \times U$ и для любого $t \in U$ гомоморфизмы групп когомологий

$$i_t^*\colon H^l(\pi^{-1}(U), Z) \to H^l(V_t, Z),$$

индуцированные вложением $i_t\colon V_t \to \pi^{-1}(U)$, являются изоморфизмами.

По теореме Кодаиры [24] компактное комплексное многообразие V тогда и только тогда является алгебраическим, когда на нем имеется метрика Ходжа, т. е. келерова метрика $ds^2 = 2\Sigma g_{\alpha\bar\beta}(dz^\alpha d\bar z^\beta)$, такая, что ассоциированная ей дифференциальная форма $\omega = i\Sigma g_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ принадлежит целочисленному классу когомологий. Пусть $t_0 \in A$, а $c_0 \in H^2(V_{t_0}, z)$ — класс когомологий, к которому принадлежит дифференциальная форма ω_0 типа (1,1), ассоциированная метрике Ходжа на многообразии $V_0 = \pi^{-1}(t_0)$. Выясним, для каких $t \in M$ гармоническая форма ω_t на многообразии V_t, принадлежащая классу

$$c_t = i_t^* i_0^{*-1} c_0,$$

ассоциирована некоторой метрике Ходжа. Очевидно, для этого необходимо, чтобы форма ω_t была формой типа (1,1), т. е. чтобы

$$\Pi_t^{0,2}\omega_t = 0,$$

где $\Pi^{p,q}\varphi$, как всегда, обозначает компоненту типа (p, q) формы φ.

Если t принадлежит достаточно малой окрестности точки t_0, то условие

$$\Pi_t^{0,2}\omega_t = 0$$

является также и достаточным. В самом деле, так как форма ω_t действительна, имеем

$$\Pi_t^{2,0}\omega_t = \overline{\Pi_t^{0,2}\omega_t} = 0,$$

и, следовательно, форма ω_t имеет тип (1,1). Докажем, что для всех $t \in M$, достаточно близких к точке t_0, форма ω_t ассоциирована некоторой метрикой Ходжа. В силу теоремы 15 статьи [27], для всех t из достаточно малой окрестности точки t_0 можно выбрать келерову метрику на многообразии V_t, гладко зависящую от t и совпадающую при $t = t_0$ с данной метрикой Ходжа ds_0^2 на многообразии V_0. На многообразии V_0 с этой метрикой форма ω_0, ассоциированная метрике ds_0^2, гармонична и принадлежит классу c_0.

Пусть W — дифференциальная форма на многообразии $\pi^{-1}(U)$, принадлежащая классу $i_0^{*-1}c_0$. Тогда, по определению формы ω_t, имеем

$$\omega_t = H_t i_t^* W,$$

где i_t^* — гомоморфизм дифференциальных форм, индуцированный вложением i_t. Поскольку на семействе келеровых многообразий операторы H_t гладко зависят от параметра t [27], формы ω_t непрерывны по t. Кроме того,

$$\omega_{t_0} = \omega_0$$

для выбранного нами семейства келеровых метрик. Поскольку форма ω_0 ассоциирована метрике ds_0^2, то в силу непрерывности семейства форм ω_t форма ω_t также ассоциирована положительно определенной метрике ds_t^2 для всех t, лежащих в некоторой окрестности точки t_0. Так как форма ω_t принадлежит целочисленному классу когомологий c_t, метрика ds_t^2 является метрикой Ходжа.

2. Пусть $k_1(t), \ldots, k_l(t)$ — базис пространства голоморфных двумерных форм на многообразии V_t. Тогда

$$\Pi_t^{0,2}\omega_t = \sum_{i=1}^{l} F_i(t)\,\overline{k_i(t)},$$

где $F_i(t)$ — функции на многообразии M. Докажем следующее предложение.

Предложение 1.1. *Функции $F_i(t)$ голоморфны по переменным t при надлежащем выборе семейства базисов $k_i(t)$.*

В дальнейшем для упрощения записи будем предполагать, что база M семейства $(\mathcal{V}, M, \pi)$ стягиваема. Кроме того, многообразия V_t предполагаются келеровыми. Докажем следующую лемму, которая будет использоваться при доказательстве предложения 1.1.

Лемма. *Пусть β_0 — гармоническая форма на многообразии V_0. Тогда на многообразии $\mathcal{V}$ существует замкнутая форма β, такая, что форма*

$$\beta_t = i_t^*\beta$$

является гармонической на многообразии V_t при любом $t \in M$ и, кроме того, $\beta_0 = i_0^*\beta$.

Доказательство леммы. Пусть форма β_0 принадлежит классу когомологий $b_0 \in H^*(V_0, C)$. Рассмотрим замкнутую форму $\tilde\beta$ на пространстве $\mathcal{V}$, принадлежащую классу

$$b = i_0^{*-1} b_0.$$

Очевидно, что

$$\beta_t = H_t i_t^* \tilde\beta,$$

где H_t — гармонический оператор на многообразии V_t. С другой стороны,

$$H_t i_t^* \tilde\beta = i_t^* \tilde\beta - d_t \eta(t),$$

где

$$\eta(t) = \delta_t G_t i_t^* \beta.$$

Как известно [27], на семействе келеровых многообразий операторы H_t и G_t зависят бесконечно-дифференцируемым образом от t. Следовательно, $\eta(t)$ — гладкое по t семейство форм на многообразиях V_t. Поскольку $\mathcal{V}$ диффеоморфно произведению $X \times M$, существует дифференциальная форма N на многообразии $\mathcal{V}$, такая, что $\eta(t) = i_t^* N$. Таким образом,

$$\beta_t = i_t^* \widetilde{\beta} - d_t i_t^* N = i_t^* (\widetilde{\beta} - dN)$$

и, следовательно, можно положить

$$\beta = \widetilde{\beta} - dN.$$

Доказательство леммы закончено.

3. Доказательство предложения 1.1. Пусть $k_1(0), \ldots, k_l(0)$ — некоторый базис пространства двумерных голоморфных форм на многообразии V_0. Построим для форм ω_0, $\overline{k_1(0)}, \ldots, \overline{k_l(0)}$ замкнутые формы ω, $K_1, \ldots, K_l$ на многообразии $\mathcal{V}$, удовлетворяющие условиям леммы. Тогда очевидно, что

$$\omega_t = i_t^* \omega.$$

Кроме того, для t, достаточно близких к t_0, формы

$$\overline{k_i(t)} = \Pi_t^{0,2} i_t^* K_i$$

являются базисом пространства двумерных антиголоморфных форм на многообразии V_t в силу их непрерывности по t. Следовательно,

$$\Pi_t^{0,2} \omega_t = \sum_{i=1}^{l} F_i(t) \overline{k_i(t)}.$$

Докажем, что функции $F_i(t)$ голоморфны по t.

Рассмотрим форму

$$\sum_q \frac{\partial F_q(t)}{\partial \bar{t}_k} \bar{k}_q(t)$$

на многообразии V_t. Очевидно, что это антиголоморфная форма, которая равна нулю тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial F_q(t)}{\partial \bar{t}_k} = 0$$

для любого q и любого k. Докажем, что эта форма d_t'' — гомологична нулю на многообразии V_t при любом t и любом k. Отсюда будет следовать, что все функции $F_q(t)$ голоморфны.

Рассмотрим покрытие пространства $\mathcal{V}$ координатными окрестностями W_i с координатами $(z_1^i, \ldots, z_n^i; t)$, причем

$$z_1^i = f_{1ij}(z_1^j, \ldots, z_n^j, t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_n^i = f_{nij}(z_1^j, \ldots, z_n^j, t)$$
$$t_k^i = t_k^j.$$

Это можно сделать, если в качестве базы M взять достаточно малую окрестность точки t_0. В окрестности W_i в этих координатах формы $\Pi^{0,2}\omega$ и $\Pi^{0,2}K_q$ имеют вид

$$(\Pi^{0,2}\omega)_i = \sum_q F_q(t) \overline{k_q(t)} + \sum_k P_i^k \wedge d\bar{t}_k + \ldots$$
$$(\Pi^{0,2}K_q)_i = \bar{k}_q + \sum_k G_{iq}^k \wedge d\bar{t}_k + \ldots,$$

где P_i^k и $G_{i,q}^k$ — формы вида $\Sigma a_i(z, t)\, d\bar{z}_i$, определенные на окрестности W_i, но не на всем многообразии $\mathcal{V}$. В этом и всех последующих случаях многоточие заменяет слагаемые вида

$$A(z, t)\, d\bar{t}_i \wedge dt_j,$$

где $A(z, t)$ — функция или форма.

Будем обозначать до конца этого пункта символами d, d'' дифференциалы на многообразии $\mathcal{V}$, а через d_t, d_t'' — дифференциалы на многообразии V_t. Так как

$$d\omega = 0, \; dK_i = 0$$

для всех i, имеем, в частности,

$$d''\Pi^{0,2}\omega = 0, \quad d''\Pi^{0,2}K_i = 0.$$

Вычислим в явном виде эти дифференциалы. Поскольку формы $\bar{k}_q(t)$ гармонические и, следовательно, $d_t'' \bar{k}_q(t) = 0$, имеем

$$(d''\Pi^{0,2}K_q)_i = \sum_k \left(\frac{\partial \bar{k}_q}{\partial \bar{t}_k} + d_t'' G_{i,q}^k\right) \wedge d\bar{t}_k + \ldots$$

и аналогично

$$(d''\Pi^{0,2}\omega)_i = \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k}\left(\sum_q F_q(t)\, \bar{k}_q(t)\right) + d_t'' P_i^k\right] \wedge d\bar{t}_k + \ldots$$

Отсюда получаем систему равенств

$$\left(\frac{\partial \bar{k}_q}{\partial \bar{t}_k}\right)_i = -d_t'' G_{iq}^k,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k}\right)\left(\sum_q F_q(t) \overline{k_q(t)}\right)_i = -d_t'' P_i^k.$$

После дифференцирования в левой части последнего равенства получим

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k}\left(\sum_q F_q(t)\, \bar{k}_q(t)\right) = \sum_q \frac{\partial F_q(t)}{\partial \bar{t}_k} \cdot \overline{k_q(t)} + \sum_q F_q(t) \frac{\partial \bar{k}_q(t)}{\partial \bar{t}_k},$$

и, следовательно,

$$\left(\sum_q \frac{\partial F_q(t)}{\partial \bar{t}_k} \bar{k}_q(t)\right)_i = -d_k''\left(P_i^k - \sum_q F_q(t)\, G_{i,q}^k\right).$$

Осталось доказать, что при любом t формы

$$Q_i^k = P_i^k - \sum_q F_q(t)\, G_{i,q}^k$$

являются ограничением на окрестности $W^i \cap V_t$ некоторой формы на всем многообразии V_t. Рассмотрим для этого форму

$$\Pi^{0,2} (\omega - \sum F_q (t) K_q).$$

В окрестности W^i эта форма записывается следующим образом:

$$\Pi^{0,2} (W - \sum F_q (t) K_q)_i = \sum Q_i^k \wedge d\bar{t}_k + \ldots .$$

Пусть

$$Q_i^k = \sum \alpha_p^k d\bar{z}_p^i.$$

Тогда в пересечении $W_i \cap W_j$ имеем

$$\left(\Pi_{0,2} \left(\omega - \sum F_q (t) K_q\right)\right)_j = \sum \alpha_p^k \left(\sum \frac{\partial \bar{z}_p^i}{\partial \bar{z}_l^j} d\bar{z}_l^j + \sum \frac{\partial \bar{z}_p^i}{\partial \bar{t}_l} d\bar{t}_l\right) \wedge d\bar{t}_k + \ldots$$

и, следовательно,

$$Q_j^k = \sum \alpha_p^k \sum \frac{\partial \bar{z}_p^i}{\partial \bar{z}_l^j} d\bar{z}_l^j = Q_i^k$$

в пересечении $W_i \cap W_j \cap V_t$. Таким образом, предложение 1.1 доказано.

4. Пусть $c \in H^2 (\mathcal{V}, Z)$. Рассмотрим множество B_c таких точек $t \in M$, что гармоническая форма ω_t на многообразии V_t, соответствующая классу $i_t^* c$, имеет тип (1,1). Поскольку многообразия V_t предполагаются келеровыми, а на келеровых многообразиях операторы H_t переводят формы типа (1,1) в формы того же типа, множество B_c определяется независимо от выбора семейства келеровых метрик на $(\mathcal{V}, M, \pi)$. Пусть

$$\Pi^{0,2}\omega_t = \sum F_q (t) \overline{k_q (t)},$$

причем базис антиголоморфных форм $\overline{k_q (t)}$ выбран так же, как и в п. 3. Вследствие предложения 1, множество B_c является комплексным подмногообразием базы M, которое задается системой голоморфных уравнений

$$F_i (t) = 0.$$

Рассмотрим множество

$$B = \cup B_c, c \in H^2 (X, Z).$$

Это множество является объединением счетного множества комплексных многообразий. Легко видеть, что $A \subset B$. Действительно, если $t \in A$, то на многообразии V_t существует форма ω_t, ассоциированная метрике Ходжа, которая является гармонической относительно этой метрики, имеет тип (1,1) и принадлежит целочисленному классу когомологий c_t. Следовательно, точка t принадлежит множеству B_c, где $c = i_t^{*-1} c_t$. Обратно, как было доказано в п. 1, если V_t — алгебраическое многообразие, то для некоторой окрестности U точки t подмногообразие B_c принадлежит множеству A. Объединим все, что мы узнали в этой главе о структуре множества A, в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $(\mathcal{V}, M, \pi)$ — комплексно-аналитическое семейство комплексных структур, $V_{t_0} = \pi^{-1} (t_0)$ — алгебраическое многообразие и $h^{2,0}$ — размерность пространства двумерных голоморфных форм на V_{t_0}. Тогда в некоторой окрестности U точки t_0 существует аналитическое подмногообразие $B_c \subset U$ коразмерности не больше $h^{2,0}$, такое, что для всех*

$t \in B_c$ многообразие V_t алгебраическое (т. е. $B_c \subset A$). Кроме того, множество $A \subset M$ всех точек $t \in M$, таких, что V_t — алгебраическое многообразие, содержится в объединении не более чем счетного множества таких подмногообразий.

Пример 1. Рассмотрим полное, эффективно параметризованное семейство $(\mathcal{V}, M, \pi)$ (определение см. § 2, п. 2) комплексных торов T^n, причем база M есть множество комплексных матриц n-го порядка с невырожденной мнимой частью, а прообразом матрицы $Z \in M$ при отображении π является комплексный тор с матрицей периодов (E, Z). Для n-мерного тора размерность пространства двумерных голоморфных форм равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, по теореме 1, для того, чтобы n-мерный тор был абелевым многообразием, на его периоды нужно наложить $\frac{n(n-1)}{2}$ комплексных условий. Это же утверждение следует из теоремы Римана — Фробениуса о соотношении между периодами абелевых многообразий [00].

Пример 2. Пусть V — поверхность Куммера [00]. Как будет показано в § 4, для этой поверхности число модулей существует и равно 20. Пусть M — база полного эффективно параметризованного семейства деформаций комплексной структуры на поверхности V. В обзоре Грауерта о числе модулей, сделанном на международном коллоквиуме по теории функций в Бомбее (1960 г.), формулировалась проблема: какие из точек $t \in M$ соответствуют алгебраическим многообразиям? Высказывалось предположение, что эти точки образуют аналитическую поверхность размерности 19. Нетрудно показать, что для поверхности Куммера $h^{2,0} = 1$. Из теоремы 1 следует, что либо множество A совпадает с M, либо оно является объединением не более чем счетного множества комплексно-аналитических подмногообразий размерности 19. В § 4 будет показано, что A является объединением счетного множества 19-мерных подмногообразий и, более того, множество A всюду плотно в базе M.

В двух приведенных примерах условия $\{F_i = 0\}$ оказывались независимыми, если $(\mathcal{V}, M, \pi)$ — полное семейство. Однако это не всегда так. Например, если V — алгебраическая поверхность, для которой $K^2 > 0$, то любая деформация поверхности V также будет являться алгебраической поверхностью, однако для поверхности такого типа имеем

$$h^{2,0} = p > 0.$$

§ 2. Деформации комплексных структур и интегралы голоморфной формы

1. Пусть $(\mathcal{V}, M, \pi)$ — семейство комплексных структур, причем база M этого семейства стягиваема. Как уже было замечено в § 1, многообразие $\mathcal{V}$ в этом случае диффеоморфно прямому произведению $V_0 \times M$, где $V_0 = \pi^{-1} (t_0)$, t_0 — фиксированная точка из M. Следовательно, для любого $t \in M$ существует канонический диффеоморфизм

$$b_t : V_t \to V_0,$$

который можно задать следующим образом:

$$b_t = p \cdot D \cdot i_t,$$

где D — некоторый диффеоморфизм

$$D: \mathcal{V} \to V_0 \times M,$$

а отображение p — проекция прямого произведения $V_0 \times M$ на многообразие V_0.

Пусть V_0 — компактное келерово многообразие размерности n, такое, что его каноническое расслоение тривиально. Это значит, что на многообразии V_0 существует единственная с точностью до пропорциональности n-мерная голоморфная форма k_0, нигде не обращающаяся в нуль. В локальной системе $(z_1, \ldots, z_n)$ на многообразии V_0 форма k_0 запишется в виде

$$k_0 = f_z dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

Рассмотрим гладкое семейство форм

$$k_t = H_t \Pi_t^{n,0} b_t^* k_0$$

на многообразии V_t. Очевидно, что k_t — n-мерная голоморфная форма на многообразии V_t. Форма

$$k_{t_0} = k_0$$

нигде не обращается в нуль. В силу непрерывности по t семейства форм k_t^*, для достаточно малой окрестности U точки t_0 форма k_t при $t \in U$ тоже нигде не обращается в нуль. Отсюда следует, что каноническое расслоение многообразия V_t тривиально, а также, что k_t единственная с точностью до пропорциональности n-мерная голоморфная форма на многообразии V_t.

Пусть b — n-мерное число Бетти многообразия V_0, а $c_1, \ldots, c_b$ — базис свободной части группы гомологий $H_2(V_0, Z)$. Рассмотрим интегралы формы

$$b_t^{*-1} k_t$$

по циклам c_t. Числа

$$\alpha_i(t) = \int_{c_i} b_t^{*-1} k_t \ (i = 1, \ldots, b)$$

можно рассматривать, как проективные координаты некоторой точки в проективном пространстве P_{b-1}. Таким образом, получаем гладкое отображение $F\colon U \to P_{b-1}$, где U — некоторая окрестность точки t_0 в базе M. Это отображение можно описать еще следующим способом. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_b$ — двойственный к базису $c_1, \ldots, c_b$ базис пространства n-мерных гармонических форм на многообразии V_0. Так как форма k_t гармонична на многообразии V_t, а следовательно, замкнута, имеем разложение

$$b_t^{*-1} k_t = \sum_{i=1}^{b} \alpha_i \omega_i + d\eta_t. \tag{2.1}$$

Числа α_i совпадают с однородными координатами образа точки t при отображении F. Подставляя разложение (2.1) в равенство

$$\int_{V_t} k_t \wedge k_t = 0,$$

получим

$$\sum_{i,j} \int_V (\omega_i \wedge \omega_j)\, \alpha_i \alpha_j = 0.$$

Следовательно, образ $F(U)$ лежит на гиперповерхности K в проективном пространстве P_{b-1}, которое задается уравнением

$$zHz' = 0,$$

где $z = (z_1, \ldots, z_b)$ — однородные координаты пространства P_{b-1}, а H — матрица пересечений многообразия V_0.

Теорема 2. *Пусть комплексно-аналитическое семейство комплексных структур $(\mathcal{V}, M, \pi)$ эффективно параметризовано и пусть $V_0 = \pi^{-1}(t_0)$— n-мерное келерово многообразие, каноническое расслоение которого тривиально. Тогда отображение F некоторой окрестности $U \subset M$ точки t_0 в проективное пространство P_{b-1} голоморфно и локально является вложением.*

Эта теорема означает, в частности, что если отображение F переводит базу некоторого комплексно-аналитического семейства в точку, то все многообразия V_t этого семейства между собой бирегулярно эквивалентны. Доказательство этой теоремы изложено в п. 4.

2. Пусть $(z_1, \ldots, z_n)_i$ — система локальных комплексно-аналитических координат на многообразии V. Пусть на этом же гладком многообразии задана некоторая почти-комплексная структура. Это означает, что в каждом пространстве дифференцирований

$$T_x = \mathrm{Hom}(E_x, C),$$

где E_x — касательное пространство в точке x, выбрано n-мерное подпространство L так, чтобы

$$T_x = L \oplus \bar{L}.$$

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — базис пространства L. Так как $dz_1, \ldots, dz_n, d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n$ — базис пространства T_x, имеем разложение

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} dz_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} d\bar{z}_j.$$

Пусть новая почти-комплексная структура такова, что определитель матрицы $A = (a_{ij})$ не обращается в нуль ни в одной точке многообразия V (условие (*)). Тогда такая структура однозначно определяется матрицей

$$(\omega_{ij}) = A^{-1} \cdot (b_{ij}),$$

заданной в каждой точке многообразия V. Легко проверить, что эта матрица определяет дифференциальную форму

$$\omega = \sum \left(\omega_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i}\right) d\bar{z}_j$$

с коэффициентами в пучке Θ ростков комплексно-аналитических векторных полей на многообразии V. Известно [41], что условие интегрируемости данной почти-комплексной структуры записывается уравнением

$$d''\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0. \tag{2.2}$$

Если данная почти-комплексная структура интегрируема и соответствует некоторой комплексной структуре $\tilde{V}$ с локальными координатами $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, то дифференциалы $d\zeta_1, \ldots, d\zeta_n$ являются базисом пространства L, причем

$$d\zeta_i = \sum \frac{\partial \zeta_i}{\partial z_j} dz_j + \sum \frac{\partial \zeta_i}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Следовательно, форма $\omega = \omega_{\tilde{V}}$ в данном случае задается матрицей

$$\omega_{ij} = \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial z_j}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \bar{z}_j}\right).$$

Заметим очевидный факт: когда структура $\widetilde{V}$ совпадает с исходной структурой V, то $\omega_{\widetilde{V}} = 0$.

Пусть $(\mathscr{V}, M, \pi)$ — семейство комплексных структур на гладком многообразии X и пусть $V_0 = V$. Тогда если $t \in U$, где U — некоторая окрестность точки $t_0 \in M$, то отображение b^{*-1} переводит систему локальных комплексно-аналитических координат на многообразии V_t в некоторую систему локальных комплексных координат на многообразии V_0, которая, если окрестность U достаточно мала, удовлетворяет условию (*). Следовательно, имеем бесконечно-дифференцируемое семейство $\omega(t)$ форм типа (0, 1) на многообразии V_0, каждая из которых удовлетворяет уравнению (2.2) и $\omega(t_0) = 0$. Пусть T — касательное пространство базы M в точке t_0. Обозначим через $\rho'(L)$ частную производную $\left.\frac{\partial\omega(t)}{\partial L}\right|_{t=0}$ формы $\omega(t)$ по направлению $L \in T$. Из равенства (2.2) и из того, что $\omega(t_0) = 0$ сразу следует, что $d''\rho'(L) = 0$.

Пусть $\rho(L)$ — класс когомологий цикла $\rho'(L)$. Отображение $\rho: T \to H^1(V_0, \Theta)$ называется инфинитезимальной деформацией в точке t_0 семейства комплексных структур. Семейство $(\mathscr{V}, M, \pi)$ называется эффективно параметризованным, если ρ — мономорфизм [26].

3. Пусть Θ и Ω^1 — пучки ростков соответственно голоморфных векторных полей и одномерных голоморфных дифференциальных форм на многообразии V размерности n. Эти пучки двойственны друг другу по определению пучка Ω^1. Предположим теперь, что на многообразии V существует единственная с точностью до пропорциональности n-мерная голоморфная форма k. При помощи этой формы определяется гомоморфизм σ пучка Ω^{n-1} в пучок $\mathrm{Hom}(\Omega^1, \Omega^0)$ по формуле

$$(\sigma\omega_1)(\omega_2) = \frac{\omega_1 \wedge \omega_2}{k},$$

где ω_1 и ω_2 — сечения пучков Ω^{n-1} и Ω' соответственно над некоторой окрестностью, а в правой части формулы стоит функция, голоморфная в этой же окрестности. Легко видеть, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Таким образом, на многообразии V, каноническое расслоение которого тривиально, пучки Θ и Ω^{n-1} двойственны одному и тому же пучку, а следовательно, изоморфны. Легко проверить, что изоморфизм φ между пучками Θ и Ω^1 задается формулой

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} A_i dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \ldots \wedge dz_n\right) = \frac{1}{f_z}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} A_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

где $f_z dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ — запись формы k в локальных координатах $(z_1, \ldots, z_n)$. Действительно, пусть

$$\gamma = \Sigma A_i dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \ldots \wedge dz_n$$

— голоморфная дифференциальная форма, заданная в некоторой окрестности с системой координат $(z_1, \ldots, z_n)$. Тогда

$$(\sigma\gamma)(\alpha_1 dz_1 + \ldots + \alpha_n dz_n) = \frac{1}{f_z}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} A_i\alpha_i.$$

С другой стороны,

$$(\varphi\gamma)(\alpha_1 dz_1 + \ldots + \alpha_n dz_n) = \frac{1}{f_z}\sum(-1)^{i+n} A_i\alpha_i,$$

поскольку базисы $\frac{1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ и $dz_1, \ldots, dz_n$ двойственны.

Обозначим через $A^p(V, \Theta)$ и $A^p(V, \Omega^{n-1})$ пространства дифференциальных форм на многообразии V степени p с коэффициентами в пучках Θ и Ω^1. Изоморфизм φ между этими пучками индуцирует изоморфизм

$$\Phi: \quad A^p(V, \Omega^{n-1}) \to A^p(V, \Theta),$$

задаваемый формулой

$$\Phi\left(\sum (A_1^{i_1 \ldots i_p} dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n + \ldots + A_n^{i_1 \ldots i_p} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{n-1}) \times \right.$$
$$\left. \times\, d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots d\bar{z}_{i_p}\right) = \frac{1}{f_z}\sum\Big((-1)^{1+n} A_1^{i_1 \ldots i_p}\frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+n} A_n^{i_1 \ldots i_p}\frac{\partial}{\partial z_n}\Big) d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}.$$

Так как выражение $1/f_z$ голоморфно по $(z_1, \ldots, z_n)$, изоморфизм Φ перестановочен с дифференциалом d'' (с точностью до знака) и, если формы зависят от параметра t, с дифференцированием по параметру.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть на комплексном многообразии V_0 с локальными координатами $(z_1, \ldots, z_n)$ задана другая комплексная структура $\widetilde{V}$ с локальными комплексными координатами $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, удовлетворяющая условию (*) из п. 2. Рассмотрим следующую дифференциальную форму на многообразии V_0, имеющую тип $(n, 0)$ в комплексной структуре $\widetilde{V}$:

$$\widetilde{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\zeta_1}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial\zeta_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\zeta_n}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial\zeta_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}^{-1} f_z d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n,$$

где

$$k_0 = f_z dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

— голоморфная n-мерная форма в структуре V_0. Обозначим через $D_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_l}$ якобиан

$$\frac{D(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{D(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k} \bar{z}_{j_1}, \ldots, \bar{z}_{j_l})}$$

и положим

$$D = D_{i_1 \ldots i_n} = \frac{D(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{D(z_1, \ldots, z_n)}.$$

Тогда форма

$$\widetilde{k} = D^{-1} f_z d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

в системе координат $(z_1, \ldots, z_n)$ запишется следующим образом:

$$\widetilde{k} = k_0 + f_z D^{-1}\sum_{(i_1 \ldots i_k) \neq \varnothing} D^{-1} D_{i_1 \ldots i_k;\, j_1 \ldots j_l}\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_l}, \quad (2.3)$$

так как структура $\widetilde{V}$ удовлетворяет условию (*) из п. 2, можно построить форму $\omega_{\widetilde{V}}$, соответствующую структуре $\widetilde{V}$. Она имеет следующий вид:

$$\omega_{\widetilde{V}}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial\zeta_1}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial\zeta_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\zeta_n}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial\zeta_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial\zeta_1}{\partial\bar{z}_1} & \ldots & \frac{\partial\zeta_1}{\partial\bar{z}_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\zeta_n}{\partial\bar{z}_1} & \ldots & \frac{\partial\zeta_n}{\partial\bar{z}_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_n \end{pmatrix}$$

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Имеет место равенство*

$$\omega_{\widetilde{V}} = \Phi\Pi^{n-1,1}\widetilde{k}.$$

Доказательство проводится путем непосредственного вычисления левой и правой частей равенства. По определению формы $\widetilde{k}$ имеем

$$\Pi^{n-1,1}\widetilde{k} = f_z \sum_{i_1 < i, < \ldots < i_{n-1};\, j} D^{-1} D_{i_1 \ldots i_{n-1};\, j}\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_{n-1}} \wedge d\bar{z}_j$$

и, следовательно,

$$\Phi\Pi^{n-1,1}\widetilde{k} = \sum_j \Big(\sum_l (-1)^{n+l} D^{-1} D_{1,\ldots,\hat{l},\ldots,n;\, j} \frac{\partial}{\partial z_l}\Big) d\bar{z}_j.$$

Теперь вычислим форму $\omega_{\widetilde{V}}$. Обозначим через M_{ij} дополнительный к элементу $\frac{\partial \zeta_i}{\partial z_j}$ минор матрицы

$$\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial z_j}\right).$$

Тогда форма $\omega_{\widetilde{V}}$ имеет вид

$$\omega_{\widetilde{V}} = \sum_j \Big(\sum_l \Big(\sum_k (-1)^{k+l} M_{kl} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \bar{z}_j} \cdot D^{-1}\Big) \frac{\partial}{\partial z_l}\Big) d\bar{z}_j.$$

Поскольку

$$\sum_k (-1)^{k+l} M_{kl} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \bar{z}_j} = (-1)^{n+l} D_{1,\ldots,\hat{l},\ldots,n;\, j},$$

для формы $\omega_{\widetilde{V}}$ получаем выражение

$$\omega_{\widetilde{V}} = \sum_j \Big(\sum_l (-1)^{n+l} D^{-1} D_{1,\ldots,\hat{l},\ldots,n;\, j} \frac{\partial}{\partial z_l}\Big) d\bar{z}_j,$$

откуда видно, что формы $\omega_{\widetilde{V}}$ и $\Phi\Pi^{n-1,1}\widetilde{k}$ совпадают. Предложение 2.1 доказано.

В комплексной структуре $\widetilde{V}$ форма $\widetilde{k}$ является d'_ζ-циклом, и, следовательно,

$$\widetilde{k} = H_\zeta \widetilde{k} + d'_\zeta \delta'_\zeta G_\zeta \widetilde{k}.$$

Гармоническая часть

$$H_\zeta k = k_{\widetilde{V}}$$

является голоморфной формой типа $(n, 0)$ в структуре $\widetilde{V}$. Обозначим форму $\delta'_\zeta G_\zeta \widetilde{k}$ через $C_{\widetilde{V}}$. Тогда

$$k_{\widetilde{V}} = \widetilde{k} - d'_\zeta C_{\widetilde{V}}.$$

Пусть теперь $(\mathscr{V}, M, \pi)$ — семейство комплексных структур, причем

$$V_0 = V_{t_0} = \pi^{-1}(t_0),\ t_0 \in M.$$

Тогда, как уже замечалось в п. 2, отображение b_t^{*-1} переводит систему локальных комплексно-аналитических координат на многообразии V_t в систему локальных комплексно-аналитических координат $(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))$ на многообразии V_0. Так как многообразие V_0 предполагается келеровым, многообразия V_t для t, достаточно близких к t_0, также келеровы [27], а в этом случае операторы H_t и G_t гладко зависят от t. Поэтому все формы, рассмотренные в этом пункте, зависят бесконечно-дифференцируемым образом от параметра t:

$$k_{V_t} = \widetilde{k}(t) - d'_t C(t),$$

причем, поскольку

$$k_{V_0} = \widetilde{k}_{V_0} = k_0,$$

имеем

$$C(t_0) = 0.$$

По определению формы k_{V_t}:

$$k_{V_t} = b_t^{*-1} k_t,$$

где k_t — n-мерная голоморфная форма на многообразии V_t. Заменим эту форму ее разложением (2.1) по базису $(\omega_1, \ldots, \omega_b)$ целочисленных гармонических форм на многообразии V_0. Тогда

$$\sum_{i=1}^{b} \alpha_i(t)\, \omega_i = -d\eta(t) - d'_t C(t) + \widetilde{k}(t). \tag{2.4}$$

Пусть L — касательный вектор к базе M в точке t_0. Обозначим через ∂_L оператор взятия частной производной по направлению L в точке t_0. Применим оператор ∂_L к обеим частям равенства (2.4). Получим

$$\sum_{i=1}^{b} (\partial_L \alpha_i(t))\, \omega_i = -d\partial_L \eta(t) - \partial_L d'_t C(t) + \partial_L \widetilde{k}(t). \tag{2.5}$$

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Имеет место равенство*:

$$\partial_L \widetilde{k}(t) = \Phi^{-1} \rho'(L),$$

где

$$\rho'(L) = \partial_L\, \omega(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя предложение 2.1 к равенству (2.3), может записать

$$\widetilde{k}(t) = k_0 + \Phi^{-1}\omega(t) + \sum_{l>1} f_z D^{-1} D_{i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_l}\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_l}.$$

Докажем, что

$$\partial_L (D^{-1} D_{i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_l}) = 0,$$

если $l > 1$. Действительно,

$$\partial_L (D^{-1} D_{i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_l}) = D^{-1} (\partial_L D_{i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_l}),$$

поскольку

$$D_{i_1\ldots i_k;\, j_1\ldots j_l}(t_0) = 0.$$

Но для того, чтобы вычислить $\partial_L D_{i_1\ldots i_k;\, j_1\ldots j_l}$, нужно взять сумму определителей $\Delta_m(t_0)$, где $\Delta_m(t)$ получается из $D_{i_1\ldots i_k;\, j_1\ldots j_l}$ применением оператора $\frac{\partial}{\partial L}$ к столбцу с номером m. Однако, так как $l > 1$, в каждом из определителей Δ_m останется столбец вида

$$\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial\bar z_j}\right),$$

который целиком обращается в нуль при $t = t_0$. Таким образом,

$$\Delta_m(t_0) = 0$$

для любого m и, следовательно,

$$\partial_L(D^{-1}D_{i_1\ldots i_k;\, j_1\ldots j_l}) = D^{-1}\sum_m \Delta_m(t_0)) = 0$$

при $l > 1$. В результате имеем

$$\partial_L\tilde{k}(t) = \partial_L\Phi^{-1}\omega(t) = \Phi^{-1}\partial_L\omega(t),$$

поскольку отображение Φ перестановочно с дифференцированием по параметру. Предложение 2.2 доказано.

Предложение 2.3. *Имеет место равенство*

$$\partial_L d_t' C(t) = d'\partial_L C(t).$$

Доказательство. Пусть форма $C(t)$ записывается в локальных координатах $(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))$ следующим образом:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, d\zeta_1\wedge\ldots\wedge\widehat{d\zeta_i}\wedge\ldots\wedge d\zeta_n.$$

Вычислим форму $\partial_L C(t)$. Имеем

$$\partial_L C(t) = \sum_{i=1}^{n}[\partial_L C_i(t)\, dz_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dz_i}\wedge\ldots\wedge dz_n +$$
$$+ C_i(t_0)\,\partial_L(d\zeta_1\wedge\ldots\wedge\widehat{d\zeta_i}\wedge\ldots\wedge d\zeta_n)].$$

Как уже было замечено выше,

$$C(t_0) = 0$$

и, следовательно,

$$C_i(t_0) = 0.$$

Для формы $\partial_L C(t)$ получаем выражение:

$$\partial_L C(t) = \sum_{i=1}^{n}(\partial_L C_i(t))\, dz_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dz_i}\wedge\ldots\wedge dz_n.$$

Отсюда

$$d'\,\partial_L C(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\partial_L C_i(t)}{\partial z_i}(-1)^{i+1}dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$$

или

$$d'\partial_L C(t) = \partial_L\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial C_i(t)}{\partial z_i}(-1)^{i+1}dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n\right].$$

Осталось вычислить форму $\partial_L d_t' C(t)$. Поскольку

$$d_t' C(t) = \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial C_i(t)}{\partial\zeta_i}\right)d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial C(t_0)}{\partial\zeta_i(t_0)} = \frac{\partial C(t_0)}{\partial z_i} = 0, \tag{2.6}$$

после применения ∂_L к форме $d_t' C(t)$ получим

$$\partial_L d_t' C(t) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\partial_L\left(\frac{\partial C_i(t)}{\partial\zeta_i}\right)dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n.$$

Далее получаем

$$\partial_L\frac{\partial C_i(t)}{\partial\zeta_i} = \partial_L\left(\sum\frac{\partial C_i(t)}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial\zeta_i} + \sum\frac{\partial C_i(t)}{\partial\bar z_j}\frac{\partial\bar z_j}{\partial\zeta_i}\right) = \partial_L\frac{\partial C_i(t)}{\partial z_i},$$

опять пользуясь равенством (2.6). В результате имеем

$$\partial_L d_t' C(t) = \left(\partial_L\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial C_i(t)}{\partial z_i}\right)dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$$

и, следовательно,

$$\partial_L d_t' C(t) = d'\partial_L C(t).$$

Предложение 2.3 доказано.

Используем эти два предложения в формуле (2.5). Получим

$$\sum_{i=1}^{b}(\partial_L\alpha_i(t))\,\omega_i = -d\beta - d'\partial_L C(t) + \Phi^{-1}\rho'(L), \tag{2.7}$$

где через β обозначена форма $\partial_C\eta_t$.

Предложение 2.4. *Для того чтобы отображение $\dot F$, касательное к отображению F из п. 1, переводило вектор L в нуль, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\partial_L\alpha_i(t) = \lambda\alpha_i(t_0)$$

для всех $i = 1, \ldots, b$, причем λ не зависит от i.

Доказательство. Пусть $\alpha_l(t_0) \neq 0$. Тогда для некоторой окрестности точки t_0 числа

$$\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_l(t)} \quad i = (1, 2, \ldots, \hat l, \ldots, b)$$

являются неоднородными координатами точки $F(t)$, а образом вектора L при отображении $\dot F$ будет служить вектор с координатами

$$\partial_L\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_l(t)} = \alpha_l^{-2}(t_0)\,[(\partial_L\alpha_i(t))\,\alpha_l(t_0) - \alpha_i(t_0)\,\partial_L\alpha_l(t)].$$

Отсюда видно, что для того, чтобы

$$\dot F(L) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\partial_L\alpha_i(t) = \lambda\alpha_i(t_0),$$

где

$$\lambda = \frac{\partial_L\alpha_l(t)}{\alpha_l(t_0)}.$$

Предложение 2.4 доказано.

Пусть

$$\dot{F}(L) = 0$$

для некоторого вектора L, касательного к базе M в точке t_0. Используя предложение 2.4, а также тот факт, что

$$\sum \alpha_i (t_0)\, \omega_i = k_0,$$

получим из формулы (2.7):

$$\Phi^{-1}\rho^1 (L) = d\beta + d'\partial_L C (t) - \lambda k_0.$$

Применим оператор гармонического проектирования $H = H_{t_0}$ к обеим частям последнего равенства. Поскольку

$$H (d'\partial_L C) = H (d\beta) = 0,$$

можем записать

$$H (\Phi^{-1}\rho' (L)) = -\lambda k_0.$$

Однако здесь левая часть равенства типа $(n-1, 1)$, а правая — типа $(n, 0)$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ и

$$H (\Phi^{-1}\rho' (L)) = 0. \tag{2.8}$$

Как было замечено в конце п. 2,

$$d''\rho' (L) = 0.$$

Поскольку отображение Φ перестановочно с дифференциалом d'', имеем

$$d''\Phi^{-1}\rho' (L) = 0$$

и, следовательно, в силу равенства (2.8)

$$\Phi^{-1} \rho' (L) = d''\gamma.$$

Отсюда получаем

$$\rho' (L) = \pm d''\Phi\gamma,$$

т. е.

$$\rho (L) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что ядро отображения $\dot{F}$ является подпространством ядра отображения ρ из п. 2. Если ρ — мономорфизм (т. е. если семейство $(\mathscr{V}, M, \pi)$ эффективно-параметризовано), то отображение $\dot{F}$ также является мономорфизмом в каждой точке и отображение F локально является вложением.

Докажем теперь, что отображение F голоморфно. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — комплексные координаты в окрестности точки t_0 базы M. Обозначим через $\bar{\partial}_k$ оператор взятия производной по $\bar{t}_k$ в точке t_0, т. е.

$$\bar{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial \bar{t}_k}\bigg|_{t=t_0}.$$

Известно, что для комплексно-аналитического семейства структур $(\mathscr{V}, M, \pi)$ семейство форм $\omega (t)$ голоморфно по переменным t. Следовательно,

$$\bar{\partial}_k \omega (t) = 0.$$

$2.0 \quad 1,1 \quad 0,2$

Учитывая это, из равенства (2.7) получим

$$\sum (\bar{\partial}_k \alpha_i (t))\, \omega_i = - d\beta - d'\bar{\partial}_k C (t).$$

Поскольку в левой части последнего выражения стоит гармоническая форма, имеем

$$\sum (\bar{\partial}_k \alpha_i (t))\, \omega_i = 0$$

и, следовательно,

$$\bar{\partial}_k \alpha_i (t) = 0$$

для любого i и любого k, т. е. однородные координаты $\alpha_i (t)$ голоморфно зависят от t. Доказательство теоремы 2 закончено.

§ 3. Топологические свойства поверхности с $q = 0$ и $K = 0$

1. Рассмотрим компактную келерову поверхность V, такую, что $c_1(V) = 0$ и $q = H^1 (V, \Omega^0) = 0$, где Ω^i — пучок ростков i-мерных голоморфных форм на поверхности V, а $c_1 (V)$ — первый характеристический класс Чженя этой поверхности. Можно вычислить группы когомологий и d''-гомологий поверхности такого типа.

По теореме двойственности Серра [47]

$$h^{1,0} = h^{1,2} = h^{2,1} = h^{0,1} = 0$$

и

$$\dim H^2 (V, \Omega^0) = \dim H^0 (V, \Omega^0 (K)),$$

где K — каноническое расслоение на V. Характеристический класс $c (K)$ канонического расслоения K равен $- c_1 (V)$ и в данном случае равен нулю. Поскольку $H^1 (V, \Omega^0) = 0$, из равенства $c_1 (V) = 0$ следует [00], что каноническое расслоение тривиально и, следовательно,

$$h^{2,0} = \dim H^0 (V, \Omega^0) = 1.$$

Размерность группы $H^1 (V, \Omega^1)$ вычисляется по формуле Нетера, справедливой также для произвольной компактной келеровой поверхности [25],

$$12 (h^{2,0} - h^{1,0} + 1) = E + c_1 (V)^2,$$

где E — эйлерова характеристика поверхности V, а $c_1 (V)^2$ — значение класса когомологий $c_1 (V) \cup c_1 (V)$ на фундаментальном цикле поверхности. Учитывая, что $E = 2 - 4q + 2h^{2,0} + h^{1,1}$, получаем $h^{1,1} = 20$.

Так как рассматриваемая нами поверхность келерова, имеем

$$H^1 (V, R) = H^3 (V, R) = 0, \ \dim H^2 (V, R) = 22, \ E = 24.$$

Пользуясь теоремой Ходжа об индексе [00], легко вычислить индекс $\tau (V)$ поверхности V:

$$\tau (V) = 2 (h^{2,0} + 1) - h^{1,1} = -16.$$

2. Докажем, что группы $H^i (V, Z)$ не имеют кручения. Для этого достаточно показать, в силу двойственности Пуанкаре, что группа $H_1 (V, Z)$ не имеет кручения. Докажем, что поверхность V не имеет конечнолистных накрытий. Пусть $\pi: \widetilde{V} \to V$ — n-листное накрытие поверхности V. Тогда $\widetilde{V}$ — компактная комплексная келерова поверхность, причем ее эйлерова характеристика $\widetilde{E}$ равна $nE = 24n$, а каноническое расслоение тривиально. Действительно, сечениями канонического расслоения являются голоморф-

ные двумерные формы. Так как каноническое расслоение поверхности V тривиально, на V существует единственная с точностью до пропорциональности двумерная голоморфная форма k, которая нигде не обращается в нуль. Ее образ $\pi^* k$ — двумерная голоморфная форма, на поверхности $\widetilde{V}$ нигде не обращающаяся в нуль. Вследствие этого каноническое расслоение поверхности $\widetilde{V}$ имеет нигде не обращающееся в нуль сечение и, следовательно, тривиально. Применяя формулу Нетера к поверхности $\widetilde{V}$, получаем

$$12\,(h^{2,0}(\widetilde{V}) - h^{1,0}(\widetilde{V}) + 1) = 12\,(2 - h^{1,0}(\widetilde{V})) = 24n.$$

Отсюда

$$2 - 2h = h^{1,0}(\widetilde{V}) \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$n \leqslant 1,$$

т. е. нетривиальных конечнолистных накрытий поверхности V не существует.

3. Вычислим матрицу пересечений поверхности V. Как следует из теорем 1 и 2 работы Милнора [37], целочисленная квадратичная форма $H\,(x, x)$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности своим рангом r и индексом τ, если

1) форма не является знакоопределенной (т. е. $\tau \neq \pm r$) и

2) принимает на целочисленных векторах только четные значения.

Поскольку для матрицы пересечений нашей поверхности $r = 22$ и $\tau = -16$, первое условие выполнено. Согласно лемме 3 той же работы Милнора, матрица пересечений данного четырехмерного односвязного многообразия удовлетворяет условию 2) тогда и только тогда, когда второй класс Штифеля — Уитни данного многообразия равен нулю. Поскольку в доказательстве леммы используется только формула Ву для классов Штифеля — Уитни, утверждение леммы справедливо также для многообразий M^4, у которых группа $H^1\,(M, Z_2)$ равна нулю.

Докажем это. Пусть $W_2\,(M) = 0$. По формуле Ву [13],

$$W\,(M) = \mathrm{Sq}\,(V),$$

где класс V однозначно определяется уравнением

$$\langle \alpha \smile V, \bar{\mu} \rangle = \langle \mathrm{Sq}\ \alpha,\ \bar{\mu} \rangle$$

для любого класса $\alpha \in H^*\,(M, Z_2)$. Здесь $\bar{\mu}$ — образующая группы $H_4\,(M, Z_2)$. Поскольку $W_2\,(M) = 0$, имеем

$$\mathrm{Sq}\,(V) = 1 + W_3\,(M) + W_4\,(M).$$

Найдем отсюда V. Так как $H^1\,(M, Z_2) = 0$, класс V имеет вид

$$V = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad \text{где } \alpha_i \in H^i\,(M, Z_2)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Sq}\,V = \alpha_0 + \alpha_2 + (\mathrm{Sq}^1\,\alpha_2 + \alpha_3) + (\mathrm{Sq}^2\,d_2 + \mathrm{Sq}^1\,\alpha_3 + \alpha_4).$$

Приравнивая однородные компоненты в формуле Ву, получаем, что $\alpha_2 = 0$. Следовательно, для любого $\alpha \in H^2\,(M, Z_2)$ имеем

$$\langle \alpha \smile V, \bar{\mu} \rangle = 0.$$

Но по формуле Ву

$$\langle \alpha \smile \alpha, \bar{\mu} \rangle = \langle \mathrm{Sq}\,\alpha,\ \ \bar{\mu} \rangle = \langle \alpha \smile V,\ \ \bar{\mu} \rangle = 0.$$

Достаточность доказана. Необходимость доказывается «обратным ходом».

Для поверхности V рассматриваемого типа

$$W_2\,(V) = [c_1\,(V)]_2 = 0,\ \dim H^1\,(V, Z_2) = \dim H^1\,(V, R) = 0.$$

Следовательно, для матрицы пересечений поверхности выполнено условие 2) и она в некотором целочисленном базисе представляет собой клеточно-диагональную матрицу, у которой имеется три клетки второго порядка с матрицей

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и две клетки восьмого порядка с матрицей $-V$, где V — положительно определенная унимодулярная матрица следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Этот вид матрицы пересечений будет существенно использован в § 5.

§ 4. 19 модулей

1. В этом параграфе изучается пространство модулей комплексно-аналитической поверхности V, описанной в § 3.

Пусть Θ — пучок ростков комплексно-аналитических векторных полей на поверхности V. По теореме двойственности

$$\dim H^q\,(V, \Theta) = \dim H^{n-q}\,(V, \Omega^1(K)).$$

Поскольку для нашей поверхности $K = 0$, имеем

$$\dim H^0\,(V, \Theta) = h^{1,2} = 0,$$
$$\dim H^1\,(V, \Theta) = h^{1,1} = 20,$$
$$\dim H^2\,(V, \Theta) = h^{1,0} = 0.$$

В силу основной теоремы работы [28] отсюда следует, что существует полное в каждой точке эффективно параметризованное семейство $(\mathscr{V}, M, \pi)$ комплексных структур, такое, что его база M является 20-мерным комплексным многообразием и $V_0 = V$, где $t_0 \in M$ (т. е. число модулей поверхности V существует и равно 20). Если U — достаточно малая окрестность точки t_0 в базе M этого семейства, то, согласно теореме 2, при помощи отображения F окрестность U можно отождествить с некоторой окрестностью $F\,(U)$ точки $F\,(t_0)$ на 20-мерной гиперповерхности K_{20} в проективном пространстве P_{21}. Действительно, как было доказано в § 2, отображение F

локально является вложением базы M в квадрику K_{20}, а размерности многообразий M и K_{20} совпадают.

Пусть C — кривая (одномерное комплексное подмногообразие) на поверхности V_t. Поскольку

$$\int_C k_t = 0,$$

то

$$\beta_1\alpha_1(t) + \ldots + \beta_{22}\alpha_{22}(t) = 0,$$

где целые числа $\beta_1, \ldots, \beta_{22}$ — коэффициенты разложения цикла C по базису гомологий $c_1, \ldots, c_{22}$, который был выбран в п. 1 § 2. Таким образом, для того, чтобы на поверхности V_t имелась хотя бы одна кривая, необходимо, чтобы точка $F(t)$ лежала на пересечении квадрики K_{20} и гиперплоскости $\Sigma\beta_i z_i=0$, где β_i—целые числа. Это пересечение имеет размерность 19. Поскольку на алгебраической поверхности всегда лежит по крайней мере одна кривая (гиперплоское сечение), отсюда следует, что не существует такого эффективно-параметризованного семейства деформаций структуры поверхности V, чтобы все поверхности V_t были алгебраическими и размерность базы этого семейства была бы равна 20. С другой стороны, если V — алгебраическая поверхность рассматриваемого типа, то для нее $h^{2,0} = 1$, и, следовательно, по теореме 1 существует эффективно-параметризованное семейство $(\mathcal{V}_c, M_c, \pi)$ алгебраических поверхностей с размерностью базы 19, и такое, что $V_{t_0} = V$. Это семейство определяется однозначно (с точностью до эквивалентности) классом гомологий C гиперплоского сечения многообразий V_t. Кроме того, это семейство является полным в том смысле, что любое другое семейство алгебраических многообразий с тем же самым классом гиперплоского сечения и с $V_0 = V$ можно в него вложить. Таким образом, следуя определению статьи Кодаиры и Спенсера [26, определение 12.4], можно сформулировать следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть V — алгебраическая поверхность, у которой $K^2 = 0$ и $q = 0$, вложенная в проективное пространство P_n, и пусть $C \in H_2(V, Z)$ — класс гомологий гиперплоского сечения. Тогда число модулей $m_c(V)$ поверхности V относительно пространства P_n равно* 19.

З а м е ч а н и е. Из всего, изложенного в этом пункте, следует, что если M_{20} — база полного эффективно-параметризованного семейства деформаций поверхности V, то почти все (т. е. все за исключением объединения счетного множества 19-мерных гиперповерхностей) точки многообразия M_{20} соответствуют таким поверхностям, на которых нет ни одного дивизора, а следовательно, нет ни одной непостоянной мероморфной функции.

2. Выше мы видели, что если на поверхности V_t имеется кривая $C \sim \Sigma\beta_i c_i$, то координаты $\alpha_i(t)$ точки $F(t)$ лежат в плоскости $\Sigma\beta_i z_i = 0$. Обратно, пусть V_t — алгебраическая поверхность и пусть координаты $\alpha_i(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\Sigma\beta_i\alpha_i(t) = 0, \tag{4.1}$$

где β — целые числа. Рассмотрим класс гомологий $C = \Sigma\beta_i c_i$. Условие (4.1) эквивалентно тому, что

$$\int_C k_t = 0.$$

Пусть

$$\omega = \alpha k_t + \omega^{1,1} + \bar{\alpha}\bar{k}_t$$

— гармоническая форма на поверхности V_t, двойственная классу C. Из условия (3.1) следует, что $\int_V k_t \wedge \omega = 0$. Но, как легко видеть,

$$\int_V k_t \wedge \omega = \bar{\alpha}\int_V k_t \wedge \bar{k}_t$$

и, следовательно, $\alpha = 0$ и форма ω имеет тип (1,1).

Как известно [00], на алгебраическом многообразии всякий целочисленный класс когомологий, к которому принадлежит гармоническая форма типа (1,1), двойствен некоторому дивизору. Так как в данном случае форма ω двойственна классу гомологий C, отсюда следует, что к классу C принадлежит некоторый дивизор. Кроме того, для данной поверхности группа $H^1(V_t, \Omega^0)$ равна нулю, и, следовательно, если два дивизора гомологичны, то они эквивалентны. Таким образом, группа классов дивизоров на алгебраической поверхности V_t изоморфна группе целочисленных 22-мерных векторов $(\beta_1, \ldots, \beta_{22})$, таких, что

$$\Sigma\beta_i\alpha_i(t) = 0,$$

где $\alpha_i(t)$ — проективные координаты точки $F(t)$.

Значит, для того, чтобы базовое число алгебраической поверхности V_t (в данном случае оно совпадает с рангом группы классов дивизоров) было равно ρ, необходимо и достаточно, чтобы точка $F(t) \in K_{20}$ лежала на пересечении ρ линейно-независимых гиперплоскостей с целыми коэффициентами. Это пересечение имеет размерность $20 - \rho$. Отсюда видно, что «почти все» (т. е. все за исключением объединения не более чем счетного множества подмногообразий меньшей размерности) точки базы M_c семейства $(\mathcal{V}_c, M_c, \pi)$ соответствуют таким алгебраическим поверхностям, на которых все кривые суть кратные гиперплоского сечения. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Базовое число поверхности V с $K^2 = 0$ и $q = 0$ может принимать все значения от* 1 *до* 20.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\mathcal{V}_c, M_c, \pi)$ — полное семейство алгебраических многообразий с классом гомологий гиперплоского сечения $C = \Sigma\beta_i c_i$. Пусть $\alpha = F(t_0)$, $t_0 \in M_c$. Как мы уже видели, точки $F(M_c)$ лежат на пересечении квадрики K_{20} с гиперплоскостью S, уравнение которой $\Sigma\beta_i z_i = 0$. Более того, вследствие теоремы 1, существует такая окрестность U точки α, что пересечение $F(M_c) \cap U$ совпадает с пересечением $U \cap S$. В любой окрестности точки α в проективном пространстве P_{21} можно выбрать точку $\tilde{\alpha}$, такую, что действительные и мнимые части ее координат рациональны, а сама она лежит в плоскости S. Легко видеть, что эти координаты удовлетворяют двадцати линейно-независимым линейным уравнениям с целыми коэффициентами. В качестве одного из них возьмем уравнение плоскости S. Рассмотрим прямую $L(\tilde{\alpha})$ в пространстве P_{21}, задаваемую этими двадцатью уравнениями. Воспользуемся следующей леммой.

Л е м м а. *Для любой окрестности $U \subset K_{20}$ точки $\alpha = F(t)$ существует такая окрестность $U' \subset P_{21}$ той же точки в пространстве P_{21}, что если $\tilde{\alpha} \in U'$, то хотя бы одна точка пересечения α' прямой $L(\tilde{\alpha})$ с квадрикой K_{20} принадлежит окрестности U.*

Доказательство этой леммы будет приведено ниже. Очевидно, что точка $\alpha' \in L(\tilde{\alpha}) \cap K_{20}$, существующая в силу леммы, лежит на пересечении квадрики K_{20} с плоскостью S, так как прямая $L(\tilde{\alpha})$ лежит в плоскости S. Поскольку все точки α, принадлежащие пересечению $U \cap S$, соответствуют некоторым алгебраическим поверхностям, то, в частности, точка α' соответствует алгебраической поверхности с базовым числом 20. Для того чтобы доказать существование алгебраических поверхностей с базовым числом ρ, достаточно из 20 уравнений, задающих прямую $L(\widetilde{\alpha})$, выбрать ρ линейно-независимых так, чтобы в их число входило уравнение плоскости S, и рассмотреть пересечение линейного многообразия, задаваемого этими ρ уравнениями с окрестностью U. Это пересечение не пусто, так как ему принадлежит точка α'. Следовательно, оно имеет размерность $20 - \rho$, и алгебраические поверхности, соответствующие «точкам общего положения» на этом пересечении, имеют базовое число ρ. Осталось доказать лемму.

Доказательство леммы. Пусть $\alpha(n)$ — последовательность точек с комплексно-рациональными координатами $\alpha_i(n) = p_i(n) + iq_i(n)$, сходящаяся к точке $\alpha = F(t_0)$ с координатами $\alpha_i = p_i + iq_i$. Можно считать, что $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_1(n) = 1$ для всех n. Поскольку точка α лежит на квадрике K_{20}, ее координаты удовлетворяют условию $\Sigma h_{ij}\alpha_i\alpha_j = 0$, где $(h_{ij}) = H$ — матрица пересечений поверхности V_0, или

$$\Sigma h_{ij}p_ip_j - \Sigma h_{ij}q_iq_j = 0, \quad \Sigma h_{ij}p_iq_j = 0.$$

Кроме того, так как

$$k_{t_0} \wedge \bar{k}_{t_0} \neq 0,$$

для чисел α_i выполнено неравенство

$$\Sigma h_{ij}\alpha_i\bar{\alpha}_j \neq 0$$

или

$$\Sigma h_{ij}p_ip_j + \Sigma h_{ij}q_iq_j = 2\Sigma h_{ij}q_iq_j \neq 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что вектор $q = (q_2, \ldots, q_{22})$ ненулевой. Легко проверить, что в качестве направляющего вектора прямой $\mathscr{L}(\alpha(n))$ можно взять вектор $q(n) = (q_2(n), \ldots, q_{22}(n))$. Этот вектор можно считать ненулевым, так как он стремится к ненулевому вектору q. Действительно, пусть точка $1, \alpha_2(n), \ldots, \alpha_{22}(n)$ удовлетворяет уравнению $\Sigma\beta_i\alpha_i(n) = 0$. Тогда точка

$$1, \alpha_2(n) + \lambda q_2(n), \ldots, \alpha_{22}(n) + \lambda q_{22}(n)$$

также удовлетворяет этому уравнению. Найдем точку пересечения прямой $\alpha(n) + \lambda q(n)$ с квадрикой $H(z, z) = \Sigma h_{ij}z_iz_j = 0$. Число λ получим из уравнения

$$H(\alpha(n) + \lambda q(n), \alpha(n) + \lambda q(n)) = 0.$$

После преобразования получим

$$H(\alpha(n), \alpha(n)) + 2\lambda H(\alpha(n), q(n)) + \lambda^2 H(q(n), q(n)) = 0.$$

Когда точка $\alpha(n)$ стремится к точке α, свободный член этого уравнения стремится к нулю, в то время как старший коэффициент стремится к выражению $H(q, q) = \Sigma h_{ij}q_iq_j$, которое, как мы уже видели, не равно нулю, если точка $\alpha \in K_{20}$ соответствует некоторой комплексной поверхности. Следовательно, один из корней λ_1 этого уравнения стремится к нулю, когда $\alpha(n)$ стремится к α, а точка $\alpha'(n) = \alpha(n) + \lambda_1 q(n)$ стремится к точке α. Доказательство леммы закончено.

§ 5. Диффеоморфность

Основным результатом настоящего параграфа является доказательство диффеоморфности всех поверхностей рассматриваемого типа (с $q = 0$ и $K = 0$). Прежде всего мы докажем, что произвольная компактная келерова поверхность V, у которой $q(V) = 0$ и $c_1(V) = 0$, сколь угодно малой деформацией превращается в алгебраическую поверхность V_3, на которой группа классов дивизоров порождается одной кривой рода 3. Затем будет доказано, что все такие алгебраические поверхности диффеоморфны.

1. Предложение 5.1. *В любой окрестности точки $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{22})$, лежащей на квадрике K_{20} в 21-мерном проективном пространстве, существует точка $(t) = (t_1, \ldots, t_{22})$ на этой же квадрике, удовлетворяющая линейному уравнению с целыми коэффициентами*

$$\sum_{i=1}^{22} \beta_i z_i = 0; \ \beta_i = 0 \ \text{при} \ i > 6,$$

такому, что β_i не имеют общего множителя и удовлетворяют соотношению

$$\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 + \beta_5\beta_6 = \pi - 1,$$

где π — любое целое число, большее единицы.

Доказательство. Очевидно, что всегда можно найти три действительных числа y_1, y_3, y_5, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_3 y_3 + \alpha_5 y_5 = 0.$$

Последнее соотношение означает, что точка (α) лежит в гиперплоскости M, которая задается уравнением

$$\sum_{i=1}^{22} y_i z_i = 0$$

где коэффициенты y_i равны нулю при $i \neq 1, 3, 5$, а y_1, y_3, y_5 — найденные нами действительные числа. Воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Для любого действительного числа x_3 и любого целого $\pi \geqslant 2$ существует последовательность целочисленных векторов*

$$(\beta_1(n), \beta_2(n), \beta_3(n), \beta_4(n)),$$

удовлетворяющая следующим четырем условиям:

1) $\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 = \pi - 1$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_3}{\beta_1} = x_3$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_2}{\beta_1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_4}{\beta_1} = 0$,

4) *для любого n числа $\beta_1(n), \beta_2(n), \beta_3(n), \beta_4(n)$ не имеют общего множителя.*

Доказательство леммы. Докажем лемму сначала в случае $\pi = 2$. Обозначим через N множество последовательностей целочисленных векторов $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, удовлетворяющих условиям 1) и 2) леммы (при $\pi = 2$), для которых существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_4}{\beta_1}$$

и, кроме того, $\beta_1(n) \to \infty$.

Множество M не пусто. Действительно, пусть β_1 — произвольное целое число, а β_3 — ближайшее целое к $\beta_1 x_3$, взаимно простое с β_1. В силу взаимной простоты чисел β_1 и β_3 существуют целые числа u и v, такие, что

$$u\beta_1 - v\beta_3 = 1$$

и

$$|u| < |\beta_2|, \ |v| < |\beta_1|.$$

Последовательность $P(\beta_1)$ векторов

$$(\beta_1, u, \beta_3, -v),$$

очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2) и, кроме того,

$$\left|\frac{-v}{\beta_1}\right| < 1.$$

В силу последнего неравенства, из последовательности $P(\beta_1)$ можно выбрать подпоследовательность, принадлежащую множеству N.

Рассмотрим отображение

$$\varphi: \quad N \to R$$

множества N на действительную прямую R, ставящее в соответствие каждой последовательности $P_n \in N$ предел отношения $\frac{\beta_4}{\beta_1}$. Очевидно, что множество φN замкнуто. Предположим, что точка O не принадлежит множеству φN. Тогда нижняя грань X_4 множества $|\varphi N|$ (абсолютных величин чисел из φN) больше нуля.

Рассмотрим некоторую последовательность

$$(\beta_1(n), \beta_2(n), \beta_3(n), \beta_4(n))$$

из множества M. Положим

$$\lim \frac{\beta_4}{\beta_1} = x_4.$$

Тогда, в силу условия (1) и того, что $\beta_1 \to \infty$, имеем

$$\lim \frac{\beta_2}{\beta_1} = \lim \left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_4}{\beta_1}\right) = -x_3 x_4.$$

Выберем целое число k, такое, что

$$0 < \frac{1}{x_4 + k} < X_4,$$

и рассмотрим последовательность $Q(n)$ векторов

$$(\beta_4 + k\beta_1, \beta_3, k\beta_3 - \beta_2, -\beta_1).$$

Докажем, что эта последовательность принадлежит множеству N. Действительно,

$$(\beta_4 + k\beta_1)\beta_3 + (k\beta_3 - \beta_2)(-\beta_1) = \beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 = 1.$$

Далее, поскольку

$$\lim \frac{\beta_4 + k\beta_1}{\beta_1} = x_4 + k \neq 0,$$

то $\beta_4 + k\beta_1 \to \infty$, а также

$$\lim \frac{k\beta_3 - \beta_2}{\beta_4 + k\beta_1} = \lim \frac{k\beta_3 - \beta_2}{\beta_1} \cdot \lim \frac{\beta_1}{\beta_4 + k\beta_1} = x_3.$$

Образ φQ равен, по определению, пределу

$$\lim \frac{-\beta_1}{\beta_4 + k\beta_1} = -\frac{1}{x_4 + k}$$

и, следовательно,

$$|\varphi Q| = \frac{1}{x_4 + k} < X_4,$$

что невозможно, так как X_4 — нижняя грань абсолютных величин чисел из φN. Таким образом,

$$O \in \varphi N,$$

т. е. существует последовательность $P_n \in N$, такая, что

$$\lim \frac{\beta_4}{\beta_1} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim \frac{\beta_2}{\beta_1} = -\lim \frac{\beta_3}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_4}{\beta_1} = 0.$$

Лемма доказана в случае $\pi = 2$. От этого случая легко перейти к случаю произвольного π. Действительно, пусть

$$(\beta_1(n), \beta_2(n), \beta_3(n), \beta_4(n))$$

— последовательность, удовлетворяющая условиям леммы при $\pi = 2$, т. е.

1) $\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 = 1$,

2) $\lim \frac{\beta_3}{\beta_1} = x_3$,

3) $\lim \frac{\beta_2}{\beta_1} = \lim \frac{\beta_4}{\beta_1} = 0$.

Из условия 1) видно, что числа β_1 и β_3 не могут иметь общего множителя. Рассмотрим последовательность

$$(\beta_1, (\pi - 1)\beta_2, \beta_3, (\pi - 1)\beta_4).$$

Очевидно, что эта последовательность удовлетворяет условиям леммы.

Продолжим доказательство предложения 5.1. Среди чисел y_1, y_3, y_5 хотя бы одно не равно нулю. Пусть, например, $y_1 \neq 0$. Тогда, согласно лемме, существует последовательность P_n целочисленных векторов $(\beta_i(n))$ $i = 1, \ldots, 4$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 = \pi - 1$ для любого n,

2) $\lim \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{y_3}{y_1}$,

3) $\lim \frac{\beta_2}{\beta_1} = \lim \frac{\beta_4}{\beta_1} = 0$.

Рассмотрим последовательность гиперплоскостей M_n в проективном пространстве $P_{21}(C)$, коэффициенты которых $\beta_i(n)$ $i = 1, \ldots, 22$ выбраны следующим образом:

1. $\beta_1(n), \beta_2(n), \beta_3(n), \beta_4(n)$ совпадают с компонентами $(\beta_i(n))$ n-го члена последовательности P_n,

2. $\beta_5(n)$ — ближайшее целое к числу $\beta_1(n)\frac{y_5}{y_1}$. Остальные коэффициенты положим равными нулю.

Таким образом, мы построили последовательность гиперплоскостей M_n с целыми коэффициентами $\beta_i(n)$. Эти коэффициенты не имеют общего множителя и удовлетворяют соотношению

$$\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 + \beta_5\beta_6 = \pi - 1.$$

Эта последовательность гиперплоскостей сходится к гиперплоскости M. Если M не является касательной плоскостью к квадрике K_{20} в точке (α), то очевидно, что в любой окрестности точки (α) на квадрике содержится точка $t(n) = (t_1, \ldots, t_{22})$, лежащая на некоторой плоскости M_n. Если же гиперплоскость M окажется касательной к квадрике в точке (α), то рассмотрим вместо нее плоскость M', коэффициенты которой y_i равны нулю при $i \neq 2, 4, 6$, а y_2, y_4, y_6, не все равные нулю, получены из уравнения

$$\alpha_2 y_2 + \alpha_4 y_4 + \alpha_6 y_6 = 0.$$

Предложение 5.1, таким образом, доказано.

Теорема 5. *Для любого $\pi \geqslant 2$ существует алгебраическая поверхность V_π с иррегулярностью нуль и нулевым каноническим классом, на которой лежит кривая рода π и не лежит кривых меньшего рода. В пространстве модулей келеровых поверхностей с $q = 0$ и $K = 0$ точки, соответствующие поверхностям V_π, всюду плотны.*

Доказательство. Пусть V_0 — произвольная келерова поверхность, для которой $q = 0$, $K = 0$. Пусть, далее, $c_1, \ldots, c_{22}$ — базис двумерной группы гомологий поверхности V_0, в котором матрица пересечений имеет вид, указанный в конце § 1. Напомним, что, в частности, $c_1 \cdot c_2 = 1$, $c_3 \cdot c_4 = 1$, $c_5 \cdot c_6 = 1$ и $c_i \cdot c_j = 0$ для всех остальных пар (i, j) при $i, j \leqslant 6$.

Обозначим через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{22})$ интегралы двумерной голоморфной формы k поверхности V_0 по элементам базиса (c_i). Эти числа можно рассматривать как однородные координаты точки (α) в 21-мерном проективном пространстве. Как было замечено в п. 1 § 4, из теоремы 2 следует, что в некоторой окрестности U точки (α) каждой точке $(t) = (t_1, \ldots, t_{22})$, лежащей на 20-мерной квадрике K_{20}, соответствует некоторая комплексная структура V_t, получающаяся деформацией структуры V_0. При этом координаты точки (t) равны интегралам двумерной голоморфной формы k_t поверхности V_t по циклам $c_1, \ldots, c_{22}$. Как было доказано (предложение 5.1), в окрестности U существует точка $t(\pi)$, лежащая на пересечении квадрики K_{20} и гиперплоскости M, которая задается уравнением

$$\sum_{i=1}^{6} \beta_i z_i = 0$$

с целыми коэффициентами, не имеющими общего множителя, и такими, что

$$\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 + \beta_5\beta_6 = \pi - 1.$$

Можно считать, что точка $t(\pi)$ не принадлежит больше ни одной гиперплоскости с целыми коэффициентами.

Рассмотрим класс гомологий $C = \sum_{i=1}^{6} \beta_i c_i$ и двойственную ему гармоническую форму ω на поверхности V_π, соответствующей точке $t(\pi) = (t_1, \ldots, t_{22})$.

Условие
$$\sum_{i=1}^{6} \beta_i t_i = 0$$

эквивалентно тому, что

$$\int_C k = 0,$$

или тому, что форма ω имеет тип (1,1) (см. § 4, п. 2). Кроме того,

$$\int_V \omega \wedge \omega = C \cdot C.$$

Вычислим индекс самопересечения $C \cdot C$ класса C.

$$C \cdot C = \sum_{i=1}^{6} \beta_i \beta_j c_i \cdot c_j = 2(\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4 + \beta_5\beta_6) = 2\pi - 2.$$

На данной поверхности V_π каждой целочисленной гармонической форме типа (1,1) соответствует некоторое комплексное расслоение со слоем — комплексная прямая, характеристическим классом которого является класс когомологий этой гармонической формы. Пусть F — векторное расслоение с характеристическим классом $c(F)$, к которому принадлежит форма ω. По теореме Римана — Роха, для векторных расслоений на келеровых многообразиях [7] имеем для нашей поверхности V_π

$$l(F) + l(-F) \geqslant 2 + \frac{c(F)^2}{2},$$

где $l(F)$ — размерность пространства сечений расслоения F. Но $c(F)^2$ мы уже вычислили:

$$c(F)^2 = \int_V \omega \wedge \omega = 2\pi - 2 \geqslant 2.$$

Следовательно, либо расслоение F, либо расслоение $-F$ имеет сечение. Хорошо известно что множество нулей этого сечения (которое является комплексной кривой D на поверхности V_π) принадлежит классу гомологий, двойственному к характеристическому классу этого расслоения, т. е. кривая D принадлежит либо классу C, либо $-C$. Следовательно, кривая D в любом случае имеет индекс самопересечения $2\pi - 2$ и, следовательно, является кривой рода π.

Мы предположили, что точка $t(\pi)$ не принадлежит ни одной гиперплоскости с целыми коэффициентами, кроме плоскости с коэффициентами β_i. Отсюда следует, что любой дивизор на поверхности V_π эквивалентен целому кратному кривой D. Следовательно,

$$\widetilde{D}^2 = (kD)^2 = k^2 D^2 \geqslant 2\pi - 2,$$

где $\widetilde{D}$ — любой дивизор. Мы видим, что индекс самопересечения любой кривой на поверхности V_π не меньше $2\pi - 2$. Отсюда следует, что род любой кривой, лежащей на V_t, не меньше π.

Докажем теперь, что все кривые из линейной системы $|D|$ неприводимы. Действительно, пусть кривая $\widetilde{D} \in |D|$ приводима, тогда каждая ее компонента D_i эквивалентна целому положительному кратному $k_i D$ кривой D, отсюда

$$D = \Sigma D_i \sim (\Sigma k_i) D, \; k_i > 0$$

и, следовательно, $i = 1$, $k = 1$.

Таким образом, на поверхности V_π лежит неприводимая кривая D, такая, что $D^2 = 2\pi - 2 > 1$. В силу теоремы 3.3 работы [25] следует, что поверхность V_π алгебраическая.

2. Из теоремы 5 следует, в частности, что любая келерова поверхность с $q = 0$ и $K = 0$ диффеоморфна алгебраической поверхности V_3, на которой группа классов дивизоров порождается одной кривой D рода 3.

Предложение 5.2. *Алгебраическая поверхность с такими свойствами реализуется как неособая поверхность четвертой степени в трехмерном проективном пространстве.*

Доказательство. Как доказано в главе VIII, кривая D неособа, а ее линейная система $|D|$ либо регулярно и бирационально отображает V_3 на поверхность четвертой степени в P_3, либо двулистно отображает поверхность V_3 на квадрику в P_3. Докажем, что второй случай невозможен. Действительно, квадрика в P_3 бирегулярно эквивалентна произведению двух рациональных кривых $P_1 \times P_1'$, а ее гиперплоское сечение S приводимо и равно $P_1 \times p' + p \times P_1'$, где p и p' — точки из P_1 и P_1'. Отсюда очевидно, что прообраз S при двулистном отображении, который по определению эквивалентен D, также приводим. Но в линейной системе $|D|$ приводимых кривых не может быть.

Таким образом, существует регулярное и бирациональное отображение f_D поверхности V_3 в P_3. Легко видеть, что это отображение должно быть бирегулярным. Действительно, в противном случае на поверхности V_3 существовала хотя бы одна кривая θ, которая при отображении f_D стягивается в точку. Но тогда $\theta^2 < 0$ и, следовательно, кривая θ не эквивалентна дивизору kD. Предложение 5.2 доказано.

Два комплексных многообразия V_1 и V_2 называются c-гомотопными, если существует такое семейство комплексных структур $(\mathscr{V}, M, \pi)$ со связной базой M, что

$$V_1 = \pi^{-1}(t_1), \quad V_2 = \pi^{-1}(t_2), \quad t_1, t_2 \in M$$

[26, определение 1.5]. Пользуясь этим определением, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. *Все компактные комплексные келеровы поверхности с $q = 0$, $K = 0$ c-гомотопны.*

Доказательство. Как следует из теоремы 5 и предложения 5.2, каждая такая поверхность c-гомотопна неособой поверхности, которая задается уравнением 4-й степени в трехмерном проективном пространстве. Покажем, что любые две неособые поверхности 4-й степени в $P_3(C)$ c-гомотопны. Пусть

$$\{t_{i_0, i_1, i_2, i_3}\}, \text{ где } i_k \geqslant 0, \ \Sigma i_k = 4$$

— координаты пространства C^N, $N = 35$, а (x_0, x_1, x_2, x_3) — однородные координаты в проективном пространстве $P_3(C)$. Обозначим через B множество тех точек из прямого произведения $P_3 \times C^N$, которые удовлетворяют уравнению

$$P_t(x) = \Sigma t_{i_0 i_1 i_2 i_3} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} = 0.$$

При фиксированном $t \neq 0$ уравнение $P_t(x) = 0$ задает поверхность 4-й степени в $P_3(C)$. Для того чтобы эта поверхность была неособой, необходимо и достаточно, чтобы все частные производные многочлена $P_t(x)$ по координатам проективного пространства $P_3(C)$ ни в одной точке поверхности $P_t(x) = 0$ не обращались бы в нуль одновременно. Подмножество C таких точек множества B, в котором все частные производные многочлена $P_t(x)$ обращаются в нуль, является замкнутым комплексным подпространством комплексного пространства B. Пусть π — голоморфное отображение множества $B \subset P_3 \times C^N$ на пространство C^N, индуцированное проекцией произведения $P_3 \times C^N$ на C^N. Образ множества C при отображении π также будет замкнутым комплексным подпространством в C^N, и, следовательно, его дополнение

$$M = C^N \setminus \pi C$$

связно.

Легко видеть, что

$$\mathscr{V} = (\pi^{-1}(M), M, \pi)$$

— комплексно-аналитическое семейство комплексных структур, причем для любой неособой поверхности V 4-й степени в P_3 найдется $t \in M$, такое, что $V = \pi^{-1}(t)$.

Так как база M этого семейства связна, любые две неособые поверхности 4-й степени в $P_3(C)$ c-гомотопны. Теорема 6 доказана.

Из определения ясно, что c-гомотопные многообразия во всяком случае диффеоморфны. Отсюда в качестве очевидного следствия теоремы 6 получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Любые две компактные комплексные келеровы поверхности с $q = 0$ и $c_1 = 0$ диффеоморфны.*

Глава X

ПОВЕРХНОСТИ ЭНРИКВЕСА

В этой главе будут изучены поверхности с $\varkappa = p = q = 0$. Будет доказано, что общая поверхность такого типа бирационально эквивалентна поверхности 6-й степени в P^3, дважды проходящей через ребра тетраэдра.

В § 1 мы доказываем ряд лемм о линейных системах на общих поверхностях рассматриваемого типа.

В § 2 излагается основная конструкция работы (принадлежащая Энриквесу) и доказывается, что на общей поверхности с $\varkappa = p = q = 0$ существует пара изолированных (т. е. не меняющихся в линейной системе) эллиптических кривых (т. е. дивизоров арифметического рода 1) с положительным индексом пересечения.

В § 3 основная конструкция применяется еще раз для нахождения пары изолированных эллиптических кривых (неприводимых) с индексом пересечения 1. С помощью этих кривых доказывается, что всякая поверхность с $\varkappa = p = q = 0$ бирационально эквивалентна двойной плоскости, кривая ветвления которой устроена определенным образом.

В § 4 мы строим бирациональное отображение, обладающее всеми нужными свойствами.

Наконец, в § 5 вычислено «число модулей» алгебраических поверхностей с $\varkappa = p = q = 0$. Оно равно десяти.

§ 1. Линейные системы на общей поверхности Энриквеса

Под рациональной (эллиптической) кривой мы будем всегда подразумевать дивизор (возможно, приводимый) арифметического рода 0 (1). Если $|C|$ — некоторая линейная система, мы будем обозначать через $|C'|$ линейную систему $|C + K|$ и называть эту систему присоединенной. Мы не исключаем здесь и случая, когда обе системы $|C|$, $|C'| = |C + K|$ содержат по единственной кривой; такие кривые мы будем называть изолированными.

Итак, пусть F — неособая алгебраическая поверхность с $\varkappa = p = q = 0$. Как указывалось в лемме 4 § 1 главы VIII, $P_2(F) = 1$, $2K(F) \sim 0$, а потому для любого эффективного дивизора C на поверхности F имеем

$$(C^2) = 2p_a(C) - 2,$$

$$\dim|C| \geqslant \frac{(C^2)}{2} = p_a(C) - 1,$$

$$2C \sim 2(C + K).$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть $\theta, \theta' \sim \theta + K$ — эффективные дивизоры без общих компонент. Тогда $p_a(\theta) \geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $p_a(\theta) = \frac{(\theta(\theta+K))}{2} + 1 = \frac{(\theta\theta')}{2} + 1 \geqslant 1$.

С л е д с т в и е. *Если θ — неприводимая рациональная кривая, то дивизор $\theta + K$ не эквивалентен эффективному.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\theta' \sim \theta + K$ — эффективный дивизор. Тогда дивизоры θ, θ' должны иметь общую компоненту и, ввиду неприводимости дивизора θ, $0 \leqslant \theta' - \theta \sim K$. Получаем противоречие.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть C — неприводимая эллиптическая кривая и $\dim|C| = 1$. Тогда:*

1) *система $|C'| = |C + K|$ не пуста и состоит из единственной кривой;*

2) *если $C' \in |C'|$ — эффективный дивизор, то $C' = \frac{C}{2} + \left(\frac{C}{2}\right)'$, где через $\frac{C}{2}$, $\left(\frac{C}{2}\right)'$ обозначены эффективные дивизоры, носители которых связны и не имеют общих точек. Кроме того, $\left(\frac{C}{2}\right)' \sim \frac{C}{2} + K$, а дивизоры $2 \cdot \frac{C}{2}$, $2 \cdot \left(\frac{C}{2}\right)'$ принадлежат системе $|C|$ и определяются этим свойством однозначно, откуда следует их изолированность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Кодаиры (см. [25], теорема 2.5) $H'(F, \Omega(C + K)) = 0$ и утверждение 1) непосредственно следует из теоремы Римана — Роха.

Докажем утверждение 2). Фиксируем на носителе дивизора C' произвольную точку; тогда существует дивизор $C_1 \in |C|$, проходящий через эту точку. Поскольку $(C_1C') = (C^2) = 0$, дивизоры C_1 и C' имеют общую компоненту, которую мы и обозначим через $\frac{C}{2}$. Итак, $C_1 = \frac{C}{2} + D$, $C' = \frac{C}{2} + D'$, где дивизоры D и D' эффективны, отличны от нуля и не имеют общих компонент. Очевидно также, что $D' \sim D + K$. Ввиду неприводимости системы $|C|$, $\left(C\frac{C}{2}\right), (CD) \geqslant 0$, а так как $(C^2) = \left(C\frac{C}{2}\right) + (CD) = 0$, то $\left(C\frac{C}{2}\right) = (CD) = 0$. Следовательно, $\left(\left(\frac{C}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{C}{2}D\right) = \left(C\frac{C}{2}\right) = 0$, $\left(\frac{C}{2}D\right) + (D^2) = (CD) = 0$. Так как $(D^2) = (DD') \geqslant 0$ (дивизоры D, D' не имеют общих компонент), то $\left(\frac{C}{2}D\right) \leqslant 0$, $\left(\left(\frac{C}{2}\right)^2\right) \geqslant 0$. Положим $\frac{C}{2} = \Sigma s_iA_i + \Sigma s_j'A_j'$, где все кривые A_i, A_j' неприводимы, A_i есть компонента D, $\Sigma s_j'A_j'$ не имеет с D общих компонент. Поскольку носитель дивизора C_1 связен, $(D \cdot \Sigma s_j'A_j') > 0$, если только $\Sigma s_j'A_j' \neq 0$. С другой стороны, $(\Sigma s_iA_i \cdot D) = (\Sigma s_iA_iD') \geqslant 0$. Следовательно, предположение, что $\Sigma s_j'A_j' \neq 0$ влечет $\left(\frac{C}{2}D\right) > 0$, т. е. приводит к противоречию. Итак, носитель дивизора $\frac{C}{2}$ является подмножеством носителя дивизора D, а потому $\left(\frac{C}{2}D\right) = \left(\frac{C}{2}D'\right) \geqslant 0$. Получаем, следовательно, что $\left(\frac{C}{2}D\right) = \left(\left(\frac{C}{2}\right)^2\right) = (D^2) = 0$, а дивизоры D, D' не имеют общих точек.

Докажем теперь, что $D = \frac{C}{2}$. По теореме Римана — Роха имеем

$$\dim H^0\left(F, \Omega\left(\frac{C}{2} - D\right)\right) + \dim H^0\left(F, \Omega\left(D' - \frac{C}{2}\right)\right) \geqslant 1, \qquad (*)$$

$$\dim H^0\left(F, \Omega\left(D - \frac{C}{2}\right)\right) + \dim H^0\left(F, \Omega\left(\frac{C}{2} - D'\right)\right) \geqslant 1. \qquad (**)$$

Вторые слагаемые в левых частях неравенств (*) и (**) равны нулю, ибо в противном случае мы бы имели $\dim H^0(F, \Omega(C')) \geqslant 2$, что противоречит уже доказанному утверждению 1). Следовательно, отличны от нуля оба первых слагаемых и $D\sim\frac{C}{2}$. Если $D\neq\frac{C}{2}$, то $\dim\left|\frac{C}{2}\right|\geqslant 1$, что противоречит неприводимости кривой C.

Связность носителей дивизоров $\frac{C}{2}$, $\left(\frac{C}{2}\right)'=D'$ также непосредственно следует из неприводимости кривой C.

Если, наконец, H — эффективный дивизор и $2H\in|C|$, то по теореме Римана — Роха

$$\dim H^0\left(F, \Omega\left(H-\frac{C}{2}\right)\right)+\dim H^0\left(F, \Omega\left(\left(\frac{C}{2}\right)'-H\right)\right)\geqslant 1,$$

и если первое слагаемое отлично от нуля, то $H=\frac{C}{2}$, а если второе, то $H=\left(\frac{C}{2}\right)'$. Таким образом, предложение 2 полностью доказано.

Следствие. *Если C — кривая, обладающая свойствами, указанными в формулировке леммы 2, а θ — произвольный дивизор, то индекс пересечения $(C\theta)$ четен.*

Доказательство. Имеем $(C\theta)=2\left(\frac{C}{2}\cdot\theta\right)$.

Определение. Поверхность Энрикеса F мы будем называть поверхностью специального типа, если на ней существует такой неприводимый линейный пучок эллиптических кривых C и такая неособая рациональная кривая θ, что $(C\theta)=2$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что рассматриваемая поверхность F не является поверхностью специального типа, если это не оговорено особо.

Предложение 3. *Пусть $|C|$ — полная линейная система и $p_a(C)>1$. Тогда подвижная часть $|D|$ системы $|C|$ неприводима и $p_a(D)>1$.*

Доказательство. Допустим сначала, что система $|C|$ не имеет неподвижных компонент, и докажем ее неприводимость. Пусть система $|C|$ приводима. Тогда (по теореме Бертини и вследствие регулярности поверхности F) она составлена из кривых (неприводимого) линейного пучка H ($|C|=|nH|$, $(H^2)>0$, $n>1$). По теореме Римана — Роха имеем $n=\dim|C|\geqslant\frac{n^2(H^2)}{2}\geqslant n^2$. Пусть теперь система $|C|$ произвольна. Если $p_a(D)>1$, то система $|D|$ неприводима, согласно уже доказанному. Приведем теперь к противоречию предположение, что $p_a(D)-1=(D^2)=0$. Если это предположение верно, то $|D|=|nH|$, где H — неприводимый пучок эллиптических кривых. Поскольку, кроме того, $(C^2)>0$, неподвижная часть θ системы $|C|$ отлична от нуля. Так как $(\theta^2)\leqslant 2\dim|\theta|=0$, то $(D\theta)=\frac{(C^2)-(\theta^2)}{2}>0$. Существует поэтому такая неприводимая компонента $\bar\theta$ дивизора θ, что $(H\bar\theta)>0$. Кроме того, если кривая $\bar\theta$ эллиптична ($(\bar\theta^2)=0$), то $H\bar\theta\geqslant 2$ (следствие предложения 2), а если $\bar\theta$ рациональна ($(\bar\theta^2)=-2$), то $(H\bar\theta)\geqslant 4$. В любом случае по теореме Римана — Роха имеем

$$n=\dim|D|=\dim|D+\bar\theta|\geqslant\frac{2n(H\bar\theta)+(\bar\theta^2)}{2}\geqslant 2n.$$

Получаем искомое противоречие.

Предложение 4. *Пусть $|C|$ — неприводимая линейная система и $p_a(C)>1$. Тогда $\dim|C|=\dim|C+K|=p_a(C)-1$, а система $|C'|=|C+K|$ также неприводима.*

Доказательство. По цитированной теореме Кодаиры, $H'(F, \Omega(C+K))=0$, а потому $\dim|C'|=\dim H^0(F,\Omega(C'))-1=p_a(C')-1=p_a(C)-1$. Положим $|C'|=|D|+\theta$, где $|D|$ и θ — подвижная и неподвижная части системы $|C'|$ соответственно. Согласно предыдущему предложению 3, линейная система $|D|$ неприводима и $p_a(D)>1$. С другой стороны, $p_a(D)-1\leqslant\dim|D|=\dim|C'|=p_a(C)-1$. Итак,

$$1<p_a(D)\leqslant p_a(C).$$

Теперь мы будем доказывать наше предложение индукцией по числу $p_a(C)$. Пусть $p_a(C)=2$. Тогда $p_a(D)=2$ и, следовательно, $(D^2)=(C^2)=((D+\theta)^2)$, $2(D\theta)+(\theta^2)=0$.

Если $(\theta^2)<0$, то $(D\theta)>0$, а потому $0>(D\theta)+(\theta^2)=((D+\theta)\theta)=(C\theta)$, что невозможно, так как система $|C|$ неприводима.

Если $(\theta^2)=0$, но $\theta\neq 0$, то, по теореме Римана — Роха, существует эффективный дивизор $\theta'\sim\theta+K$. Поскольку $\theta'\neq\theta$ и $2\theta\sim 2\theta'$, линейная система $|2\theta|$ по крайней мере одномерна и через каждую точку поверхности F проходит хотя бы одна кривая этой системы. Так как $(D\theta)=0$, а система $|D|$ неприводима, существует дивизор $\tilde\theta\in|2\theta|$, представимый в виде $\tilde\theta=D_0+H$, где $D_0\in|D|$ и $H>0$. Поскольку $(D^2)>0$ и $(\theta^2)=0$, имеем: $(D^2)+2(DH)+(H^2)=0$, $2(DH)+(H^2)<0$, $(DH)+(H^2)=((D+H)H)<0$ (так как $(DH)\geqslant 0$ вследствие неприводимости $|D|$). Значит, $((D+H)D)=((D+H)^2)-((D+H)H)=(\tilde\theta^2)-((D+H)H)>0$, т. е. $(D\theta)>0$, что противоречит нашему предположению.

Отметим еще, что $(\theta^2)\leqslant 2\dim|\theta|=0$. Итак, невозможно ни $(\theta^2)<0$, ни $(\theta^2)>0$, ни $(\theta^2)=0$ при $\theta\neq 0$. Значит, $\theta=0$, а потому система $|C'|=|D|$ неприводима, $H'(F,\Omega(C'+K))=H'(F,\Omega(C))=0$, откуда с помощью теоремы Римана — Роха получаем наше утверждение для случая $p_a(C)=2$.

Докажем теперь, используя предположение индукции, что всегда $p_a(D)=p_a(C)$. Действительно, пусть $p_a(D)<p_a(C)$, тогда, по предположению индукции, $\dim|D|=p_a(D)-1<p_a(C)-1=\dim|C'|$. Получаем противоречие.

Теперь, повторяя дословно рассуждения, приведенные в случае $p_a(C)=2$, получим, что $\theta=0$, система $|C'|$ неприводима и, применяя теорему Кодаиры, что $\dim|C|=p_a(C)-1$. Предложение 4 доказано.

§ 2. Основная конструкция

1. Пусть C — неприводимая кривая, и $p_a(C)=\pi>1$. Согласно предложениям 3 и 4, § 1, $\dim|C|=\pi-1$, $\dim|2C|=4\pi-4$ и система $L=|2C|$ неприводима. В пространстве параметров $P^{4\pi-4}$ системы L рассмотрим подмножества S_1, S_2, соответствующие кривым системы $|2C|$, представимым в виде C_1+C_2, $C_1'+C_2'$ соответственно, где $C_i\in|C|$, $C_i'\in|C'|$, $i=1, 2$.

A) *Каждое из подмножеств S_1, S_2 является $(2\pi-2)$-мерным алгебраическим подмногообразием в $P^{4\pi-4}$.*

Для доказательства этого утверждения фиксируем дивизоры C_1, $C_2\in|C|$. Пусть функции $f_0=1, f_1, \ldots, f_{\pi-1}$ образуют базис векторного пространства $L(C_1)$, состоящего из таких функций f, что $(f)+C_1>0$.

Кроме того, предположим, что функция f_1 осуществляет эквивалентность дивизоров $C_1\sim C_2$, а общая компонента этих дивизоров либо пуста, либо является изолированной кривой. В качестве базиса пространства $L(C_2)$ рассмотрим функции $g_0=\frac{1}{f_1}$, $g_1=1, \ldots, g_{\pi-1}=\frac{f_{\pi-1}}{f_1}$. Нетрудно видеть, что при нашем предположении относительно дивизоров C_1 и C_2 функции $1 = f_0, f_1, \ldots, f_{\pi-1}, g_0, g_2, \ldots, g_{\pi-1}$ линейно независимы, а потому пространство $L(C_1 + C_2)$ допускает базис $h_0 = 1$, $h_1 = f_1, \ldots, h_{\pi-1} = f_{\pi-1}$, $h_\pi = g_0$, $h_{\pi+1} = g_2, \ldots, h_{2\pi-2} = g_{\pi-1}, h_{2\pi-1}, \ldots, h_{4\pi-4}$. Точка $(\nu_0 : \ldots : \nu_{4\pi-4}) \in P^{4\pi-4}$ тогда и только тогда принадлежит множеству S_1, когда найдутся такие точки $(\alpha_0 : \ldots : \alpha_{\pi-1})$, $(\beta_0 : \ldots : \beta_{\pi-1}) \in P^{\pi-1}$, что $\nu_0 h_0 + \ldots + \nu_{4\pi-4} h_{4\pi-4} = \gamma(\alpha_0 f_0 + \ldots + \alpha_{\pi-1} f_{\pi-1}) \times (\beta_0 g_0 + \ldots + \beta_{\pi-1} g_{\pi-1})$. Полагая $f_i g_j = \sum_{k=0}^{4\pi-4} C_k^{ij} h_k$, раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при h_k в левой и правой частях, получаем параметрические уравнения множества S_1:

$$\nu_k = \gamma \sum_{i,j} C_k^{ij} \alpha_i \beta_j, \quad k = 0, \ldots, 4\pi - 4. \qquad (*)$$

Мы отметим еще здесь, что при нашем выборе базисов эти уравнения симметричны относительно индексов i, j $\left(\text{так как } f_i g_j = f_j g_i = \frac{f_i f_j}{f_1}\right)$ и что координаты любого дивизора из $|C|$ в выбранных базисах пространств $L(C_1)$, $L(C_2)$ одинаковы.

Проведя аналогичное построение для множества S_2, докажем, что оба множества алгебраичны и $(2\pi - 2)$-мерны.

Исследуем теперь множества особых точек подмногообразий S_1 и S_2.

B) *Пусть C_1 и C_2 — кривые системы $|C|$, общая часть которых либо пуста, либо является изолированной кривой. Пусть, кроме того, дивизор $C_1 + C_2$ единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых) записывается в таком виде. Тогда точка многообразия S_1, соответствующая кривой $C_1 + C_2 \in |2C|$, неособа.*

Для доказательства продолжим исследование уравнений $(*)$. Отметим, что $C_k^{i1} = C_k^{1i} = \delta_k^i$, $C_k^{j0} = C_k^{0j} = \delta_{k-\pi+1}^j$ $(j \neq 0, 1)$, $C_k^{00} = \delta_k^\pi$. В базисе, выбранном в пространстве $L(C_1)$, дивизор C_1 имеет координаты $(1 : 0 : \ldots : 0)$, а дивизор C_2—координаты $(0 : 1 : 0 : \ldots : 0)$; в построенном базисе пространства $L(C_1 + C_2)$ дивизор $C_1 + C_2$ имеет координаты $(1 : 0 : \ldots : 0)$.

Рассмотрим симметрический квадрат T пространства $P^{\pi-1}$ и проективное пространство P^{π^2-1} с однородными координатами $(\mu_{ij}, 0 \leqslant i, j \leqslant \pi - 1)$. Формулы

$$\mu_{ij} = \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i, \quad i \neq j,$$
$$\mu_{ii} = 2\alpha_i \beta_i$$

определяют вложение многообразия T в P^{π^2-1}, причем особыми точками T могут быть лишь точки диагонали. Параметрические уравнения $(*)$ мы можем переписать в виде

$$\nu_k = \gamma \sum_{i,j} C_k^{ij} (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i), \quad k = 0, \ldots, 4\pi - 4,$$

тогда формулы

$$\nu_k = \gamma \sum_{i,j} C_k^{ij} \mu_{ij}, \quad k = 0, \ldots, 4\pi - 4$$

определяют проекцию $P^{\pi^2-1} \to P^{4\pi-4}$, отображающую симметрическое произведение T на многообразие S_1.

Точка $P \in T \subset P^{\pi^2-1}$, соответствующая паре дивизоров (C_1, C_2), не лежит на диагонали T, неособа в T и имеет в P^{π^2-1} координаты $\mu_{00} = 0$, $\mu_{10} = \mu_{01} = \gamma$, $\mu_{ij} = 0$ $(i^2 + j^2 > 1)$.

Так как точка $(1 : 0 : \ldots : 0) \in P^{4\pi-4}$ является образом единственной точки из T (именно, точки P), то для доказательства ее регулярности в S_1 мы должны установить, что гиперплоскость в P^{π^2-1}, проектирующая точку P, не касается T в этой точке. Подставляя значения координат ν_i, находим уравнения этой гиперплоскости:

$$0 = \sum C_k^{ij} \mu_{ij}, \quad 0 < k \leqslant 4\pi - 4.$$

В неоднородных координатах P^{π^2-1} в окрестности точки P эти уравнения мы можем записать в виде

$$\sum_{(i,j) \neq (0,1),\,(1,0)} C_k^{ij} u_{ij} = 0, \quad k = 1, \ldots, 4\pi - 4, \qquad (**)$$

где $u_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{01}}$, а в правых частях стоят нули, так как $C_k^{10} = C_k^{01} = \delta_k^0 = 0$ при $k \geqslant 1$. На многообразии T

$$u_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{01}} = \frac{\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i}{\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0} = \frac{x_i y_j + x_j y_i}{1 + x_1 y_0},$$

где положено $x_0 \equiv y_1 \equiv 1$, x_i, y_j $(i = 1, \ldots, \pi - 1;\ j = 0, 2, \ldots, \pi - 1)$— неоднородные координаты в окрестностях точек $(1 : 0 : \ldots : 0)$, $(0 : 1 : 0 : \ldots : 0) \in P^{\pi-1}$. Пусть $u_{10}(t)$, $u_{ij}(t)$ $(i^2 + j^2 > 1)$ — кривая на T, касающаяся проектирующей гиперплоскости в точке P. Отметим, что $u_{ij}(0) = x_i(0) = y_j(0) = 0$ $(i^2 + j^2 \neq 1,\ i \neq 0,\ j \neq 1)$. Как нетрудно подсчитать,

$$\frac{du_{1i}(0)}{dt} = \frac{du_{i1}(0)}{dt} = \frac{dx_i(0)}{dt} \quad (i \neq 0, 1),$$
$$\frac{du_{0j}(0)}{dt} = \frac{du_{j0}(0)}{dt} = \frac{dy_j(0)}{dt} \quad (j \neq 0, 1),$$
$$\frac{du_{11}(0)}{dt} = 2\frac{dx_1(0)}{dt}, \quad \frac{du_{00}(0)}{dt} = 2\frac{dy_0(0)}{dt}, \quad \frac{du_{ij}(0)}{dt} = 0$$

в прочих случаях.

Координаты $\frac{du_{ij}(0)}{dt}$ касательного вектора в точке P к кривой $u_{ij}(t)$ должны удовлетворять системе $(**)$. При подстановке получаем:

$$0 = \sum_{(i,j) \neq (0,1),\,(1,0)} C_k^{ij} \frac{du_{ij}(0)}{dt} = \sum_{j \neq 1} (C_k^{0j} + C_k^{j0}) \frac{dy_j(0)}{dt} +$$
$$+ \sum_{i \neq 0} (C_k^{1i} + C_k^{i1}) \frac{dx_i(0)}{dt} = 2 \sum_{j > 1} \delta_{k-\pi+1}^j \frac{dy_j(0)}{dt} + 2 \sum_{i \neq 0} \delta_k^i \frac{dx_i(0)}{dt} + 2\delta_{k-\pi}^0 \frac{dy_0(0)}{dt},$$
$$k = 1, \ldots, 4\pi - 4.$$

Придавая k значения от 1 до $\pi - 1$, получаем $\frac{dx_i(0)}{dt} = 0$, $i = 1, \ldots, \pi - 1$. Придавая k значения $\pi, \ldots, 2\pi - 2$, получаем $\frac{dy_j(0)}{dt} = 0$, $j = 0, 2, \ldots, \pi - 1$. Итак, наш касательный вектор оказался нулевым. Утверждение B) тем самым доказано.

C) *Степень подмногообразия S_1 не меньше, чем $\frac{1}{2}\binom{2\pi - 2}{\pi - 1}$.*

Для доказательства выберем на поверхности F $(2\pi - 2)$ точки $Q_1, \ldots, Q_{2\pi-2}$ так, чтобы

1) гиперплоскость $E^{2\pi-2}$ в $P^{4\pi-4}$, соответствующая кривым из $L = |2C|$, проходящим через все эти точки, имела размерность $(2\pi - 2)$;

2) через любые $(\pi - 1)$ точек системы $Q_1, \ldots, Q_{2\pi-2}$ проходила единственная кривая системы $|C|$. Кроме того, различным наборам из $(\pi - 1)$ точек должны соответствовать различные кривые системы $|C|$.

[Такую систему точек $Q_1, \ldots, Q_{2\pi-2}$ нетрудно построить по индукции: 1) в качестве Q_1 возьмем любую точку поверхности, не являющуюся базисной ни для системы $|C|$, ни для системы L; 2) пусть точки $Q_1, \ldots, Q_s$ выбраны таким образом, что a) система кривых из $|2C|$, проходящих через все эти точки, имеет размерность $4\pi - 4 - s$, b) система кривых из $|C|$, проходящих через точки $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant s$, $k = 1, \ldots, \min(s, \pi - 1)$, имеет размерность $\pi - 1 - k$.

Тогда в качестве точки Q_{s+1} мы можем взять любую точку, кроме a) базисных точек системы кривых из L, проходящих через все точки $Q_1, \ldots, Q_s$, и b) базисных точек систем кривых из $|C|$, проходящих через точки $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant s$, $k = 1, \ldots, \min(s, \pi - 1)$.

Нетрудно подсчитать число точек пересечения гиперплоскости $E^{2\pi-2} \subset P^{4\pi-4}$ с подмногообразием S_1. Такие точки взаимно однозначно соответствуют парам $C_1, C_2 \in |C|$, разбивающим множество $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{2\pi-2}$ на равномощные подмножества, т. е., согласно построению, числу таких разбиений, которое, очевидно, равно $\frac{1}{2}\binom{2\pi-2}{\pi-1}$.

Таким образом, степень подмногообразия S_1 (и, очевидно, подмногообразия S_2) не может быть меньше, чем $\frac{1}{2}\binom{2\pi-2}{\pi-1}$, т. е. утверждение C) полностью доказано.

Отметим, что, как следует из утверждений A) и C), подмногообразия S_1 и S_2 имеют по крайней мере $\frac{1}{4}\binom{2\pi-2}{\pi-1}^2$ точек пересечения (считая с кратностями). Кривые системы $|2C|$, соответствующие таким точкам, мы будем называть специальными.

2. В этом пункте мы докажем, что на поверхности F

1) *существует пара эллиптических кривых с положительным индексом пересечения, каждая из которых, будучи удвоенной, меняется в неприводимом пучке;*

2) *всякий дивизор с положительным арифметическим родом эквивалентен сумме такой пары и некоторого дивизора* $\Gamma \geqslant 0$.

Замечание. Из утверждения 2) и предложений 3, 4 § 1 легко следует, что группа классов дивизоров на поверхности F порождается неприводимыми рациональными и эллиптическими кривыми.

Доказательство. Пусть C — дивизор с положительным арифметическим родом. Очевидно, мы можем без ограничения общности предполагать его неприводимым (предложение 3 § 1). Согласно результатам предыдущего пункта, существует специальная кривая $L_0 \in |2C|$, т. е. кривая, одновременно представимая как в виде

$$L_0 = C_1 + C_2, \quad C_1, C_2 \in |C|,$$

так и в виде

$$L_0 = C_1' + C_2', \quad C_1', C_2' \in |C'|.$$

Обозначим через Γ общую компоненту кривых C_1, C_2, C_1', C_2' и рассмотрим линейную систему $|2C - 2\Gamma|$.

Поскольку кривые $2(C_1 - \Gamma)$, $2(C_2 - \Gamma)$, $2(C_1' - \Gamma)$, $2(C_2' - \Gamma)$ принадлежат этой системе и не имеют общих компонент, система $|2C - 2\Gamma|$ не имеет неподвижных компонент (и отлична от нуля, так как в противном случае мы имели бы $K \geqslant 0$, что не имеет места).

A) Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &D_1 + D_2 = C_1 - \Gamma, \quad D_1 + D_3 = C_1' - \Gamma, \\ &D_3 + D_4 = C_2 - \Gamma, \quad D_2 + D_4 = C_2' - \Gamma \end{aligned} \tag{$*$}$$

и положим $C_1 - \Gamma = \Sigma q_i H_i$, $C_2 - \Gamma = \Sigma r_i H_i$, $C_1' - \Gamma = \Sigma s_i H_i$, $C_2' - \Gamma = \Sigma t_i H_i$, где H_i — неприводимые кривые, $q_i, r_i, s_i, t_i \geqslant 0$, $q_i + r_i + s_i + t_i > 0$, $q_i + r_i = s_i + t_i$. Положим, кроме того, $D_1 = \Sigma x_i H_i$, $D_2 = \Sigma y_i H_i$, $D_3 = \Sigma z_i H_i$, $D_4 = \Sigma u_i H_i$. В этих обозначениях система $(*)$ принимает для каждого i вид:

$$\begin{aligned} &x_i + y_i = q_i, \quad x_i + z_i = s_i, \\ &z_i + u_i = r_i, \quad y_i + u_i = t_i. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Поскольку общая компонента правых частей уравнений $(*)$ равна нулю, $q_i r_i s_i t_i = 0$, а это условие, как нетрудно показать, является необходимым и достаточным для существования целого неотрицательного решения $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i, \tilde{u}_i$ уравнений $(**)$, удовлетворяющего условиям: $\tilde{x}_i \tilde{u}_i = 0$, $\tilde{y}_i \tilde{z}_i = 0$. Полагая $D_1 = \Sigma \tilde{x}_i H_i$, $D_2 = \Sigma \tilde{y}_i H_i$, $D_3 = \Sigma \tilde{z}_i H_i$, $D_4 = \Sigma \tilde{u}_i H_i$, получим решение системы $(*)$, обладающее следующими свойствами:

a) $D_i \geqslant 0$,

b) дивизоры D_1 и D_4 (D_2 и D_3) не имеют общих компонент.

С другой стороны, имеем

$$D_1 + D_3 \sim D_1 + D_2 + K, \quad D_2 + D_4 \sim D_2 + D_1 + K,$$

т. е. $D_3 \sim D_2 + K$, $D_4 \sim D_1 + K$. Из предложения 1 § 1 теперь следует, что $D_i > 0$, $p_a(D_i) \geqslant 1$. Если $p_a(D_1) > 1$ (или $p_a(D_2) > 1$), то обозначим через $|{}_1C|$ подвижную часть системы $|D_1|$ ($|D_2|$). Согласно предложению 3 § 1, система $|{}_1C|$ неприводима и $p_a({}_1C) > 1$; согласно предложению 4 § 1, $p_a({}_1C) < p_a(C)$ (так как $\dim|{}_1C| < \dim|C|$).

B) Пусть теперь $(C - \Gamma)^2 > 0$. Тогда мы нашли либо неприводимую кривую ${}_1C$, арифметический род которой удовлетворяет неравенствам $1 < p_a({}_1C) < p_a(C)$, либо пару эллиптических кривых D_1, D_2, не имеющих общих компонент со своими присоединенными кривыми $D_4 \sim D_1 + K$, $D_3 \sim D_2 + K$.

В этом последнем случае рассмотрим системы $|2D_1|$, $|2D_2|$. Очевидно, каждая из этих систем не имеет неподвижных компонент (так как $2D_1$, $2D_4 \in |2D_1|$, $2D_2$, $2D_3 \in |2D_2|$ не имеют общих компонент) и потому составлена из неприводимого пучка эллиптических кривых ($|2D_1| = |n_1 L_1|$, $|2D_2| = |n_2 L_2|$). Кривые $\frac{L_1}{2}$, $\frac{L_2}{2}$ (см. § 1, предложение 2) эллиптичны, изолированы и имеют положительный индекс пересечения $\frac{L_1}{2}$, $\frac{L_2}{2}$ $\left(\text{так как } (D_1 D_2) = \left(\frac{(C-\Gamma)^2}{2}\right) > 0\right)$. Теми же свойствами обладают кривые $\left(\frac{L_1}{2}\right)'$, $\left(\frac{L_2}{2}\right)'$. Носители кривых $\frac{L_1}{2}$, $\left(\frac{L_1}{2}\right)'$ $\left(\frac{L_2}{2}, \left(\frac{L_2}{2}\right)'\right)$ не имеют общих точек, а линейные системы L_1, L_2 одномерны и неприводимы.

C) Пусть $(C-\Gamma)^2=0$ (так как система $|2C-2\Gamma|$ не имеет неподвижных компонент $(2C-2\Gamma)^2\geqslant 0$). Имеем $(C^2)=((D_1+D_2+\Gamma)^2)=((C-\Gamma)^2)+2(D_1\Gamma)+2(D_2\Gamma)+(\Gamma^2)=2(D_1\Gamma)+2(D_2\Gamma)+(\Gamma^2)>0$.

Если $(\Gamma^2)>0$, обозначим через ${}_1C$ подвижную часть системы $|\Gamma|$. Согласно предложениям 3 и 4 § 1, имеют место неравенства

$$1<p_a({}_1C)<p_a(C).$$

Если $2(D_1\Gamma)>0$, обозначим через θ такую неприводимую компоненту кривой Γ, для которой $(D_1\theta)>0$, и через ${}_1C$ — подвижную часть системы $|D_1+\theta|$. Так как поверхность F не является поверхностью специального типа, из предложений 3, 4 § 1 легко следуют неравенства $1<p_a({}_1C)<p_a(C)$.

D) Суммируем результаты, полученные в пунктах A), B), C): по заданной неприводимой кривой C, $p_a(C)>1$ мы нашли либо a) неприводимую кривую ${}_1C$, арифметический род которой удовлетворяет неравенствам $1<p_a({}_1C)<p_a(C)$ (п. A), частично B), C)), либо b) пару эллиптических кривых D_1, D_2 с положительным индексом пересечения, обладающих следующим свойством: (I) *существуют такие неприводимые пучки эллиптических кривых L_1, L_2, что $D_1=\frac{L_1}{2}$, $D_2=\frac{L_2}{2}$* (см. предложение 2 § 1 и п. B)).

Продолжая наш процесс столько раз, сколько в нем встречается случай a) (ввиду неравенств $1<p_a({}_1C)<p_a(C)$ это число ограничено), мы придем, наконец, к случаю b).

§ 3. Представление произвольной поверхности Энриквеса в виде двойной плоскости

1. В этом пункте мы докажем, что на поверхности F существуют две эллиптические кривые с индексом пересечения 1, обладающие свойством (I).

Пусть D_1, D_2 — пара эллиптических кривых, полученная в конце предыдущего пункта, и пусть $(D_1D_2)=s>1$. Рассмотрим линейную систему $|C|=|D_1+D_2|$.

A) *Система $|C|$ неприводима и $p_a(C)>2$.* Действительно, $p_a(C)=\frac{(C^2)}{2}+1=(D_1D_2)+1=s+1>2$. Поскольку системы $L_1=|2D_1|$, $L_2=|2D_2|$ неприводимы и одномерны, система $|2C|=|2D_1+2D_2|$ не имеет неподвижных компонент и неприводима согласно предложению 3 § 1. Согласно предложению 4 § 1, $\dim|2C|=p_a(2C)-1$.

Обозначим через $|\widetilde{C}|$ подвижную часть системы $|C|$. Согласно предложению 4 § 1, $p_a(C)-1\leqslant\dim|C|=\dim|\widetilde{C}|=p_a(\widetilde{C})-1$. Следовательно, $p_a(\widetilde{C})\geqslant p_a(C)$. С другой стороны, $\dim|2\widetilde{C}|\leqslant\dim|2C|$, причем равенство возможно лишь в случае $|C|=|\widetilde{C}|$. Имеем

$$\dim|2\widetilde{C}|=4(p_a(\widetilde{C})-1),\ \dim|2C|=4(p_a(C)-1).$$

Сравнивая полученные неравенства, заключаем, что $p_a(\widetilde{C})=p_a(C)$, $\dim|2C|=\dim|2\widetilde{C}|$ и, наконец, $|C|=|\widetilde{C}|$.

Мы доказали, таким образом, что к системе $|C|$ можно применить процесс, описанный в п. 1 и 2 § 2.

Одной из специальных кривых системы $|2C|$ является кривая $H=D_1+D_2+D_1'+D_2'$. В следующем утверждении мы доказываем, что точки, соответствующие этой кривой на многообразиях S_1, S_2, можно считать неособыми на этих многообразиях.

B) *Если хотя бы одна из кривых D_1,D_2,D_1',D_2' приводима, на поверхности F существует неприводимая кривая ${}_1C<C$, арифметический род которой*

удовлетворяет неравенствам $1<p_a({}_1C)<p_a(C)$. Если все четыре кривые D_1,D_2,D_1',D_2' неприводимы, точки на многообразиях S_1, S_2, соответствующие специальной кривой $H\in|2C|$, неособы, согласно утверждению B), *п.* 1 § 2.

Действительно, пусть, например, кривая D_1' приводима и пусть θ — такая ее неприводимая компонента, что $(D_2'\theta)>0$. Согласно предположению о неспециальности поверхности F и следствию предложения 2 § 1, $(D_2'+\theta)^2\geqslant 2$. Так как $\dim|D_2'+\theta|<\dim|C|$, арифметический род неприводимой подвижной части $|{}_1C|$ системы $|D_2'+\theta|$ удовлетворяет неравенствам $1<p_a({}_1C)<p_a(C)$ (предложения 3 и 4 § 1).

C) Докажем теперь, предполагая неприводимость дивизоров D_1,D_2,D_1',D_2', что *кривая H не является единственной специальной кривой системы $|2C|$.*

Так как согласно формуле п. 1 C) § 2, система $|2C|$ имеет по крайней мере $\frac{1}{4}\binom{2s}{s}^2\geqslant 9$ (возможно, кратных) специальных кривых, нам достаточно доказать, что точка $Q\in S_1\cap S_2$, соответствующая кривой H, не является кратным пересечением S_1 и S_2. Мы можем считать при этом, как указывалось выше, что эта точка неособа на многообразиях S_1, S_2.

Предположим противное. Тогда на многообразиях S_1, S_2 существуют кривые $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, касающиеся друг друга в точке $Q=Q_1(0)=Q_2(0)$. Кривой $Q_1(t)$, $(Q_2(t))$ соответствуют две кривые: $C_1(t)$ и $C_2(t)$, $(C_1'(t)$ и $C_2'(t))$, в пространстве параметров системы $|C|$ $(|C'|)$. Индексы при этом мы можем выбрать таким образом, чтобы иметь

$$C_1(0)=D_1+D_2,\ C_2(0)=D_1'+D_2',\ C_1'(0)=D_1+D_2',\ C_2'(0)=D_2+D_1'.$$

Рассмотрим линейчатую поверхность V_1, образованную прямыми $L_1(t)$, проходящими через точки Q, $Q_1(t)$, и аналогичным образом построенную линейчатую поверхность V_2, образованную прямыми $L_2(t)$. Через L обозначим пересечение этих поверхностей (т. е. прямую, соответствующую общему касательному вектору кривых $Q_1(t)$, $Q_2(t)$).

Докажем, что все дивизоры, лежащие на прямой L, содержат кривую H; это и будет искомым противоречием.

Очевидно, всякий дивизор, лежащий на прямой $L_1(t)$ $(L_2(t))$, высекает на (неприводимой) кривой D_1 тот же дивизор, что и кривая $C_1(t)+C_2(t)$ $(C_1'(t)+C_2'(t))$. Поэтому всякий дивизор, лежащий на прямой L, заведомо высекает на кривой D_1 дивизор

О. Н. К. $\{\lim\limits_{t\to 0}(C_1(t)+C_2(t))D_1,\ \lim\limits_{t\to 0}(C_1'(t)+C_2'(t))D_1\}$.

Очевидно, $H_1=\lim\limits_{t\to 0}C_2(t)D_1=D_2'D_1$, $H_2=\lim\limits_{t\to 0}C_2'(t)D_1=D_2\cdot D_1$. Так как кривые D_2, D_2' не имеют общих точек, $H_1\cap H_2=0$.

Если мы теперь докажем, что $\lim\limits_{t\to 0}C_1(t)D_1\neq D_2\cdot D_1$, отсюда будет следовать, что дивизоры прямой L имеют с кривой D_1 более чем $2s=2(C\cdot D_1)$ общих точек, т. е. эти дивизоры содержат D_1.

Допустим, поэтому, что $\lim\limits_{t\to 0}C_1(t)D_1=D_2\cdot D_1$. Это означает, что дивизор $D_2\cdot D_1$ принадлежит линейной системе $|C\cdot D_1|$, т. е. $(C-D_2)D_1=D_1D_1$ — дивизор, эквивалентный нулю на D_1. Из точной последовательности $0\to H^0(F,\Omega(0))\to H^0(F,\Omega(D_1))\to H^0(D_1,\Omega_{D_1}(D_1|_{D_1}))\to H^1(F,\Omega(0))$, соответствующей точной последовательности пучков

$$0\to\Omega(0)\to\Omega(D_1)\to\Omega_{D_1}(D_1|_{D_1})\to 0,$$

заключаем, однако, что, так как

$\dim H^0(F, \Omega(0)) = \dim H^0(F, \Omega(D_1)) = 1$ (кривая D_1 изолирована), $\dim H^1(F, \Omega(0)) = 0$, то и $\dim H^0(D_1, \Omega_{D_1}(D_1|_{D_1})) = 0$. (Если множество $D_1 \cap D_2$ содержит особую точку кривой D_1, мы можем рассматривать $\lim\limits_{t\to 0} C_1'(t) D_1$ и дивизор $D_2' \cdot D_1$.)

Аналогичным образом доказывается, что дивизоры, лежащие на прямой L, содержат кривые D_2, D_1', D_2'. Итак, утверждение C) доказано.

D) Специальная кривая H_1 системы $|2C|$, отличная от H, позволяет найти либо неприводимую кривую ${}_1C$, арифметический род которой удовлетворяет неравенствам $1 < p_a({}_1C) < p_a(C)$, либо пару эллиптических кривых D_3, D_4 с положительным индексом пересечения, обладающих свойством (I) п. 2, D) § 2, и таких, что $D_3 + D_4 + \Gamma \sim C$ (см. п. 2, A), B), C) § 2).

В первом случае (сюда мы отнесем и кривую ${}_1C$, которая могла получиться в п. B)), мы применим к кривой ${}_1C$ нашу основную конструкцию и получим, в конце концов, пару эллиптических кривых, обладающих свойством (I) п. 2, D) § 2 с индексом пересечения, меньшим s.

Обратимся ко второму случаю. Мы имеем

$$((D_1 + D_2)(D_3 + D_4)) = (D_1D_3) + (D_2D_4) + (D_2D_3) + (D_1D_4) = (C^2) - (C\Gamma) \leqslant 2s. \quad (*)$$

Если один из этих индексов пересечения, например (D_1D_3), равен нулю, то соответствующие неприводимые пучки эллиптических кривых ($L_1 = |2D_1|$, $L_3 = |2D_3|$ в нашем случае) совпадают.

Из предложения 2 § 1 следует поэтому, что $\frac{L_1}{2} = D_1$, $\frac{L_3}{2} = D_3$ либо совпадают, либо присоединены друг к другу. Отсюда следует, что среди индексов пересечения, фигурирующих в равенстве (*), лишь один может равняться нулю (так как кривые H, H_1 различны). Поэтому один из этих индексов пересечения положителен, но не превосходит $s - 1$.

Итак, по паре эллиптических кривых, обладающих свойством (I) п. 2, D) § 2, с индексом пересечения, бóльшим единицы, мы нашли другую пару эллиптических кривых, обладающих тем же свойством, индекс пересечения которых положителен, но меньше исходного.

Повторяя этот процесс, мы найдем кривые, существование которых утверждалось в начале п. 1.

2. В этом пункте мы получим представление поверхности Энриквеса F в виде двойной плоскости с кривой ветвления восьмой степени, распадающейся на кривую шестой степени и две прямых*.

A) Допустим сначала, что поверхность F не является поверхностью специального типа.

Рассмотрим тогда линейную систему $C = |D_1 + D_2 + D_1'|$, где D_1, D_2 — эллиптические кривые с индексом пересечения 1, существование которых было доказано в пункте 1. Нетрудно показать (и это будет сделано в начале следующего параграфа), что каждая из кривых D_1, D_2, D_1' D_2' неприводима, а $\dim|D_1 + D_2| = 1$. Так как $(C^2) = 4$, то $\dim|C| \geqslant 2$, а так как система C не может иметь неподвижных компонент, то $\dim|C| = 2$, согласно предложению 4 § 1. Каждая из трех следующих кривых принадлежит системе C: $D_1 + D_2 + D_1'$, $2D_1 + D_2'$, $2D_1' + D_2'$; с другой стороны, эти три кривые не принадлежат никакой одномерной подсистеме этой системы: кривые $2D_1 + D_2'$, $2D_1' + D_2'$ порождают пучок $|2D_1| + D_2'$, которому не принадлежит кривая $D_1 + D_2 + D_1'$. Отсюда следует, что каждая из точек $D_1 \cap D_2'$, $D_1' \cap D_2'$ является базисной точкой системы C. Так как все такие точки должны, очевидно, лежать на кривой D_2', а $(CD_2') = 2$, система C не имеет других базисных точек. Итак, число переменных точек пересечения кривых этой системы равно двум.

* См. примечание при корректуре в конце главы.

Пусть функции $1, x, y$ на поверхности F образуют базис некоторого пространства $L(C_0)$, где C_0 — неприводимый дивизор системы C. Так как система C отображает поверхность F на плоскость, функции x, y порождают в поле $k(F)$ функций на нашей поверхности рациональное подполе $k(x, y)$. Согласно сказанному о переменных точках пересечения, поле $k(F)$ является расширением степени два этого своего подполя. Итак, наша поверхность бирационально эквивалентна двойной плоскости $z^2 = F^n(x, y)$. Чтобы определить n, заметим, что всякий дивизор $\{ax + by + c = 0\}$ принадлежит системе C и, следовательно, имеет род 3. Отсюда следует, что $n = 8$.

Образами точек $D_1 \cap D_2'$, $D_1' \cap D_2'$ на нашей двойной плоскости являются прямые, принадлежащие кривой ветвления. Следовательно, эта кривая ветвления распадается на кривую шестой степени и две прямых.

B) Пусть теперь поверхность F есть поверхность специального типа и неприводимый пучок эллиптических кривых L имеет индекс пересечения 2 с рациональной кривой θ. Мы докажем, что система $\left|L + \theta + K + \frac{L}{2}\right|$ играет в этом случае ту же роль, что и система C при доказательстве утверждения A).

Рассмотрим сначала линейную систему $D = |L + \theta + K|$. Согласно многократно цитированной теореме Кодаиры, $H^1(F, \Omega(D)) = 0$, а потому по теореме Римана — Роха $\dim|D| = \frac{(D^2)}{2} = 1$. Докажем, что система D неприводима. Пусть $|H|$, G — ее подвижная и неподвижная части соответственно. Ввиду неприводимости пучка L, $(LH) > 0$, $(LG) \geqslant 0$ (если $(LH) = 0$, системы L и $|H|$ совпадают, ввиду равенства размерностей, но тогда $G \sim \theta + K$, что невозможно, согласно следствию предложения 1 § 1). Так как $(DL) = 2$, а (LH) четно (следствие предложения 2 § 1), то $(LH) = 2$, $(LG) = 0$. Кривая θ не может входить в неподвижную часть системы D, так как $\dim L' = 0$ (предложение 2 § 1), поэтому $(H\theta), (G\theta) \geqslant 0$. Так как $(D\theta) = 0$, то $(H\theta) = (G\theta) = 0$. Теперь имеем:

$$(H^2) + (HG) = (HD) = (H(L + \theta)) = 2, \quad (HG) + (G^2) = (GD) = (G(L + \theta)) = 0.$$

Возможны поэтому следующие случаи:

1) $(H^2) = 0$, $(HG) = 2$, $(G^2) = -2$ и 2) $(H^2) = 2$, $(HG) = 0$, $(G^2) = 0$.

В случае 1) система $|H|$ является неприводимым пучком эллиптических кривых, что невозможно, согласно следствию предложения 2 § 1, так как $\left(H \frac{L}{2}\right) = 1$.

Итак, имеет место случай 2). Докажем, что $G = 0$. Поскольку дивизор $\frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2}\right)' + \theta$ принадлежит системе D, а θ не входит в G, то $G \leqslant \frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2}\right)'$. Так как $\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = 0$, а носитель дивизора $\frac{L}{2}$ связен, этот дивизор не содержит компонент (даже и приводимых) с нулевым индексом самопересечения. Так как то же можно сказать о дивизоре $\left(\frac{L}{2}\right)'$, а дивизор G распадается на две не имеющие общих точек компоненты $\left(\text{О. Н. Д.}\left(G, \frac{L}{2}\right), \text{О. Н. Д.}\left(G, \left(\frac{L}{2}\right)'\right)\right)$ и имеет нулевой индекс самопересечения, то $G = 0$. Итак, пучок D неприводим.

Заметим, что этот пучок имеет две базисные точки, не лежащие на кривой θ ($(D\theta) = 0$): именно, если D_0 — неприводимая кривая этого пучка, то базисными являются точки $D_0 \cap \frac{L}{2}$, $D_0 \cap \left(\frac{L}{2}\right)'$, так как обе эти точки лежат также и на кривой $\frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2}\right)' + \theta \in D$.

Рассмотрим, наконец, линейную систему $C = \left|D + \frac{L}{2}\right|$. Так как $(C^2) = 4$, то $\dim |C| \geqslant 2$. С другой стороны, размерность этой системы должна быть меньше, чем размерность неприводимой системы $|D + L| = |2L + \theta + K|$.

Согласно теореме Кодаиры, $H' (F, \Omega (D + L)) = 0$, а так как $((D + L)^2) = 6$, то размерность этой системы равна трем. Итак, $\dim |C| = 2$.

Система C содержит одномерные подсистемы $|D| + \frac{L}{2}$ и $|L| + \theta + \left(\frac{L}{2}\right)'$. Отсюда следует, что эта система не имеет неподвижных компонент, не составлена из пучка, а потому неприводима. Базисные множества этих подсистем пересекаются, причем только в точках $D_0 \cap \left(\frac{L}{2}\right)'$, $\frac{L}{2} \cap \theta$. Эти две точки являются единственными базисными точками системы C. Теперь, дословно повторяя соответствующую часть рассуждений п. А), мы можем доказать, что наша поверхность Энриквеса специального типа F бирационально эквивалентна двойной плоскости с кривой ветвления восьмой степени, распадающейся на кривую шестой степени и две прямые.

§ 4. Представление общей поверхности Энриквеса в виде поверхности шестой степени в P^3, дважды проходящей через ребра некоторого тетраэдра

1. В этом пункте мы укажем некоторые свойства кривых D_1, D_2, построенных в п. 1, § 3.

А) *Если две изолированные эллиптические кривые* D_1, D_2, *обладающие свойством* (I) *п.* 2, D) § 2, *имеют индекс пересечения* 1, *то* 1) *каждая из кривых* D_1, D_2, D_1', D_2' *неприводима*; 2) *линейные системы* $|D_1 + D_2|$, $|D_1 + D_2'|$ *неприводимы, одномерны и имеют по две базисные точки*: $D_1 \cap D_2'$, $D_1' \cap D_2$ — *первая*, $D_1 \cap D_2$, $D_1' \cap D_2'$ — *вторая*.

Доказательство. 1) Допустим, что кривая D_1 приводима. Так как $(D_1D_2) = 1$, кривая D_1 не может иметь вид $s\theta$, $s > 1$, где θ — эллиптическая кривая, а потому она имеет рациональные компоненты. Так как эта кривая еще и связна, все ее компоненты рациональны. Так как пучок $|2D_2|$ неприводим, $(D_2\theta) \geqslant 0$ для всякой компоненты θ кривой D_1. Кроме того, среди этих компонент найдется такая, для которой $(D_2\theta) > 0$. Но в этом случае имеем: $(D_2D_1) \geqslant (D_2\theta) \geqslant 2$ (напомним, что рассматриваемая поверхность F не является поверхностью специального типа). Получаем противоречие. Аналогично доказывается неприводимость кривых D_2, D_1', D_2.

2) Из доказанной первой части нашего утверждения следует, что система $|D_1 + D_2|$ не имеет неподвижных компонент. Так как $((D_1 + D_2)^2) = 2$, из предложений 3 и 4 § 1 следует, что эта система неприводима и одномерна. Кривые $D_1 + D_2$, $D_1' + D_2'$ принадлежат этой системе и имеют две общие точки: $D_1 \cap D_2'$ и $D_1' \cap D_2$. Из сказанного выше следует, что обе эти точки являются базисными точками системы $|D_1 + D_2|$. Аналогично доказываются утверждения, относящиеся к системе $|D_1 + D_2'| = |D_1' + D_2|$.

В) *Кривые* D_1, D_2, D_1', D_2' *образуют четырехугольник с вершинами* $P_1 = D_1 \cap D_2$, $P_2 = D_1 \cap D_2'$, $P_3 = D_1' \cap D_2$, $P_4 = D_1' \cap D_2'$. *Если изолированная эллиптическая кривая* D_3, *обладающая свойством* (I) *п.* 2, D), § 2, *имеет с каждой из кривых* D_1, D_2 *индекс пересечения* 1 *и проходит через одну из вершин четырехугольника, то* 1) *существует такой эффективный дивизор* Γ, *что*

$$D_3 + \Gamma \sim D_1 + D_2 + \varepsilon K, \quad \varepsilon = 0, 1, \quad D_1\Gamma = D_2\Gamma = 0;$$

2) *кривая* D_3 *проходит также и через противоположную вершину четырехугольника, т. е. является его диагональю, а кривая* D_3' *является другой его диагональю.*

Доказательство. 1) Допустим, что кривая D_3 проходит через вершину $P_1 = D_1 \cap D_2$. Тогда дивизоры $D_3 \cdot D_2$, $D_1 \cdot D_2$ на кривой D_2 эквивалентны, а потому $\dim H^0 (D_2, \Omega_{D_2} (D_3 - D_1|_{D_2})) = 1$. Из точной последовательности

$$0 \to H^0 (D_2, \Omega_{D_2} (D_3 - D_1|_{D_2})) \to H' (F, \Omega (D_3 - D_1 - D_2)),$$

соответствующей точной последовательности пучков

$$0 \to \Omega (D_3 - D_1 - D_2) \to \Omega (D_3 - D_1) \to \Omega_{D_2} (D_3 - D_1|_{D_2}) \to 0$$

(очевидно, $H^0 (F, \Omega (D_3 - D_1)) = 0$), заключаем, что

$$\dim H' (F, \Omega (D_3 - D_1 - D_2)) \geqslant 1.$$

По теореме Римана — Роха,

$$\dim H^0 (F, \Omega (D_3 - D_1 - D_2)) + \dim H^0 (F, \Omega (D_1 + D_2 + K - D_3)) = \\ = \frac{((D_3 - D_1 - D_2)^2)}{2} + 1 + \dim H' (F, \Omega (D_3 - D_1 - D_2)).$$

Так как $((D_3 - D_1 - D_2)^2) = -2$, $H^0 (F, \Omega (D_3 - D_1 - D_2)) = 0$, то $\dim H^0 (F, \Omega (D_1 + D_2 + K - D_3)) \geqslant 1$, а потому существует такой эффективный дивизор Γ, что $D_3 + \Gamma \sim D_1 + D_2 + K$. Рассматривая индексы пересечений левой и правой частей этого соотношения с дивизором D_1 (D_2), убеждаемся, что $(D_1\Gamma) = 0$ $((D_2\Gamma) = 0)$.

2) Вершина $P_4 = D_1' \cap D_2'$, противоположная вершине P_1, является базисной точкой системы $|D_1 + D_2 + K| = |D_1 + D_2'|$ и потому лежит на кривой $D_3 + \Gamma$. Так как $(\Gamma D_1) = (\Gamma D_2) = 0$, а D_1 и D_2 неприводимы и изолированы, эта точка не лежит на кривой Γ, а потому лежит на кривой D_3. Аналогичным образом из соотношения $D_3' + \Gamma \sim D_1 + D_2$ следует, что кривая D_3' является второй диагональю четырехугольника.

Тем самым утверждение В) доказано.

2. В этом пункте мы построим линейную систему, отображающую поверхность F на поверхность шестой степени в пространстве P^3, дважды проходящую через ребра тетраэдра. Для этого нам надо найти такую тройку изолированных (неприводимых) эллиптических кривых D_1, D_2, D_3, что $(D_iD_j) = 1 - \delta_j^i$, $i, j = 1, 2, 3$, и, кроме того, никакие три из кривых D_i, D_i', $i = 1, 2, 3$ не проходят через одну точку.

А) *На поверхности* F *существует изолированная эллиптическая кривая, обладающая свойством* (I) *п.* 2, D) § 2 *и отличная от кривых* D_1, D_2, D_1', D_2'.

Доказательство. Предположим, что такой кривой не существует. Докажем тогда, что всякий дивизор на поверхности F эквивалентен дивизору вида $mD_1 + nD_2 + \varepsilon K$, $\varepsilon = 0, 1$.

Первым шагом индукции по значению арифметического рода является доказательство отсутствия на поверхности F неприводимых рациональных кривых. Пусть θ — неприводимая рациональная кривая на поверхности F. Если $(D, \theta) = 0$, то кривая θ является компонентой некоторого дивизора из пучка $|2D_1|$. В этом случае другие компоненты этого дивизора также рациональны, а потому на поверхности F существует рациональная кривая θ_1, имеющая положительный индекс пересечения с одним из дивизоров D_1, D_2. Имеем $p_a(D_1+\theta_1)>1$, если $D_1\theta_1>0$; кроме того, система $|D_1+\theta_1|$ в этом случае неприводима, и к ней может быть применена основная конструкция. Мы получим пару различных эллиптических кривых, обладающих свойством (I) п. 2, D) § 2, каждая из которых, очевидно, отлична от кривых D_1, D_1', что противоречит нашему предположению.

Если $p_a(\theta)=1$, а θ — неприводимый изолированный дивизор, то, по предположению, θ совпадает с одним из дивизоров D_1, D_1', D_2, D_2'.

Если $p_a(\theta)=1$, а θ меняется в пучке, то же самое можно сказать о дивизоре $\frac{\theta}{2}$.

Если, наконец, арифметический род неприводимой кривой θ больше единицы, она эквивалентна, согласно основной конструкции, некоторому приводимому дивизору, все компоненты которого имеют, согласно предложению 4, § 1, меньший арифметический род, и мы можем применить предположение индукции.

Приведем теперь доказанное к противоречию. Известно, что форма типа (1,1) тогда и только тогда представляет алгебраический цикл, когда она представляет целочисленный класс когомологий. Так как геометрический род нашей поверхности равен нулю, всякая замкнутая 2-форма имеет тип (1,1). Зная значения $p_a(F)$ и (K^2), легко подсчитать, что двумерное число Бетти поверхности F равно 10, и, следовательно, она содержит даже 10 независимых алгебраических циклов.

B) *Пусть* D_1, D_2, D_3 — *изолированные эллиптические кривые, обладающие свойством* (I) *п.* 2, D) § 2.

Пусть $(D_iD_j)=1-\delta_j^i$, *а кривая* D_3 *проходит через одну из вершин четырехугольника, образованного кривыми* D_1, D_2, D_1', D_2'. *Тогда на поверхности* F *существует изолированная эллиптическая кривая* D_4, *также обладающая свойством* (I) *п.* 2, D) § 2 *и отличная от кривых* D_1, D_2, D_3 *и их присоединенных.*

Доказательство. Заметим сначала, что, согласно утверждению 1, B) § 4, условия нашего утверждения симметричны относительно кривых D_1, D_2, D_3. Имеем поэтому: $D_1+\Gamma_1\sim D_2+D_3$, $D_2+\Gamma_2\sim D_1+D_3$, $D_3+\Gamma_3\sim D_1+D_2$, где $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3>0$, $(\Gamma_iD_j)=0$ при $i\neq j$ (мы заменяем здесь, если это необходимо, некоторые из кривых D_1, D_2, D_3 их присоединенными). Нетрудно видеть, кроме того, что $(\Gamma_iD_i)=2$, $(\Gamma_i^2)=-2$. Из последнего равенства следует, что каждый из дивизоров Γ_i содержит рациональные компоненты. Так как каждая из компонент дивизора Γ_i является компонентой некоторого дивизора из пучка $|2D_j|(j\neq i)$, отличного от дивизоров $2D_j$, $2D_j'$, то все компоненты кривой Γ_i рациональны.

Если дивизор Γ_i приводим, обозначим через θ_i ту его неприводимую компоненту, для которой $(D_i\theta_i)>0$. К неприводимой линейной системе $|D_i+\theta_i|$, арифметический род которой больше единицы, можно применить основную конструкцию; мы найдем такие изолированные эллиптические кривые H_1, H_2, обладающие свойством (I) п. 2, D) § 2, и такой дивизор $G\geqslant 0$, что $D_i+\theta_i\sim H_1+H_2+G$. Если бы дивизоры H_1, H_2 содержались среди дивизоров D_1, D_2, D_3 и их присоединенных, мы получили бы $\theta_i\sim\Gamma_i+G+\varepsilon K$, $\varepsilon=0, 1$. При $\varepsilon=0$ это противоречит приводимости кривой Γ_i, а при $\varepsilon=1$ — следствию предложения 1 § 1.

Аналогичным образом мы рассуждали бы и в том случае, когда на поверхности F существует такая неприводимая рациональная кривая θ, отличная от Γ_i, что $(D_i\theta_i)>0$.

Заметим, наконец, что если кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ неприводимы, то мы, рассуждая, как при доказательстве утверждения A), можем доказать, что на поверхности F существует либо искомая эллиптическая кривая, либо еще

одна неприводимая рациональная кривая. Эта рациональная кривая θ должна иметь, согласно доказанному, нулевой индекс пересечения с каждой из кривых D_1, D_2, D_3. Так как $((D_1+D_2-\theta)^2)=0$, то существует эффективный дивизор $\widetilde{D}_4\sim D_1+D_2-\theta$. Согласно основной конструкции, можно считать, что все неприводимые компоненты дивизора $\widetilde{D}_4$ либо рациональны, либо эллиптичны и изолированы. Очевидно, кроме того, что ни одна из кривых $D_1, D_2, D_1', D_2', \Gamma_3$ не может быть компонентой этого дивизора (так как каждый из дивизоров $D_i-\theta$, $D_i'-\theta$ не эквивалентен эффективному). Поскольку $(D_3\widetilde{D}_4)=2$, дивизор $\widetilde{D}_4$ содержит либо рациональную компоненту (отличную от Γ_3), имеющую положительный индекс пересечения с дивизором D_3, либо искомую эллиптическую кривую D_4. Это завершает доказательство утверждения B).

C) *Пусть* D_1, D_2 — *изолированные эллиптические кривые с индексом пересечения* 1. *Если существует изолированная эллиптическая кривая* M, *обладающая свойством* (I) *п.* 2, D) § 2, *и такая, что одно из чисел* (MD_1), (MD_2) *больше единицы, то существует и четверка изолированных эллиптических кривых* H_1, H_2, H_3, H_4, *обладающих свойством* (I) *п.* 2, D) § 2, *и таких, что* $(H_iH_j)=1-\delta_j^i$ $((i, j)\neq(3, 4))$.

Доказательство. Пусть $(MD_1)=a$, $(MD_2)=b$, $a\geqslant b$, $a>1$. Рассмотрим линейную систему $|M+D_1|$. Согласно утверждению A) п. 1 § 3, эта система неприводима. Согласно утверждению B), п. 1 § 3, либо дивизоры M, M' неприводимы, либо существует неприводимая линейная система $|C|<|M+D_1|$, арифметический род которой удовлетворяет неравенствам $1<p_a(C)<p\ (M+D_1)$. В первом случае система $|2(M+D_1)|$ содержит специальную кривую, отличную от кривой $M+D_1+M'+D_1'$ (см. утверждение C), п. 1 § 3).

Рассматривая теперь эту специальную кривую или специальную кривую системы $|2C|$, мы найдем, согласно основной конструкции, такую пару изолированных эллиптических кривых M_1, M_2 и такой дивизор $\Gamma\geqslant 0$, что $M+D_1\sim M_1+M_2+\Gamma$. Имеем теперь:

$$(M_1D_1)+(M_2D_1)=a-(\Gamma D_1),\ (M_1D_2)+(M_2D_2)=b+1-(\Gamma D_2). \quad (*)$$

Каждое из чисел (M_1D_1), (M_2D_1), (M_1M), (M_2M) положительно. Действительно, если, например, $(M_1D_1)=0$, то, как указывалось при доказательстве утверждения D), п. 1 § 3, $M_1=D_1$ или D_1', и, следовательно, $M=M_2+\Gamma$ или $M_2'+\Gamma$. Но кривая M не может иметь собственных эллиптических компонент (предложение 2 § 1), а потому $\Gamma=0$, $M=M_2$ или M_2', что противоречит нашему выбору специальной кривой. Так как, кроме того, (ΓD_1), $(\Gamma D_2)\geqslant 0$, то (M_1D_1), $(M_2D_1)<a$. Если обе кривые M_1, M_2 отличны от D_2, D_2', то второе из равенств $(*)$ дает нам (M_1D_2), $(M_2D_2)\leqslant b$. Пусть кривая M_2 совпадает с D_2. Тогда $(M_1D_1)\leqslant a-1$, $(M_1D_2)\leqslant b+1$.

Рассмотрим случай, когда $(M_1D_1)=(M_1D_2)=1$ (а $M_2=D_2$). При подходящих $r>0$ и $s>0$ мы можем предполагать, что разность между дивизором $\Gamma_1\geqslant 0$, взятым из соотношения $M+D_1\sim rM_1+sD_2+\Gamma_1+\varepsilon K$ ($\varepsilon=0, 1$ и выбрано подходящим образом), и каждым из дивизоров M_1, D_2, M_1', D_2' не эквивалентна эффективному дивизору. Допустим, что один из индексов пересечения $(M_1\Gamma_1)$, $(D_2\Gamma_1)$ положителен, и предположим, что это первый из них. Тогда существует такая неприводимая компонента θ дивизора Γ_1, что $(M_1\theta)>0$. Рассматривая специальную кривую системы $|M_1+\theta|$, приходим к соотношению $M_1+\theta\sim\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2+\widetilde{\Gamma}$. Согласно построению, оба дивизора $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$ не могут одновременно содержаться среди дивизоров D_1, D_2, M_1 и их присоединенных. Поэтому в рассматриваемом случае мы можем либо положить $H_1 = D_1, H_2 = D_2, H_3 = M_1, H_4 = \widetilde{M}_1$ (если $\widetilde{M}_1 \neq D_1, D_1', M_1, M_1', D_2, D_2'$), либо без ограничения общности считать, что один из индексов пересечения (M_1D_1), (M_1D_2) больше единицы.

Если $(M_1\Gamma_1) = (D_2\Gamma_1) = 0$, то, с одной стороны, $(\Gamma_1^2) = (M\Gamma_1) + (D_1\Gamma_1) \geqslant 0$ и, с другой стороны, $(\Gamma_1^2) \leqslant 0$, ибо иначе каждый из индексов пересечения $(M_1\Gamma_1)$, $(D_2\Gamma_1)$ был бы положителен. Следовательно, $(\Gamma_1^2) = (M\Gamma_1) = (D_1\Gamma_1) = 0$, а потому, с одной стороны, $(MD_1) = s + r$ и, с другой стороны, $(MD_1) = sr$, т. е. $s = r = 2$. Отсюда $(MM_1) = (MD_2) = 1$, и мы можем положить: $H_1 = D_2, H_2 = M_1, H_3 = D_1, H_4 = M$.

Теперь мы можем считать, что (M_1D_1) или (M_1D_2) больше единицы, если $M_2 = D_2$ (или, аналогично, D_2'). Допустим, что $(M_1D_1) + (M_1D_2) \geqslant (M_2D_1) + (M_2D_2)$, и положим $a_1 = (M_1D_1)$, $b_1 = (M_1D_2)$. Если $a > b + 1$, то $a > \max(a_1, b_1)$, кроме того, $a_1 + b_1 \leqslant a + b$. Будем повторять нашу конструкцию, заменяя при первом повторении M на M_1 и D_1 на тот из дивизоров D_1, D_2, индекс пересечения которого с M_1 больше. Пока a_i остается больше, чем $b_i + 1$, максимум индексов пересечения уменьшается, а их сумма не увеличивается, причем она остается постоянной лишь в случае $M_2 = D_2$ или D_2', $(\Gamma D_1) = (\Gamma D_2) = 0$.

Рассмотрим критический момент, когда $a = b + 1$ или b, $M_2 = D_2$ или D_2', $(\Gamma D_1) = (\Gamma D_2) = 0$. Докажем, что тогда $\Gamma = 0$, $a = b + 1$, $(MM_1) = 1$. Имеем

$$(\Gamma^2) = ((M + D_1 - M_1 - D_2)^2) = 2 - 2(MM_1),$$
$$a = (MD_1) = (MM_1) + b + (\Gamma M).$$

Так как $(\Gamma M) \geqslant 0$, $(MM_1) > 0$, то $a = b + 1$, $(MM_1) = 1$, $(\Gamma^2) = 0$. С другой стороны, дивизор Γ, если он эффективен, должен состоять из компонент некоторых дивизоров из пучка $|2D_1|$. Так как $(D_1D_2) > 0$, $(\Gamma D_2) = 0$, то все эти компоненты собственные, а потому $(\Gamma^2) < 0$, что противоречит уже доказанному равенству $(\Gamma^2) = 0$.

Итак, для критического момента имеем $M + D_1 \sim M_1 + D_2$ (или $M_1 + D_2'$). Так как $(MM_1) = 1$, дивизоры M, M_1 неприводимы (утверждение 1, A)), а так как $a = b + 1 > 1$, мы находимся в тех условиях, при которых доказано утверждение 1, C), § 3. Согласно доказательству этого утверждения, система $|2(M + D_1)| = |2(M_1 + D_2)|$ содержит специальную кривую, отличную от кривых $M + D_1 + M' + D_1'$, $M_1 + D_2 + M_1' + D_2'$. Эта третья специальная кривая позволит нам найти изолированные эллиптические дивизоры M_3, M_4, обладающие свойством (I), п. 2, D), § 2, отличные от дивизоров D_1, D_2, M, M_1 и их присоединенных. Каждый из дивизоров M_3, M_4 позволит продолжить наш процесс.

Теперь наша конструкция полностью описана. Очевидно, что построенный процесс оборвется через некоторое число n шагов и мы получим, в дополнение к кривым $H_1 = D_1, H_2 = D_2$, пару дивизоров $H_3 = M_{2n-1}$, $H_4 = M_{2n}$, существование которой утверждалось.

D) *Пусть H_1, H_2, H_3, H_4 — изолированные эллиптические дивизоры, обладающие свойством* (I), *п.* 2, D), § 2, *пусть* $(H_iH_j) = 1 - \delta_j^i$ $((i, j) \neq (3, 4))$, *а дивизоры H_3, H_4 проходят через какие-то вершины четырехугольника, образованного кривыми H_1, H_2, H_1', H_2'. Тогда существуют такие изолированные эллиптические дивизоры D_1, D_2, D_3, также обладающие свойством* (I), *п.* 2, D), § 2, *что:* 1) $(D_iD_j) = 1 - \delta_j^i$, $i, j = 1, 2, 3$; 2) *дивизор D_3 не проходит ни через одну вершину четырехугольника, образованного кривыми D_1, D_2, D_1', D_2'.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать (заменяя, если это необходимо, дивизор H_3 на присоединенный), что дивизоры H_3, H_4 проходят через одну пару вершин четырехугольника $H_1 + H_2 + H_1' + H_2'$ (см. утверждение 1, A)). Так как $H_3 + \Gamma_3 \sim H_1 + H_2$, $H_4 + \Gamma_4 \sim H_1 + H_2$ (утверждение 1, B)), легко подсчитать, что $(H_3H_4) = 2$, $(H_3\Gamma_4) = (H_4\Gamma_3) = 0$. Согласно утверждениям 1, A), § 4 и 1. C), § 3, дивизоры H_3, H_4, H_3', H_4' неприводимы, а система $|2(H_3 + H_4)|$ содержит специальную кривую, отличную от кривой $H_3 + H_4 + H_3' + H_4'$. С помощью этой кривой мы найдем дивизоры H_5, H_6 (изолированные, эллиптические и т. д.), удовлетворяющие (при некотором $\Gamma \geqslant 0$) соотношению $H_3 + H_4 \sim H_5 + H_6 + \Gamma$. Так как дивизоры H_5, H_6 отличны от дивизоров H_3, H_4, H_3', H_4', а $(H_3\Gamma), (H_4\Gamma) \geqslant 0$, то $(H_3H_5) = (H_3H_6) = (H_4H_5) = (H_4H_6) = 1$, $(H_3\Gamma) = (H_4\Gamma) = 0$. Оба дивизора H_5, H_6 не могут содержаться среди дивизоров H_1, H_2, H_1', H_2'. Действительно, мы бы имели: $H_3 + H_4 \sim H_1 + H_2 + \varepsilon K + \Gamma$, $H_3 + H_4 \sim H_4 + \Gamma_4 + \Gamma + \varepsilon K$, $H_3 \sim \Gamma + \Gamma_4 + \varepsilon K$, что противоречит неприводимости и изолированности дивизоров H_3, H_3'. Отсюда следует, что один из дивизоров H_5, H_6 (пусть это будет дивизор H_5) отличен от дивизоров H_1, H_2, H_1', H_2' и имеет с одним из них (пусть это будет H_2) индекс пересечения 1. Положим теперь $D_1 = H_2$, $D_2 = H_3$, $D_3 = H_5$. По условию, вершины четырехугольника $D_1 + D_2 + D_1' + D_2'$ совпадают с вершинами четырехугольника $H_1 + H_2 + H_1' + H_2'$, а кривые H_4, H_4' являются диагоналями этих четырехугольников (см. утверждение 1, B)). Если бы кривая D_3 также являлась диагональю, мы имели бы $(D_3H_4) \geqslant 2$, что невозможно.

E) *На поверхности F существует тройка неприводимых изолированных эллиптических кривых D_1, D_2, D_3, обладающих свойством* (I), п. 2, D), § 2, *и таких, что* 1) $(D_iD_j) = 1 - \delta_j^i$, $i, j = 1, 2, 3$; 2) *кривая D_3 не проходит через вершины четырехугольника, образованного кривыми D_1, D_2, D_1', D_2'.*

Доказательство. Согласно результатам п. 1 § 3, на поверхности F существует пара изолированных эллиптических кривых D_1, D_2 с индексом пересечения 1. Согласно утверждению 2, A), на поверхности F существует третья изолированная эллиптическая кривая, также обладающая свойством (I), п. 2, D), § 2. Эта кривая либо является искомой кривой D_3, либо удовлетворяет условиям утверждения C), либо удовлетворяет условиям утверждения B). Если она удовлетворяет условиям утверждения B), то существует либо искомая кривая D_3, либо кривая, удовлетворяющая условиям утверждения C), либо пара кривых, удовлетворяющих (вместе с кривыми D_1, D_2) условиям утверждения D). Если она удовлетворяет условиям утверждения C), то также существует либо искомая кривая D_3, либо пара кривых, удовлетворяющих условиям утверждения D). Используя это последнее утверждение, получаем доказательство утверждения E).

3. Рассмотрим линейную систему $|C| = |D_1 + D_2 + D_3|$, где D_1, D_2, D_3 — кривые, построенные в утверждении 2, E). Мы докажем, что эта система регулярно и бирационально отображает нашу поверхность F на поверхность шестой степени в пространстве P^3, дважды проходящую через ребра некоторого тетраэдра.

A) *Линейная система $|C|$ неприводима, имеет размерность три и не имеет базисных точек, т. е. регулярно отображает поверхность F в пространство P^3.*

Доказательство. Так как $(C^2) = 6$, то $\dim|D_1 + D_2| < 3 \leqslant \dim|D_1 + D_2 + D_3|$. Так как система $|D_1 + D_2|$ не имеет неподвижных компонент, а кривая D_3 неприводима (см. утверждение 1, A)) и не является неподвижной компонентой системы $|C|$, то система $|C|$ не имеет неподвижных компонент и неприводима, согласно предложению 3 § 1. Согласно предложению 4, § 1, $\dim |C| = 3$. Докажем, что система $|C|$ не имеет базисных точек. Действительно, эта система содержит кривые $D_1 + D_2' + D_3$, $D_1 + D_2' + D_3'$, $D_1' + D_2' + D_3$, $D_1' + D_2 + D_3'$; если базисная точка P системы $|C|$ лежит на кривой D_2, то она не лежит на кривой D_2', а потому лежит на D_1 или D_3'. В первом случае она не лежит на D_1', а потому лежит на D_3, т. е. $P = D_1 \cap D_2 \cap D_3$; во втором случае она не лежит на D_3, а потому лежит на D_1', т. е. $P = D_1' \cap D_2 \cap D_3'$.

Аналогично, предполагая, что P лежит на D_1 или D_3, мы получим еще два возможных значения: $P = D_1 \cap D_2' \cap D_3'$, $P = D_1' \cap D_2' \cap D_3$. Других базисных точек система $|C|$ иметь не может. Но четыре полученных пересечения пусты согласно построению кривых D_1, D_2, D_3 (см. утверждение 2, E)) и утверждению 1, B). Тем самым наше утверждение доказано.

B) *Система $|C|$ бирационально отображает поверхность F.*

Доказательство. Обозначим наше отображение через φ. Из неприводимости системы $|C|$ следует, что образом при отображении φ является поверхность. Так как $(C^2) = 6$, а система $|C|$ не имеет базисных точек, степень отображения φ является делителем числа 6.

Рассмотрим подсистему $|D_1 + D_2| + D_3$ системы $|C|$, состоящую из кривых, содержащих D_3 в качестве компоненты, и подсистему $|D_2 + D_3| + D_1$. Согласно утверждению 1, A), система $H_1 = |D_1 + D_2|$ одномерна и имеет ровно две базисные точки: точку $D_1 \cap D_2'$ и точку $D_1' \cap D_2$. Аналогично, система $H_2 = |D_2 + D_3|$ неприводима и имеет две базисные точки: $D_2 \cap D_3'$, $D_2' \cap D_3$. Согласно построению кривых D_1, D_2, D_3, системы H_1, H_2 не имеют, следовательно, общих базисных точек. Пусть Γ_1 — общая кривая системы H_1, Γ_2 — общая кривая системы H_2. $((\Gamma_1 + D_3)(\Gamma_2 + D_1)) = 6$, причем из шести точек пересечения три являются точками пересечения Γ_1 и Γ_2, а три остальных лежат на кривых D_1 и D_3. На кривой Γ_1 имеется лишь конечное число точек, склеивающихся при отображении φ с точками кривых D_1 и D_3, причем ни одна из этих точек не является базисной точкой системы H_2. Мы можем считать поэтому, что ни одна из трех точек множества $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ не склеивается с какой-либо точкой множества $D_1 \cup D_3$. Это означает, что эти три точки могут склеиваться только между собой, и, значит, ввиду общности конструкции, степень отображения φ равна либо 1, либо 3.

Так как $(CH_1) = 4$, а системы $|C|$, H_1 не имеют общих базисных точек, то, аналогично, степень отображения является делителем числа 4. Окончательно, степень отображения φ равна 1, т. е. это отображение бирационально.

C) *Образом при отображении φ является поверхность шестой степени в P^3, дважды проходящая через ребра тетраэдра.*

Доказательство. Так как $\dim |C| = 3$, система $|C|$ отображает нашу поверхность в P^3, и так как $(C^2) = 6$ (система $|C|$ не имеет базисных точек), то степень образа равна шести.

Рассмотрим кривые $D_1 + D_2 + D_3$, $D_1 + D_2' + D_3'$, $D_1' + D_2 + D_3'$, $D_1' + D_2' + D_3$ системы $|C|$. Образом каждой из них является некоторое плоское сечение. Так как $(CD_i) > 0$, кривые D_i, D_i', $i = 1, 2, 3$ не стягиваются при отображении φ, а потому пересечения указанных плоских сечений одномерны. Это значит, что каждое из этих пересечений является прямой, образом одной из кривых D_i, D_i', $i = 1, 2, 3$. Итак, поверхность $\varphi(F)$ содержит шесть прямых $\varphi(D_i)$, $\varphi(D_i')$.

Очевидно, прообраз их объединения совпадает с множеством $(\bigcup D_i) \cup (\bigcup D_i')$. Докажем, что никакие две из шести кривых D_i, D_i' не склеиваются при отображении φ. Действительно, пусть $P \in D_1$, $Q \in D_2$, $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Это значит, что всякий дивизор системы $|C|$, проходящий через Q, проходит и через P. Одним из таких дивизоров является дивизор $D_1' + D_2 + D_3'$, а потому $P = D_1 \cap D_2$ или $D_1 \cap D_3'$. Доказательство аналогично и для любой другой пары.

Докажем теперь, что поверхность $\varphi(F)$ дважды проходит через каждую из прямых $\varphi(D_i)$, $\varphi(D_i')$. Нам достаточно показать, что отображение φ двулистно на каждой из кривых D_i, D_i'. Так как $(CD_i) = 2$, это отображение не более чем двулистно на D_i. С другой стороны, оно разветвлено как отображение неособой эллиптической или особой рациональной кривой на неособую рациональную кривую $\varphi(D_i)$.

Нам осталось доказать, что шесть прямых $\varphi(D_i)$, $\varphi(D_i')$ образуют тетраэдр, или, что то же самое, четыре указанных плоских сечения не проходят через одну точку. Если бы это было неверно, через одну точку проходили бы все шесть прямых $\varphi(D_i)$, $\varphi(D_i')$, т. е. отображение φ склеивало двенадцать точек $D_i \cap D_j$, $D_i \cap D_j'$, $D_i' \cap D_j'$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$). Мы доказали уже, однако, что если точка $P \in D_1$ склеивается с точкой $Q \in D_2$, то $P = D_1 \cap D_2$ или $D_1 \cap D_3'$, т. е. точки $D_1 \cap D_3$ и $D_1 \cap D_2$ не склеиваются при отображении φ.

Тем самым утверждение C) полностью доказано.

§ 5. «Число модулей» поверхности Энриквеса

В этом параграфе будет вычислено «число модулей» поверхности Энриквеса. Согласно известной теореме Кодаиры, Ниренберга и Спенсера [28], полное, эффективно параметризованное в окрестности каждой своей точки пространство модулей многообразия F существует, если тривиальны его (т. е. F) нульмерная и двумерная группы гомологий с коэффициентами в пучке Θ ростков голоморфных векторных полей; кроме того, размерность этого пространства равна в этом случае размерности одномерной группы гомологий с коэффициентами в этом пучке.

Итак, докажем, что $H^0(F, \Theta) = H^2(F, \Theta) = 0$.

Так как $2K(F) \sim 0$, существует алгебраическая поверхность F_1, двулистно и неразветвленно накрывающая поверхность F, с нулевым каноническим классом $K(F_1)$. Очевидно, поверхность F_1 регулярна.

Если бы на поверхности F существовало ненулевое голоморфное векторное поле, такое поле существовало бы и на поверхности F_1. Так как $K(F_1) = 0$, отсюда следовало бы, по двойственности, что $h^{2,1}(F_1) = q(F_1) \neq 0$. Получаем противоречие. Допустим, что $H^2(F, \Theta) \approx H^0(F, \Omega(K \otimes T^*(F))) \neq 0$, где через $T^*(F)$ обозначено расслоенное пространство на F, сопряженное касательному. Тогда $H^0(F_1, \Omega(p^*K \otimes p^*T^*(F))) = H^0(F_1, \Omega(p^*T^*(F))) = H^0(F_1, \Omega(T^*(F_1))) \neq 0$ (через p обозначена проекция $F_1 \to F$), что также противоречит регулярности поверхности F_1.

Итак, искомое «число модулей» существует. С помощью теоремы Римана — Роха нетрудно подсчитать, что оно равно десяти.

Отметим еще, что, согласно теореме Кодаиры [25, теорема 3.5], всякая келерова поверхность с $p = 0$ алгебраична.

Примечание при корректуре. Уточненные формулировки и детальные доказательства теорем этого пункта, а также доказательства обратных им теорем существования, содержатся в моей работе «О куммеровых поверхностях и поверхностях Энриквеса специального типа» (Изв. АН СССР, 1965).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абьянкар С. (Abhyankar S.) Coverings of algebraic curves. Amer. Journ. of Math., v. 79, N 4 (1957), 825—856.
2. Акидзуки И. (Akizuki Y.) Theorems of Bertini on linear systems. Journ. of the Math. Soc. of Japan, v. 3, N 1 (1951), 170—180.
3. Александер Дж. (Alexander J. W.) On the factorization of Cremona plane transformations. Trans. Amer. Math. Soc., v. 17 (1916), 295—300.
4. Андреотти А. (Andreotti A.) On the complex structures of a class of simply-connected manifolds, Algebraic Geometry and Topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton (1957), 53—77.
5. Атиа М. (Atiyah M. F.) Vector bundles over an elliptic curves. Proc. London Math. Soc., v. 7 (1957), 414—452.
6. Атиа М. (Atiyah M. F.) Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc., v. 7 (1957), 181—207.
7. Атиа М. и Сингер Е. (Atiyah M. F. and Singer E.) The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc., v. 69, N 3 (1963), 422—433.
8. Бальдассари М. Алгебраические многообразия. ИЛ, 1961.
9. Борель А. и Серр Ж.-П. Теорема Римана — Роха. Математика, 5 : 5, (1961), 17—54.
10. Ван дер Варден Б. (Van der Waerden B. L.) Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin, 1939.
11. Вейль А. (Weil A.) Foundations of Algebraic Geometry. New York, 1946.
12. Вейль А. (Weil A.) Sur les critéres d'equivalence en géometrie algèbrique. Math. Ann., v. 128 (1954), 95—127.
13. Ву В. (Wu W. T.) Classer caracteristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 230 (1950), 508—511.
14. Гротендик А. (Grothendic A.) Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphére de Riemann. Amer. Journ. of Math., v. 79, N 1 (1957), 121—138.
15. Жижченко А. Б. О числе подполей поля алгебраических функций от одной переменной. Изв. АН СССР, серия матем., т. 21, № 4 (1957), 541—548.
16. Зариский О. (Zarisky O.) Algebraic surfaces. Berlin, 1935.
17. Зариский О. (Zarisky O.) On the purity of the branch locus of algebraic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., v. 44 (1958), 791—796.
18. Зариский О. (Zarisky O.) Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces. Tokyo, Math. Soc. of Japan, 1958.
19. Зариский О. (Zarisky O.) The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces. Amer. Journ. of Math., v. 80 (1958), 146—184.
20. Зариский О. (Zarisky O.) On Castelnuovo's criterion of rationality $P_0 = P_2 = 0$ of an algebraic surface. Illinoice Journ. of Math., v. 2 (1958), 303—315.
21. Зариский О. Теория алгебраических пучков. Математика, 4 : 2 (1960), 3—24.
22. Зариский О. (Zarisky O.) The theorem of Rimann — Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. Ann. of Math., v. 76, N 3 (1962), 560—615.
23. Зариский О. (Zarisky O.) Introduction to the theory of algebraic surface. Harvard, 1960.
24. Кодаира К. (Kodaira K.) On Kähles varieties of restricted type. Ann. of Math., v. 60 (1954), 28—48.
25. Кодаира К. О компактных аналитических поверхностях, I. Математика, 6 : 6 (1962), 20—57.
26. Кодаира К. и Спенсер Д. (Kodaira K. and Spenser D. C.) On deformations of complex analytic structures, I, II. Ann. of Math., v. 67, N 2 (1958), 328—466.
27. Кодаира К. и Спенсер Д. (Kodaira K. and Spenser D. C.) On deformations of complex analytic structures, III, stability theorems for complex structures. Ann. of Math., v. 71 (1960), 43—76.
28. Кодаира К., Ниренберг Л. и Спенсер Д. (Kodaira K., Nirenberg L. and Spenser D. C.) On the existence of deformations of complex analytic structures. Ann. of Math., v. 68 (1958), 450—459.

29. Ленг С. (Lang S.) On quasi algebraic closure. Ann. of Math., v. 55 (1952), 373—390.
30. Ленг С. (Lang S.) Introduction to algebraic geometry. Interscience Tracts, v. 5, London — New York, 1958.
31. Ленг С. (Lang S.) Abelian varieties. Interscience Tracts, v. 7, New York, 1959.
32. Ленг С. и Серр Ж.-П. (Lang S. and Serre J.-P.) Sur les revetments non ramifiés des varietiés algébriques. Amer. Journ. of Math., v. 79, N 2 (1957), 319—330.
33. Ленг С. и Нерон А. Рациональные точки абелевых многообразий над произвольными полями. Математика, 5 : 6 (1961), 13—33.
34. Ленг С. и Тейт Дж. (Lang S. and Tate J.) Principal homogeneous spaces over abelian varietiés. Amer. Journ. of Math., v. 80, N 3 (1958), 659—684.
35. Мамфорд Д. (Mumford D.) The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Institut des houtes études scientifiques, Publ. math., N 9 (1961), 5—22.
36. Мамфорд Д. (Mumford D.) An elementary theorem in geometric invariant theory. Bull. Amer. Math. Soc., v. 67, N 5 (1961), 483—487.
37. Милнор Дж. (Milnor J.) On simply connected 4-manifolds. Symposium de Topologia Algebraica, 1958.
38. Нагата М. (Nagata M.) On rational surfaces, I. Memoires of the Coll. of Sci., Univ. of Kyoto, A, v. 32, N 2 (1960), 351—370.
39. Нагата М. (Nagata M.) On rational surfaces, II. Memoires of the Coll. of Sci., Univ. of Kyoto, A, v. 33, N 3 (1960), 271—293.
40. Нерон А. (Neron A.) Modéles p-minimaux des variétés abélienes. Seminaire Bourbaki, N 227, 1961—1962.
41. Ниренберг Л. и Ньюлендер А. (Newlander A. and Nirenberg L.) Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. Ann. of Math., v. 65 (1957), 391—404.
42. Огг А. (Ogg A.) Cohomology of abelian varieties over function fields. Ann. of Math., v. 76, N 2 (1962), 185—212.
43. Самюэль П. (Samuel P.) Rational equivalence of arbitrary cycles. Amer. Journ. of Math., v. 78, N 2 (1956), 383—400.
44. Севери Ф. (Severi F.) Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero. Atti del R. Inst. Veneto di Scienze, 68 (1909), 829—838.
45. Сегре Б. (Segre B.) Arithmetical properties of algebraic varieties. Proc. Intern. Congress Math., Cambridge Mass. (1950), 490—493.
46. «Семинар К. Шевалле» («Seminair C. Chevalley»). Anneaux de Chow et applications. Ecole Normale Sup., Paris, 1958.
47. Серр Ж.-П. (Serre J.-P.) Un théorème de dualité. Comment. math. Helv., 29, N 1 (1955), 9—26.
48. Серр Ж.-П. (Serre J.-P.) Critére de rationalité pour les surfaces algèbriques. Seminair Bourbaki, 1957.
49. Серр Ж.-П. (Serre J.-P.) Sur les groupes algèbriques et theorie des corps des classes. Hermann, Paris, 1958.
50. Серр Ж.-П. Алгебраические когерентные пучки. Сб. «Расслоенные пространства и их приложения». ИЛ, 1958, 372—417.
51. Серр Ж.-П. Локальная алгебра и кратности пересечений. Математика, 7 : 5, 1963, 3—95.
52. Тзен К. (Tsen C. C.) Division algebren über Funktionenkörpern. Nach. Ges. Wiss., Göttingen, 1933.
53. Тюрин А. Н. О классификации двумерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода. Изв. АН СССР, серия матем., т. 28, № 1 (1964), 21—52.
54. Тюрин А. Н. Классификация двумерных векторных расслоений над алгебраическими кривыми. Изв. АН СССР, серия матем. (1964) (в печати).
55. Ходж В. и Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. I и II. М., 1954; т. III, М., 1955.
56. Шафаревич И. Р. Бирациональная эквивалентность алгебраических кривых. Докл. АН СССР, т. 114, № 2 (1959), 267—270.
57. Шафаревич И. Р. Главные однородные пространства, определенные над полем функций. Труды Математ. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 54 (1961).
58. Шевалле К. Введение в теорию алгебраических функций одной переменной. Физматгиз, 1958.
59. Энриквес Ф. (Enriques F.) Le superficie algebriche. Bologna, 1949.
60. Хирцебрух Ф. (Hirzebruch F.) Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1956.
61. Сегре Б. (Segre B.) Arithmetical questions on algebraic varieties. The Athlone press, 1951.
62. Сегре Б. (Segre B.) The non-singular cubic surfaces. A new method of investigation with special reference to questions of reality. Oxford. Clarendon press, 1942.
63. Рот Л. (Roth L.) Algebraic threefolds. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.
64. Тайрел Дж. (Tyrrell J. A.) The Enriquesthreefold. T. Lond. Math. Soc., v. 36 (1961), 897—898.

ОГЛАВЛЕНИЕ