### 4.3. Микроэкономические модели в теории принятия решений

При принятии решений на уровне предприятия весьма полезны соответствующие экономико-математические и эконометрические модели. Рассмотрим несколько примеров.

#### 4.3.1. Модель функционирования промышленного предприятия

Рассмотрим модель предприятия, являющегося частью более крупной экономической структуры (системы) – государственного сектора экономики, финансово-промышленной группы, транснациональной корпорации, холдинга и т.п. Предприятие действует в плановом сегменте экономики, план определяется вышестоящими органами управления. Основное внимание в модели предприятия уделяется влиянию фондов экономического стимулирования (ФРП - фонд развития производства, ФМП - фонд материального поощрения) на темпы роста прибыли.

Эти фонды (ФРП и ФМП) наполняются из прибыли, которую получило предприятие. Основная часть этой прибыли идет в бюджет вышестоящей структуры, оставшаяся - в фонды. Сверху вводятся нормативы распределения прибыли, т.е. доли от прибыли, которые идут в фонды.

Важно найти оптимальные величины этих нормативов, так как если нормативы будут малы, то фонды практически перестанут зависеть от темпа роста прибыли и рентабельности, как следствие, их воздействие на деятельность предприятия окажется минимальным. Фактически тут можно говорить о чрезмерно больших изъятиях средств вышестоящей структурой. С другой стороны, если в фонды идет слишком большая часть прибыли, это может привести к дефициту бюджета вышестоящей структуры.

Размер ФРП есть:

$$Ф= f(A, I, R, a_1, a_2) ,$$

где $A$- стоимость основных производственных фондов;

$I$- отношение $\frac{P_f}{P_n}$ (здесь $P_f$, $P_n$ - фактический и плановый объемы реализованной продукции);

$R$- рентабельность;

$a_1, a_2$ - отраслевые нормативы отчисления части прибыли в ФРП и ФМП соответственно.

Предположим, что вышестоящей структурой выделяются капитальные вложения в количестве, прямо пропорциональном объему произведенной продукции $P$. Пусть:

$$\frac{dA}{dt} = a\frac{dA}{dt} + gP .$$

Это уравнение означает, что полный прирост капитальных вложений в основные производственные фонды равен той доле, которая выделяется на это из ФРП ($a\frac{dA}{dt}$) плюс вложения вышестоящей экономической структуры ($gP$). Коэффициент $g$ определяется вышестоящим управляющим органом; величина $a\frac{dA}{dt}$ зависит от величины ФРП, т.е. в конечном итоге от принятых в системе нормативов.

Примем, что производственная функция пропорциональна стоимости основных фондов, т.е. $P = kA$ . Тогда

$$\frac{dA}{dt} = \frac{gkA}{1-a} .$$

Решение этого уравнения $A(t) = A(t_0)\exp(\frac{gk(t-t_0)}{1-a})$ описывает рост стоимости основных фондов. При этом пропорционально растет и объем произведенной продукции $P$.

Необходимо иметь современные научно-экономические инструменты анализа такого сравнительно нового для нашей страны вида хозяйственных объединений, как холдинги. Ясно, что без предварительного научного анализа невозможно выработать обоснованные рекомендации по повышению эффективности оперативного финансового управления компаниями холдингового типа.

В частности, в диссертации [1] разработана классификация компаний холдингового типа, определены основные критерии эффективности деятельности таких компаний, сформулированы принципы трансфертного ценообразования внутри холдинга. О практической направленности работы говорит внимание к разработке документооборота и сетевого графика процесса бюджетирования. Разработаны практические рекомендации по снижению налоговых потерь. Результаты работы внедрены в холдинге, состоящем из ярославских строительных организаций. Большое значение имеет эффективная работа службы контроллинга в компании холдингового типа. При рассмотрении процесса согласования интересов хозяйствующих субъектов целесообразно использовать подходы теории кооперативных игр.

### 4.3.2. Принятие решений в малом бизнесе на основе экономико-математического моделирования

Малое предпринимательство - важная составная часть современной российской экономики. Например, в Москве более 10% населения трудится на малых предприятиях. Поэтому весьма актуальным является изучение сферы малого бизнеса с позиций экономической теории, в частности, методами экономико-математического моделирования [2].

Развитие малого предпринимательства необходимо для эффективного функционирования экономики России. Для понимания особенностей этого развития могут оказаться полезными разнообразные экономико-математические модели. Подходам к построению и изучению некоторых из них посвящен настоящий раздел.

В отечественной литературе мало работ по экономико-математическому моделированию малого бизнеса. Поэтому целесообразно дать широкую панораму возможных подходов к построению моделей, которые могут оказаться полезными для описания динамики развития малых предприятий, а также и управления ими. Поскольку для описания тех или иных проблем малого предпринимательства могут использоваться самые разные виды экономико-математических моделей, то полезно рассмотреть достаточно широкий спектр таких моделей. Это повлекло довольно краткое описание конкретных моделей. Особое внимание уделено применению методов статистики нечисловых данных, наиболее актуальных в настоящее время.

**Проблемы маркетинга малого бизнеса.** Во всех странах с развитой рыночной экономикой нестабильность малого бизнеса во многом связана с его сильной зависимостью от внешней среды - как от STEP-факторов (социальных, технологических, экономических, политических), так и от факторов конкурентного окружения (в т.ч. - от поставщиков и потребителей) . Для того, чтобы выжить и занять свою рыночную нишу, малый бизнес должен хорошо ориентироваться и адаптироваться в условиях достаточно высокой степени неопределенности и риска. Это означает, что маркетинг малого бизнеса изначально носит рисковый характер [3].

Для снижения степени риска маркетинга малого бизнеса требуется высокий профессионализм менеджера малой организации в области управления рыночной информацией и быстрота реакции в принятии решений при изменении условий внешней среды. То есть как лицо, принимающее решения (ЛПР), менеджер малой организации должен быть одновременно хорошим маркетологом.

Маркетинг малого бизнеса имеет особенности. Для того, чтобы малая организация могла выжить и занять свою рыночную нишу, ее маркетинг с самого начала должен быть ориентирован не на абстрактные производство и сбыт, а на конкретного потребителя с его индивидуальными запросами. Иными словами, приоритетной формой маркетинга малого бизнеса является целевой специализированный маркетинг. Он позволяет сконцентрировать объективно небольшие ресурсы малой организации на наиболее важном направлении. Однако цена ошибки ЛПР, цена принятия неправильного решения в малом бизнесе многократно возрастает, т.к. у малой организации, как правило, нет финансовых возможностей диверсифицировать свою деятельность и свой риск.

Следовательно, для менеджера малой организации наиболее важные и сложные задачи таковы: проведение маркетинговых исследований по изучению рынка, сегментация рынка, выбор целевого сегмента, оценка его потенциальной мощности, оценка риска выбора рыночной ниши и силы потенциальных конкурентов. Успешное решение перечисленных задач требует от менеджера малой организации достаточно серьезной подготовки в области теории принятия решений, эконометрики и экономико-математического моделирования, поскольку оплата услуг консалтинговых фирм по этим вопросам стоит достаточно дорого.

Вместе с тем для того, чтобы быстро реагировать на изменения внешней среды, оказывающей сильное воздействие на малую организацию, ее менеджер должен проводить постоянный мониторинг рыночной ситуации по определенным наиболее значимым параметрам (спрос, предложение, цены, товары-конкуренты, альтернативные технологии и др.). Сбор и оперативное использование такой информации является решающим фактором успеха в маркетинге малого бизнеса при принятии решений. Это требует определенных знаний и навыков у менеджера по формированию банка данных и работе с маркетинговой информацией. Наиболее доступными для менеджеров малого бизнеса являются экономико-статистические (эконометрические) методы и методы математического моделирования, позволяющие (при определенной подготовке менеджеров и наличии программной поддержки) достаточно быстро обрабатывать и использовать оперативную информацию на практике.

**Математические методы и модели для решения задач малого бизнеса.** Достаточно известными примерами применения методов экономико-математического моделирования в маркетинге для структурирования и анализа рыночной информации являются модели жизненного цикла товара (фирмы), модели маркетингового комплекса 4*p* (7*p*), матрица "Бостон-консалтинг групп", SWOT-анализ конкурентов, матрица определения проблемы и др.[3,4]. Они могут быть простейшими инструментами управления маркетингом в малом бизнесе и позволяют достаточно оперативно оценить место и конкурентные преимущества организаций. Вместе с тем возможности экономико-математического моделирования позволяют менеджеру самостоятельно структурировать свою собственную ситуацию и создавать собственные модели (или варианты типовых моделей с собственными значениями параметров) оптимального поведения на рынке в условиях неопределенности и риска. Так, известная среди маркетологов и менеджеров матрица "Бостон-консалтинг групп" является, на наш взгляд, не двухмерной, а трехмерной моделью, в которой наряду с долей на рынке и темпом роста продаж обязательно должен рассматриваться такой параметр, как прибыль организации.

При разработке системы экономико-математической поддержки малого бизнеса математические модели развития малого предпринимательства должны изучаться специалистами теоретически на основе вероятностных и имитационных методов и сопоставляться со статистическими данными, характеризующими реальное положение в рассматриваемой области экономики. Методология математического моделирования позволяет ставить и решать различные задачи, возникающие в маркетинге малого бизнеса. В частности, отметим задачи анализа и прогнозирования рыночной ситуации, оценки различных видов рисков.

Для повышения эффективности исследовательской работы целесообразно разделять экономико-статистические (эконометрические) методы и экономико-математическое моделирование, хотя такое деление и условно. Примером первых (т.е. методов прикладной статистики применительно к конкретным экономическим данным) являются методы выборочного изучения потребителей. Так, в 1994 г. сотрудниками Института высоких статистических технологий и эконометрики опрошены 500 потребителей и продавцов растворимого кофе, полученные результаты использованы фирмой-заказчиком при маркетинге, в частности, при планировании рекламной кампании [5]. Технология проведения таких маркетинговых исследований близка к технологии социологических опросов, а также имеет много общего со статистическим управлением качества продукции, в частности, с оценкой качества при сертификации [6].

При экономико-математическом моделировании используются нацеленные на конкретные применения модели, в отличие от моделей прикладной статистики, которые можно использовать в любой сфере деятельности. Примерами являются экономико-математические модели управления запасами (см. ниже), с помощью которых удается находить оптимальные размеры поставок и процедуру их поступления. Обычно применение таких моделей позволяет по крайней мере вдвое сократить суммарные издержки. Набор подобных компьютерных моделей должен быть рабочим инструментом менеджера малого предприятия.

При математическом моделировании маркетинговых проблем малого бизнеса используют эконометрические методы и методы экспертных оценок, а также методы имитационного моделирования. В настоящее время быстрых перемен в социальной, экономической и политической сферах отсутствуют  достаточно длинные временные ряды экономических данных, и интерес исследователей и практических работников переместился из статистики временных рядов в области теории и практики экспертных оценок.

В маркетинговых исследованиях для малого бизнеса большую роль играют факторы нечисловой природы - качественные признаки,  интервальные и нечеткие оценки и др. Развиваются и применяются современные методы статистического анализа нечисловых данных [5]. Оригинальность и эффективность математического аппарата в области статистики нечисловых данных определяется тем, что он основан на использовании расстояний в выборочных пространствах, а не операций суммирования.

При изучении экономических рисков, в частности, связанных с осуществлением инвестиционных проектов, необходимо моделировать различные неопределенности будущего и настоящего. Неопределенность описывают с помощью вероятностно-статистических, нечетких, в частности, интервальных моделей. Вероятностно-статистические модели нацелены прежде всего на анализ массовых явлений. Неопределенность единичных событий более целесообразно описывать с помощью нечетких множеств, в частности, с помощью интервальных чисел, задающих нижние и верхние границы для неизвестных в точности параметров. Хотя около 30 лет назад доказано [7], что теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории случайных множеств, при практическом применении математический аппарат теории нечеткости существенно отличается от вероятностностатистического, а также и от аппарата статистики интервальных данных [5]. При применении математических моделей весьма важным является исследование устойчивости выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели [7]. Только та модель может быть рекомендована для практического использования, для которой полученные с ее помощью выводы мало меняются при подобных отклонениях. Накоплен определенный опыт применения методологии экономико-математического моделирования при решении практических задач маркетинга малого бизнеса [5, 8], в частности, в области товаров народного потребления и производственного назначения, образовательных услуг, а также при анализе и моделировании инфляционных процессов, в сфере налогообложения и др.

Перейдем к более подробному рассмотрению некоторых экономико-математических моделей, предназначенных для описания маркетинговой деятельности и жизненного цикла предприятий малого бизнеса.

**Маркетинговые модели принятия решений.** Для структурирования и анализа рыночной информации могут быть успешно применены такие известные инструменты принятия управленческих решений, как SWOT-анализ и матрица "Бостон консалтинг групп", а также некоторые их обобщения. Эти обобщения позволяют эффективно использовать современные методы экспертного оценивания, в том числе основанные на применении статистики нечисловых, в частности, интервальных данных.

В обобщении SWOT-анализа предприятия оцениваются (в количественных или в качественных шкалах) по четырем группам показателей - сильные и слабые стороны, угрозы и возможности. Частные показатели сводятся в групповые, а групповые - в итоговый (обобщенный) показатель. Эта процедура дает возможность ранжировать и классифицировать конкурентов (например, на весьма опасных, опасных и неопасных), а также отслеживать и моделировать динамику показателей и итоговых оценок предприятий.

В обобщенной матрице "Бостон консалтинг групп" предлагается использовать трехмерную модель, в которой предприятие описывается долей на рынке, темпом роста продаж и прибылью. От качественных значений перечисленных переменных переходим к количественным, а также строим итоговый показатель и прогностические правила.

Рассматриваемые модели основаны на применении технологии построения единичных, групповых и обобщенных показателей (оценок отдельных сторон деятельности фирм - конкурентов и их экономического положения в целом), развитой ранее для решения задач экологического страхования [9]. Компьютерная поддержка этой технологии может быть осуществлена с помощью АРМ МАТЭК (МАТематические методы в ЭКспертных исследованиях) - автоматизированного рабочего места организатора экспертного опроса [10].

Как уже говорилось, экспертные оценки как самостоятельное направление научно-практической деятельности развивается в нашей стране с 70-х годов. В частности, с 1973 г. работает неформальный научный коллектив вокруг научного семинара “Математические методы экспертных оценок и нечисловая статистика”, часто обращающийся к проблемам принятия решений в условиях малого бизнеса. Проведена масса исследований, опубликованы десятки монографий и сборников, сотни статей. В настоящее время возникла масса аналитических центров, бизнес-инкубаторов и др., которым рассматриваемые разработки явно полезны. Однако важно установить контакты между теоретиками и менеджерами аналитических центров, наладить систему обучения. Накопленные теоретиками знания должны быть основой для компьютерных систем, например, таких, как АРМ МАТЭК.

**О теории ранжировок и рейтингов.** Ограничимся здесь одним сюжетом, связанным с ранжировками и рейтингами. В настоящее время в практике работы малых предприятий распространены маркетинговые, экспертные и социологические опросы. При их проведении опрашиваемых просят выставить баллы инвестиционным проектам, направлениям работ или исследований, товарам, идеям, проблемам, программам или политикам. Затем рассчитывают средние баллы и рассматривают их как интегральные оценки, выставленные фирмой или обществом в целом инвестиционным проектам, направлениям работ или исследований, товарам, идеям, проблемам, программам или политикам. Уже около 20 лет знаем, что согласно теории измерений такой способ расчета интегральных оценок некорректен (см. главу 2.1).

Хорошо известно, каким условиям должны удовлетворять методы обработки данных, измеренных в тех или иных шкалах. Например, для порядковых данных в качестве интегрального показателя использовать среднее арифметическое нельзя, а медиану – можно [5]. К сожалению, распространены некорректные методы расчетов. В качестве примера отметим, что методы расчета рейтингов “ведущих политиков” на основе усреднения ответов экспертов, публикуемые в “Независимой газеты”, являются математически некорректными. Впрочем, есть много иных претензий к этим публикациям, связанных, в частности, с нерепрезентативным составом экспертов.

Как известно, максимальными инвариантами в порядковой шкале являются ранжировки (нестрогие порядки). Поэтому от использования результатов теории измерений менеджеру малой организации естественно перейти к применению методов статистики объектов нечисловой природы [5].

**Моделирование потока проектов.** Кратко рассмотрим несколько экономико-математических моделей, описывающих развитие малых предприятий в течение их жизненного цикла.

При построении математических моделей типа «поток проектов» будем считать, что малое предприятие ассоциируется с последовательностью выполняемых им проектов. Новые малые предприятия порождаются в соответствии с пуассоновским процессом переменной интенсивности (аналогично потоку заявок в теории массового обслуживания [11]). Каждое новое малое предприятие выполняет вначале один проект, величина (стоимость) и продолжительность которого - случайные величины с заданными (в модели) распределениями.

Точнее, с учетом известных в менеджменте представлений о жизненном цикле продукции экономический эффект (на единицу времени) от выполнения проекта описывается (случайной) функцией от времени (с отсчетом от момента начала осуществления проекта), типовой вид которой таков: сначала отрицательные значения (вначале необходимы вложения), затем - рост до максимального значения, продолжительное "плато" на достигнутом уровне, затем - спад (окончание проекта). Поскольку для осуществления проекта, как правило, необходим начальный капитал, то в модель порождения малых предприятий необходимо внести новую переменную - (случайную) величину начального капитала, которая, в частности, ограничивает круг проектов, возможных для данного малого предприятия. Возможно и разорение малого предприятия, если из-за случайных причин стартовый капитал окажется недостаточным для осуществления проекта. Отметим, что потоки платежей необходимо оценивать путем приведения к сопоставимым ценам, а при этом не обойтись без учета инфляции, изучение и прогнозирование которой встречает известные трудности [5].

Однако для некоторых видов деятельности, например, оказания научно-технических услуг, можно считать, что экономический эффект (в сопоставимых ценах) имеет простой частный вид описанной выше функции - является ступенчатой функцией, равной положительной константе $C$ на отрезке $[0,T]$ и 0 вне его (здесь $C$ и $T$ - случайные величины ).

Поскольку каждый проект рано или поздно заканчивается, малое предприятие, как правило, должно переходить к осуществлению новых проектов еще до окончания жизненного цикла предшествующего проекта. В модели принимаем, что каждый проект порождает своих потомков - новые проекты с определенной интенсивностью. С этой точки зрения малое предприятие - это совокупность проектов, в которую входят: 1) исходный проект (если он еще продолжается); 2) его непосредственные потомки; 3) потомки его потомков, и т.д. Развитие малого предприятия состоит в возникновении, выполнении и прекращении проектов, его образующих. Если все эти проекты прекращаются, то малое предприятие ликвидируется. Аналогом является развитие популяции фамилий, изучаемое с помощью теории ветвящихся процессов [12].

Рассматриваемые модели позволяют, в частности, изучать динамику распределения малых предприятий по размерам и длительности жизни, например, оценивать долю предприятий, прекративших деятельность в течение определенного интервала времени после организации. Можно продемонстрировать положительную роль технопарков как "инкубаторов" малых предприятий, влияние экспертизы бизнес-плана и др. - поддержка проектов на начальных стадиях при условии отсечения малоперспективных проектов существенно повышает вероятность "выживания" остальных.

**Пример модели потока проектов.** Приведенное выше описание задает достаточно обширное семейство математических моделей. Рассмотрим одну из них.

Пусть процесс порождения новых предприятий в регионе описывается пуассоновским процессом с постоянной интенсивностью $q$. Это означает, что за единицу времени возникает случайное число $X$ малых предприятий, причем $X$ имеет пуассоновское распределение с параметром $q$. В среднем за единицу времени возникает $q$ малых предприятий, поскольку математическое ожидание $X$ равно $q$. Величина $q$ зависит от числа жителей и уровня социально-экономического развития региона.

Следующий шаг - моделирование начального капитала и стоимости проекта. При этом в случае, когда стоимость проекта больше начального капитала, то предприятие погибает, не приступив к деятельности. Хорошо известно, что в современной России большое число зарегистрированных малых предприятий (по крайней мере до 70%) не проявляет производственной активности. Все такие предприятия можно считать погибшими еще до начала выпуска продукции.

Рассмотрим предприятия с достаточным начальным капиталом. Пусть для простоты экономический эффект при выполнении проекта является ступенчатой функцией, равной положительной константе $C$ на отрезке $[0,T]$ и 0 вне его, где $C$ и $T$ - случайные величины. Далее следует смоделировать процесс порождения «потомков» проекта. Естественно считать, что число потомков случайно, но при этом их в среднем больше у проекта большей стоимости и боле длительного. Дальнейшее опустим, поскольку основные идеи, лежащие в основе моделирования, уже сформулированы.

**Модель занятия ниш.** Предположим, что имеется конечный набор "ниш", которые могут занять вновь возникающие предприятия. В соответствии с некоторым распределением вероятностей порождаются новые предприятия (т.е. указываются для них ниши). Если ниша занята, то предприятие гибнет. Если нет - занимает нишу и функционирует некоторое случайное время, после чего прекращает деятельность и освобождает нишу. Действующее предприятие может захватывать свободные ниши - на тех же основаниях, что и вновь возникающие предприятия. Нетрудно получить расчетные формулы для числа свободных ниш и вероятности того, что ниша занята, а также для иных характеристик, описывающих развитие популяции малых предприятий.

**Модель выбора ниши.** Для описания поведения малого предприятия предлагается использовать модель выбора ниши на основе теории принятия решений с использованием дерева целей. Рассматривая выбор на каждом этапе как случайную величину, получаем возможность расчета распределения малых предприятий по вариантам окончательных решений. А это порождает итерационный процесс пересмотра решений, поскольку знание итогового распределения влечет пересмотр некоторых из ранее принятых решений, например, о количестве возможных конкурентов. Модель целесообразно реализовать в виде имитационной компьютерной системы, пригодной также для индивидуального обучения и проведения деловых игр. Интересны варианты модели с использованием интервальных или нечетких ответов, что делает и итоговое решение интервальным или нечетким.

Проблемам малого предпринимательства посвящено большое число официальных и научных публикаций, что объясняется, очевидно, заметным вкладом малых предприятий в отечественное производство, а также - что представляется нам более важным - пионерской ролью малых предприятий в опробовании различных вариантов организации экономической жизни, взаимодействия государственных и негосударственных структур. Именно малые предприятия лучше всего демонстрируют роль конкуренции в экономике.

Однако, несмотря на наличие достаточно большого числа публикаций по проблемам малого бизнеса, практически все они не используют развитого математического аппарата для анализа рассматриваемой области. Поэтому представляется полезным рассмотрение достаточно широкого спектра подходов к построению и использованию экономико-математических моделей в малом бизнесе. Выше продемонстрировано, что экономико-математическое моделирование имеет широкие перспективы практического применения в маркетинге малого бизнеса. Еще более интересные возможности раскрываются в области теоретических исследований проблем малого бизнеса. Совместная работа экономистов, эконометриков, математиков и практикующих менеджеров малого бизнеса принесет пользу как теории, так и практике.

### 4.3.3. Принятие решений в задачах логистики

Термин «логистика» происходит от французского слова «loger» (размещение, расквартирование), которое употребляется в военной терминологии для определения движения военных грузов, их складирования и размещения, а также для описания процесса размещения и расквартирования военных подразделений. В настоящее время термин «логистика» широко используется в деловом мире и определяет теорию и практику движения сырья, материалов, комплектующих изделий, производственных, трудовых и финансовых ресурсов, готовой продукции от их источников к потребителям.

ЛОГИСТИКА – наука о планировании, управлении и контроле за движением материальных, информационных и финансовых ресурсов в различных производственно-экономических системах. Предметом логистики является комплексное управление всеми материальными и нематериальными потоками в таких системах. Новизна концепции логистики в области управления промышленными системами состоит во всестороннем подходе к вопросам движения материальных благ в процессе производства и управления. Логистическая система должна охватывать и согласовывать процессы производства, закупок и распределения продукции, а также быть основой при стратегическом планировании и прогнозировании. Итак, логистика – это экономическая дисциплина, занимающаяся оптимальной организацией материальных, финансовых и информационных потоков.

Одна из основных частей логистики – теория управления запасами. Сколько товара держать на складе? Много – будут омертвляться оборотные средства, вложенные в запас. Мало – слишком часто надо будет заниматься получением новых партий товара и нести соответствующие расходы. Значит, надо рассчитать и использовать оптимальный размер запаса. А для этого необходимо построить соответствующую математическую модель.

Управление запасами (другими словами, материально-техническое снабжение) – неотъемлемая часть работы фирм и организаций. Речь идет о запасах сырья, топлива, материалов, инструментов, комплектующих изделий, полуфабрикатов, готовой продукции на промышленном (или сельскохозяйственном) предприятии, о запасах товаров на оптовых базах, складах магазинов, на рабочих местах продавцов, наконец, у потребителей.

Запасы постоянно расходуются и пополняются по тем или иным правилам, принятым на предприятии. Оптимизация этих правил, т.е. оптимальное управление запасами, дает большой экономический эффект.

Математическая теория управления запасами является крупной областью экономико-математических исследований, получившей свое развитие в основном начиная с пятидесятых годов. Предложенная, видимо, еще в 1915 г. Ф.Харрисом классическая модель теории управления запасами, называемая также моделью Вильсона (в связи с тем, что получила известность после публикации работы Р.Г.Вильсона в 1934 г.), является одним из наиболее простых и наглядных примеров применения математического аппарата для принятия решений в экономической области. В то же время формула оптимального размера заказа, полученная в модели Вильсона, широко применяется на различных этапах производства и распределения продукции, поскольку оказывается практически полезной для принятия решений при управлении запасами, в частности, приносящей заметный экономический эффект [7]. Рассмотрим эту модель подробнее.

**Классическая модель управления запасами.** Пусть $y(t)$ – величина запаса некоторого товара на складе в момент времени $t$, $t \geq 0$. Дефицит не допускается, т.е. $y(t) \geq 0$ при всех $t$. Товар пользуется равномерным спросом с интенсивностью $m$, т.е. за интервала времени $\Delta t$ со склада извлекается и поступает потребителям часть запаса величиной $m\Delta t$. В моменты времени $t_0$ = 0, $t_1$, $t_2$,… пополняется запас на складе – приходят поставки величиной $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$,… соответственно. Таким образом, изменение во времени величины запаса $y(t)$ товара на складе изображается зубчатой ломаной линией (рис.1), состоящей из наклонных и вертикальных звеньев, причем наклонные отрезки параллельны.

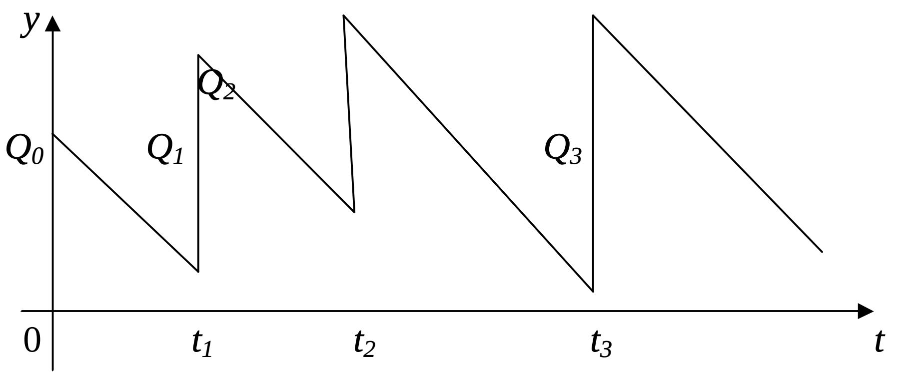

Рис. 1. График изменения величины запаса на складе

Таким образом, в момент $t_i$ величина запаса на складе $y(t)$ скачком увеличивается на $Q_i$. Следовательно, функция $y(t)$ имеет разрывы в точках $t_1$, $t_2$,… Для определенности будем считать, что эта функция непрерывна справа.

Пусть $s$ – плата за хранение единицы товара в течение единицы времени. Поскольку можно считать, что величина запаса $y(t)$ не меняется в течение интервала времени $(t;\ t+dt)$, где $dt$ – дифференциал, т.е. бесконечно малая, то плата за хранение всего запаса в течение этого интервала времени равна $sy(t)dt$. Следовательно, затраты за хранение в течение интервала времени $[0;T)$, где $T$ – интервал планирования, пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности $s$) площади под графиком уровня запаса на складе $y(t)$ и равны

$$s\int_0^T y(t)dt.$$

Пусть $g$ – плата за доставку одной партии товара. Примем для простоты, что она не зависит от размера поставки. Позже покажем, что если эта плата равна $g+g_1Q$, где $Q$ – размер поставки, то оптимальный план поставки – тот же, что и при отсутствии линейного члена. Будет проанализирована и более сложная модель, в которой предусмотрена скидка с ростом поставки, приводящая к выражению $g+g_1Q+ g_2Q^2$ для платы за доставку одной партии товара размером $Q$.

Пусть $n(T)$ – количество поставок, пришедших в интервале $[0;T)$. При этом включаем поставку в момент $t = 0$ и не включаем поставку в момент $t = T$ (если такая происходит). Тогда суммарные издержки на доставку товара равны $gn(T)$. Следовательно, общие издержки (затраты, расходы) за время $T$ равны

$$F(T;y) = F(y(t),\ 0 \le t < T) = gn(T) + s\int_0^T y(t)dt.$$

Запись $F(T;y) = F(y(t),\ 0 \le t < T)$ означает, что общие издержки зависят от значений функции $y=y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Символ у обозначает функцию как целое. Другими словами, область определения $F(T;y)$ при фиксированном $T$ – не множество чисел, а множество функций.

Общие издержки, очевидно, возрастают при росте горизонта планирования Т. Поэтому часто используют средние издержки, приходящиеся на единицу времени. Средние издержки за время Т равны

$$f(T;y) = f(y(t),\ 0 \le t < T) = \frac{1}{T}F(T;y) = \frac{1}{T}\left\{gn(T) + s\int_0^T y(t)dt\right\}.$$

Поскольку товар отпускается со склада с постоянной интенсивностью (скоростью), дефицит не допускается, то доходы от работы склада пропорциональны горизонту планирования, средние доходы постоянны. Следовательно, максимизация прибыли эквивалентна минимизации издержек или средних издержек.

Если задать моменты прихода поставок и величины партий, то будет полностью определена функция $y=y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Верно и обратное – фиксация функции $y=y(t)$, $0 \le t < T$, рассматриваемого вида (рис.1) полностью определяет моменты прихода поставок и величины партий. И то, и другое будем называть *планом* поставок или планом работы системы управления запасами. Для ее оптимизации необходимо выбрать моменты времени $t_0 = 0$, $t_1$, $t_2$,… пополнения запаса на складе и размеры поставляемых партий товара $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$,… так, минимизировать средние издержки $f_T(y)$ при фиксированном $T$. Модель производственной ситуации (т.е. работы склада) описывается четырьмя параметрами - $m$ (интенсивность спроса), $s$ (стоимость хранения единицы продукции в течение единицы времени), $g$ (стоимость доставки партии товара), $T$ (горизонт планирования).

Поставленная задача оптимизации работы склада интересна тем, что неизвестно число $2n(T)$-1 параметров, определяющих план поставок. Поэтому ее решение не может быть проведено с помощью стандартных методов теории оптимизации.

Решим эту задачу в три этапа. На первом установим, что оптимальный план следует искать среди тех планов, у которых все зубцы доходят до оси абсцисс, т.е. запас равен 0 в момент доставки очередной партии. Цель второго этапа – доказать, что все зубцы должны быть одной и той же высоты. Наконец, на третьем находим оптимальный размер поставки.

**Оптимальный план**. Найдем наилучший план поставок. План, для которого запас равен 0 (т.е. $y(t) = 0$) в моменты доставок очередных партий, назовем *напряженным*.

*Утверждение 1*. Для любого плана поставок, не являющегося напряженным, можно указать напряженный план, для которого средние издержки меньше.

Покажем, как можно от произвольного плана перейти к напряженному, уменьшив при этом издержки. Пусть с течением времени при приближении к моменту $t_1$ прихода поставки $Q_1$ уровень запаса не стремится к 0, а лишь уменьшается до $y(t_1-) \neq 0$ (где знак «минус» означает предел слева функции $y(t)$ в точке $t_1$).

Тогда рассмотрим новый план поставок с теми же моментами поставок и их величинами, за исключением величин поставок в моменты $t = 0$ и $t = t_1$. А именно, заменим $Q_0$ на $Q_{01} = Q_0 - y(t_1-)$, а $Q_1$ на $Q_{11} = Q_0 + y(t_1-)$. Тогда график уровня запаса на складе параллельно сдвинется вниз на интервале $(0; t_1)$, достигнув 0 в $t_1$, и не изменится правее точки $t_1$. Следовательно, издержки по доставке партий не изменятся, а издержки по хранению уменьшатся на величину, пропорциональную (с коэффициентом пропорциональности $s$) площади параллелограмма, образованного прежним и новым положениями графика уровня запаса на интервале $(0; t_1)$ (см. рис.2).

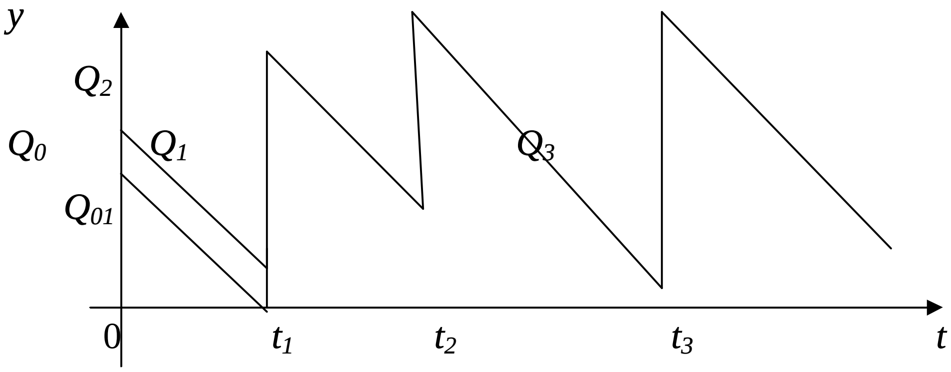

Рис. 2. Первый шаг перехода к напряженному плану

Итак, в результате первого шага перехода получен план, в котором крайний слева зубец достигает оси абсцисс. Следующий шаг проводится аналогично, только момент времени $t = 0$ заменяется на $t = t_1$. Если есть такая возможность, второе наклонное звено графика уровня запаса на складе параллельно сдвигается вниз, достигая в крайней правой точке $t_2$ оси абсцисс.

Аналогично поступаем со всеми остальными зубцами, двигаясь слева направо. В результате получаем напряженный план. На каждом шагу издержки по хранению либо сокращались, либо оставались прежними (если соответствующее звено графика не опускалось вниз). Следовательно, для полученного в результате описанного преобразования напряженного плана издержки по хранению меньше, чем для исходного плана, либо равны (если исходный план уже являлся напряженным).

Из утверждения 1 следует, что оптимальный план следует искать только среди напряженных. Другими словами, план, не являющийся напряженным, не может быть оптимальным.

*Утверждение 2.* Среди напряженных планов с фиксированным числом поставок минимальные издержки имеет тот, в котором все интервалы между поставками равны.

При фиксированном числе поставок затраты на доставку партий не меняются. Следовательно, достаточно минимизировать затраты на хранение.

Для напряженных планов размеры поставок однозначно определяются с помощью интервалов между поставками:

$$Q_{i-1} = m(t_i - t_{i-1}),\ \ i = 1,2,\dots,n(T)-1,\ \ Q_{n(T)-1} = m(T - t_{n(T)-1}).$$

Действительно, очередная поставка величиной $Q_{i-1}$ совпадает с размером запаса на складе в момент $t_{i-1}$, расходуется с интенсивностью $m$ единиц товара в одну единицу времени и полностью исчерпывается к моменту $t_i$ прихода следующей поставки.

Для напряженного плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{Q_{i-1}(t_i - t_{i-1})}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{m(t_i - t_{i-1})^2}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{m\Delta_i^2}{2} = \frac{ms}{2}\sum_{i=1}^{n(T)} \Delta_i^2,$$

где $\Delta_i = t_i - t_{i-1},\ \ i = 1,2,\dots,n(T),\ \ t_{n(T)} = T.$ Ясно, что $\Delta_i,\ \ i = 1,2,\dots,n(T)$ - произвольные неотрицательные числа, в сумме составляющие $T$. Следовательно, для минимизации издержек среди напряженных планов с фиксированным числом поставок достаточно решить задачу оптимизации

$$\begin{cases} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2 \to \min, \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = T, \\ \Delta_i \ge 0,\ \ i = 1,2,\dots,n, \end{cases}$$

где $n = n(T)$.

Полученная задача оптимизации формально никак не связана с логистикой, она является чисто математической. Для ее решения целесообразно ввести новые переменные $a_i = \Delta_i - \frac{T}{n},\ i = 1,2,\ldots,n.$ Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i - \frac{T}{n}) = \left( \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \right) - n\frac{T}{n} = T - T = 0.$$

Поскольку $\Delta_i = \frac{T}{n} + a_i,$ то $\Delta_i^2 = \frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}a_i + a_i^2,$ следовательно, с учетом предыдущего равенства имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = n\frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{T^2}{n} + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Сумма квадратов всегда неотрицательна. Она достигает минимума, равного 0, когда все переменные равны 0, т.е. при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$ Тогда

$$\Delta_i = \frac{T}{n},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

При этих значениях $\Delta_i$ выполнены все ограничения оптимизационной задачи. Итак, утверждение 2 доказано.

Для плана с равными интервалами между поставками все партии товара имеют одинаковый объем. Для такого плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = \frac{ms}{2}\sum_{i=1}^{n(T)} \Delta_i^2 = \frac{msT^2}{2n(T)}.$$

Средние издержки (на единицу времени) таковы:

$$f(T;y) = \frac{1}{T}\left\{ gn(T) + \frac{msT^2}{2n(T)} \right\} = g\frac{n(T)}{T} + ms\frac{T}{2n(T)}.$$

Итак, минимизация средних издержек – это задача дискретной оптимизации. На третьем этапе построения оптимального плана необходимо найти натуральное число $n(T)$ – самое выгодное число поставок.

Поскольку к моменту $T$ запас товара должен быть израсходован, то общий объем поставок за время $T$ должен совпадать с общим объемом спроса, следовательно, равняться $m\,T$. Справедливо балансовое соотношение (аналог закона Ломоносова-Лавуазье сохранения массы при химических реакциях):

$$Qn(T) = mT.$$

Из балансового соотношения следует, что

$$\frac{n(T)}{T} = \frac{m}{Q}.$$

Средние издержки (на единицу времени) можно выразить как функцию размера партии Q:

$$f(T; y) = g\frac{n(T)}{T} + ms\frac{T}{2n(T)} = f_1(Q) = \frac{mg}{Q} + \frac{sQ}{2}. \qquad (1)$$

Задача состоит в минимизации $f_1(Q)$ по $Q$. При этом возможная величина поставки принимает дискретные значения, $Q \in \left\{\frac{mT}{n}.\ n = 1,2,\ldots\right\}.$

Изучим функцию $f_1(Q)$, определенную при $Q>0$. При приближении к 0 она ведет себя как гипербола, при росте аргумента – как линейная функция. Производная имеет вид

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = -\frac{mg}{Q^2} + \frac{s}{2}. \qquad (2)$$

Производная монотонно возрастает, поэтому рассматриваемая функция имеет единственный минимум в точке, в которой производная равна 0, т.е. при

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2mg}{s}}. \qquad (3)$$

Получена знаменитая «формула квадратного корня». В литературе иногда без всяких комментариев рекомендуют использовать напряженный план, в котором размеры всех поставляемых партий равны $Q_0$. К сожалению, получаемый таким путем план почти всегда не является оптимальным, т.е. популярная рекомендация неверна или не вполне корректна. Дело в том, что почти всегда $Q_0 \notin \left\{ \frac{mT}{n}.\ n = 1,2,\ldots \right\}$.

Всегда можно указать неотрицательное целое число *n* такое, что

$$Q_1 = \frac{mT}{n+1} < Q_0 \le \frac{mT}{n} = Q_2. \qquad (4)$$

*Утверждение 3*. Решением задачи оптимизации

$$f_1(Q) = \frac{mg}{Q} + \frac{sQ}{2} \to \min,$$

$$Q \in \left\{ \frac{mT}{n}.\ n = 1,2,\ldots \right\}$$

является либо $Q_1$, либо $Q_2$.

Действительно, из всех $Q \in \left\{ \frac{mT}{n}.\ n = 1,2,\ldots \right\}$ часть лежит правее $Q_0$, из них наименьшим является $Q_2$, а часть лежит левее $Q_0$, из них наибольшим является $Q_1$. Для построения оптимального плана обратим внимание на то, что производная (2) отрицательна левее $Q_0$ и положительна правее $Q_0$, следовательно, функция средних издержек $f_1(Q)$ убывает левее $Q_0$ и возрастает правее $Q_0$. Значит, минимум по $Q \in \left\{ \frac{mT}{n}.\ n = 1,2,\ldots \right\} \mathbf{I} \{Q : Q \ge Q_0\}$ достигается при $Q = Q_2$, а минимум по $Q \in \left\{ \frac{mT}{n}.\ n = 1,2,\ldots \right\} \mathbf{I} \{Q : Q < Q_0\}$ - при $Q = Q_1$ Последнее утверждение эквивалентно заключению утверждения 3.

Итак, алгоритм построения оптимального плана таков.

1. Найти $Q_0$ по формуле квадратного корня (3).

2. Найти *n* из условия (4).

3. Рассчитать $f_1(Q)$ по формуле (1) для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, где $Q_1$ и $Q_2$ определены в (4).

4. Наименьшее из двух чисел $f_1(Q_1)$ и $f_1(Q_2)$ является искомым минимумом, а то из $Q_1$ и $Q_2$, на котором достигается минимум – решением задачи оптимизации. Обозначим его $Q_{opt}$ .

Оптимальный план поставки – это напряженный план, в котором объемы всех поставок равны $Q_{opt}$.

*Замечание.* Если $f_1(Q_1) = f_1(Q_2)$, то решение задачи оптимизации состоит из двух точек $Q_1$ и $Q_2$. В этом частном случае существует два оптимальных плана.

*Пример 1.* На складе хранится некоторая продукция, пользующаяся равномерным спросом. За 1 день со склада извлекается 5 т продукции. Плата за хранение 1 т. продукции в день – 50 руб. Плата на доставку одной партии – 980 руб. Горизонт планирования – 10 дней. Найти оптимальный план поставок.

В рассматриваемом случае $m$=5 (т/день), $s$=50 (руб./т·день), $g$=980 (руб./партия), Т = 10 (дней). По формуле (3) рассчитываем

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2mg}{s}} = \sqrt{\frac{2\times5\times980}{50}} = \sqrt{196} = 14.$$

Множество допустимых значений для $Q$ имеет вид

$$\left\{\frac{mT}{n},\ n = 1,2,...\right\} = \left\{50;\ \frac{50}{2};\ \frac{50}{3};\ \frac{50}{4};...\right\} = \{50;\ 25;\ 16,67;\ 12,5;...\}.$$

Следовательно, $Q_1$ = 12,5 и $Q_2$ = 16,67. Первое значение определяет напряженный план с четырьмя одинаковыми зубцами, а второе – с тремя. Поскольку

$$f_1(Q) = \frac{5\times980}{Q} + \frac{50Q}{2} = \frac{4900}{Q} + 25Q,$$

то

$$f_1(Q_1) = f_1(12,5) = \frac{4900}{12,5} + 25\times12,5 = 392 + 312,5 = 704,5$$

и

$$f_1(Q_2) = f_1(50/3) = \frac{4900\times3}{50} + 25\times\frac{50}{3} = 294 + 416,67 = 710,67.$$

Поскольку $f_1(Q_1) < f_1(Q_2)$, то $Q_{opt} = Q_1 = 12{,}5$. Итак, оптимальным является напряженный план с четырьмя зубцами.

Как уже отмечалось, часто рекомендуют применять план поставок с $Q=Q_0$. Каков при этом проигрыш по сравнению с оптимальным планом?

Для плана с $Q=Q_0$ интервал между поставками составляет $Q_0/m = 14/5 = 2{,}8$ дня. Следовательно, партии придут в моменты $t_0 = 0$; $t_1 = 2{,}8$; $t_2 = 5{,}6$; $t_3 = 8{,}4$. Следующая партия должна была бы придти уже за пределами горизонта планирования $T = 10$, в момент $t_4 = 11{,}2$. Таким образом, график уровня запаса на складе в пределах горизонта планирования состоит из трех полных зубцов и одного не полного. К моменту $T = 10$ пройдет $10 - 8{,}4 = 1{,}6$ дня с момента последней поставки, значит, со склада будет извлечено $5 \times 1{,}6 = 8$ т продукции и останется $14 - 8 = 6$ т. План с $Q=Q_0$ не является напряженным, а потому не является оптимальным для горизонта планирования $T = 10$.

Подсчитаем общие издержки в плане с $Q=Q_0$. Площадь под графиком уровня запаса на складе равна сумме площадей трех треугольников и трапеции. Площадь треугольника равна $\frac{14 \times 2{,}8}{2} = 19{,}6,$ трех треугольников – 58,8. Основания трапеции параллельны оси ординат и равны значениям уровня запаса в моменты времени $t_3 = 8{,}4$ и $T = 10$, т.е. величинам 14 и 6 соответственно. Высота трапеции лежит на оси абсцисс и равна $10 - 8{,}4 = 1{,}6$, а потому площадь трапеции есть $\frac{(14+6) \times 1{,}6}{2} = 16.$ Следовательно, площадь под графиком равна $58{,}8 + 16 = 74{,}8$, а плата за хранение составляет $50 \times 74{,}8 = 3740$ руб.

За 10 дней доставлены 4 партии товара (в моменты $t_0 = 0$; $t_1 = 2{,}8$; $t_2 = 5{,}6$; $t_3 = 8{,}4$), следовательно, затраты на доставку равны $4 \times 980 = 3920$ руб. Общие издержки за 10 дней составляют

3740+3920 = 7660 руб., а средние издержки – 766 руб. Они больше средних издержек в оптимальном плане в 766/704,5 = 1,087 раза, т.е. на 8,7%.

Отметим, что

$$f_1(Q_0) = \frac{4900}{Q_0} + 25Q_0 = \frac{4900}{14} + 25 \times 14 = 350 + 350 = 700,$$

т.е. меньше, чем в оптимальном плане. Таким образом, из-за дискретности множества допустимых значений средние издержки возросли на 4,5 руб., т.е. на 0,64%. При этом оптимальный размер партии (12,5 т) отличается от $Q_0$ = 14 т на 1,5 т, т.е. $Q_{opt}/ Q_0 = 0,89$ – различие на 11%. Достаточно большое различие объемов поставок привело к пренебрежимо малому изменению функции $f_1(Q)$. Это объясняется тем, что в точке $Q_0$ функция $f_1(Q)$ достигает минимума, а потому ее производная в этой точке равна 0.

Оба слагаемых в $f_1(Q_0)$ равны между собой. Случайно ли это? Покажем, что нет. Действительно,

$$\frac{mg}{Q_0} = \frac{mg}{\sqrt{\frac{2mg}{s}}} = \sqrt{\frac{mgs}{2}}; \quad \frac{sQ_0}{2} = \frac{s\sqrt{\frac{2mg}{s}}}{2} = \sqrt{\frac{mgs}{2}}.$$

Таким образом, составляющие средних издержек, порожденные различными причинами, уравниваются между собой.

Средние издержки с плане с $Q=Q_0$ равны $\sqrt{2mgs}$. Интервал между поставками при этом равен

$$\frac{Q_0}{m} = \frac{\sqrt{\frac{2mg}{s}}}{m} = \sqrt{\frac{2g}{ms}}.$$

Издержки в течение одного интервала между поставками таковы:

$$\sqrt{2mgs} \times \sqrt{\frac{2g}{ms}} = 2g,$$

при этом половина (т.е. $g$) приходится на оплату доставки партии, а половина – на хранение товара.

**Асимптотически оптимальный план.** Из проведенных рассуждений ясно, что напряженный план с $Q=Q_0$ является оптимальным тогда и только тогда, когда горизонт планирования Т приходится на начало очередного зубца, т.е. для

$$T = n\frac{Q_0}{m} = n\sqrt{\frac{2g}{ms}},\ \ n = 1,2,\ldots \qquad (5)$$

Для всех остальных возможных горизонтов планирования $T$ этот план не является оптимальным. Оптимальным будет напряженный план с другим размером поставки. Для дальнейшего весьма существенно, что при изменении горизонта планирования $T$ оптимальный план меняется на всем интервале [0; $T$].

Как происходит это изменение? При малых $T$ делается лишь одна поставка (при $T$ = 0), график уровня запаса на складе состоит из одного зубца. При увеличении $T$ размер зубца плавно увеличивается. В некоторый момент $T(1)$ происходит переход от одного зубца к двум. В этот момент оптимальны сразу два плана поставки – с одним зубцом и с двумя. При переходе планам с двумя зубцами размер зубца скачком уменьшается. При дальнейшем увеличении горизонта планирования оптимальный план описывается графиком с двумя одинаковыми зубцами, размер которых плавно растет. Далее в момент $T(2)$ становится оптимальным план с тремя зубцами, размер которых в этот момент скачком уменьшается (в компенсацию за увеличение числа скачков). И т.д.

Проблема состоит в том, что в реальной экономической ситуации выбор горизонта планирования $T$ весьма субъективен. Возникает вопрос, какой план разумно использовать, если горизонт планирования не известен заранее. Проблема горизонта планирования возникает не только в логистике. Она является общей для любого перспективного планирования, поэтому весьма важна для стратегического менеджмента [7, 13]. Для решения проблемы горизонта планирования необходимо использование конкретной модели принятия решения, в рассматриваемом случае – классической модели управления запасами.

Ответ можно указать, если горизонт планирования является достаточно большим. Оказывается можно использовать план, в котором все размеры поставок равны $Q_0$. Для него уровень запаса на складе описывается функцией $y_0(t)$, $0 \le t < +\infty$, состоящей из зубцов высоты $Q_0$. Предлагается пользоваться планом, являющимся сужением этого плана на интервал [0; $T$). Другими словами, предлагается на интервале [0; $T$) использовать начальный отрезок этого плана. Он состоит из некоторого количества треугольных зубцов, а последний участок графика, описываемый трапецией, соответствует тому, что последняя поставка для почти всех горизонтов планирования не будет израсходована до конца. Такой план иногда называют планом Вильсона [7].

Ясно, что этот план не будет оптимальным (для всех $T$, кроме заданных формулой (5)). Действительно, план Вильсона можно улучшить, уменьшив объем последней поставки. Однако у него есть то полезное качество, что при изменении горизонта планирования его начальный отрезок не меняется. Действительно, планы поставок для горизонтов планирования $T_1$ и $T_2$ планы, определенные с помощью функции $y_0(t)$, $0 \le t < +\infty$, задающей уровень запасов на складе, совпадают на интервале [0; min $\{T_1, T_2\}$).

*Определение.* Асимптотически оптимальным планом называется план поставок – функция $y:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ такая, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{f(T; y_{opt}(T))}{f(T; y)} = 1,$$

где $y_{opt}(T)$ – оптимальный план на интервале [0; $T$).

В соответствии с определениями и обозначениями, введенными в начале раздела, $f(T; y_{opt}(T))$ - средние издержки за время $T$ для плана $y_{opt}(T)$, определенного на интервале $[0;\ T)$, а $f(T;y)$ - средние издержки за время $T$ для плана $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$.

**Теорема 1.** План $y = y_0$ является асимптотически оптимальным.

Таким образом, для достаточно больших горизонтов планирования $T$ планы $y_0(t)$, $0\le t\le T$, все зубцы у которых имеют высоту $Q_0$, имеют издержки, приближающиеся к минимальным. Следовательно, эти планы Вильсона, являющиеся сужениями одной и той же функции $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ на интервалы $[0;\ T)$ при различных $T$, можно использовать одновременно при всех достаточно больших $T$.

*Замечание.* Согласно [7] решение проблемы горизонта планирования состоит в использовании асимптотически оптимальных планов, которые близки (по издержкам) к оптимальным планам сразу при всех достаточно больших $T$.

*Доказательство.* По определению оптимального плана

$$\frac{f(T;y_{opt}(T))}{f(T;y)}\le 1. \qquad (6)$$

Найдем нижнюю границу для рассматриваемого отношения. При фиксированном $T$ можно указать неотрицательное целое число $n$ такое, что

$$\frac{nQ_0}{m}\le T<\frac{(n+1)Q_0}{m}.$$

Так как $Tf(T;\ y_{opt}(T))$ и $\frac{nQ_0}{m}f\left(\frac{nQ_0}{m};y_{opt}(T)\right)$- общие издержки на интервалах $(0;\ T)$ и $(0;\ nQ_0/\mu)$ соответственно при использовании оптимального на (0; Т) плана, то, очевидно, поскольку второй интервала – часть первого (или совпадает с ним), первые издержки больше вторых, т.е.

$$Tf(T;\ y_{opt}(T))\ge\frac{nQ_0}{m}f\left(\frac{nQ_0}{m};y_{opt}(T)\right).$$

Далее, т.к. на интервале $(0; nQ_0/\mu)$, включающем целое число периодов плана $y_0$, оптимальным является начальный отрезок этого плана $y_0(nQ_0/\mu)$, то

$$\frac{nQ_0}{m} f\left(\frac{nQ_0}{m}; y_{opt}(T)\right) \geq \frac{nQ_0}{m} f\left(\frac{nQ_0}{m}; y_0(T)\right)$$

В правой части последнего неравенства стоит $\frac{nQ_0}{m}\sqrt{2mgs}$ (здесь использована формула для минимального значения средних издержек $f(T; y)$ при $T$, кратном $nQ_0/\mu$). Из проведенных рассуждений вытекает, что

$$Tf(T; y_{opt}(T)) \geq \frac{nQ_0}{m}\sqrt{2mgs}. \quad (7)$$

Для общих издержек на интервалах $(0; T)$ и $(0; (n+1)Q_0/\mu)$ при использовании плана $y_0$, очевидно, справедливо следующее неравенство

$$Tf(T; y_0(T)) \leq \frac{(n+1)Q_0}{m} f\left(\frac{(n+1)Q_0}{m}; y_0(T)\right)$$

Следовательно,

$$Tf(T; y_0(T)) \leq \frac{(n+1)Q_0}{m}\sqrt{2mgs}. \quad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) вытекает, что

$$\frac{f(T; y_{opt}(T))}{f(T; y_0)} \geq \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{Q_0}{mT}.$$

Так как $\frac{Q_0}{mT} \to 0$ при $T \to \infty$, то, учитывая неравенство (6), из последнего неравенства выводим справедливость заключения теоремы 1. Таким образом, асимптотическая оптимальность плана $y_0$ доказана.

При небольшом $T$ средние издержки в плане Вильсона могут существенно превышать средние издержки в оптимальном плане. Превышение вызвано скачками функции $f(T; y_0(T))$, связанными с переходами через моменты прихода очередных поставок (и увеличением общих издержек скачком на величину платы за доставку партии). Величину превышения средних издержек в плане Вильсона по сравнению с оптимальными планами можно рассчитать.

Пусть горизонт планирования $T = t_k + \varepsilon$, где $t_k$ – момент прихода ($k$+1)-й поставки в плане Вильсона, $\varepsilon > 0$. Тогда, как можно доказать,

$$\lim_{e\to 0}\frac{f(T;y_0(T))}{f(T;y_{opt}(T))}=\lim_{e\to 0}\frac{f(t_k+e;y_0(t_k+e))}{f(t_k+e;y_{opt}(t_k+e))}=1+\frac{1}{2k}.$$

Таким образом, затраты в плане Вильсона являются минимальными (относительно оптимального плана) при $T = t_k$, $k$ = 1, 2, … , где $t_k$ – моменты прихода поставок. Напомним, что план Вильсона является оптимальным при указанных $T$. Однако при $T$, бесконечно близком к $t_k$, но превосходящем $t_k$, затраты увеличиваются по сравнению с затратами в оптимальном плане в {1+1/(2$k$)} раз. При дальнейшем возрастании $T$ отношение издержек (средних или общих) в плане Вильсона к аналогичным издержкам в оптимальном плане постепенно уменьшается, приближаясь к 1 при приближении (снизу) к моменту $t_{k+1}$ прихода следующей поставки. А там – новый скачок, но уже на меньшую величину {1+1/(2$k$+2)}. И т.д.

Сразу после прихода первой поставки отношение затрат составляет 1,5 (превышение на 50%), после прихода второй – 1,25 (превышение на 25%), третьей – 1,167 (превышение на 16,7%), четвертой – 1,125 (превышение на 12,5%), пятой – 1,1 (превышение на 10%), и т.д. Таким образом, при небольших горизонтах планирования $T$ превышение затрат может быть значительным, план Вильсона отнюдь не оптимальный. Но чем больше горизонт планирования, тем отклонение меньше. Уже после сотой поставки оно не превышает 0,5%.

**Влияние отклонений от оптимального объема партии.** В реальных производственных и управленческих ситуациях часто приходится принимать решения об использовании объемов партии, отличных от оптимальной величины $Q_0$, рассчитанной по формуле квадратного корня (3). Например, при ограниченной емкости склада или для обеспечения полной загрузки транспортных средств большой вместимости. Это возможно также в ситуации, когда величина партии измеряется в целых числах (штучный товар) или даже в десятках, дюжинах, упаковках, ящиках, контейнерах и т.д., а величина $Q_0$ не удовлетворяет этому требованию и, следовательно, не может быть непосредственно использована в качестве объема поставки.

Поэтому необходимо уметь вычислять возрастание средних издержек при использовании напряженного плана с одинаковыми поставками объема $Q$, отличного от $Q_0$, по сравнению со средними издержками в оптимальном плане. Будем сравнивать средние издержки за целое число периодов. Как показано выше, они имеют вид

$$f_1(Q) = \frac{mg}{Q} + \frac{sQ}{2},$$

где $Q$- объем партии. Тогда

$$\frac{f_1(Q) - f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q - Q_0}{Q}\right)\left(\frac{Q - Q_0}{Q_0}\right) \qquad (9)$$

Это тождество нетрудно проверить с помощью простых алгебраических преобразований.

*Пример 2.* Пусть используется план с $Q = 0{,}9\ Q_0$. Тогда

$$\frac{f_1(Q) - f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}1Q_0}{0{,}9Q_0}\right)\left(\frac{-0{,}1Q_0}{Q_0}\right) = \frac{0{,}01}{1{,}8} = 0{,}0056.$$

.

Таким образом, изменение объема партии на 10% привело к увеличению средних издержек лишь на 0,56%.

*Пример 3*. Пусть используемое значение объема поставки $Q$ отличается от оптимального не более чем на 30%. На сколько могут возрасти издержки?

Из формулы (9) вытекает, что максимальное возрастание издержек будет в случае $Q = 0{,}7\, Q_0$. Тогда

$$\frac{f_1(Q) - f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}3Q_0}{0{,}7Q_0}\right)\left(\frac{-0{,}3Q_0}{Q_0}\right) = \frac{0{,}09}{1{,}4} = 0{,}0643.$$

.

Таким образом, издержки могут возрасти самое большее на 6,43%.

На первый взгляд представляется удивительным, что сравнительно большое отклонение значения переменной $Q$ от оптимального (на 10%) приводит к пренебрежимо малому возрастанию значения оптимизируемой функции. Этот факт имеет большое прикладное значение. Из него следует, что область «почти оптимальных» значений параметра весьма обширна, следовательно, из нее можно выбирать для практического использования те или иные значения, исходя из иных принципов. Можно, например, минимизировать какую-либо иную целевую функцию, тем самым решая задачу многокритериальной оптимизации. Можно «вписаться» в действующую дискретную систему возможных значений параметров. И т.д.

*Важное замечание 1.* Обширность области «почти оптимальных» значений параметра – общее свойство оптимальных решений, получаемых путем минимизации гладких функций. Действительно, пусть необходимо минимизировать некоторую функцию $g(x)$, трижды дифференцируемую. Пусть минимум достигается в точке $x_0$. Справедливо разложение Тейлора-Маклорена

$$g(x) = g(x_0) + \frac{dg(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3).$$

Однако в $x_0$ выполнено необходимое условие экстремума (в данном случае – минимума)

$$\frac{dg(x_0)}{dx} = 0.$$

Следовательно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка (по сравнению с $(x\text{-}x_0)^2$) справедливо равенство

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2. \qquad (10)$$

Это соотношение показывает, что приращение значений минимизируемой функции – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с приращением независимой переменной. Если

$$x = x_0 + \varepsilon,$$

то

$$g(x) - g(x_0) = C\varepsilon^2,$$

где

$$C = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}^2 .$$

Вернемся к классической модели управления запасами. Для нее надо рассматривать $f_1(Q)$ в роли $g(x)$. С помощью соотношения (10) заключаем, что

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 f_1(Q_0)}{dQ^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Вычислим вторую производную $f_1(Q)$. Поскольку

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{mg}{Q} + \frac{sQ}{2}\right) = -\frac{mg}{Q^2} + \frac{s}{2},$$

то

$$\frac{d^2 f_1(Q)}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}\left(-\frac{mg}{Q^2} + \frac{s}{2}\right) = \frac{2mg}{Q^3}.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{2mg}{Q_0} = \frac{2mg}{\sqrt{\frac{2mg}{s}}} = \sqrt{2mgs} = f_1(Q_0).$$

Следовательно,

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{f_1(Q_0)}{Q_0^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Отличие этой формулы от точной формулы (9) состоит только в том, что $Q$ в знаменателе одной из дробей заменено на $Q_0$.

**Устойчивость выводов в математической модели**. Вполне ясно, что рассматриваемая классическая модель управления запасами, как и любые иные экономико-математические модели конкретных экономических явлений и процессов, является лишь приближением к реальности. Приближение может быть более точным или менее точным, но никогда не может полностью уловить все черты реальности. Поэтому с целью повышения адекватности получаемых на основе экономико-математической модели выводов целесообразно изучить устойчивость этих выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели [5, 7]. Выше изучено изменение средних издержек при малых отклонениях величины поставки.

Предположим теперь, что вместо истинных значений параметров μ, $g$, $s$ нам известны лишь их приближенные значения $\mu^* = \mu + \Delta\mu$, $g^* = g + \Delta g$, $s^* = s + \Delta s$. Мы применяем план Вильсона, но с искаженным объемом партии

$$Q^* = Q^*(m^*, g^*, s^*) = \sqrt{\frac{2m^* g^*}{s^*}}.$$

Это приводит к возрастанию средних издержек. Согласно формулам (9) – (10) возрастание пропорционально $(\Delta Q)^2$ (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка). Здесь

$$\Delta Q = Q^*(m^*, g^*, s^*) - Q_0(m, g, s).$$

Выделим в $\Delta Q$ главный линейный член:

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial m}\Delta m + \frac{\partial Q}{\partial g}\Delta g + \frac{\partial Q}{\partial s}\Delta s = \sqrt{\frac{g}{2ms}}\Delta m + \sqrt{\frac{m}{2gs}}\Delta g - \sqrt{\frac{mg}{2s^3}}\Delta s \qquad (11)$$

(с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Величину $\Delta\mu$ можно определить по фактическим данным о спросе, оценив величину отклонения реального спроса от линейного приближения [7], например, с помощью математического аппарата линейного регрессионного анализа [5]. Для определения значений параметров $g$ и $s$ необходимо проведение специальных трудоемких исследований. К тому же существуют различные методики расчета этих параметров, результаты расчетов по которым не совпадают. Поэтому естественно оценить разумную точность определения $g$ и $s$ по известной точности определения $\mu$. Для этого воспользуемся «принципом уравнивания погрешностей», предложенным в [7].

*Важное замечание 2.* Принцип уравнивания погрешностей состоит в том, что погрешности различной природы должны вносит примерно одинаковый вклад в общую погрешность математической модели. Так, определение рационального объема выборки в статистике интервальных данных основано на уравнивании влияния метрологической и статистической погрешностей. Согласно подходу [7] выбор числа градаций в социологических анкетах целесообразно проводить на основе уравнивания погрешностей квантования и неопределенности в ответах респондентов. В классической модели управления запасами целесообразно уравнять влияние неточностей в определении параметров на отклонение целевой функции от оптимума.

Выберем $\Delta g$ и $\Delta s$ так, чтобы увеличение затрат, вызванное неточностью определения $g$ и $s$, было таким же, как и вызванное неточностью определения $\mu$. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка это означает, что необходимо уравнять между собой три слагаемых в правой части (11). После сокращения общего множителя получаем, что согласно принципу уравнивания погрешностей должно быть справедливо соотношение

$$\frac{|\Delta m|}{m} = \frac{|\Delta g|}{g} = \frac{|\Delta s|}{s}. \qquad (12)$$

Таким образом, относительные погрешности определения параметров модели должны совпадать.

В соотношении (12) используются истинные значения параметров, которые неизвестны. Поэтому целесообразно вначале вместо параметров использовать их грубые оценки, из (12) определить их примерную точность, затем провести исследования, уточняющие значения параметров. Эту процедуру естественно повторять до тех пор, пока не произойдет некоторое уравнивание относительных погрешностей определения параметров модели.

**Модель с дефицитом.** Классическая модель управления запасами может быть обобщена в различных направлениях. Одно из наиболее естественных обобщений – введение в модель возможности дефицита.

В рассматриваемой до сих пор модели предполагалось, что дефицит не допускается, т.е. некоторое количество товара на складе всегда есть. Но, может быть, выгоднее сэкономить на расходах по хранению запаса, допустив небольшой дефицит – потребность в товаре в некоторые интервалы времени может остаться неудовлетворенной?

Как подсчитать убытки от дефицита, в частности, от потери доверия потребителя? Будем считать, что если нет товара, владеющая складом организация платит штраф – каждый день пропорционально нехватке. По приходе очередной поставки все накопленные требования сразу же удовлетворяются.

Сохраним все предположения и обозначения рассматриваемой до сих пор модели, кроме отсутствия дефицита. Неудовлетворенный спрос будем рассматривать как отрицательный запас. График изменения величины запаса на складе изображен на рис.3.

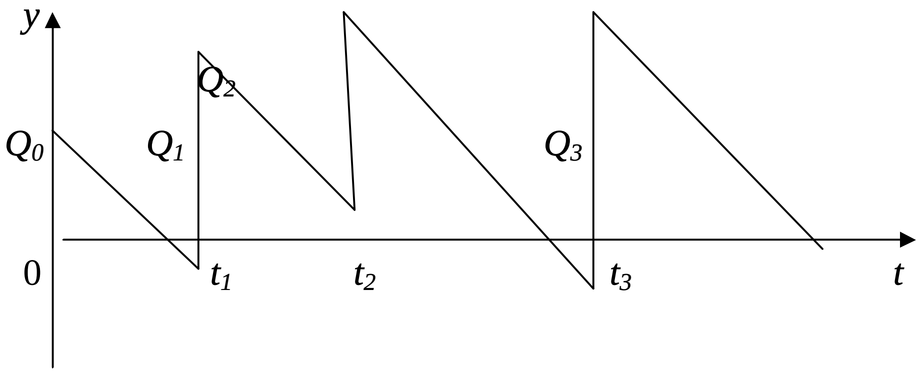


Рис.3. График изменения величины запаса на складе при возможности дефицита.

Очевидно, рис.1 и рис.3 отличаются только тем, что на последнем рисунке зубцы графика могут опускаться ниже оси абсцисс, что соответствует сдвигу графика рис.1 как единого целого вниз вдоль оси ординат.

Пусть $h$ – плата за нехватку единицы товара в единицу времени( например, в день). Тогда средние издержки за время $T$ определяются формулой

$$f_1(T,y) = f_1(y(t),\ 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}\left\{ s\int_0^T y(t)\chi(y(t) \ge 0)dt + h\int_0^T |\,y(t)\,|\,\chi(y(t) < 0)dt + gn(T)\right\},$$

где $\chi(A)$ – индикатор множества $A$, т.е. $\chi(y(t)\ge 0)$ = 1 при $y(t)\ge 0$ и $\chi(y(t)\ge 0)=0$ при $y(t)<0$, в то время как $\chi(y(t)<0)$ = 1 при $y(t)<0$ и $\chi(y(t)<0)$ = 0 при $y(t)\ge 0$. Таким образом, площадь под частью графика уровня запаса, лежащей выше оси абсцисс, берется с множителем $s$, а площадь между осью абсцисс и частью графика $y(t)$, соответствующей отрицательным значениям запаса, берется с заметно большим по величине множителем $h$.

Для модели с дефицитом оптимальный план находится почти по той же схеме, что и для модели без дефицита. Сначала фиксируем моменты поставок и находим при этом условии оптимальные размеры поставок. Фактически речь идет о выборе уровня запаса $Y$ в момент прихода очередной поставки (рис.4).

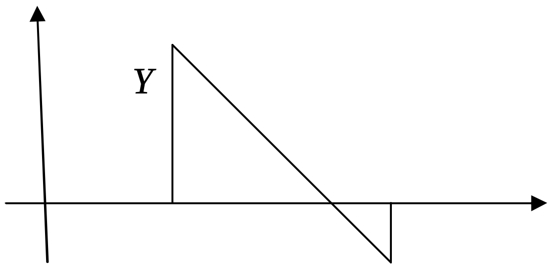


Рис.4. Первый шаг построения оптимального плана в модели с дефицитом.

Увеличивая или уменьшая $Y$, можно увеличивать или уменьшать площадь треугольника над осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом s) и соответственно уменьшать или увеличивать площадь треугольника под осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом $h$), добиваясь минимизации взвешенной суммы этих площадей. Все элементы прямоугольных треугольников на рис.4 выражаются через $Y$, заданный интервал времени между поставками и параметры модели. Минимизация соответствующего квадратного трехчлена дает оптимальное значение

$$Y = \frac{h}{s+h} m\Delta.$$

При этом минимальная сумма затрат на хранение и издержек, вызванных дефицитом, равна

$$\frac{\Delta^2 m}{2} \frac{sh}{s+h}.$$

Второй шаг нахождения оптимального плана в модели с дефицитом полностью совпадает с аналогичным рассуждением в исходной модели. Фиксируется число поставок, и с помощью варьирования размеров интервалов между поставками минимизируется целевой функционал. Поскольку сумма квадратов некоторого числа переменных при заданной их сумме достигает минимума, когда все эти переменные равны между собой, то оптимальным планом является план, у которого все зубцы одинаковы, т.е. уровень запаса в момент прихода очередной поставки – всегда один и тот же. При этом все объемы поставок, за исключением начальной (нулевой), равны между собой:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots, Q_0 = \frac{h}{s+h}Q. \qquad (13)$$

На третьем этапе среди указанного однопараметрического дискретного множества планов находим оптимальный. Как и для модели без дефицита, в качестве ориентира используется план с размером поставки, определяемой по формуле квадратного корня,

$$Q_0(m, g, s, h) = \sqrt{\frac{2mg(s+h)}{sh}}.$$

Для горизонтов планирования $T$, кратных $Q_0(m, g, s, h)$/μ, оптимальным является план типа (13) с $Q$ = $Q_0(m, g, s, h)$. Для всех остальных горизонтов планирования, как и в случае модели без дефицита, необходимо найти неотрицательное целое число $n$ такое, что

$$Q_1 = \frac{mT}{n+1} < Q_0(m, g, s, h) < \frac{mT}{n} = Q_2,$$

а затем, сравнив издержки для $Q$ = $Q_1$ и $Q$ = $Q_2$, объявить оптимальным то из этих двух значений, для которого издержки меньше.

Отметим, что модель без дефицита является предельным случаем для модели с дефицитом при безграничном возрастании платы за дефицит. В частности,

$$\lim_{h\to\infty} Q_0(m, g, s, h) = \sqrt{\frac{2mg}{s}}.$$

Как и в случае модели без дефицита, план с объемом поставки, определяемой по формуле квадратного корня, $Q = Q_0(m, g, s, h)$, является асимптотически оптимальным.

**Система моделей на основе модели Вильсона.** Классическая модель теории управления запасами, называемая также моделью Вильсона, допускает различные обобщения.

Одно из таких обобщений – модель с конечной скоростью поставки $\upsilon$, т.е. модель, в которой за время $\Delta t$ поставляется продукция объемом $\upsilon\Delta t$ (при наличии в то же время постоянного спроса с интенсивностью $\mu$, причем считается, что $\upsilon>\mu$). Таким образом, в этой модели поставка происходит не мгновенно, а в течение некоторого интервала времени, причем объем поставляемой продукции линейно зависит от времени. Такие поставки будем называть линейными с интенсивностью $\upsilon$.

Другое обобщение классической модели связано с обобщением функции от объема запаса, задающей плату за хранение. В исходной модели считалось, что расходы за хранение пропорциональны объему продукции на складе. Естественно считать, что эти расходы должны содержать постоянный член $a$, не зависящий от объема продукции на складе (расходы на содержание самого склада, оплату работников и т.д.). Однако оптимальный план при таком обобщении не изменится. Действительно, в формуле для издержек добавится постоянный член $a$, и положение минимума не изменится при его добавлении.

Однако в модели с дефицитом ситуация иная. Затраты на хранение возникают только при наличии товара на складе, и издержки этого вида вполне естественно разделить на постоянные и переменные (пропорциональные объему запаса на складе).

Аналогично издержки, вызванные дефицитом, вполне естественно разделить на постоянные (вызванные самим фактом дефицита) и переменные (пропорциональные величине дефицита).

В классической модели плата за доставку партии не зависит от объема партии. Т.е. здесь используются только постоянные издержки. Представляется вполне естественным ввести линейный член, соответствующий возрастанию платы за доставку в зависимости от величины партии (переменные издержки). (Ниже будет показано, что добавление этого члена не влияет на решение задачи оптимизации и вид оптимального плана.) Дальнейшее обобщение – введение скидок в зависимости от величины партии. Это приводит к выражению платы за доставку в виде квадратного трехчлена от объема партии.

Можно рассматривать одновременно несколько обобщений. В результате получаем систему моделей на основе классической модели управления запасами, состоящую из 36 моделей [14]. Каждая из них может быть описана набором четырех чисел ($a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$). Каждое из этих чисел соответствует одному из рассмотренных выше видов обобщений исходной модели.

При этом $a(1) = 0$, если поставки мгновенные, и $a(1) = 1$, если поставки являются линейными с интенсивностью $\upsilon$, причем $\upsilon>\mu$.

Если плата за хранение продукции объемом $y$ в течение единицы времени равна $sy$, то $a(2) = 0$. Если же учтены постоянные (при наличии товара на складе) издержки, т.е. указанная плата равна $sy+a$, $a>0$, то $a(2) =1$.

Если плата за нехватку продукции объемом $y$ в течение единицы времени бесконечна (т.е. дефицит не допускается), то $a(3) = 0$. Если эта плата равна $hy$ (рассмотренная выше модель с дефицитом), то $a(3)=1$. Если же вводятся также постоянные издержки (плата за само наличие дефицита), т.е. плата за нехватку продукции объемом $y$ в течение единицы времени равна $hy + b$, $b > 0$, то $a(3) = 2$.

Наконец, $a(4) = 0$, если плата за доставку партии продукции объемом $Q$ равна $g$. Если учитываются переменные издержки, т.е. эта плата равна $g + g_1Q$, то $a(4) = 1$. Если же в модели учитываются скидки на объем партии, т.е. если плата за доставку партии продукции объемом $Q$ равна $g + g_1Q + g_2Q^2$, то $a(4) = 2$.

Для $a(1)$ имеется два возможных значения, для $a(2)$ – тоже два, для $a(3)$ – три возможных значения, для $a(4)$ – тоже три. Всего имеется 2 х 2 х 3 х 3 = 36 возможных комбинаций, т.е. 36 возможных моделей. Классическая модель управления запасами описывается набором (0, 0, 0, 0), а модель с дефицитом – набором (0, 0, 1, 0).

Рассмотрим наиболее обобщенную модель рассматриваемой системы. Она описывается набором (1, 1, 2, 2). Можно показать, что для нее справедливы основные утверждения, касающиеся классической модели и модели с дефицитом. Однако «формула квадратного корня» имеет более сложный вид, а именно,

$$Q_0(m,n,s,a,h,b,g,g_1,g_2) = \sqrt{\frac{mg - \dfrac{(a-b)^2}{2(s+h)}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{m}{n}}\right)}{\dfrac{sh}{2(s+h)}\left(1-\dfrac{m}{n}\right) + mg_2}}.$$

В частности, план с $Q$ = $Q_0(m,n,s,a,h.b.g.g_1,g_2)$ является асимптотически оптимальным.

Формула для $Q_0(m,n,s,a,h,b,g,g_1,g_2)$ позволяет обнаружить ряд любопытных эффектов. Так, в ней не участвует параметр $g_1$. Другими словами, при любом изменении этого параметра оптимальный объем поставки не меняется. Если запас пополняется весьма быстро по сравнению со спросом, т.е. υ>>μ, то соответствующий множитель в «формуле квадратного корня» исчезает, и для моделей с $a(1) = 0$ получаем более простую формулу

$$Q_0(m,+\infty,s,a,h,b,g,g_1,g_2)=\sqrt{\frac{mg-\dfrac{(a-b)^2}{2(s+h)}}{\dfrac{sh}{2(s+h)}+mg_2}}.$$

Дальнейшее упрощение получаем при $a = b$. Это равенство означает, что постоянные (в другой терминологии – фиксированные) платежи за хранение и в связи с дефицитом совпадают, например, равны 0. Если последнее утверждение справедливо, то

$$Q_0(m,+\infty,s,0,h,0,g,g_1,g_2)=\sqrt{\frac{mg}{\dfrac{sh}{2(s+h)}+mg_2}}.$$

Предположим теперь, что при доставке партии отсутствуют скидки (или надбавки) за размер партии. Тогда «формула квадратного корня» упрощается дальше и приобретает вид

$$Q_0(m,+\infty,s,0,h,0,g,g_1,0)=\sqrt{\frac{mg}{\dfrac{sh}{2(s+h)}}}.=\sqrt{\frac{2mg(s+h)}{sh}}.$$

Эта формула уже была получена выше при рассмотрении модели с дефицитом. При безграничном возрастании $h$ получаем формулу Вильсона для классической модели управления запасами:

$$Q_0(m,+\infty,s,0,+\infty,0,g,g_1,0)=\sqrt{\frac{2mg}{s}}.$$

Новое в последних двух формулах – наличие в левой части параметра $g_1$, не участвующего в формировании объема партии.

*Важное замечание 3.* Модели конкретных экономических (и не только) процессов и явлений обычно не встречаются и не изучаются поодиночке. Обычно имеется совокупность моделей, объединенных в систему, переходящих друг в друга при тех или иных предельных переходах. Часто более простые модели используются для расчетов, более сложные применяются для изучения точности, достигаемой с помощью более простых, согласно подходу, развитому в [5].

**О практическом применении классической модели управления запасами**. Для отработки методики практического использования классической модели управления запасами был проведен эксперимент на снабженческо-сбытовой базе, а именно, на Реутовской химбазе Московской области. Собраны и обработаны данные по одному из товаров, распространяемых этой организацией в большом объеме, - по кальцинированной соде. В качестве исходной информации о спросе использовались данные об ежедневном отпуске кальцинированной соды потребителям, зафиксированные на карточках складского учета. Рассчитана величина затрат на хранение как соответствующая доля общей суммы издержек по содержанию базы, а также расходы на доставку новых партий. Для определения расходов на хранение запасов использованы данные о заработной плате складского персонала (включая основную и дополнительную заработная плата, начисления на зарплату), расходах на содержание охраны, эксплуатацию складских зданий и сооружений, расходах по текущему ремонту, по таре, на приемку, хранение, упаковку и реализацию товаров, о величине амортизационных отчислений и др. Для расчета расходов на доставку новых партий товара использованы данные о расходах по завозу, о плате за пользование вагонами и контейнерами сверх установленных норм, расходах на содержание и эксплуатацию подъемно-транспортных механизмов, о заработной плате работников, занятых в процессе доставки товара, канцелярских, почтовых и телеграфных расходах и др.

Полезным оказалось вытекающее из «принципа уравнивания погрешностей» соотношение (12). Интенсивность спроса $\mu$ и погрешность определения этого параметра найдены методом наименьших квадратов. Это дало возможность установить величину относительной точности определения параметров модели, вытекающих из величин погрешностей исходных данных для спроса. Параметры классической модели управления запасами $g$ и $s$ оценивались двумя способами – по методике Всесоюзного института материально-технического снабжения и по методике Центрального экономико-математического института АН СССР. Для каждой из методик с помощью соотношения (12) были определены абсолютные погрешности определения параметров $g$ и $s$. Оказалось, что для каждой из методик интервалы ($s - \Delta s$, $s + \Delta s$) и ($g - \Delta g$, $g + \Delta g$) таковы, что числа, рассчитанные по альтернативной методике, попадают внутрь этих интервалов. Это означает, что для определения параметров $g$ и $s$ можно пользоваться любой из указанных методик (в пределах точности расчетов, заданной наблюдаемыми колебаниями спроса).

Вызванное отклонениями параметров модели в допустимых пределах максимальное относительное увеличение суммарных затрат на доставку и хранение продукции не превосходило 26% (колебания по кварталам от 22,5% до 25,95%). Фактические издержки почти в 3 раза превышали оптимальные (в зависимости от квартала фактические издержки составляли от 260% до 349% от оптимального уровня). Следовательно, внедрение модели Вильсона в практику управления запасами на Реутовской химбазе дает возможность снизить издержки, связанные с доставкой и хранением кальцинированной соды не менее чем в 2 раза [15].

Таким образом, несмотря на то, что параметры модели определены неточно и отклонения значений параметров (от тех значений, по которым рассчитывается оптимальный план поставок) приводят к некоторому увеличению затрат по сравнению с затратами в оптимальном плане, использование рассматриваемой модели для реального управления запасами конкретной продукции может дать значительный экономический эффект. Аналогичным является положение со многими другими моделями управления запасами. Это утверждение подтверждает и зарубежный опыт, проанализированный в монографии [7].

**Двухуровневая модель управления запасами.** Создание любой автоматизированной системы управления материально-техническим снабжением (в другой терминологии – процессами логистики), базирующейся на комплексе экономико-математических моделей, должно включать в себя разработку (в качестве блоков) моделей деятельности отдельных баз (складов). Поэтому большое внимание уделяется проблеме построения оптимальной политики управления запасами на базе (складе). Экономико-математическую теорию удается развивать в основном для однопродуктовых моделей.

Двухуровневая модель управления запасами – это однопродуктовая модель работы склада, в которой заявки потребителей удовлетворяются мгновенно. При отсутствии продукта заявки учитываются. Как только запас на складе опускается до уровня $R < 0$, мгновенно поступает партия товара величиной $Q$ и запас на складе оказывается равным $R+Q>0$. Как и в рассмотренном выше варианте классической модели Вильсона с дефицитом, издержки складываются из издержек по хранению, издержек от дефицита и издержек по доставке. Средние издержки за время $T$ имеют вид

$$f_1(T, y) = f_1(y(t),\ 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}\left\{ s\int_0^T y(t)c\,(y(t) \ge 0)dt + h\int_0^T |\,y(t)\,|\ c\,(y(t) < 0)dt + gn(T) \right\},$$

где $y(t)$ – уровень запаса на складе, $\chi(A)$ – индикатор множества $A$, т.е. $\chi(y(t)\geq 0) = 1$ при $y(t)\geq 0$ и $\chi(y(t)\geq 0)=0$ при $y(t)<0$, в то время как $\chi(y(t)<0) = 1$ при $y(t)<0$ и $\chi(y(t)<0) = 0$ при $y(t)\geq 0$, параметры модели $s$, $h$, $g$ имеют тот же смысл, что и выше. Оптимизация состоит в определении значений нижнего уровня $R$ и верхнего уровня $R+Q$, минимизирующих средние издержки.

В 1950-х годах американский исследователь К.Эрроу (в будущем – нобелевский лауреат по экономике) с сотрудниками показал, что в ряде случаев оптимальная политика управления запасами – это политика, основанная на двухуровневой модели [7]. Этот принципиально важный теоретический результат стимулировал развитие исследований свойств двухуровневой модели. Однако окончательная теория была построена только в конце 1970-х годов [7].

Важными являются характеристики потока заявок. Пусть $\tau(T)$ – число заявок за время $T$. Эта величина предполагается случайной. С прикладной точки зрения вполне естественно предположить, что математическое ожидание $M\tau(T)$ конечно. Накопленный спрос за время $T$ имеет вид

$$X(T) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{t(T)},$$

где $X_j$ – величина $j$-ой заявки. Предполагается, что $X_1$, $X_2$, … , $X_n$, … - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $MX_1$. Таким образом, накопленный спрос за время $T$ является суммой случайного числа случайных слагаемых. Накопленный спрос определяет уровень запаса на складе, поэтому математический аппарат изучения двухуровневой модели – это предельная теория сумм случайного числа случайных слагаемых.

При некоторых условиях регулярности (выполняющихся для реальных систем управления запасами) в [7] найдены оптимальные (для горизонта планирования $T$) значения нижнего и верхнего уровней:

$$R_0(T) = -\sqrt{\frac{2gsMt(T)MX_1}{Th(s+h)}},$$

$$Q_0(T) = \sqrt{\frac{2g(s+h)Mt(T)MX_1}{Tsh}}.$$

Часто можно принять, что число поступающих заявок обладает некоторой равномерностью. Например, вполне естественно принять, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{Mt(T)}{T} = l$$

при некотором λ. Здесь λ – параметр, описывающий предельную интенсивность спроса. Тогда асимптотически оптимальные уровни имеют вид:

$$R_0 = -\sqrt{\frac{2gs\,l\,MX_1}{h(s+h)}},$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2g(s+h)\,l\,MX_1}{sh}}.$$

Отметим, что асимптотическое распределение уровня запаса на складе – равномерное на отрезке $[R, R+Q]$.

**Модель планирования размеров поставок на базу (склад).** В двухуровневой модели накопленный спрос в любой момент времени является случайной величиной. Это не всегда соответствует экономической реальности. Достаточно часто в соответствии с заключенными договорами размеры поставок на базу и объемы запрашиваемой потребителями продукции определены до начала года (с разбивкой по кварталам или по месяцам) и затем не меняются. Однако поставщик имеет право отгружать продукцию, а потребители – забирать ее в течение всего квартала (или месяца).

Опишем соответствующую однопродуктовую модель [16]. Пусть интервал планирования разбит на $m$ периодов, не обязательно одинаковых по продолжительности. В течение каждого периода приходит на базу одна поставка. В $i$-й период ее величина равна $H_i$, а момент поступления – случайная величина $\tau(i)$ с функцией распределения $G(i,t)$, $0 \le t \le 1$, где $t$ – отношение времени, прошедшего с начала $i$-го периода, к продолжительности его, $i = 1, 2, \ldots, m$.

В $i$-й период имеется $n(i)$ потребителей, получающих с базы строго определенное количество продукта, $c(1,i)$, $c(2,i)$, …, $c(n(i),i)$ соответственно. Моменты поступления требований от потребителей – случайные величины $\delta(i,j)$, $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, с функциями распределения $F(i,j,t)$, $0 \le t \le 1$, где $t$ – отношение времени, прошедшего после начала соответствующего периода, к продолжительности этого периода. Если в момент прихода требования на базе имеется достаточное количество продукта, то он отпускается мгновенно. Если продукта нет, то потребителю придется ждать очередной поставки. Если продукта недостаточно, то весь оставшийся товар отпускается сейчас же, а оставшуюся часть приходится ждать.

В течение $i$-го периода, $i = 1, 2, \ldots, m$, все моменты поступления товара и требований $\tau(i)$, $\delta(i,j)$, $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, предполагаются независимыми в совокупности. Потери, как обычно, складываются из издержек по хранению и от дефицита (расходы на доставку партий заданы заранее, т.е. постоянны, а потому их можно не включать в минимизируемый функционал). Издержки по хранению предполагаются пропорциональными времени хранения и величине запаса с коэффициентами пропорциональности $s(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Издержки от дефицита складываются из потерь у каждого из потребителей; они пропорциональны величине и длительности дефицита с коэффициентами пропорциональности $h(i,j)$, $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть $x(0)$ – начальный запас, $x(i)$ – количество продукта на базе в конце $i$-го периода, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $S(i) = \{s(i), c(j,i), \mathrm{h}(i,j), G(i,t), F(i,j,t), 0 \le t \le 1, j = 1, 2, \ldots, n(i)\}$ – исходные данные модели в $i$-й период. Как легко видеть, математическое ожидание издержек за $i$-й период зависит только от $x(i\text{-}1)$, $x(i)$ и $S(i)$. Для краткости обозначим его через $f(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$. Тогда математическое ожидание издержек за $m$ периодов равно

$$Z(m) = f(x(0), x(1), S(1)) + f(x(1), x(2), S(2)) + \ldots$$
$$+ f(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) + \quad + f(x(m\text{-}1), x(m), S(m)).$$

Необходимо минимизировать $Z(m) = Z(x(0), x(1), \ldots, x(i), \ldots, x(m))$ по совокупности переменных. Таким образом, необходимо найти оптимальные значения уровней запаса на складе в начале и в конце периодов. Это эквивалентно определению оптимальных размеров поставок по периодам и начального запаса. Ограничения рассматриваемой оптимизационной задачи выписаны в [7, 16].

Вначале была сделана попытка рассматривать задачу минимизации $Z(m)$ как задачу динамического программирования и решать ее типовыми методами. Однако вычислительных мощностей оказалось недостаточно для выполнения расчетов. Тогда нам удалось показать, что функция $(m+1)$-го переменного $Z(m)$ в действительности является суммой $(m + 1)$ функции одного переменного. Действительно,

$$f(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) = f_1\,(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) + f_2\,(x(i\text{-}1), x(i), S(i)),$$

где $f_1\,(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ – математическое ожидание затрат, произведенных до прихода очередной поставки, $f_2\,(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ – математическое ожидание затрат после поступления поставки.

Ясно, что $f_1\,(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ определяется запасом на начало периода и спросом до прихода поставки, но не зависит от запаса на конец периода, т.е. от $x(i)$. Таким образом, можно записать, что

$$f_1\,(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) \equiv f_1\,(x(i\text{-}1), S(i)).$$

Пусть $H_i$ – объем поставки на склад в $i$-й период. Сразу же после прихода поставки запас $y$ на складе равен

$$y(\tau(i)) = x(i\text{-}1) + H_i - \xi(\tau(i)) = x(i) + \sum_{1\le j\le n(i)} c(j,i) - \xi(\tau(i)),$$

где $\xi(\tau(i))$ – накопленный с начала периода спрос. Поскольку $\xi(\tau(i))$ не зависит от $x(i\text{-}1)$, то и $f_2$ $(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ не зависит от $x(i\text{-}1)$. Итак,

$$f_2\,(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) \equiv f_2\,(x(i), S(i)).$$

Следовательно, минимизируемая функция имеет вид

$$Z(m) = f_1(x(0), S(1)) + \sum_{1 \le i \le m-1} \{ f_2(x(i), S(i)) + f_1(x(i), S(i+1)) \} + f_2(x(m), S(m)).$$

При этом ограничения наложены на каждую переменную $x(i)$ по отдельности [7, 16]. Ясно, что задача минимизации $Z(m)$ распадается на $m$+1 задачу минимизации функций одной переменной:

$$f_1(x(0), S(1)) \to \min,$$

$$f_2(x(i), S(i)) + f_1(x(i), S(i+1)) \to \min, \quad (14)$$

$$f_2(x(m), S(m)) \to \min$$

(ограничения не указаны). Следовательно, $x(k)$ зависит только от исходных данных смежных периодов $S(k)$ и $S(k+1)$ и остается неизменным при любом изменении $S(i)$, $i \neq k$, $i \neq k+1$. Из указанного разложения задачи многомерной оптимизации на ряд задач одномерной оптимизации вытекает также, что при планировании на $m(1)$ и $m(2)$ периодов совпадают оптимальные значения начального запаса и поставок за первые $\min\{m(1), m(2)\}$ -1 периодов. В частном случае стационарного режима $S(i)= S$, $i$= 1, 2, …, $m$, оптимальный план имеет вид $\{a, b, b, \ldots, b, \ldots, b, c\}$, где $a$ – решение первой из указанных в (14) задач, $b$ – решение второй задачи и $c$ – третьей.

Переход к задачам (14) не только позволяет решить исходную задачу минимизации (напомним, что для минимизации задачи в исходной форме не хватало вычислительных мощностей), но также получить весьма важный для экономической интерпретации вывод о независимости оптимальных значений поставок и начального запаса от горизонта планирования $m$.

*Важное замечание 4.* Рассмотренная модель дает хороший пример пользы математического анализа оптимизационной задачи принятия решений. Такой анализ позволяет решать задачу не стандартными методами, требующими больших вычислительных ресурсов, а с помощью специально разработанных алгоритмов, учитывающих специфику задачи и позволяющих на много порядков сократить вычисления. Плата за экономию вычислительных ресурсов – необходимость квалифицированного труда специалистов по экономико-математическим методам и прикладной математике.

В настоящее время логистика – одна из экономических дисциплин, весьма развитая как в теоретическом, так и в практическом отношении. В ней рассматривается масса конкретных моделей управления запасами. Из перспективных направлений назовем использование случайных множеств в моделях логистики. Моделирование с целью нахождение оптимальных решений выше было продемонстрировано на примерах системы моделей, исходящих из классической модели Вильсона, двухуровневой модели, модели оптимизации объемов поставок на базу (склад).

## Литература

1. Щапов А.Н. Направления повышения эффективности оперативного финансового управления компанией холдингового типа. Автореферат дисс. канд. экон. наук. – М.: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2002. – 24 с.

2. Иванова Н.Ю., Орлов А.И. Экономико-математическое. моделирование малого бизнеса (обзор подходов) // Экономика и математические методы. 2001. Т.37. №2. С.128-136.

3. Иванова Н.Ю. Малый инновационный бизнес в странах развитой рыночной экономики // Российский экономический журнал, 1995, № 12. С. 42-51.

4. Малое инновационное предпринимательство / Под ред. Ивановой Н.Ю.- М.: ЦЭО Минобразования РФ, 1996. – 232 с.

5. Орлов А.И. Эконометрика.- М.: Экзамен, 2002. - 576 с.

6. Орлов А.И. Сертификация и статистические методы. // Заводская лаборатория, 1997, № 3. С. 55-62.

7. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М., Наука, 1979. – 296 с.

8. Ìàòåìàòè÷åñêîå ìîäåëèðîâàíèå ïðîöåññîâ íàëîãîîáëîæåíèÿ (ïîäõîäû ê ïðîáëåìå) / Под ред. À.È. Îðëîâà и др. - Ì.: Èçä-âî ÖЭО Ìèíîáðàçîâàíèÿ ÐÔ, 1997. 232 ñ.

9. Горский В.Г., Моткин Г.А., Орлов А.И. и др. Методологические основы ранжирования и классификации промышленных объектов, подлежащих экологическому страхованию. // Труды Второй Всероссийской конференции "Теория и практика экологического страхования". - М.: Ин-т проблем рынка РАН, 1996, с.7-12.

10. Орлов А.И., Горский В.Г., Жихарев В.Н., Цупин В.А. и др. Экспертные оценки: современное состояние и перспективы использования в задачах экологического страхования.// Труды Второй Всероссийской конференции "Теория и практика экологического страхования". - М.: Ин-т проблем рынка РАН, 1996, с.20-23.

11. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966. - 432 с.

12. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. - М.: Наука, 1971. - 436 с.

13. Менеджмент / Под ред. Ж.В. Прокофьевой. – М.: Знание, 2000. – 288 с.

14. Орлов А.И., Конюхова Т.А. Математические модели в экономике. Модель Вильсона управления запасами. - М.: Изд-во Московского государственного института электроники и математики (технического ун-та), 1994. – 31 с.
15. Душкесас Р.Ф. Проблемы устойчивости в классической модели управления запасами. Дипломная работа. М.: МИНХ им. Г.В. Плеханова, факультет экономической кибернетики, 1977. – 70 с.
16. Орлов А.И., Пейсахович Э.Э. Некоторые модели планирования оптимальных размеров поставок и начального запаса // Экономика и математические методы. 1975. Т.XI. №.4. С.681-694.

## Êîíòðîëüíûå âîïðîñû и задачи

1. Чем модель экономико-математическая модель малого предприятия типа «поток проектов» отличается от модели типа «занятие ниши»?
2. На складе хранится некоторая продукция, пользующаяся равномерным спросом. За 1 день со склада извлекается 0,5 *т* продукции, плата за хранение 1 *т* продукции в день – 2 тыс. руб., плата за доставку одной партии – 50 тыс. руб. Планирование производится на 21 день. На сколько процентов затраты в плане Вильсона (объем партии определяется по формуле квадратного корня) превышают затраты в оптимальном плане?
3. Оцените увеличение затрат в плане Вильсона (объем партии определяется по формуле квадратного корня) по сравнению с оптимальным планом за целое число периодов, если размер партии отличается от оптимального не более чем на 5%.
4. Каким образом концепция асимптотически оптимального плана позволяет решить проблему горизонта планирования?

5. В чем состоит основной вклад математики при разработке модели планирования оптимальных размеров поставок и начального запаса?

## Òåìû äîêëàäîâ è ðåôåðàòîâ

1. Экономико-математическое моделирование работы промышленного предприятия.
2. Применение теории массового обслуживания при моделирования работы организаций сферы массовых услуг (телефонных сетей, магазинов и др.).
3. Эконометрическая и экономико-математическая поддержка работы малого предприятия.
4. Специфика решения задачи оптимизации при анализе классической модели работы склада.
5. В каком смысле оптимальна двухуровневая модель управления запасами?
6. Современная логистика в системе организационно-экономических методов управления организацией.