

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛЮВАННЯ
В ЕНЕРГЕТИЦІ імені Г.Є. ПУХОВА

С.Є. САУХ, А.В. БОРИСЕНКО

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ
В РИНКОВИХ УМОВАХ**

Київ 2020

УДК 004.94+519.6+51-74
М 86

Рекомендовано до видання Вченою радою Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г.Є. Пухова НАН України (протокол № 12 від 30.07.2020 р.)

Рецензенти:

Є. М. Письменний, доктор технічних наук, професор

П. І. Стецюк, доктор фізико-математичних наук

Саух, С. Є.

М 86 Математичне моделювання електроенергетичних систем в ринкових умовах: монографія / С. Є. Саух, А. В. Борисенко. — К.: «Три К», 2020. — 340 с.

ISBN 978-966-7690-56-4

В монографії представлені моделі рівноважного стану електроенергетики в ринкових умовах. В моделях відображено поведінку енергокомпаній, технологічні і системні обмеження, в яких вони працюють. Задачі моделювання сформульовано у вигляді змішаних задач додатковості. Для їх вирішення застосовано квазіньютонівський метод з регуляризацією якобіана Кларка та стовпцево-рядковою факторизацією матриць. Наведено приклади моделювання рівноважних станів ОЕС України, а також об'єднання електроенергетичних систем країн Бенілюксу, Франції та ФРН.

Для фахівців з прикладної математики, економістів та інженерів.

The monograph presents models of the equilibrium state of electric power industry in market conditions. The models reflect the behavior of energy companies, technological and system constraints in which they operate. The modeling problems are formulated in the form of mixed complementarity problems. To solve them, the quasi-Newtonian method with regularization of the Clarke's generalized Jacobian and column-row-factorization of matrices was used. Examples of modeling the equilibrium states of the UES of Ukraine as well as the interconnection of electric power systems of the Benelux countries, France and Germany are given.

For specialists in applied mathematics, economists and engineers.

УДК 004.94+519.6+51-74

ISBN 978-966-7690-56-4

© С. Саух, А. Борисенко 2020

ЗМІСТ

ВСТУП.....	10
1. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВИТКУ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ В РИНКОВИХ УМОВАХ	18
1.1. Організація діяльності електроенергетики.....	19
1.1.1. Типи ринкових структур.....	21
1.1.2. Оптова торгівля електроенергією.....	25
1.1.3. Ефективність ринкових перетворень.....	30
1.1.4. Модельна структура енергоринку.....	34
1.1.5. Досконала та недосконала конкуренція.....	36
1.2. Попит на електроенергію.....	38
1.2.1. Неоднорідність попиту та графіки навантажень....	38
1.2.2. Територіальний розподіл.....	43
1.3. Вплив електричної мережі.....	44
1.4. Технології генерації.....	48
1.4.1. Класифікація технологій генерації.....	49
1.4.2. Основні ТЕП та маневрові характеристики.....	53
1.4.3. Структура витрат.....	56
1.4.4. Умови використання різних технологій генерації.....	58
1.4.5. Визначення режимів роботи генеруючого устаткування в ринкових умовах.....	60
1.4.6. Внутрішні зв'язки, властиві сектору генерації електроенергії.....	63

1.5. Забезпечення надійності виробництва електроенергії.....	67
1.5.1. Забезпечення необхідного резерву.....	67
1.5.2. Проходження нічного мінімуму навантаження.....	70
1.6. Механізм екологічного регулювання.....	71
1.7. Часові характеристики планування розвитку виробничих потужностей.....	72
1.8. Задачі управління електроенергетикою.....	73
1.8.1. Задачі розвитку електроенергетичної системи.....	73
1.8.2. Обґрунтування задачі дослідження.....	75
1.9. Висновки	77
2. МЕТОДОЛОГІЯ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ В СУЧАСНИХ РИНКОВИХ УМОВАХ.....	81
2.1. Світові тенденції розвитку систем моделювання енергетики.....	81
2.1.1. Методолгії моделювання енергетичних систем.....	81
2.1.2. Огляд систем моделювання енергетики.....	82
2.1.3. Вирішувачі задач моделювання енергетичних систем.	93
2.1.4. Особливості національних систем моделювання енергетики Австралії, США та країн ЄС.....	94
2.2. Узагальнена форма задач моделювання рівноважного стану енергетики в ринкових умовах	100
2.3. Проблеми математичного моделювання стану конкурентної рівноваги на ринку електроенергії.....	104
2.4. Висновки	106

3. ПРЕДСТАВЛЕННЯ МЕРЕЖІ ЛІНІЙ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧІ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ.....	107
3.1. Особливості моделювання мережі.....	107
3.2. Формування еквівалентної мережі.....	108
3.3. Математичний опис мережі.....	112
3.4. Ідентифікація параметрів ЛЕП еквівалентної мережі	114
3.5. Матриця передачі і розподілу потоків електроенергії.....	118
3.5.1. Комп'ютерне моделювання еквівалентної мережі.....	119
3.5.2. Моделювання мережі з 5-и вузлів і 6-и ЛЕП.....	120
3.5.3. Моделювання мережі з 30-и вузлів та 41-ї ЛЕП.....	122
3.6. Модель мережі у вигляді нелінійного кола постійного потоку з втратами електроенергії у ЛЕП.....	128
4. МОДЕЛІ РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ ПОТУЖНОСТЕЙ В РИНКОВИХ УМОВАХ	135
4.1. Задачі, які вирішують виробники електроенергії.....	135
4.2. Регульована монополія – планове господарство	139
4.3. Недосконала конкуренція	141
4.4. Теорія опціонів	142
4.5. Системна динаміка	146
4.6. Агентне моделювання	150
4.7. Теорія ігор.....	154
4.7.1. Модель досконалої конкуренції.....	155
4.7.2. Недосконала конкуренція – модель Курно.....	156

4.7.3. Модель узагальненої очікуваної реакції	156
4.7.4. Короткострокова задача.....	157
4.7.5. Довгострокова задача.....	157
4.7.6. Одноступенева гра	158
4.7.7. Двоступенева гра	160
4.7.8. S – адаптована стратегія	161
4.7.9. Досконала рівновага Маркова	163
4.7.10. Огляд моделей теорії ігор	165
4.8. Висновки	168
5. РІВНОВАЖНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТА РОЗВИТКУ ГЕНЕРУЮЧИХ ПОТУЖНОСТЕЙ В РИНКОВИХ УМОВАХ	170
5.1. Задача визначення режимів роботи генеруючого устаткування.....	170
5.1.1. Задача оптимізації об'ємів виробництва в умовах досконалої конкуренції на ринку.....	171
5.1.2. Задача оптимізації об'ємів виробництва в умовах недосконалої конкуренції на ринку.....	172
5.2. Методи аналізу моделей недосконалої конкуренції на ринку електроенергії	174
5.3. Задача оптимізації об'ємів виробництва у вигляді змішаної задачі додатковості.....	177
5.4. Врахування особливостей енергосистеми України в моделях пошуку рівноваги на ринку електроенергії.....	179
5.5. Висновки	186

6. ЗАДАЧІ ДОДАТКОВОСТІ, МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.....	187
6.1. Формулювання задач додатковості.....	187
6.2. Розв'язування лінійної задачі додатковості методом Лемке.....	190
6.3. Основні методи розв'язування задач додатковості	194
6.3.1. <i>C</i> -функції.....	195
6.3.2. <i>C</i> -функції для негладких переформулювань задач додатковості.....	196
6.4. Локальні методи для негладких функцій.....	199
6.4.1. Диференціювання негладких функцій.....	199
6.4.2. Узагальнені якобіани Кларка деяких <i>C</i> -функцій.....	201
6.4.3. Базові методи ньютонівського типу.....	204
6.4.4. Напівгладкі ньютонівські методи.....	205
6.4.5. Проекційний метод Левенберга-Марквардта.....	209
6.5. Глобальні методи для негладких функцій.....	210
6.5.1. Методи лінійного пошуку.....	213
6.5.2. Стратегія проксимального збурення.....	216
6.5.3. Алгоритм пошуку маршруту.....	217
6.5.4. Метод довірчої області.....	221
6.6. Характеристики вирішувачів задач додатковості.....	226
6.6.1. MILES.....	226
6.6.2. PATH.....	227

6.6.3. NE/SQP	229
6.6.4. SMOOTH.....	230
6.6.5. QPCOMP	231
6.6.6. PROXI	231
6.6.7. SEMISMOOTH	232
6.6.8. SEMICOMP	233
6.7. Порівняння характеристик вирішувачів задач додатковості.....	234
7. МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДОДАТКОВОСТІ ВЕЛИКОЇ РОЗМІРНОСТІ.....	238
7.1. Метод регуляризації узагальненого якобіана Кларка	238
7.1.1. Неточний метод Ньютона.....	239
7.1.2. Алгоритми розв'язування негладких систем рівнянь..	240
7.1.3. Причини утворення погано обумовлених матриць.....	244
7.1.4. Алгоритм регуляризації узагальненого якобіана Кларка	247
7.1.5. Результати експериментальних досліджень.....	249
7.2. Метод розв'язування змішаних задач додатковості великої розмірності.....	256
7.2.1. Метод CR – факторизації матриць.....	257
7.2.2. Чисельна стійкість методу CR – факторизації матриць.....	259
7.2.3. Метод ICR – факторизації матриць.....	261
7.2.4. Розв'язування лінеаризованих систем алгебраїчних	

рівнянь методом <i>ICR</i> – факторизації матриць.....	263
7.2.5. Результати експериментальних досліджень.....	264
7.3. Висновки	268
8. МОДЕЛЮВАННЯ РІВНОВАЖНОГО СТАНУ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ УКРАЇНИ В СУЧАСНИХ УМОВАХ ЛІБЕРАЛІЗОВАНОГО РИНКУ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ	270
8.1. Структура лібералізованого ринку електроенергії України..	270
8.2. Математична модель конкурентної рівноваги на сучасному ринку електроенергії України.....	275
8.2.1. Модель генеруючої компанії.....	279
8.2.2. Модель учасника ринку, що реалізує механізм PSO...	285
8.2.3. Модель оператора системи передачі.....	287
8.2.4. Модель оператора системи розподілу.....	289
8.2.5. Модель трейдера.....	290
8.2.6. Модель споживачів.....	290
8.3. Обчислювальні експерименти з моделювання рівноважного стану сучасного конкурентного ринку електроенергії України.....	291
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	296
ДОДАТОК А. Загальна характеристика функціонування та розвитку оптового ринку електричної енергії України.....	333
ДОДАТОК Б. Засади функціонування нової моделі ринку електроенергії України.....	337

ВСТУП

Пошук прийнятної стратегії розвитку електроенергетики потребує системного аналізу феноменологічних факторів впливу таких, як технології генерації електроенергії, режими експлуатації мережі ліній електропередачі, надійність енергопостачання, добробут споживачів, та багатьох інших. Дослідження комплексного впливу визначальних факторів на електроенергетику здійснюється шляхом математичного моделювання процесів економічного та технологічного розвитку галузі і потребує розробки адекватних математичних моделей. До перших розробок в цьому напрямку слід віднести системи моделювання, створені у 50-60-х роках минулого сторіччя у Франції [1] та у СРСР [2, 3, 4].

Традиційна структура електроенергетики того часу передбачала функціонування вертикально інтегрованих компаній, що дозволяло використовувати єдиний критерій оптимізації діяльності галузі (мінімальні витрати на виробництво електроенергії або максимальний сукупний добробут виробників та споживачів).

Системи моделювання оптимального розвитку електроенергетики, що використовуються сьогодні у Російській Федерації, такі, як ЕНДН (Москва) [5] та СЕІ (Іркутськ) [6], є розвитком систем моделювання, розроблених у часи СРСР. У обох системах моделювання детально враховуються технологічні особливості електростанцій та вимоги щодо надійності функціонування електроенергетики.

До такого ж типу систем відноситься система моделювання розвитку електроенергетики України, яку було створено для прогнозування вводу генеруючих потужностей при підготовці Енергетичної стратегії України на період до 2030-го року [7]. В цій системі моделювання пошук оптимального розвитку енергетики здійснюється за критерієм мінімальних витрат або

максимального прибутку галузі. Для врахування невизначеності вхідної інформації використовується сценарний підхід.

У моделях розроблених у США та країнах ЄС, енергетичний комплекс розглядається у взаємодії з макроекономічною та екологічною системами. Найбільш опрацьованими є Національна система моделювання енергетики США – NEMS [8] та система моделювання ПЕК країн ЄС – PRIMES [9]. Зазначені системи моделювання відображають взаємозв'язки між основними секторами ПЕК. При цьому особливості функціонування кожного сектору представляються задачами лінійного або нелінійного програмування. Модуль електроенергетики NEMS і підмодуль виробництва електроенергії та тепла PRIMES містять поглиблений опис технологій і режимів роботи енергетичного устаткування, що не поступається моделям, розробленим у часи СРСР.

Для українських користувачів доступні більш прості моделі даного типу ENPER [10] та MARKAL [11].

Протягом останніх двох десятиріч у світі спостерігається послідовне впровадження ринкових стосунків в секторі електроенергетики та приватизація енергетичних компаній. Внаслідок реорганізації електроенергетики у галузі створюються незалежні енергокомпанії, що мають власні цілі поведінки, в результаті виникає необхідність врахування у моделі багатьох цільових функцій. Вплив потужних виробників на ринок призводить до штучного зростання цін. Отже, ціни вже не можуть бути визначені із застосуванням традиційних витратних моделей, їх опис вимагає застосування моделей недосконалої конкуренції.

Використання традиційних однокритеріальних моделей принципово не дозволяє описати роботу галузі в ринкових умовах. Тому протягом останнього десятиріччя в країнах Західної Європи та США були розроблені рівноважні (ринкові) моделі функціонування електроенергетики.

Рівноважний стан електроенергетичної системи – це стан, в якому впливи різних учасників ринку є збалансованими. Моделювання стану конкурентної рівноваги на ринку електроенергії пов’язане з пошуком таких цін на електричну енергію в енерговузлах і обсягів виробництва, передачі та споживання електроенергії, при яких результати діяльності кожного з учасників ринку найбільшою мірою близькі до досягнення власних цілей, а саме: споживачі – максимуму власного добробуту, компанії-постачальники – максимуму обсягів поставок електроенергії споживачам, генеруючі компанії – максимуму власного прибутку, компанія-оператор системи передачі електроенергії – максимуму сприяння учасникам ринку у виконанні їхніх зобов’язань.

Серед провідних розробників ринкових моделей можна відзначити University of Cambridge [12], Johns Hopkins University (Балтімор) [13], Universidad Pontificia Comillas (Мадрид) [14], Universitè catholique de Louvain (Бельгія) [15], Norwegian University of Science and Technology [16], тощо.

Сьогодні розробники раніше створених систем моделювання Союз та PRIMES суттєво переробляють свої системи з метою відображення в них особливостей поведінки електроенергетики в умовах функціонування ринків електроенергії з недосконалою конкуренцією.

В Україні наукові дослідження з розробки математичних моделей та методів моделювання електроенергетики в ринкових умовах виконуються в Інституті проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова НАН України. [17, 280-282, 290, 299, 301, 305, 308, 309, 328, 332, 333, 335, 336].

Дослідження були розпочаті в 2007 – 2008 роках. Саме в цей період на замовлення Міністерства палива та енергетики України було виконано науково-дослідну роботу «Розробка програмно-інформаційної системи моделювання розвитку електроенергетичного комплексу України в умовах ринкових перетворень». В основу розробки було покладено математичну модель рівноважного стану електроенергетики у вигляді системи

взаємопов'язаних задач квадратичної оптимізації та, відповідно до умов оптимальності Каруша-Куна-Таккера, у вигляді змішаної задачі додатковості. В якості обчислювального ядра розробленої системи моделювання було використано потужний вирішувач задач додатковості PATH.

Вирішувач PATH реалізує ітераційний алгоритм розв'язування задач додатковості. Він заснований на лінеаризації функцій в околицях послідовності наближених рішень, формуванні лінійних задач додатковості і застосуванні модифікованого алгоритму Лемке для визначення напрямків пошуку невідомих [103, 330]. Вирішувач PATH був запропонований в 1995 році фахівцями Університету Вісконсін-Медісон (США). З тих пір він став стандартом, з яким порівнюють нові вирішувачі змішаних задач додатковості і задач на варіаційні нерівності [285]. Тепер вирішувач PATH використовується в системах математичного моделювання AMPL, GAMS і MATLAB [270].

Систему моделювання енергетики з вирішувачем задач додатковості PATH було використано в обчислювальних експериментах з відтворення рівноважного стану об'єднання енергетичних систем країн Бенілюксу, Німеччини та Франції. Мета таких досліджень полягала в отриманні оцінок адекватності створеної системи моделювання. З використанням даних, що знаходяться у відкритому доступі [331], були проведені розрахунки по оцінці впливу на ринки різних стратегій поведінки генеруючих компаній в умовах наявності і відсутності трейдера. Результати проведених експериментів виявилися тотожними тим, що представлені в зазначених публікаціях.

Створена система моделювання також застосовувалася для досліджень ринку електроенергії України. Для цього була використана агрегована схема ОЕС України: вісім енерговузлів, з'єднаних 12-ю інтерфейсами; в енерговузлах розміщені 55 генеруючих блоків, що належать десяти компаніям, у тому числі п'яти конкуруючим компаніям ТЕС. Мета таких досліджень полягала в оцінці адекватності відображення в моделі

особливостей роботи ОЕС України в ринкових умовах. Обчислювальні експерименти були проведені для одного часового періоду 2006 року, а саме періоду максимального навантаження енергосистеми. Порівняння розрахункових і фактичних даних щодо обсягів виробництва електроенергії генеруючими блоками ТЕС і її поставок в енерговузли через інтерфейси показало повну відповідність результатів моделювання фактичним даним.

Адекватність математичних моделей ОЕС України було досягнуто завдяки досліджень, виконаних в Інституті проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова НАН України впродовж 2008 – 2010 років [17]. Тоді було запропоновано рівноважну модель функціонування енергосистеми у короткостроковому періоді за умов недосконалої конкуренції на ринку електричної енергії. Запропонована модель відрізняється від відомих тим, що враховує такі особливості роботи енергосистеми України, як наявність значних об'ємів тарифікованого виробництва електроенергії, специфічні умови проходження нічного мінімуму навантаження електроенергетичної системи та вимоги щодо забезпечення необхідного резерву потужності в системі. Крім того, було розроблено довгострокову модель розвитку теплової енергетики України, що об'єднує опис множини довгострокових задач конкуруючих виробників електроенергії щодо об'ємів вводу устаткування та множини короткострокових задач визначення режимів роботи устаткування протягом прогностичного періоду.

В результаті численних обчислювальних експериментів, проведених в Інституті проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова НАН України з 2010 по 2013 роки на створених комп'ютерних моделях ринків електроенергії України, було встановлено чисельну нестійкість вирішувача РАТН [309], яка спостерігається за умов:

- 1) врахування значної кількості взаємопов'язаних станів навантаження електроенергетичної системи в задачах розвитку генеруючих потужностей;

- 2) наявності в системі генеруючих блоків, маржинальні витрати яких суттєво різняться.

Тому, подальші дослідження ринку електричної енергії України вимагали застосування більш досконалого ніж RATH вирішувача задач додатковості, якого в той час не існувало.

Такий вирішувач під назвою ICRS був створений у 2016 році у вигляді програмного додатка для вирішення задач додатковості великої розмірності. У ньому використовується *C*-функція Фішера-Бурмейстера [326] для перетворення системи рівностей і комплементарних нерівностей в систему негладких нелінійних рівнянь. Пошук розв'язку такої системи здійснюється квазіньютонівським ітераційним методом, якому властива глобальна збіжність ітераційного процесу [322, 323]. З метою визначення напрямку пошуку розв'язку на кожній ітерації виконується лінеаризація системи негладких нелінійних рівнянь. Формування відповідної послідовності узагальнених якобіанів Кларка здійснюється за допомогою субдиференціала Булігана негладких функцій.

Лінеаризовані системи рівнянь мають велику розмірність і, за певних обставин, погану обумовленість. Тому їх розв'язування здійснюється за допомогою методів повної *CR* – факторизації матриць [300], або їх неповної *ICR* – факторизації [328]. На відміну від інших методів *ICR* – факторизації матриць забезпечує досягнення високих апроксимуючих властивостей матриць-передобумовлювачів в ітераційних методах Крилова розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності (GMRES, BCGStab і ін.). Застосування *ICR* – передобумовлених методів Крилова у складі квазіньютонівських методів розв'язування негладких систем алгебраїчних рівнянь дозволило істотно збільшити розмірність задач моделювання рівноважного стану ринків електроенергії, зокрема, в тисячі разів збільшити число взаємопов'язаних станів навантаження електроенергетичних систем і

практично подолати перше із зазначених вище обмежень, властивих вирішувачу PATH [333].

Розробці вирішувача ICRS передував аналіз нескінченно малих елементів матричних компонентів узагальненого якобіана Кларка функції Фішера-Бурмейстера. В результаті було встановлено причини виникнення сингулярності окремих матричних компонентів. Аналогічний аналіз був проведений в умовах кінцево-розрядних обчислень малих елементів тих же матричних компонентів. Досліджено причини виникнення погано обумовлених і сингулярних матричних компонентів узагальнених якобіанів Кларка для негладких систем нелінійних рівнянь. На основі проведених досліджень розроблено метод корекції особливих елементів матричних компонентів узагальненого якобіана Кларка, який забезпечує чисельну стійкість квазіньютонівських методів ітераційного розв'язування задач додатковості. Використання цього методу у складі вирішувача ICRS дозволило подолати друге з вказаних вище обмежень, що виникають в разі застосування вирішувача PATH [309].

Математичне забезпечення потужного вирішувача ICRS має досить складну форму організації взаємодії різних методів і алгоритмів, основні з яких наведено в таблиці В.1.

Впродовж 2016 - 2020 років математичні моделі рівноважного стану електроенергетичної системи України зазнали суттєвих змін як в частині представлення мережі ліній електропередачі, описами поведінки компаній-постачальників електроенергії та учасника ринку, що реалізує механізм спеціальних зобов'язань (PSO). В результаті внесених змін суттєво покращено адекватність математичного моделювання рівноважного стану електроенергетичної системи України в сучасних ринкових умовах.

Математичне забезпечення вирішувача ICRS

Тип математичної задачі	Метод розв'язування задачі
Система задач нелінійного програмування (SNLP)	Каруш–Кун–Таккер–умови оптимальності розв'язку SNLP
Система рівностей і комплементарних нерівностей	Метод <i>C</i> -функцій формування системи негладких нелінійних рівнянь
Система негладких нелінійних рівнянь	Квазіньютонівський ітераційний метод
Лінеаризація системи негладких нелінійних рівнянь	Формування узагальнених якобіанів Кларка, субдиференціювання Булігана
Система лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності	<i>ICR</i> – передобумовлені методи Крилова
<i>ICR</i> – передобумовлювання якобіанів Кларка	<i>ICR</i> – факторизація узагальнених якобіанів Кларка
<i>ICR</i> – факторизація погано обумовлених якобіанів Кларка	Метод корекції особливих елементів узагальнених якобіанів Кларка

В монографії системно представлені результати наукових досліджень, проведених під керівництвом д.т.н., професора С.Є.Сауха в Інституті проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова НАН України впродовж 2007 – 2020 років.

Робота над монографією розподілялась наступним чином: вступ та розділи 2, 3, 7 та 8 написані С.Є.Саухом, розділи 1, 4, 5, 6 та Додатки – А.В.Борисенком.

1. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВИТКУ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ В РИНКОВИХ УМОВАХ

Розділ присвячено дослідженню поточного стану сектора виробництва електроенергії в Україні, класифікації основних факторів, що визначають розвиток виробничих потужностей, та аналізу методів математичного моделювання стратегій розвитку таких потужностей.

Експлуатація та розвиток потужностей з виробництва електроенергії тісно пов'язані із динамікою як суто енергетичних ринків, так і темпами розвитку економіки в цілому.

Основним фактором, що визначає розвиток виробничих потужностей, є динаміка попиту на електроенергію. Обсяги виробництва електроенергії залежать від обсягів виробництва галузей економіки та енерговитратності виробництва.

Суттєвим внутрішньогалузевим фактором, який впливає на розвиток генеруючих потужностей, є дефіцит потужностей з передачі електроенергії від електростанцій до кінцевих споживачів. Досвід роботи енергосистеми України, а саме наявність обмежень на об'єми виробництва електростанцій, зокрема обмеження видачі потужності Запорізької АЕС з 6000 до 5300 МВт, вказує на необхідність врахування наявних обмежених потужностей з передачі вже на стадії оптимізації генеруючих потужностей.

Основними складовими, що визначають рівень витрат на виробництво електроенергії, є динаміка цін на енергетичне паливо, що на сьогодні тісно пов'язана з тенденціями світового ринку, та доступність вискоєфективних технологій виробництва. Новим суттєвим фактором, у цьому контексті, виступають платежі за забруднення навколишнього середовища.

Ключовим фактором експлуатації та розвитку генеруючих потужностей є забезпечення надійності виробництва електроенергії. Виконання цього завдання вимагає вживання як організаційних, так і технологічних заходів, зокрема забезпечення оптимальної структури генеруючих потужностей, стимулювання виробників щодо участі у маневруванні, та забезпеченню резерву, тощо.

Новим для енергетичного сектору але не менш важливим фактором є вплив ринкових умов роботи галузі на експлуатацію та розвиток генеруючих потужностей. Реструктуризація і приватизаційні процеси призводять до зміни умов та пріоритетів роботи виробників, вимагаючи застосування нових методів математичного моделювання їх поведінки.

1.1. Організація діяльності електроенергетики

Ще у 80–ті роки минулого сторіччя електричні сектори майже скрізь були організовані як вертикально інтегровані регіональні монополії. Ці підприємства мали високі експлуатаційні витрати та здійснювали значні інвестиції у будівництво нових генеруючих потужностей, що в результаті приводило до високих роздрібних цін.

Піонером у ринкових перетвореннях в електроенергетиці стала Великобританія. Поштовхом для реструктуризації галузі стала поява нових технологій генерації – високоефективних ПГУ та надходження на ринок природного газу за низькою ціною.

Досвід реструктуризації та приватизації в Англії та Уельсі розглянуто у роботі [18].

Управління всіма генеруючими потужностями та передачею електроенергії здійснювала державна монополія CEBG. Дванадцять обласних управлінь були регіональними монополіями у секторі розподілу електроенергії.

Реформування було розпочато 31 березня 1990 року, CEGB було поділено на чотири компанії, був створений ринок єдиного покупця електроенергії – Пул. Була проведена приватизація двох теплових генеруючих компаній та Національної мережі електропередачі.

Наслідки перетворення:

- Продуктивність праці в приватизованих компаніях зросла більш ніж вдвічі.

- Відбувся перехід від вугілля до природного газу. Після приватизації частка виробництва на основі природного газу зросла з 1 до 23%.

- Були побудовані 9,5 ГВт генеруючих потужностей на основі ПГУ – 20% пікового попиту енергосистеми, при цьому, внаслідок зниження цін на рику, попит збільшився на 6,5%.

- Паливна складова для ТЕС (у розрахунку на кВт·год) знизилась на 45%, для АЕС – на 60%.

- Загальні витрати (у розрахунку на кВт·год) знизились на 50%, при цьому ціни на Пулі впали на 20%, що відображало нестачу конкуренції.

- Персонал вугільної галузі було скорочено з 250 тис. до 7 тис. осіб. Галузь була приватизована.

- Плани будівництва АЕС були відмінені. Більш сучасні АЕС були продані у складі British Energy, інші АЕС та переробка палива, залишились у державній власності.

Основними джерелами економії (8,8 млрд фунтів стерлінгів) стали припинення дорогої програми розвитку ядерної галузі та перехід від дорогого британського вугілля до дешевшого природного газу.

Прямі витрати склали 2,8 млрд фунтів стерлінгів, які включають витрати на реструктуризацію компаній, значне резервування коштів та виплату дострокових пенсій.

Аналіз доцільності та ефективності переходу від вертикально інтегрованих до ринкових моделей управління виходить за межі даного дослідження, більш детальну інформацію можна знайти у [19, 20].

На сьогодні електроенергетика всіх розвинутих країн у тому чи іншому ступеню охоплена ринковими перетвореннями.

1.1.1. Типи ринкових структур

Забезпечення споживачів електроенергією складається із послідовності виробництва, передачі та постачання електроенергії кінцевим споживачам. В залежності від того, які з означених секторів галузі охоплені ринковими перетвореннями, ринки електроенергії можуть бути об'єднані у наступні групи.

Інтегрована модель передбачає, що в усіх секторах галузі (виробництво, передача, розподіл) функціонує регульована монополія (Рис.1.1). При цьому, і виробництво, і передача, і розподіл електроенергії на виділеній, як правило, значній території відноситься до відповідальності однієї фірми. Для запобігання завищення цін та необґрунтованих інвестиційних рішень, відповідні регулюючі органи затверджують тарифи на електроенергію та плани розвитку електроенергетичних підприємств за принципом: витрати плюс встановлений рівень рентабельності. Піку розвитку подібна модель управління набула в державних енергетичних об'єднаннях СРСР, Франції, тощо, які охоплювали територію всієї країни, в інших країнах, зокрема США, вертикально інтегровані компанії мали приватних власників та діяли на значно менших територіях, наприклад, певного штату. Перевагами підходу є добра керованість, висока, порівняно з іншими моделями, впевненість у окупності інвестицій, можливість концентрації ресурсів для реалізації великих проєктів. Недоліком подібної схеми, є закладений в її основі стимул до надмірного інвестування та відповідного завищення цін.

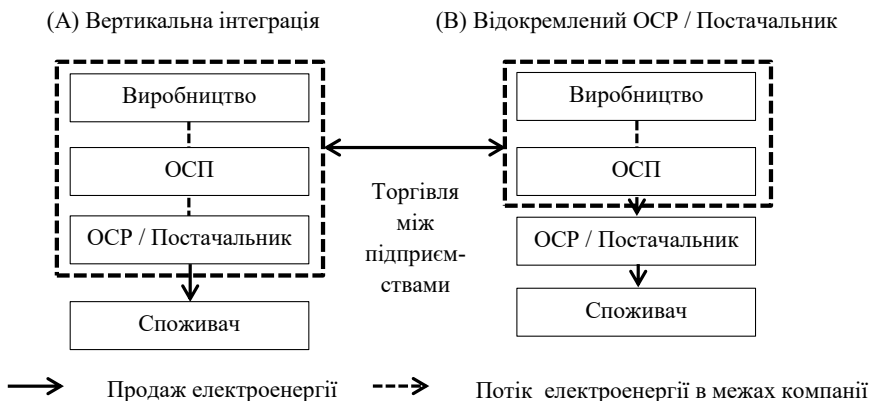
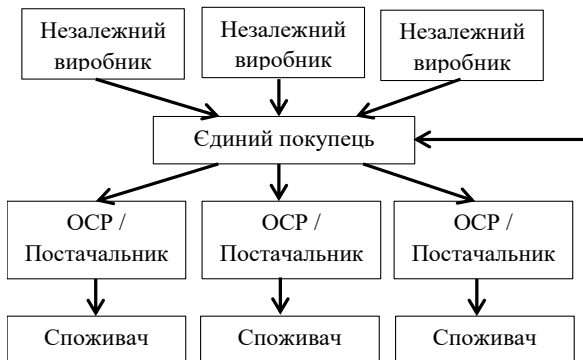


Рис.1.1. Моделі організації ринків електроенергії [23],
ОСП та ОСР– оператори систем постачання та розподілу.

Модель з єдиним покупцем (пуловий ринок). При цьому підході в секторі виробництва створюються конкуруючі між собою виробники електроенергії, в той же час у секторах передачі, розподілу та постачання електроенергії зберігається діяльність регульованої монополії (Рис.1.2). Ця модель, вперше прийнята США в 1978 році, коли регіональним монополіям потрібно було купувати електроенергію у невеликих незалежних виробників. При цьому зберігалась можливість торгівлі електроенергією із сусідніми енергетичними об'єднаннями. Наступним кроком розвитку ринку став дезінтегрований варіант схеми Пулу. Для забезпечення роботи енергоринку створюється єдиний покупець електроенергії, який закупає всю електроенергію у виробників та продає її оптовим постачальникам. Впровадження подібної моделі вимагає виділення зі складу регульованих монополій виробничих потужностей та створення на їх базі генеруючих компаній. В процесі реорганізації деякі компанії примушують продавати частину потужностей для запобігання появи на ринку одного потужного лідируючого гравця. Вказана модель є характерною для перших зразків енергетичних ринків, зокрема, вона була впроваджена на першому у світі

ринку електроенергії – ринку Англії та Уельсу. З 1995 по 2018 рік подібна модель функціонувала в енергетиці України. Перевагою підходу є можливість порівняно швидкого запровадження ринкових стосунків, в той же час для такої моделі характерне значне зростання невизначеності щодо повернення інвестицій.

(А) Дезінтегрований варіант



(В) Інтегрований варіант (США)



→ Продаж електроенергії
 ---> Потік електроенергії в межах компанії

Рис.1.2. Моделі організації ринків електроенергії [23]

Модель оптового конкурентного ринку. Виробники продають електроенергію на оптовому ринку безпосередньо енергопостачальним компаніям, які в свою чергу продають її кінцевим споживачам (Рис.1.3).



Рис.1.3. Моделі організації ринків електроенергії [23]

У цій моделі зберігається монопольне становище у секторі постачання електроенергії, в той же час виникає конкуренція за використання системоутворюючих електричних мереж. Дана модель, зрозуміло, є більш складною, але допускає укладання довгострокових контрактів між виробниками та оптовими постачальниками, що знижує ризики нових інвестицій. При практичній реалізації моделі, окрім енергопостачальних регульованих компаній, до оптового ринку, як правило, допускаються потужні споживачі та незалежні торгівці. Такий підхід щодо формування енергоринку знайшов широке розповсюдження. Одним з варіантів реалізації подібної моделі є єдиний організований (пуловий) ринок, на якому укладаються двосторонні договори.

Оптово-роздрібна конкурентна модель, де розподільчі компанії та виробники торгують на оптовому ринку та укладають двосторонні договори,

а всі споживачі вільні у виборі постачальника (Рис.1.4). Вказана модель передбачає введення конкуренції у всіх секторах електроенергетики: виробництво, доступ за послуги з передачі та постачання електроенергії. Створення подібної системи поставлено за мету країнами Європейського Союзу. На сьогодні подібна модель, з певними особливостями функціонує в Україні.

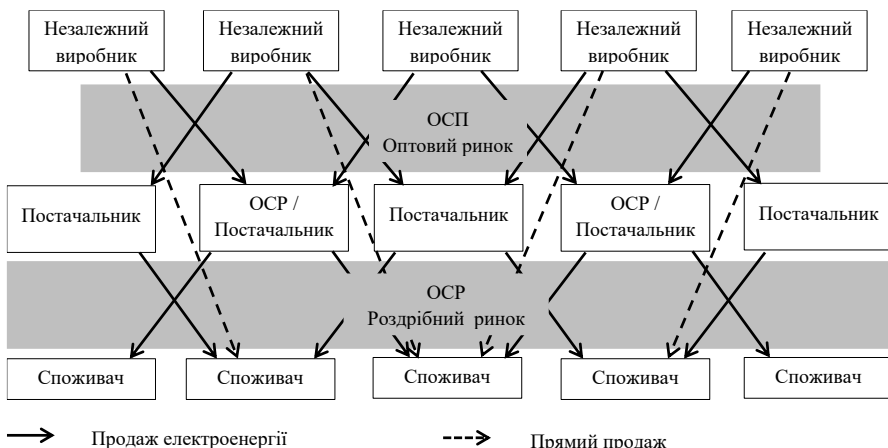


Рис.1.4. Моделі організації ринків електроенергії [23]

1.1.2. Оптова торгівля електроенергією

Оптова торгівля електроенергією здійснюється на декількох взаємопов'язаних ринках (Рис.1.5).

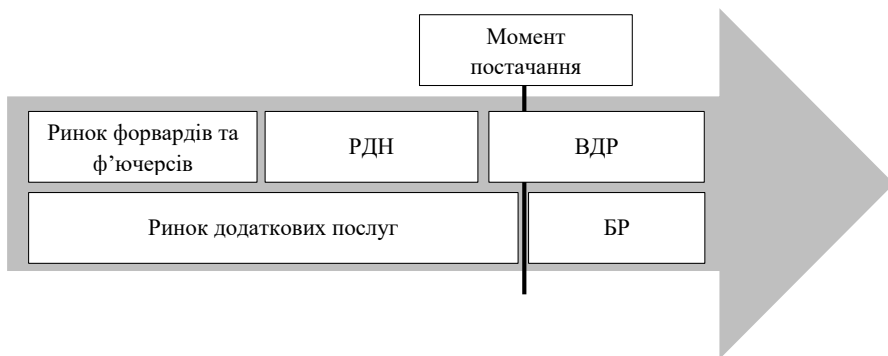


Рис. 1.5. Часова діаграма роботи оптових ринків електроенергії.

Ринок форвардів та ф'ючерсів. Ринок форвардів та ф'ючерсів працює протягом періоду від декількох років до моменту постачання до однієї доби до моменту постачання. Форварди та ф'ючерси є договорами на продаж / купівлю певної кількості електроенергії в певний час у майбутньому за ціною, узгодженою у момент укладання.

Ф'ючерси – це стандартизовані контракти, якими можна надалі торгувати на енергетичних біржах.

Форварди торгуються, в основному, на двосторонньому позабіржовому ринку і не є стандартизованими, що дає більше гнучкості залученим сторонам, зазвичай вони у подальшому не перепродаються.

Виробники електроенергії та великі споживачі продають (купують) електроенергію на ринку форвардів та ф'ючерсів, щоб гарантувати ціни майбутніх періодів. Така поведінка зменшує ризик та називається хеджуванням.

В Україні, на сьогодні, ринок форвардів та ф'ючерсів відсутній.

Ринок довгострокових договорів (ДД). На розвинутих ринках основні обсяги електроенергії продаються по прямих договорах поза біржею.

Учасники ринку вільно обирають контрагентів за ДД та укладають договори у довільній формі. Регулятор не має права втручатися у ціноутворення та взаємовідносини сторін. В Україні державні підприємства-виробники зобов'язані продавати електроенергію за ДД на електронних аукціонах.

Ці договори не є стандартизованими і учасники не зобов'язані публікувати вказані в них ціни. В той же час обсяги та періоди поставки електроенергії повинні реєструватись у оператора системи передачі з метою забезпечення балансу в енергосистемі. Реєстрація ДД завершується за добу до фактичного постачання електроенергії.

В Україні державні виробники та ДП «Гарантований покупець» укладають ДД за результатами відкритих аукціонів, які проводяться на Товарній біржі «Українська енергетична біржа».

Термін дії ДД на українському ринку обмежений одним роком.

Ринок на добу наперед (РДН). На РДН здійснюється купівля-продаж електроенергії на добу наступну за днем проведення торгів. РДН повинен бути збалансований на момент закриття торгівлі.

РДН виконує функції:

- Альтернативний доступ на ринок учасників, які не уклали ДД;
- Формування цінових сигналів для ринків ДД та ф'ючерсів;
- Гарантування учасникам ринку оплати проданої електроенергії;
- Уточнення учасниками обсягів та графіків купівлі-продажу електроенергії ближче до часу постачання з метою зменшення небалансу.

Для участі у РДН учасник реєструє свої заявки на біржовій платформі, в Україні функції біржи виконує ДП «Оператор ринку».

Ціна РДН визначається для кожної години наступної доби. Точка перетину інтегрованих за всіма учасниками кривих попиту та пропозиції дає ціну та обсяги постачання (Рис.1.6).

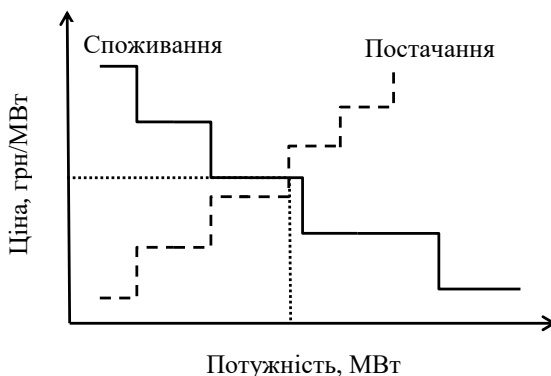


Рис. 1.6. Визначення ціни на РДН.

З метою забезпечення ліквідності ринку, для виробників часто встановлюється мінімальний обсяг продажу на РДН.

Внутрішньодобовий ринок (ВДР). На ВДР купівля-продаж електроенергії здійснюється після завершення торгів на РДН, упродовж доби фізичного постачання електроенергії. ВДР дає змогу учасникам ринку скоригувати свою позицію з урахуванням несподіваних відключень, уточнених прогнозів вітру, тощо.

Учасники ринку подають заявки на продаж та купівлю на ринкову платформу. Учасник ринку може прийняти пропозицію іншого учасника, в результаті чого для кожної торгової операції встановлюється своя ціна.

Укладені на ВДР угоди додаються до угод, укладених на РДН. Однак, внаслідок неможливості точного прогнозування обсягів фактичного споживання, портфель учасника ринку може бути в дисбалансі після закриття ВДР. Ці небаланси узгоджуються на балансуєчому ринку.

Балансуючий ринок (БР). Цей ринок, організований ОСП з метою балансування обсягів виробництва та імпорту (пропозиція), споживання та експорту е/е (попит) та врегулювання системних обмежень в енергосистемі, а також фінансового врегулювання наслідків небалансів електроенергії.

В Україні робота БР забезпечується НЕК «Укренерго».

Для участі у ринку електроенергії кожен з учасників повинен стати стороною, відповідальною за баланс (СВБ), тобто взяти на себе зобов'язання учасника БР. Оператор БР здійснює купівлю та продаж електроенергії з метою врегулювання небалансів сторін, відповідальних за баланс.

Після фактичної поставки ОСП виставляє рахунок кожній СВБ з незбалансованим портфелем.

Для зменшення небалансів учасники ринку можуть організовувати балансуєчі групи (БГ). БГ можуть включати генерацію, збут е/е, великих споживачів.

Редиспетчеризація. Редиспетчеризація розглядається як один з ефективних механізмів управління енергосистемою в Німеччині.

У різі виникнення мережових обмежень суттєво ускладнюється передача електроенергії між виробниками та споживачами.

На стороні обмеження з надлишком потужності ОСП рекомендує виробникам електроенергії скоротити навантаження свого устаткування. Якщо це не допомагає, також зменшується потужність виробників ВДЕ.

На стороні обмеження з дефіцитом потужності ОСП рекомендує виробникам збільшити виробництво, для компенсації скорочення виробництва на стороні обмеження з надлишком потужності.

Виробники з обох сторін мережового обмеження отримують фінансову компенсацію за регулювання виробництва. Витрати покладаються на споживачів електроенергії через плату за передачу.

Динаміка розповсюдження різних моделей на ринках електроенергії європейських країн за даними НКРЕ [17] наведена на рисунку 1.7.

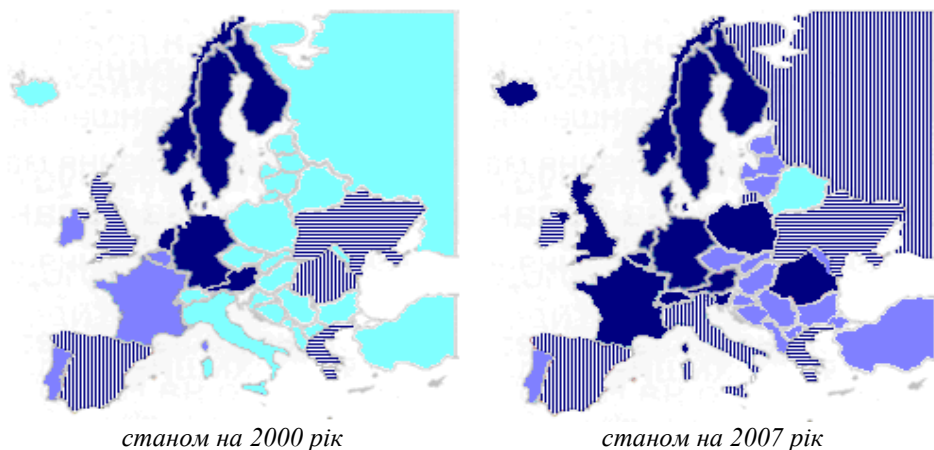


Рис.1.7. Розвиток ринкових стосунків в електроенергетиці європейських країн

- | | | | |
|---|--|---|---|
|  | – двосторонні ринки з балансуючим ринком (БР); |  | – двосторонні ринки без БР або в стадії планування; |
|  | – пулові ринки з фізичними двосторонніми договорами; |  | – пулові ринки без фізичних двосторонніх договорів; |
|  | – вертикально інтегрована діяльність. | | |

Перехід від вертикально інтегрованої монополії до ринкових механізмів управління галуззю не завжди був ефективним та безболісним.

1.1.3. Ефективність ринкових перетворень

Каліфорнійська електрична криза [24]. Електроенергетична галузь Каліфорнії складалась з чотирьох великих вертикально інтегрованих підприємств та значної групи незалежних виробників. У 1995 році у штаті були одні з найвищих роздрібних цін на електроенергію в США, що стало стимулом для ринкових перетворень.

У серпні 1996 р. була проведена ринкова реструктуризація галузі. Була створена Каліфорнійська біржа енергії (PX), яка забезпечувала більшість ринкових операцій. Три основні вертикально інтегровані підприємства були зобов'язані здійснювати торгівлю електроенергією через PX. Каліфорнійський незалежний системний оператор відповідав за експлуатацію мереж та мінімально втручався у роботу ринку. У 1998 р. три каліфорнійські вертикально інтегровані підприємства продали свою генерацію, яка працювала на органічному паливі.

Перші ознаки неефективної роботи ринку з'явились у травні 2000 року (Рис.1.8), коли ціни на електроенергію підвищились з 26–28 \$/МВт·год до 110 \$/МВт·год. Роздрібні ціни цих підприємств дорівнювали 60 \$/МВт·год, тобто вони втрачали 50\$ за кожен МВт·год, який вони продавали клієнтам. Одночасно з'явились сигнали про наявність ринкової влади у виробників, ринкова ціна стала вищою, від конкурентної ціни (Рис. 1.8).

Після того, як ціни вирости вище 100 \$/МВт·год компанії PG&E та SCE звернулися до Каліфорнійського регулятора (CPUC) з проханням підвищити роздрібні тарифи та отримали відмову. В результаті на початку січня 2001 р. SCE і PG&E припинили виплати виробникам електроенергії.

Генеруючі компанії почали зупиняти устаткування, зупинена потужність зросла з 2500 МВт до 10 000 МВт. 17 січня 2001 року Каліфорнійський системний оператор ініціював перше обмеження споживання через дефіцит потужностей. Пізніше було ще 7 загальних годин скорочень. Загальна потужність споживання була нижче 30 000 МВт протягом всього часу, тобто нижча за пік попиту в Каліфорнії – 45 000 МВт протягом літа 2000 року.

1 лютого 2001 року уряд штату отримав право взяти на себе основну частину обов'язків із придбання електроенергії у двох підприємств, які мали фінансові проблеми, що покращило ситуацію. Але пізніше в березні та травні системний оператор був змушений обмежувати навантаження ще неодноразово.

У червні 2001 року FERC обмежив ринкову владу постачальників. В Каліфорнії було укладено довгострокові контракти на суму близько 42 мільярдів доларів. Цей крок, разом з низькими витратами на виробництво, повернув спотові ціни до докризового рівня влітку 2001 року (Рис. 1.8).

В енергетичному секторі Каліфорнії склалась ситуація, коли інвестицій в генерацію були недостатніми, а у сусідніх західних штатах з регульованою енергетикою були відсутні генеруючі потужності за прийнятними цінами. Одночасно відбулось зростання ціни на газ вдвічі з 2,50 \$/фут³ до понад 6 \$/фут³ у вересні 2000р. Формування ціни за принципом витрати плюс 50% протягом серпня 1998р. підвищувало ціни з 30 \$/МВт·год до 45 \$/МВт·год, така ж надбавка в липні 2000 р. підвищила ціни з 100 \$/МВт·год до 150 \$/МВт·год. Але дефіцит генеруючих потужностей не був критичним, а концентрація постачальників у Каліфорнії була нижчою, ніж на багатьох інших ринках.

Головною причиною появи проблем енергоринку Каліфорнії стала відсутність довгострокових контрактів. Енергетичні підприємства не вірили, що спотові ціни можуть перевищувати рівні, встановлені в роздрібному

тарифі та вважали, що регулятор підвищить роздрібні тарифи, якщо оптові ціни піднімуться, чого не відбулось.

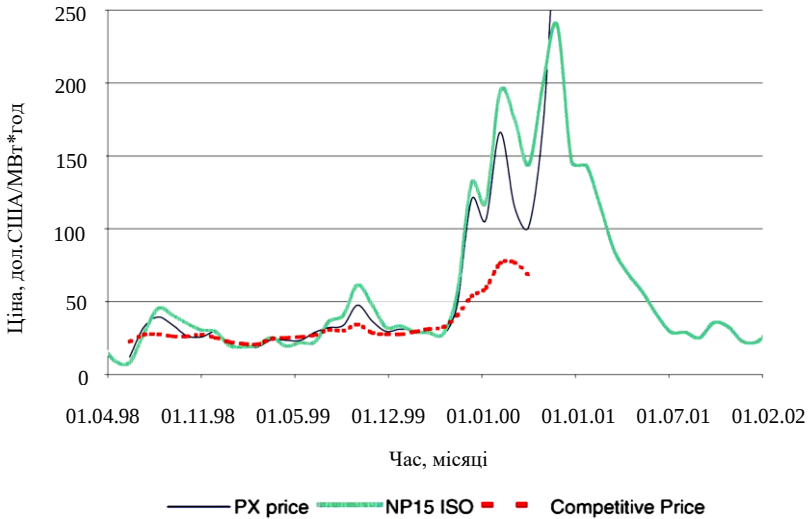


Рис. 1.8. Ціни на енергоринку Каліфорнії: PX price – ціна на Каліфорнійській енергетичній біржі; NP15 ISO – коригуюча ціна, яка додається до PX price при постачанні електроенергії до Північної Каліфорнії, та відображає мережеві обмеження; Competitive Price – конкурентна ціна.

В роботі [21] показано, що за відсутності змови, найближчі до досконалої конкуренції ціни забезпечує пуловий ринок з щоденовою подачею заявок та єдиною маржинальною ціною.

В той же час, на фоні теоретичної переваги у ефективності, проведені дослідження практичної діяльності пулового ринку Англії та Уельсу показали недосконалість роботи діючого пулу. Перевищення ринковою ціною рівня маржинальних витрат виробництва, тобто ціни досконалої конкуренції, викликане дією двох чинників:

– Сприятливі умови для змови між потужними гравцями.

– Стратегічне завищення ціни є властивим для потужних виробників зі значною кількістю устаткування. Вони намагаються подати заявки для напівпікового устаткування як мінімум не нижчими за ціни конкурентів, оскільки внаслідок зростання єдиної ринкової ціни вони отримують більшу виручку від іншого працюючого устаткування з меншими витратами.

Як на сьогодні відомо, незважаючи на теоретичні переваги пулового ринку, складність запобігання необґрунтованому підвищенню ринкової ціни потужними фірмами–олігополістами призводить до більш широкого розповсюдження ринків двосторонніх договорів у комплексі з балансуючим ринком. Як приклад переходу від однієї моделі ринку до іншої можна навести переведення ринку Англії та Уельсу від пулового ринку до ринку двосторонніх договорів з балансуючим ринком [21].

Можна підсумувати, що в результаті реструктуризації галузі змінилась як структура, так і принципи поведінки учасників ринку:

- замість одного монополіста з'явилося декілька конкуруючих фірм-виробників, оператор мережі, торгівці електроенергією, тощо, які оптимізують свою діяльність індивідуально;
- змінились критерії оптимізації діяльності – максимізація прибутку замість мінімізації витрат;
- формуються потужні приватні компанії, здатні впливати на ринок.

Розглянемо дві моделі ринку, які застосовувались в енергетичному секторі України протягом останніх років.

В українській електроенергетиці ринкові перетворення були розпочаті у 1995 році. В результаті була створена система з єдиним покупцем електроенергії, конкуруючими генеруючими та регульованими розподільчими компаніями (Додаток А).

Як відзначалось вище, важливою особливістю роботи енергоринку України було одночасне функціонування потужних конкуруючих виробників

та потужних виробників, що діють за регульованим тарифом (АЕС, ГЕС, ТЕЦ). В доступній літературі відсутні приклади врахування тарифікованого виробництва в ринкових моделях. Враховуючи той факт, що АЕС, ГЕС та ТЕЦ разом забезпечують більше половини виробництва електроенергії врахування цього фактору є вкрай важливим при моделюванні сектору.

Були приватизовані 22 з 25 енергопостачальних компаній, 4 з 5-ти енергогенеруючих компаній ТЕС також є приватними.

Наступним кроком у ринкових перетвореннях стало введення нового ринку електроенергії з конкуренцією, як на оптовому так і на роздрібному ринку, який розпочав роботу з 1 липня 2019 року (Додаток Б).

Однак, як відзначалось вище, введення нової моделі ринку не пододало всіх старих проблем. Зокрема, зберіглося субсидіювання побутових споживачів. Створене підприємство ДП «Гарантований покупець», яке купує фіксовану частку електроенергії, виробленої державними підприємствами НАЕК «Енергоатом» та ПрАТ «Укргідроенерго» за фіксованими низькими цінами з метою подальшого продажу постачальникам універсальних послуг для енергозабезпечення побутових споживачів за пільговими тарифами. Також ДП «Гарантований покупець» закуповує електроенергію, вироблену з використанням ВДЕ за високими «зеленими» тарифами.

Дослідження накопиченого досвіду моделювання та створення власних моделей є актуальними задачами і для енергетики України.

В роботі представлені моделі «старої» та «нової» моделей ринку електроенергетичного сектору України.

1.1.4. Модельна структура енергоринку

Модельна структура енергоринку відображає поведінку основних його суб'єктів та взаємозв'язки між ними (Рис.1.9). Для пошуку рівноваги на ринку в умовах недосконалої конкуренції необхідно враховувати технологічні та режимні особливості виробництва, вплив мережі ЛЕП, тип

конкурентної поведінки виробників та інші важливі фактори, що породжує моделі значної розмірності. Врахування в моделі лише суттєвих факторів впливу на роботу виробників дозволяє знайти баланс між деталізацією множини факторів та простотою формулювання модельних задач.

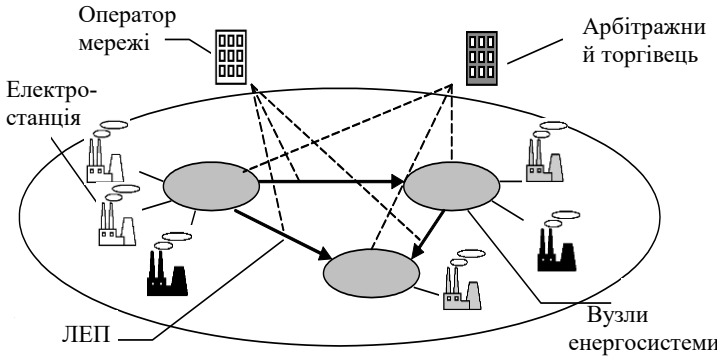


Рис.1.9. Складові моделі ринку електроенергії

На ринку представлені **конкуруючі виробники**. Вони приймають участь у конкурентній боротьбі і максимізують свій прибуток.

Також на ринку представлені **регульовані виробники**, для яких встановлені тарифи та об'єми виробництва.

Відображення дії договорів вимагає визначення об'ємів продажу електроенергії кожним виробником кожному зі споживачів у розрізі регіонів.

Для балансування попиту та пропозиції на ринку та надійного енергозабезпечення створюються:

- **оператор енергоринку**, який на основі цінових заявок виробників визначає режими їх роботи та встановлює ринкові ціни
- **системний оператор (ISO)**, який забезпечує надійну роботу системи та оптимальне завантаження електричної мережі.

Іноді вказані функції поєднує одна компанія.

Наявність організованого оптового ринку може моделюватись шляхом введення **арбітражних торгівців**. Останні закупають дешеву електроенергію в одному регіоні та продають її дорожче в іншому. Функцію арбітражної торгівлі може виконувати оператор оптового ринку. Відсутність арбітражної торгівлі призводить до виникнення необґрунтованої різниці у цінах (більшої від вартості транспортування) між регіонами.

У новій моделі ринку арбітражний торгівець також відображає діяльність ДП «Гарантований покупець».

1.1.5. Досконала та недосконала конкуренція

Ринкова рівновага описується рівноважними об'ємами виробництва-споживання та відповідними ринковими цінами. Стан ринкової рівноваги при однаковій технологічній структурі сектору та зовнішніх умовах виробництва може суттєво змінюватись в залежності від ступеню монопольного впливу виробників на ринок, який визначається, у першу чергу, концентрацією виробничих потужностей.

Економічна теорія визначає декілька станів конкуренції на ринку.

Ринок уніфікованого товару (в даному випадку електроенергії), на якому діють багато рівних за потужністю виробників таких, які не можуть самостійно впливати на ринкову ціну, називається ринком з досконалою конкуренцією. При досконалій конкуренції ціна (p_c) дорівнює маржинальним витратам (MC) (точка С на Рис.1.10), тобто витратам найдорожчого із задіяних для виробництва електроенергії енергоблоків. Такий механізм функціонування ринку забезпечує максимальний рівень сукупного добробуту його учасників.

На монопольному ринку діє лише один виробник, який максимізує свій прибуток у точці М при такому об'ємі виробництва, що маржинальний дохід (MR) дорівнює маржинальним витратам. Отримана у результаті

монопольна ціна (p_m) є верхньою границею ринкових цін. На практиці держава не допускає створення монопольного стану на ринку, для цього впроваджується державне регулювання (у випадку інтегрованої структури галузі) та застосовуються антитрестівське законодавство.

Досвід країн Західної Європи та США показав, що за результатами реструктуризації та приватизації енергетики не вдається досягти стану досконалої конкуренції. У галузі формуються потужні компанії, здатні впливати на ринкові ціни та об'єми виробництва. В результаті стратегічної поведінки великих виробників ринкові ціни перевищують рівень маржинальних витрат, що є основним проявом недосконалої конкуренції. Недосконала конкуренція описує різні стани ринку, які знаходяться між рівновагою конкурентного ринку та нерегульованої монополії (відрізок М–С лінії D–D на Рис.1.10).

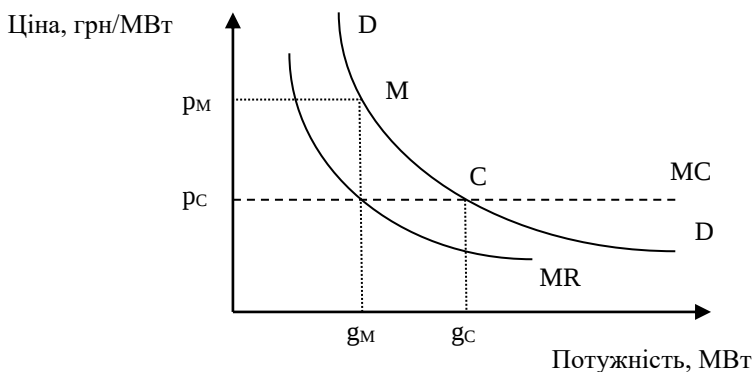


Рис.1.10. Зміна ринкової рівноваги в залежності від рівня конкуренції

За наявності змови між виробниками, ринок наближується до монопольного стану. В даній роботі подібна ситуація не розглядається.

Необхідність прогнозування наслідків реструктуризації електроенергетики, спроби регулюючих органів та виробників прогнозувати

поведінку конкуруючих фірм, а також значна похибка традиційних моделей при аналізі ринкових систем сукупно, протягом останнього десятиріччя призвели до створення моделей ринків електроенергії з недосконалою конкуренцією.

Зважаючи на продовження процесів ринкових перетворень та приватизації в українській електроенергетиці, актуальною задачею є моделювання розвитку виробництва в умовах недосконалої конкуренції.

1.2. Попит на електроенергію

1.2.1. Неоднорідність попиту та графіки навантажень

Навантаження системи є величиною, змінною у часі. Найбільший інтерес при аналізі показників роботи енергосистеми становлять добові, тижневі та річні зміни навантажень.

Форма графіків навантажень енергосистеми визначається формою графіків навантажень окремих споживачів та часткою, яку вони становлять у сукупному навантаженні. Характерні графіки добових навантажень для окремих галузей економіки наведені на рисунку 1.11.

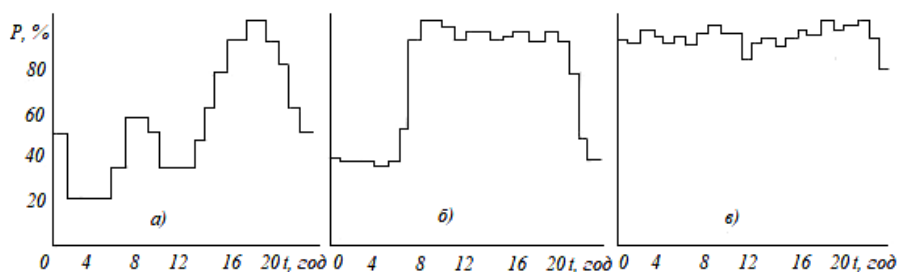


Рис.1.11. Добові графіки споживачів електроенергії [22]:

а – підстанція з переважно освітлювальним навантаженням; *б* – підприємство легкої промисловості, яке працює у дві зміни; *в* – нафтопереробний завод, який працює у три зміни.

Добові графіки навантажень енергосистеми в цілому (Рис.1.12), як правило, мають два піки – ранковий та вечірній, а також два провали – нічний та денний. Для характеристики графіка навантажень, зазвичай, використовують такі показники, як середнє навантаження (d_{cp}), максимальне навантаження (d_{max}) та щільність графіку навантажень: $\zeta = d_{cp} / d_{max}$.

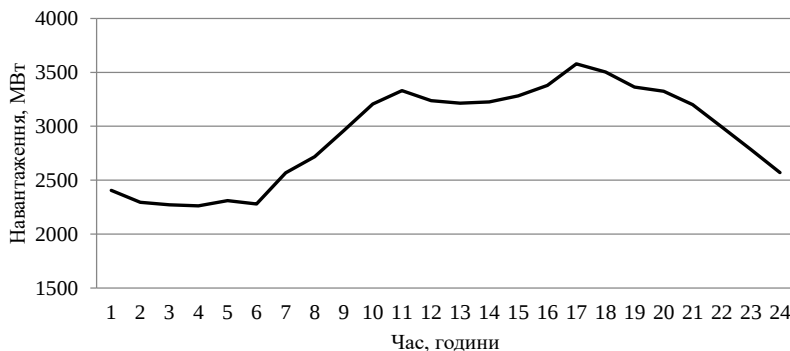


Рис.1.12. Добовий графік навантаження Центральної енергосистеми ОЕС України (вівторок, 03.01.06)

Тижнева нерівномірність навантаження пов'язана з тим, що навантаження системи знижується з п'ятниці до неділі, а потім стрімко зростає у понеділок. (Рис.1.10).

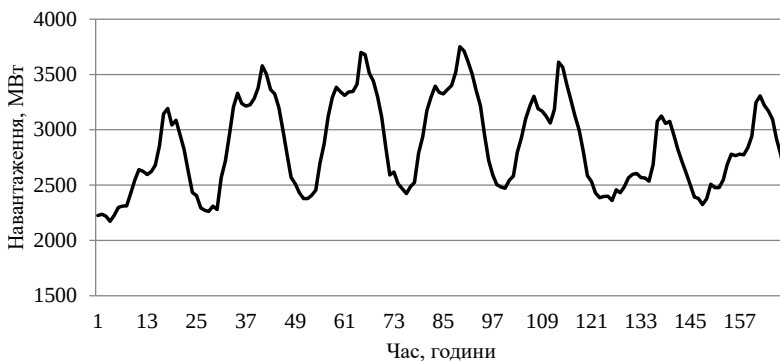


Рис.1.10. Погодинний графік навантаження Центральної енергосистеми ОЕС України протягом тижня (02–08.01.06.)

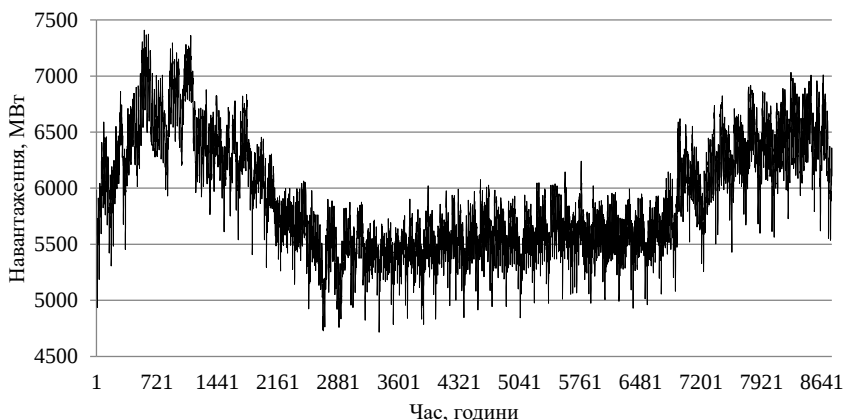


Рис.1.11. Погодинний графік навантаження Дніпровської енергосистеми ОЕС України протягом 2006 року

При роботі енергоринків для балансування попиту використовується комбінація ринку наступної доби, цінові заявки до якого подаються за добу до моменту виробництва, та балансуючого ринку, балансування якого здійснюється оперативно кожної години або півгодини.

У світовій та радянській практиці при аналізі режимів роботи енергосистеми річний період розбивається на сезони, в кожному з яких визначається певна кількість характерних діб.

Кількість сезонів, які виділяються упродовж року, та їх календарна тривалість, визначаються, в основному, такими факторами, пов'язаними з природними явищами, як тривалість опалювального сезону, тривалість паводку, тощо. Зі зростанням кількості характерних діб протягом сезону та кількості зон навантаження протягом характерної доби точність моделі зростає, але одночасно зростає кількість змінних в моделі та складність задачі аналізу.

Виходячи з цих міркувань, на практиці, для оперативного планування роботи енергосистеми України використовують більш детальний опис графіків навантаження, а саме визначаються характерні добові графіки

навантажень для суботи, неділі, понеділку та усередненого робочого дня у кожному сезоні, при цьому кожен характерний добовий графік містить по 24 зони навантаження відповідно до кількості годин.

При плануванні розвитку енергосистеми типовим підходом для західних моделей є врахування трьох сезонів – зима, літо, проміжний (весна-осінь) та виділення двох–трьох рівнів навантажень протягом характерної доби [8].

При плануванні роботи генеруючого устаткування, як правило, використовуються річні графіки навантажень за тривалістю. Побудова річного графіку навантажень на основі навантажень протягом характерних діб здійснюється шляхом розміщення на одному графіку навантажень зон характерних діб у порядку зниження навантаження з урахуванням тривалості їх спостереження протягом року (Рис.1.13).

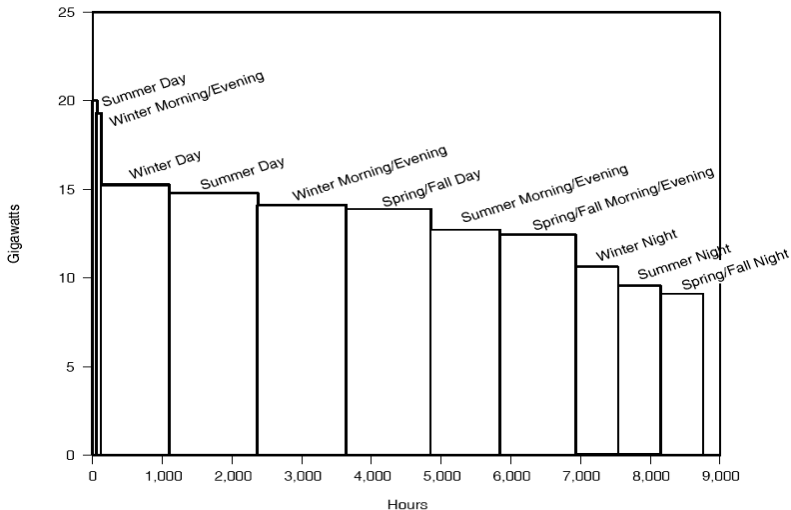


Рис. 1.13. Перехід від графіків навантажень для характерних діб до річного графіку навантажень за тривалістю (NEMS, США [8])

Попит на електроенергію реагує на зміну ціни. Чутливість попиту до зміни ціни вимірюється еластичністю попиту:

$$e = dd/dp ,$$

де: d - попит на електричну енергію, p - ринкова ціна.

Еластичність попиту на електроенергію від ціни значною мірою залежить від часового періоду оцінки реакції споживачів. У короткостроковій перспективі, внаслідок неможливості швидкої зміни технологій у промисловому виробництві та оперативного впровадження енергозберігаючих заходів, еластичність попиту є незначною і знаходиться на рівні 0,1 [25], в той же час в довгостроковій перспективі, внаслідок зміни промисловістю технологій виробництва, еластичність є високою та становить 0,9 [26]. Оператор ринку, зазвичай, не враховує еластичність попиту. Причиною є низька еластичність попиту у короткостроковій перспективі. Натомість, при довгостроковому плануванні цей показник є дуже важливим.

Для моделей, в яких основна увага приділяється взаємозв'язкам ПЕК з іншими секторами економіки [11], або моделей, які мають розгалужені модулі опису поведінки споживачів [8], характерне застосування нелінійних залежностей попиту від ринкової ціни. В той же час, у моделях розвитку виробництва для характеристики попиту на електроенергію споживачів використовуються лінійні функції попиту [27, 28, 29].

Для лінійних характеристик ціна описується зворотною функцією попиту:

$$p = \alpha - \beta \cdot d ,$$

де: α і β – коефіцієнти зворотної функції попиту; d – об'єм попиту.

Зазвичай, вхідними даними щодо попиту є величина попиту системи d_0 при заданій ціні пропозиції p_0 та величина еластичності попиту e . В цьому випадку маємо

$$\alpha = p_0 + d_0 \cdot \beta , \quad \beta = \frac{p_0}{e \cdot d_0} .$$

1.2.2. Територіальний розподіл

Для великих енергосистем, розташованих на значних територіях, що характеризується неоднорідністю кліматичних умов та структури споживання електроенергії у різних регіонах країни типовою є відмінність графіків навантажень для характерних діб року у цих регіонах (Рис.1.14).



Рис.1.14. Порівняння добових графіків навантаження Центральної та Дніпровської енергосистем ОЕС України (вівторок, 03.01.06)

Також важливим фактором, пов'язаним з особливостями територіального розміщення енергосистеми, є наявність та пропускну здатність електричних мереж в середині системи і наявність міждержавних ЛЕП, які з'єднують її з енергосистемами сусідніх країн. Тому в моделях енергосистема представляється певною кількістю регіонів. Зазвичай, вузли характеризують як попит, так і виробництво електроенергії в енергосистемі.

Зі збільшенням кількості вузлів зростає адекватність моделі, в той же час зростає кількість змінних та складності зі збором і первинною обробкою даних. Тому, при оперативному плануванні роботи системи, доцільним може

бути її подібнення до рівня підстанцій мережі ЛЕП. В той же час, для стратегічних моделей кількість вузлів є суттєво меншою. Наприклад, при моделюванні розвитку енергосистеми колишнього СРСР її було представлено 20-ма вузлами [30]. Енергосистема США у моделі NEMS представлена 13-ма територіальними зонами (Рис.1.15). У моделях глобального типу, у якості регіону представляється країна [9], або ще більш масштабні території – наприклад 9–11 регіонів у глобальних моделях [31, 32].

Варто відзначити, що при моделюванні недосконалої конкуренції на енергоринку Німеччини, яка має подібні до України площу території та кількість населення, її енергосистема була представлена вісьмома вузлами [33].

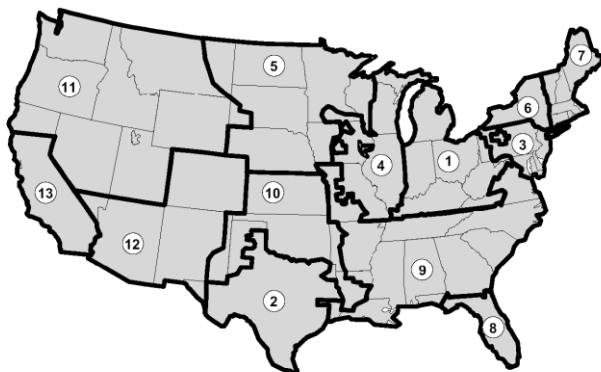


Рис.1.15. Вузли розрахункової схеми енергосистеми США [8]

1.3. Вплив електричної мережі

Наявність обмежень з боку мережі суттєво впливає на роботу виробників. Так, якщо видача потужності з ефективного енергоблоку є неможливою, оператор ринку вимушений завантажувати менш ефективне устаткування та відповідно збільшити ринкову ціну.

На сьогодні, в енергосистемі України відсутні електричні зв'язки між Західною і Центральною енергосистемами, існує обмеження на перетік Захід-Вінниця, Бурштинський острів експлуатується у незалежному від енергосистеми режимі, тощо. Тому, важливим аспектом при моделюванні, є адекватне представлення електричної мережі у її моделі.

Системоутворююча електрична мережа складається з великої кількості ліній електропередачі та трансформаторних підстанцій різної напруги. Особливості роботи мережі описуються нелінійними рівняннями змінного струму. При цьому враховуються потоки реактивної енергії, накладаються теплові та напругові обмеження на перетоки в лініях, а також обмеження, пов'язані із забезпеченням стабільності роботи системи.

При оперативному управлінні роботою ринку, часто застосовується спрощений опис мережі [34].

Однією з крайностей є застосування єдиних цін на електроенергію для всіх споживачів, незалежно від їх розташування, навіть у випадку наявності суттєвих обмежень. Подібні моделі застосовувались на ринку Англії та Уельсу у 90-х роках та на балансуєчому ринку Electric Reliability Council of Texas (ERCOT) до 2002 року. На сьогодні подібна модель використовується на ОРЕ України.

При середньому рівні деталізації опису мережі, модель представляє лише основні міжрегіональні обмеження щодо передачі. Такий підхід застосовувався на ERCOT після 2002 року та у Каліфорнії наприкінці 90-х років. В обох випадках для представлення електричної мережі враховувались теплові обмеження на представницькі лінії або перетини.

Іншою крайністю є детальне представлення мережі (Північний Схід США). Подібні моделі було введено у ERCOT після 2009-го року та пізніше у Каліфорнії. На всіх цих ринках, за виключенням New York ISO, для опису мережі використовуються моделі постійного струму. І навіть на ринку New York ISO напругові обмеження не можуть бути враховані.

Практично всі сучасні моделі експлуатації та розвитку генеруючих потужностей є багатовузловими моделями.

У практиці моделювання недосконалої конкуренції на енергоринку застосовуються різні підходи до опису електричної мережі:

- Ранні дослідження ринків електроенергії часто не враховували обмежень з боку мережі, або враховували лише правило Кірхгофа щодо струму, ігноруючи при цьому правило напруги, тобто ігноруючи перетоки через паралельну лінію. Розв'язання задачі розвитку генеруючих потужностей, як чисто транспортної задачі, застосовується у більшості моделей радянських часів [35, 27].

- Опис електричної мережі, як мережі постійного струму, без урахування втрат. Подібний підхід знайшов широке використання у більшості західних моделей недосконалої конкуренції [36] та у найбільш досконалих моделях радянських часів [37]. Для моделювання мережі, зазвичай, використовується лінеаризована модель потоків постійного струму [38], у якій коефіцієнти розподілу електроенергії γ_{im} показують скільки МВт проходить через певну лінію m у відповідь на збільшення надходження на 1 МВт у вузол i . Моделі постійного струму не враховують реактивних потоків та обмежень щодо напруги, а також, зазвичай, ігнорують розрахунок втрат.

- Відомі також окремі моделі, які базуються на детальному представленні мережі змінного струму [39].

Згідно проведених оцінок, похибка, яка виникає внаслідок використання рівнянь постійного струму для опису електричної мережі, складає до 3-5% [40].

При розгляді обмежень з боку мережі, зазвичай, порівнюють два типи ринкових структур:

Інтегрований дизайн ринку відповідає таким ринкам, як ринки з зонними цінами, ринки з вузловими цінами, тощо, які впроваджено у PJM,

NY ISO, New England ISO та Scandinavia (Nordpool). При цьому підходи системний оператор збирає цінові заявки на електроенергію, враховуючи розташування виробників, та балансує ринок для всього регіону згідно затвердженого протоколу, проводячи одночасно (опосередковано) розподіл прав на користування мережею. Це гарантує автоматичне здійснення арбітражних поставок та ефективне використання мережі.

Роздільний дизайн ринку на сьогодні реалізовано у багатьох ринках Центральної Європи. Аукціонний продаж фізичних прав на транспортування здійснюється окремо від ринку електроенергії. Право на передачу визначається між певними регіонами, а постачальники повинні володіти подібними правами для включення до диспетчерського графіку.

Контракти на передачу електроенергії укладаються постійно та одночасно з контрактами на постачання електроенергії на ринках західного узбережжя США. Однак, це можливе тільки внаслідок того, що контракти на фізичну передачу напряду пов'язані з правами на доступ до обмеженої лінії, здебільше лінійної системи, що протягається від Канади до Каліфорнії. Отже, коригування контрактів на передачу на основі ринкової інформації не є потрібним. Цей підхід не спрацьовує у розгалужених мережах, таких як Північно-Східна частина США або Центральна Європа. У континентальній Європі права на передачу для зв'язків між різними країнами все ще продаються на аукціонах незалежно. Відомою є їх значна неефективність, оскільки тільки частка фізично доступних транзитних потужностей може бути надана для забезпечення надійності системи, без урахування кільцевих потоків, викликаних іншими потоками передачі.

Проблема впливу виробників на ціноутворення у мережі розглядається в основному у деяких детальних короткотермінових моделях. Приклади врахування подібного впливу у доступних моделях стратегічного розвитку відсутні.

Встановлення ціни на передачу електроенергії переслідує дві задачі: фінансування експлуатації мереж та забезпечення доступу до мереж найбільш ефективних виробників.

В довгострокових моделях розвитку застосовуються наступні методи ціноутворення на послуги передачі:

- регульовані фіксовані ціни на послуги транспортування, наприклад, за принципом «поштової марки»;
- ринкове визначення ціни, при якому оператор мережі встановлює ціни на передачу по лініях, в залежності від попиту на передачу по них. В цьому випадку ціни на передачу залежать також від здатності виробників впливати на дії оператора мережі.

При оптимізації структури генеруючих потужностей з урахуванням того, що тривалість спорудження мереж значно менша від тривалості спорудження генеруючих потужностей, можна прийняти, що виробники не впливають на ціноутворення щодо послуг з передачі.

Плата за передачу по лінії береться тільки у випадку її перевантаження. При цьому прямі потоки, які сприяють перевантаженню штрафуються, а зворотні потоки, що розвантажують лінію, преміюються.

1.4. Технології генерації

Як відзначалось вище, в енергосистемі України, як у попередній так і у нині діючій моделі ринку діяли і продовжують діяти два типи виробників: регульовані та конкурентні.

У попередній моделі тарифи встановлювались для АЕС, ГЕС–ГАЕС, виробників ВДЕ, ТЕЦ та блокстанцій, у новій – лише для виробників ВДЕ.

В результаті проведеної у 1995 році реструктуризації галузі, у конкурентній боротьбі на оптовому ринку приймають участь генеруючі компанії, що експлуатують ТЕС. Розглянемо детальніше техніко-економічні показники (ТЕП) ТЕС, основні підходи щодо математичного моделювання їх функціонування та розвитку в ринкових умовах.

Технології генерації можна найбільш загальним чином класифікувати за видом палива, що використовується, фізичним процесом, що покладений в основу перетворення первинної енергії на електричну, наявністю викидів CO₂, тощо (Табл. 1.1.).

Класифікація технологій генерації.

Технології виробництва електроенергії									
Джерело енергії	Традиційні джерела енергії								
	Вугілля				Природний газ		H ₂ O	Ядерне паливо	
Без утилізації CO ₂	Докритичні ПВ*	Докритичні ЦКШ*	Суперкритичні ПВ*	Ультразверх-критичні ПВ	ПГУ з газифікацією*	ПГУ*	ГТУ*	Поршневі двигуни*	Паливні елементи*
ВДЕ або утилізація CO ₂	X	X	X	Ультразверх-критичні ПВ з UV	ПГУ з UV та газифікацією*	ПГУ з UV*	X	X	X

Таблиця. 1.1. (продовження)

Технології виробництва електроенергії									
Джерело енергії	Відновлювані джерела енергії						Акумулювання		
	Біомаса		Вітер		Сонце		Геотермальна		
ВДЕ або утилізація CO ₂	Газифікація біомаси*	ЦКШ на біомасі*	ВЕС	Офшорні ВЕС	Фотоелектричні	Геотермальні*	Муніципальні тверді відходи*	ГЕС	ГАЕС Li-ion

ПВ – пилувугільні

ГТУ – газотурбінна установка

ЦКШ – циркулюючий киплячий шар

УВ – утилізація CO₂

ПГУ – паро-газова установка

*може використовуватись у когенерації

Атомні електростанції. Теплова енергія, яка виділяється в процесі ядерної реакції використовується у паровому циклі Ренкіна.

Найпоширенішою конструкцією є водо-водяний реактор під тиском (ВВЕР). У першому контурі вода нагрівається до більш ніж 300°C, при тиску достатньому для збереження робочого тіла у рідкому стані, та використовується для виробництва пари у другому контурі. Отримана пара використовується у паротурбінній установці.

Менш розповсюджені киплячі реактори, де пара виробляється безпосередньо в реакторі та направляється до турбіни при подібних температурах та тиску.

Спалювання вугілля у факелі. Використовується паровий цикл Ренкіна – розмелене вугілля подається до парового котла, а отримана пара з високою температурою та тиском обертає парову турбіну.

Спалювання вугілля у факельних котлах призводить до утворення величезної кількості шкідливих викидів, зокрема SO_x, NO_x, зола, тощо.

Контроль викидів пиловугільних енергоблоків є дуже витратним: капітальні витрати в установки десульфуризації складають 190–250 \$/кВт та в установки видалення NO_x – 100–150 \$/кВт.

Енергоблоки з докритичними параметрами пари. Вода нагрівається у барабанному котлоагрегаті для виробництва пари при тиску меншому від критичний (22,1 МПа). Найбільш ефективні енергоблоки даного типу досягають ККД 38%. Питомі капіталовкладення у докритичний енергоблок на 10–20% нижчі ніж у зверхкритичний блок.

Енергоблоки з зверхкритичними та ультра-зверхкритичними (USC) параметрами пари. Зверхкритичні енергоблоки використовують пару тиском 24–26 МПа, температурою до 580°C та демонструють ефективність до 42–43%. Сучасні USC блоки працюють при температурі до 620°C, та тиску 25–29 МПа. Питомі капіталовкладення USC можуть бути на 10% вищими ніж у суперкритичних енергоблоків, внаслідок використання дорогих матеріалів та технологій.

Перспективні Ультра-зверхкритичні (A-USC) технології. Розвиток A-USC спрямований на досягнення ефективності 50% та вище, це вимагає температури пари 700–760°C та тиску 30-35 МПа. Матеріали для високотемпературних елементів базуються на нікелевих сплавах.

ПГУ з газифікацією вугілля (IGCC). Використовується комбінація парового циклу Ренкіна та газового циклу Брайтона. В газифікаторі з вугілля виробляється синтез-газ, він очищується та подається до газової турбіни, після якої тепло вихідних газів утилізується для виробництва пари, яка обертає парову турбіну. Складність та витратність технології IGCC поки не дозволяють їй досягти промислових масштабів розповсюдження. Успішно експлуатуються декілька демонстраційних станцій потужністю 250–300 МВт з ефективністю на рівні 50%.

У енергоблоках, оснащених котлами з циркулюючим киплячим шаром (ЦКС) використовується паровий цикл Ренкіна. Вугілля лише подрібнюється, але не розмелюється, а спалювання здійснюється при температурах нижчих ніж у пиловугільному котлі. Вихідний потік повітря підтримує у топці турбулентний шар вугілля та золи. Великі частки вугілля, які виносяться повітрям сепаруються та повертаються до шару. Технологія підходить для використання широкого спектру палив, у тому числі низькоякісних.

Технологія не вимагає витратної очистки вихідних газів. Внаслідок зниженої температури у топці викиди NO_x є низькими. Додавання вапна у киплячий шар дозволяє зв'язати до 95% SO_2 .

Газотурбінна установка (ГТУ) є двигуном внутрішнього спалювання, яка реалізує цикл Брайтона. Повітря стискається компресором, у камері спалювання до нього додається газоподібне або рідке паливо, отримані розпечені гази обертають газову турбіну та генератор для виробництва електроенергії. ККД сучасних ГТУ досягає 41%.

Парогазові установки (ПГУ) використовують комбінацію парового циклу Ренкіна та газового циклу Брайтона. Газоподібне або рідке паливо використовується у ГТУ для виробництва електроенергії. Теплота вихідних газів газової турбіни корисно використовується у котлі–утилізаторі для виробництва пари, яка обертає парову турбіну. ККД сучасних ПГУ досягає 61%.

Поршневі двигуни внутрішнього спалювання працюють за циклами Дизеля або Отто. Вони отримали розповсюдження в автомобілях, тепловозах, судах. Поршневі двигуни використовують енергію вибуху палива для пересування поршнів у циліндрах, при цьому лінійний рух поршня перетворюється у обертальний рух колінчастого валу для подальшого виробництва електроенергії.

Паливні елементи є електрохімічними перетворювачами енергії. За принципом роботи вони подібні до батарейок, де хімічні елементи реагують з виділенням постійного струму, однак у паливних елементах паливо та окиснювач підводяться постійно для підтримання хімічної реакції.

Фотоелементи працюють за принципом прямого перетворення світла в електроенергію. Матеріал фотоелементу має фотоелектричний ефект, який дозволяє йому абсорбувати фотони світла та генерувати електрони.

Гідроелектростанції використовують перепад води для генерації електроенергії. Турбіна перетворює кінетичну енергію води в механічну енергію. Потім генератор перетворює механічну енергію турбіни в електричну енергію.

На гідроакумілюючих електростанціях (ГАЕС) при надлишку електроенергії насос закачує воду у верхній резервуар ГАЕС, перетворюючи електричну енергію на потенціальну енергію стовпа води. Накопичена вода використовується для виробництва електроенергії в гідротурбінах для покриття піків споживання.

Li-ion батареї – на сьогодні внаслідок високих техніко-економічних характеристик стала найбільш вживаною технологією акумуляування.

1.4.2. Основні ТЕП та маневрові характеристики

Технічну ефективність устаткування характеризують коефіцієнтом корисної дії нетто, який визначає повні витрати енергії палива на відпуск електроенергії в мережу (далі у тексті – ККД):

$$\eta = \frac{g}{g_{\text{пал}}},$$

де g – відпуск електроенергії енергоблоком (далі за текстом – об'єм виробництва), $g_{\text{пал}}$ – витрати тепла палива на відпуск електроенергії.

В практичних розрахунках поряд з ККД широко використовують показник питомих витрат умовного палива на відпуск електроенергії:

$$b_e = \frac{B_{ин}}{g} \cdot \frac{Q_{ин}}{Q_{yn}},$$

де $B_{ин}$ – витрати натурального палива на відпуск електроенергії; $Q_{ин}$ – калорійність натурального палива; Q_{yn} – калорійність умовного палива (7000 ккал/кг).

ККД устаткування залежить від типу використаної базової технології, виду палива, режиму експлуатації. Залежність ККД від навантаження має загалом нелінійний та негладкий характер.

Для будь-якої технології підвищення ККД досягається за рахунок ускладнення устаткування і пов'язане із додатковими капітальними витратами. Для характеристики технічної складності устаткування слід використовувати величину питомих капіталовкладень:

$$k = \frac{K}{G},$$

де K – капітальні витрати на спорудження енергоблоку; G – встановлена потужність енергоблоку.

Таким чином, ККД та питомі капіталовкладення є пов'язаними показниками, які характеризують залежність ефективності виробництва електроенергії від технологічної складності устаткування.

Енергогенеруюче устаткування відрізняється високою капіталомісткістю та тривалими термінами експлуатації. В умовах реальної експлуатації це призводить до значних термінів повернення інвестицій.

Ефект масштабу відіграє значну роль для виробництва електроенергії. При однаковій базовій технології виробництва більш потужне устаткування має вищу ефективність та менші капітальні витрати. При

моделюванні стратегічного розвитку, зазвичай, передбачають введення найбільш ефективних із доступних зразків устаткування.

Дискретність введення генеруючих потужностей суттєво проявляється внаслідок значної оптимальної потужності устаткування. Дискретність є однією з головних причин нелінійності характеристик устаткування. Наприклад, введення першого енергоблоку станції пов'язане з високими питомими капіталовкладеннями, а з кожним наступним блоком витрати зменшуються. Вказаний фактор враховується, як правило, при техніко-економічній оптимізації конкретних проектів.

Ефективність технологій з часом зростає: зменшуються питомі капіталовкладення та зростає ККД устаткування.

Традиційно прогнозування технічних характеристик генеруючого устаткування здійснювалось експертним шляхом з урахуванням завдань державних програм [42].

Однак останнім часом прогнозування набуло більш об'єктивного характеру. В основу прогнозування покладено той факт, що ефективність технології збільшується зі зростанням масштабів її використання та збільшенням витрат на науково-дослідні роботи, при цьому темпи вдосконалення з часом падають [43]. Прогнозні характеристики певного типу електростанції розраховуються на основі узагальнення прогнозів прогресу характеристик основного устаткування (енергетичні котли, парові та газові турбіни, тощо), що входять до складу енергоблоку [44, 8].

Вказана методика є ефективною для глобальних моделей [45], або для моделей, які охоплюють значні регіони, наприклад США [8] або країни ЄС [9]. У випадку моделювання енергосистеми окремої країни використання методу може призвести до істотного викривлення результатів.

Важливою характеристикою генеруючого устаткування є його маневреність:

1. Допустима швидкість зміни навантаження устаткування та тривалість його пуску. За цими показниками значну перевагу має газотурбінне устаткування, у якому відсутні товстостінні елементи, які не допускають швидкої зміни температури.

2. Діапазон регулювання та можливість зупинки устаткування для проходження мінімумів навантаження системи. Наприклад, пиловугільні енергоблоки 200 МВт з докритичними параметрами пари можуть працювати у діапазоні навантажень 120–200 МВт (а у разі необхідності розвантажуватись і до 50 МВт – Бурштинська ТЕС), при цьому допускається значна кількість пусків на рік. Більш економічні пиловугільні енергоблоки 300 МВт зі зверхкритичними параметрами пари мають діапазон регулювання 180–300 МВт та не допускають частих зупинок. На практиці ж диспетчер часто завантажує не блоки 300 МВт, а менш економічні блоки 200 МВт, щоб мати можливість відключити устаткування в період нічного зниження навантаження.

1.4.3. Структура витрат

Умови сучасного господарювання не дозволяють проводити порівняльний аналіз різних видів устаткування на основі їх ККД (або питомих витрат умовного палива), тобто в негрошових оцінках (як це відбувалось за часів СРСР). Це зумовлено суттєвими відмінностями у цінах на енергетичне паливо. Вище вже було описано ситуацію, коли газо-мазутні енергоблоки 300 та 800 МВт, які переважають за величиною ККД всі пиловугільні енергоблоки, простоюють із-за високих цін на газ та мазут.

На сьогодні всі розрахунки проводяться на основі витрат, які пов'язані з виробництвом електроенергії.

Для цілей моделювання витрати на виробництво сектору генерації розглядаються з певним укрупненням. Сумарні питомі витрати на виробництво $C_{\text{сум}}$ поділяються на постійні витрати, які не залежать від

режимів роботи устаткування $C_{\text{пост}}$, та змінні витрати $C_{\text{зм}}$, що визначаються об'ємами відпуску електроенергії:

$$C_{\text{сум}} = C_{\text{пост}} + C_{\text{зм}}(g).$$

Постійні витрати визначаються, в основному, капітальними витратами на виробництво устаткування.

Для спрощення записів розглянемо змінні витрати за рік, віднесені на 1 кВт встановленої потужності. Змінні витрати поділяють на витрати на паливо $C_{\text{пал}}$, витрати на експлуатацію та ремонт $C_{\text{ер}}$, а також екологічні витрати $C_{\text{ек}}$:

$$C_{\text{зм}} = C_{\text{пал}} + C_{\text{ер}} + C_{\text{ек}}.$$

Витрати на паливо визначаються технічною ефективністю устаткування, вартістю палива та тривалістю експлуатації устаткування протягом року:

$$C_{\text{пал}} = \frac{P_{\text{пал}}}{\eta},$$

де $P_{\text{пал}}$ – ціна енергії палива; η – ККД устаткування.

Варто відзначити, що у моделях, які описують ПЕК в цілому можливе врахування залежності ціни на паливо від об'ємів його споживання електроенергетикою [8]. Як показала практика, найбільше ціни на паливо пов'язані із макроекономічними тенденціями у світовій економіці, тому у менших за масштабом моделях для аналізу впливу цін на паливо доцільно використовувати сценарні підходи.

Витрати на експлуатацію та ремонт мають складну структуру, але для цілей даного аналізу їх можна прийняти залежними від складності устаткування, а отже від капіталовкладень:

$$C_{\text{ер}} = \alpha_{\text{ер}} \cdot k,$$

де α_{ep} – коефіцієнт залежності питомих витрат на експлуатацію та ремонт від питомих капіталовкладень.

Відповідно до чинних правил для українських електростанцій екологічні витрати є грошовим відшкодуванням за викиди шкідливих речовин до атмосфери, вони залежать від питомих об'ємів викидів певної речовини α_{zek} , $z \in Z$, та сплати за викид цієї речовини P_{zek} :

$$c_{ek} = \sum_z (\alpha_{zek} \cdot P_{zek}).$$

Фактичні витратні (енергетичні) характеристики є зазвичай нелінійними та негладкими опуклими функціями.

1.4.4. Умови використання різних технологій генерації

Найбільш загальною характеристикою режиму роботи устаткування є тривалість використання встановленої його потужності протягом року:

$$t^{piq} = \frac{g^{piq}}{G},$$

де: g^{piq} - виробництво електроенергії протягом року.

Аналогічним показником, який набув розповсюдження в технічній літературі є коефіцієнт використання встановленої потужності:

$$CF = \frac{g^{piq}}{G \cdot 8760},$$

де 8760 – кількість годин у році.

Графік навантажень за тривалістю покривається шляхом підключення енергоблоків починаючи з найдешевших. Робота конкретного енергоблоку представляється горизонтальною стрічкою (Рис.1.14), ширина якої відповідає потужності блока, а довжина – тривалості його використання протягом року.

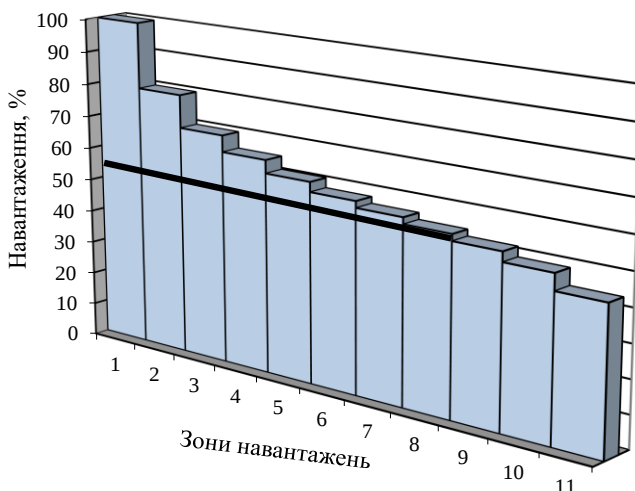


Рис.1.14. Відображення режиму роботи енергоблоку на графіку навантажень за тривалістю.

З рисунку видно, що у зонах навантаження 1–7 енергоблок працює на повну потужність, у зоні 8 – завантажений частково, у зонах 9–11 – не працює.

Для забезпечення економічної та надійної роботи в енергосистемі необхідна наявність устаткування з різними співвідношеннями постійних та змінних витрат. Розглянемо роботу вертикально інтегрованої системи, в якій працюють АЕС та ТЕС (Рис.1.15.). Для роботи у базовому режимі важливі низькі змінні витрати, що досягається за рахунок технічного ускладнення, а отже і високої капіталомісткості. Прикладом базового устаткування може служити атомна електростанція. Для пікового устаткування, наприклад, ГТУ, навпаки, на перший план виходять вимоги низької капіталомісткості. Проміжні режими покриваються за рахунок вугільних паротурбінних енергоблоків та парогазових установок (Рис.1.15).

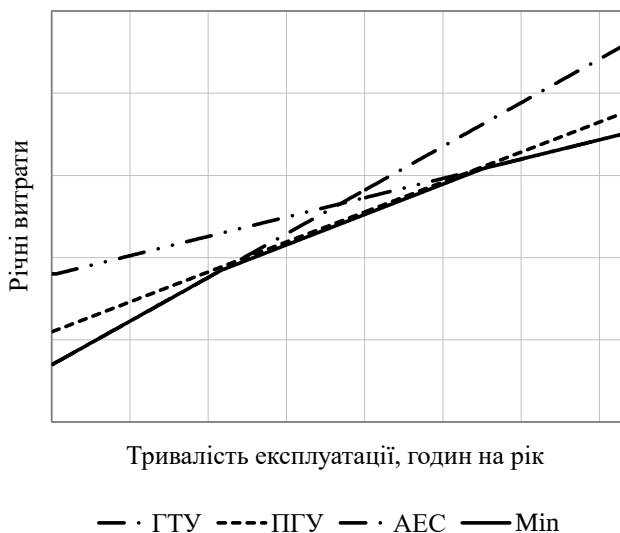


Рис.1.15. Вплив економічних показників устаткування на ефективність використання у різних режимах

Таким чином, режим роботи устаткування в межах енергосистеми є взаємопов'язаним з режимами інших виробників.

На практиці при завантаженні енергоблоків, окрім їх витратних характеристик, враховують вимоги щодо резервування, обмеження з боку мережі, тощо.

1.4.5. Визначення режимів роботи генеруючого устаткування в ринкових умовах

На основі витратних характеристик устаткування виробники формують цінові пропозиції, а оператор ринку узагальнює їх з метою визначення оптимальних рівнів навантаження.

Існує значна різниця між стандартами підготовки і об'ємами інформації щодо витратних характеристик виробників, яка використовується оператором ринку при оптимізації поточної роботи та інформації, що

використовується в економічних моделях при плануванні розвитку галузі [34].

Більшість ринків у США зазвичай допускають подачу заявок у вигляді складних функцій, що дозволяють відобразити витратні характеристики та параметри устаткування. Натомість на ринку California Power Exchange подаються заявки лише на продаж певного об'єму електроенергії.

На багатьох ринках, зокрема і ринку України, заявки щодо продажу електроенергії подаються у вигляді кусочно-лінійних функцій. Чинний механізм роботи оптового ринку електроенергії України передбачає подачу цінових заявок, які включають лише паливну складову витрат виробників. На інших ринках подібна норма відсутня.

Двосторонні контракти на поставку електроенергії, такі, як контракти на різницю у цінах, призначаються для зменшення цінових ризиків виробників та споживачів і укладаються паралельно з роботою на ринку наступної доби та балансуєчному ринку. На такі контракти можуть не накладатись спеціальні стандарти щодо оформлення і вони можуть не оприлюднюватись.

У моделях розвитку генеруючих потужностей, як правило, абстрагуються від деталей комерційних моделей. У разі, якщо обмеження з передачі не враховуються, звичайним підходом є моделювання витратних функцій учасників шляхом апроксимації витрат певної кількості енергоблоків однією витратною функцією, яка часто є лінійною або кусочно-лінійною функцією маржинальних витрат. При цьому абстрагуються від різноманітних деталей, таких як пуски енергоблоків, нелінійності у їх характеристиках. Іноді такий підхід виявляється недосконалим, оскільки склад енергоблоків повинен визначатись не лише рівнем поточного попиту.

Підвищення адекватності моделі вимагає врахування кожної одиниці устаткування та особливостей його витратних характеристик, однак,

одночасно зростає кількість змінних у моделі. Очевидною є необхідність встановлення певного компромісу деталізації моделі.

Необхідно враховувати, що практично все устаткування українських ТЕС складається з невеликої кількості уніфікованих енергоблоків. При розташуванні на одній станції ці енергоблоки мають близькі витратні характеристики. Звичайно, формування єдиної витратної функції для всієї компанії є занадто великим спрощенням, яке не дозволяє врахувати територіальних умов роботи електроенергетичної системи та визначити оптимальні напрямки розвитку конкретної електростанції. В цих умовах при довгостроковому плануванні доцільним є представлення у якості одиниці генеруючого устаткування черги однотипних енергоблоків, розташованих на одній ТЕС.

Загальноприйнятою практикою при моделюванні розвитку генеруючих потужностей є представлення витратних характеристик устаткування лінійною або кусочно—лінійною залежністю. В останньому випадку перша зона енергетичної характеристики агрегату відповідає зоні його економічної роботи, друга форсованому, менш економічному режиму.

В окремих моделях для опису витратних характеристик генеруючого устаткування використовуються квадратичні залежності [46].

Витрати на пуск енергоблоків враховуються лише у спеціалізованих моделях аналізу диспетчеризації устаткування. При перспективному плануванні роботи електроенергетики пускові витрати не враховуються.

Простої у роботі устаткування, пов'язані з проведенням планових та аварійних ремонтних робіт, враховуються шляхом введення коефіцієнту готовності устаткування.

Потужності нових енергоблоків на етапі пошуку оптимальних стратегічних рішень розглядаються як неперервні змінні, а потім їх значення уточнюються з урахуванням дискретності потужностей енергоблоків-

кандидатів із застосуванням методів динамічного програмування [30, 10], або спеціального *алгоритму* дискретизації [47].

1.4.6. Внутрішні зв'язки, властиві сектору генерації електроенергії

Технологічні особливості виробництва електроенергії суттєво ускладнюють задачі, що стоять перед виробниками. Взаємозв'язки у секторі виробництва обумовлені дією коротко та довгострокових факторів.

1. Немоżliвість ефективного зберігання значної кількості електроенергії (за виключенням обмеженої кількості гідроресурсів) та пов'язана з цим необхідність оперативного реагування на зміну попиту.

2. Тривалі терміни експлуатації устаткування та повернення інвестицій вимагають здійснення довгострокового планування.

В роботах [42, 30] розглянуто внутрішні зв'язки у секторі генерації електроенергії та наведено їх класифікацію.

Прямі динамічні зв'язки характеризують вплив інвестиційних рішень попередніх етапів на майбутні інвестиційні рішення. Результатом дії прямих динамічних зв'язків є рівність загальної величини потужностей, працюючих на даному етапі, величині потужностей, працюючих та введених на попередньому етапі, з урахуванням консервації та ліквідації устаткування.

Зворотні динамічні зв'язки характеризують вплив інвестиційних рішень наступних етапів на режими роботи устаткування, введеного на попередніх етапах. Наприклад, початково (перший етап) (Рис.1.16) енергоблок працює у базовому режимі – затемнений сегмент. Однак, у результаті введення нових потужностей, показники ефективності яких вище, ніж у енергоблоку, що розглядається, він поступається їм місцем у базовому режимі та пересувається у зону напівпікових режимів (2-4 прогнозні етапи).

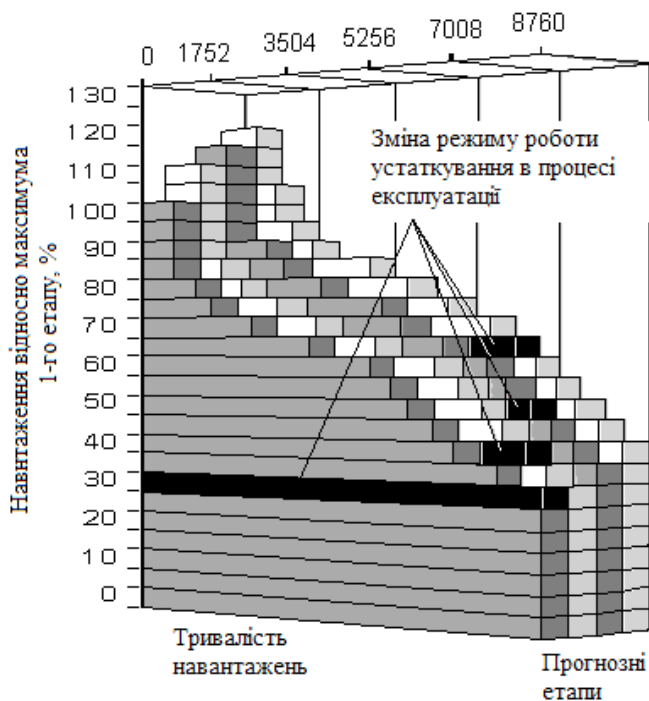


Рис.1.16. Зміна режиму роботи устаткування в процесі експлуатації

Особливістю української теплової енергетики є те, що більшість енергоблоків введено в роботу у 60–ті та 70–ті роки та їх техніко-економічні показники значно поступаються сучасним стандартам. При введенні нового устаткування об'єми виробництва на наявних енергоблоках значно знизяться, поглиблення конкуренції у галузі та збільшення плати за викиди буде тільки сприяти цьому процесу. Таким чином, для української електроенергетики врахування динамічних зв'язків є найбільш актуальним.

Методи дослідження динамічних зв'язків та типи моделей, що застосовуються для їх аналізу, наведено у [42, 30]:

Статична модель розглядає стан системи, що моделюється, тільки у початковий та кінцевий моменти прогностного періоду, а проміжні стани

ігноруються. Внаслідок низької точності прогнозування подібні моделі оптимізації електроенергетики на теперішній час не використовуються.

В умовно–динамічних моделях прогнозний період розбивається на більш короткі етапи (до 5 років). Для кожного етапу, починаючи з першого, послідовно розв'язується статична модель. Перехід до наступного етапу здійснюється з урахуванням прямих динамічних зв'язків (для врахування існуючої структури генеруючих потужностей).

У скорочених динамічних моделях оптимізація розвитку генеруючих потужностей здійснюється одночасно на всіх етапах. Дана модель відрізняється від повної динамічної моделі тим, що з розгляду виключаються консервація та ліквідація об'єктів, введених протягом прогнозованого періоду, а режими роботи цього устаткування вважаються незмінними. Очевидно, що дія зворотних динамічних зв'язків для нового устаткування враховується не повністю.

Врахування змін режиму можливе шляхом відображення в моделі всіх можливих режимів експлуатації устаткування, що значно ускладнює розрахунки [48].

Приклад створення повної динамічної моделі показано в роботі [42]. В даному випадку вплив прямих та зворотних зв'язків реалізується по принципу маятника: оптимізацією статичних рішень від першого етапу до наступного («ходом вперед») враховується дія прямих динамічних зв'язків при фіксованих зворотних, а відповідною оптимізацією від останнього етапу до першого («хід назад») враховується дія зворотних динамічних зв'язків при фіксованих прямих. Реалізація даного ітеративного розрахунку вимагає значного обсягу неавтоматизованих операцій, що не дозволило широко використовувати його на практиці.

При роботі в ринкових умовах виробники електроенергії паралельно приймають два основних типи рішень:

1. Визначення оптимальних цінових заявок для поточного ринку електроенергії, яке можна охарактеризувати як короткострокову статичну задачу. Подаючи на оптовий ринок цінові заявки, виробники приймають участь у короткостроковій статичній грі, намагаючись збільшити свою частку на ринку, та не допускаючи зайвого зниження ціни. Баланс на ринку досягається шляхом зменшення ціни при зростанні пропозиції.

2. Вибір інвестиційних рішень, зважаючи на тривалі терміни експлуатації енергетичного устаткування, є довгостроковою динамічною задачею. Споруджуючи нові потужності, фірми приймають участь у довгостроковій динамічній грі, намагаючись покращити структуру своїх потужностей і не допустити введення надто великих потужностей на ринку. При заданому попиті на електроенергію зі зростанням потужностей прибутковість виробництва зменшується і, при певному рівні потужностей, подальше їх зростання стає збитковим.

Обидва зазначені рішення є взаємопов'язаними. Об'єми введення нових потужностей залежать від прибутковості діяльності фірми на оптовому ринку. Прибутковість цінових заявок, в свою чергу, залежить від того, наскільки інвестиційна політика забезпечує зростання ефективності та потужності устаткування компанії.

Слід зауважити, що при прийнятті рішень у ринкових умовах, виробникам необхідно не тільки аналізувати простір можливих власних стратегій, але і враховувати можливі стратегії конкурентів.

На практиці фірми не можуть враховувати всього можливого комплексу стратегій та їх взаємозв'язків, а фокусуються на найважливіших.

Очевидно, що електростанції, введені сьогодні, внаслідок тривалого періоду експлуатації впливатимуть на майбутні рішення на оптовому ринку. В свою чергу, майбутня робота компанії на оптовому ринку впливатиме на ефективність поточних інвестиційних рішень.

В той же час можна припустити, що поточні рішення на оптовому ринку не впливають на майбутні інвестиційні рішення та аналогічно майбутні інвестиційні рішення не впливають на поточні цінові заявки.

Такий підхід, теоретично, обмежує поведінку виробників, не дозволяючи їм знижувати ціни для недопущення входу на ринок нових виробників. На практиці більш значні бар'єри для входження нових виробників створює обмеженість доступних площадок для будівництва і спроможність існуючих виробників значно скоротити інвестиції за рахунок використання інфраструктури існуючих станцій.

Врахування взаємозв'язків режимів роботи у короткотерміновій перспективі (протягом тижня, сезону або року) здійснюється лише в енергосистемах з великою долею гідроенергетики, виробництво якої визначається динамікою запасів води у сховищах.

1.5. Забезпечення надійності виробництва електроенергії

1.5.1. Забезпечення необхідного резерву

Надійність енергозабезпечення споживачів є пріоритетним завданням функціонування електроенергетики. Вимоги щодо надійності при моделюванні виробничих потужностей зводяться до встановлення резервів потужності необхідних для проходження максимуму навантаження та на випадок аварійних відмов устаткування.

У «старій» організації упарвління частотою та потужністю енергосистеми виділялось два типи резервів гарячий (обертовий) та холодний. Для гарячого резерву потужності необхідною є можливість швидкого введення в дію додаткових потужностей з метою компенсації аварійних відмов устаткування. Тому гарячий резерв розташовується на гідроелектростанціях та діючих енергоблоках ТЕС. Холодний резерв розміщується на тимчасово непрацюючому устаткуванні. Таким чином,

оптимізація роботи устаткування (поряд з оптимізацією об'ємів виробництва) повинна враховувати розподіл гарячого та холодного резерву між виробниками.

Надійна робота енергосистеми вимагає наявності достатнього гарячого та холодного резервів.

У «новій» моделі ринку для забезпечення надійності роботи енергосистеми передбачено введення в дію ринку додаткових послуг (РДП). Нормативно-правовими документами, які регулюють роботу нового ринку електроенергії України, передбачено наступні види допоміжних послуг:

- Первинне регулювання;
- Вторинне регулювання;
- Третинне регулювання;
- Відновлення після системної аварії;
- Регулювання напруги.

РДП не розпочав свою роботу одночасно із введенням в роботу нового ринку електроенергії (01.07.2019р.) у зв'язку з неготовністю нормативно-правового забезпечення, технічною неготовністю генеруючого устаткування та неготовністю ОСП. Повноцінне запровадження РДП займе декілька років. В той же час послуги пов'язані з регулюванням частоти та потужності, які вимагають утримання відповідних обсягів резервів потужності на енергоблоках, відіграють ключову роль в управлінні енергосистемою.

В умовах нового ринку основним об'єктом для моделювання є РДН, який продукує цінові орієнтири для інших сегментів оптового ринку, в першу чергу для ДД та ВДР. При нормальній роботі оптового ринку суттєві відхилення в цінах спостерігаються лише між РДН та БР, але внаслідок незначної частки БР у загальному обсязі торгівлі, дія БР у довгострокових моделях може бути не врахована, або представлена у вигляді певної цінової надбавки до оптової ціни.

Незважаючи на затримки із введенням в роботу РДП, в моделі необхідно врахувати вимоги до резервування потужності устаткування. Для спрощення формулювань доцільно представити моделювання лише розміщення первинного резерву потужності.

Економічна теорія доводить, що поточний ринок самостійно забезпечує необхідні інвестиційні сигнали. В той же час, з точки зору виробників, на ринку існують певні труднощі із забезпеченням інвестицій:

- застосування обмежень цін на електроенергію;
- низька схильність енергетичних компаній до ризиків, у першу чергу при спорудженні пікових ГТУ, що працюють лише декілька діб на рік;
- олігополістична структура ринку та наявність бар'єрів для входження нових гравців.

Для вирішення проблеми забезпечення адекватних виробничих потужностей застосовуються три типи регулятивних підходів.

Припущення щодо ефективної дії ринкових сил. Спеціальні механізми не передбачені на ринках Каліфорнії, Австралії, Скандинавії. Нажаль досвід Каліфорнії та Середнього Заходу США показав низьку ефективність ринкових сил для забезпечення необхідної потужності. У ряді інших випадків (Фінляндія, Норвегія, Австралія) для забезпечення надійності були залучені значні ресурси, наприклад, для придбання системним оператором пікових потужностей.

Іншим підходом є застосування певного регулятивного механізму платежів для сприяння інвестиціям і у деяких випадках – для субсидування виробників. Введення адміністративних платежів застосовувалось у Аргентині, Колумбії та Іспанії. На енергоринку Англії та Уельсу застосовувався додатковий платіж за потужність, який нараховувався при недостатності резервів у системі. Критика цього методу пов'язана з недостатньою обґрунтованістю величини вказаних платежів та наявністю можливостей для маніпуляцій.

Третьою альтернативою є введення ринку потужності. Подібні ринки застосовано на Північному Сході США (PJM, NYPP, NEPOOL), де регулятори визначають частку потужності фірм, яку кожна з постачальних організацій повинна придбати, так само, як і максимально дозволений об'єм продажу для кожного генератора. Проблемою є те, що за результатами роботи ринку, визначаються лише ціни, а не об'єми.

У моделях оптимізації генеруючих потужностей використовують наступні методи розподілу резервів між виробниками:

- встановлення обмежень щодо мінімальної величини резерву [30];
- фіксована плата за потужність [13];
- введення повноцінних ринків гарячого та холодного резервів [13].

В деяких випадках замість моделювання ринків додаткових послуг штучно збільшується еластичність попиту.

1.5.2. Проходження нічного мінімуму навантаження

Для енергетики України характерною є проблема нестачі маневрових потужностей. Більше 26% від встановлених потужностей системи складають потужності АЕС, які не можуть приймати участі у регулюванні як з технічних, так і з економічних міркувань. В той же час потужність маневрових ГЕС складає лише 8,62% від сумарної потужності системи. В умовах зростаючої нерівномірності графіків споживання це призводить до того, що основний тягар участі у регулюванні покладено на енергоблоки ТЕС потужністю 200 та 300 МВт.

Перед диспетчером енергосистеми постає не лише питання забезпечення максимального навантаження, але і наступного розвантаження устаткування для проходження нічного мінімуму споживання (провалу). Поряд з суто економічними питаннями (додаткові витрати на пуск енергоблоків) необхідно враховувати технічні обмеження устаткування. Енергоблоки із зверхкритичними параметрами пари оснащені прямооточними

котлами (300 та 800 МВт) як пилувугільні так і газо-мазутні не можуть зупинятись щоночі. В той же час менш економічні енергоблоки з барабанними котлами (150 та 200 МВт) дозволяють більш часті зупинки. Отже, енергоблоки 200 МВт витісняють з роботи менш витратні блоки 300 МВт.

Участь у маневруванні для виробників пов'язана із додатковими витратами, зокрема витратами на пуск та збільшеними ремонтними витратами внаслідок прискореного зносу устаткування. Хоча сам факт включення менш ефективного устаткування в роботу вже стимулює виробників до участі у регулюванні потужності. На ОРЕ України передбачені додаткові стимулюючі механізми оплати участі у регулюванні, такі як платежі за маневреність та покриття витрат на пуск.

У доступних джерелах відсутні приклади врахування проходження нічного провалу навантаження при моделюванні розвитку виробничих потужностей, але, зважаючи на важливість цього фактору для енергосистеми України, він обов'язково повинен бути врахований при моделюванні.

1.6. Механізми екологічного регулювання

Як відзначалось вище, ТЕС є одними з найбільших забруднювачів навколишнього середовища.

На сьогодні у країнах Західної Європи та США існує спектр інструментів екологічного регулювання діяльності промисловості, зокрема:

- встановлення плати за викиди, що погіршує ринкові позиції виробників, які здійснюють найбільші викиди;
- введення торгівлі квотами на викиди, що обмежує нарощування потужностей та об'ємів виробництва найбільш екологічно шкідливих технологій та забезпечує певний граничний рівень викидів;

- допущення до роботи лише виробників, які відповідають встановленим екологічним стандартам, що сприяє розвитку екологічно менш шкідливих технологій.

Поглиблений розгляд екологічного фактору знаходиться за межами даного дослідження, більш детальну інформацію можна знайти у роботах [28, 29].

1.7. Часові характеристики планування розвитку виробничих потужностей

Як відзначалось раніше, виробничі потужності ТЕС є одним з найбільш капіталомістких об'єктів промисловості. Тривалість експлуатації енергоблоків вимірюється десятками років. Відповідно планування розвитку потужностей не може базуватись на оцінці річних режимів роботи устаткування.

У практиці СРСР для довгострокового планування (вибір раціональної структури єдиної енергосистеми та раціональної структури генеруючих потужностей) використовувався період 15–20 років [30].

Модель США [8] містить прогнозування для 20–ти річного періоду.

За допомогою моделі ПЕК ЄС проведене планування на 40–річний період, тривалість проміжних етапів складає 5 років [9].

Окремо слід відзначити, що у моделях, створених для прогнозування впливу економічної системи на глобальний клімат, використовуються більш тривалі терміни прогнозування (близько 100 років) [31, 32], що пояснюється значною інерційністю кліматичних процесів.

З метою адаптації моделей, що розробляються, до функціонуючої на сьогодні системи планування діяльності галузі доцільно застосувати 20–ти річний прогнозний період, з розбивкою на 5–ти річні етапи.

1.8. Задачі управління електроенергетикою

1.8.1. Задачі розвитку електроенергетичної системи

В колишньому СРСР була розроблена комплексна система планування розвитку електроенергетики [30]. Для продовження дослідження доцільно проаналізувати склад типових задач розвитку електроенергетичної системи (ЕЕС) (Рис.1.17) та визначити місце роботи серед них.

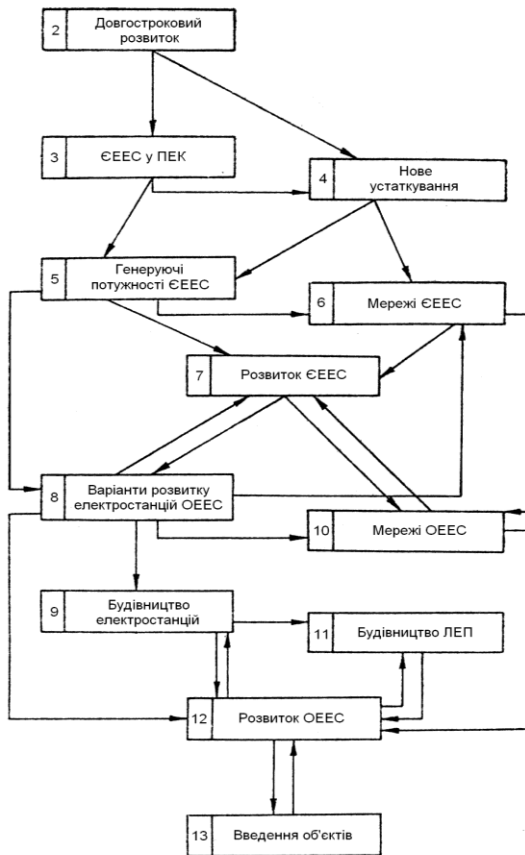


Рис.1.17. Взаємозв'язок задач розвитку ЕЕС

Склад типових задач розвитку ЕЕС СРСР.

1. Прогнозування споживання та його режимів.

2. Дослідження довгострокових тенденцій розвитку електроенергетики та вибір основних напрямків технічного прогресу.

3. Вибір раціональної структури ЄЕЕС за енергоресурсами та основними типами електростанцій.

4. Аналіз системної ефективності, вибір типів генераторів та електротехнічного устаткування.

5. Вибір раціональної структури генеруючих потужностей ЄЕЕС та ОЕЕС за типами устаткування.

6. Вибір напрямків розвитку основної мережі ЄЕЕС.

7. Комплексний аналіз розвитку ЄЕЕС (уточнення рішень задач 5–6).

8. Вибір сукупності раціональних варіантів розвитку електростанцій ОЕЕС.

9. Вибір першочергових електростанцій.

10. Вибір напрямків розвитку основних мереж ОЕЕС.

11. Обґрунтування першочергових ЛЕП.

12. Комплексний аналіз розвитку ОЕЕС (уточнення рішень задач 9–11).

13. Узгодження вводу об'єктів на рівні ЄЕЕС.

Як видно з наведеної структури, оптимізація розвитку виробничих потужностей послідовно здійснювалась на 3–х рівнях.

На першому рівні здійснюється вибір раціональної структури єдиної електроенергетичної системи за енергоресурсами, що використовуються, та основними типами електростанцій. Це завдання вирішується як складова частина задачі вибору раціональної структури ПЕК, обґрунтовується перспективне паливозабезпечення електростанцій та у першому наближенні визначається раціональна структура потужностей.

На другому рівні створюються моделі єдиної енергосистеми, здійснюється вибір раціональної структури генеруючих потужностей єдиної енергосистеми та енергетичних об'єднань за видами устаткування, обґрунтовується раціональна структура генеруючих потужностей єдиної енергосистеми та окремих енергетичних об'єднань та перспективна потреба в устаткуванні. Електроенергетика тут представлена вже автономно, як окрема система.

На третьому рівні здійснюється вибір множини раціональних варіантів розвитку електростанцій енергетичних об'єднань на перспективу, які призначено головним чином для вирішення питання про початок проектування електростанцій (виборі площадок, початку розробок ТЕО та технічних проектів. тощо).

При такому підході на першому рівні здійснюється узгодження модельних рішень щодо розвитку електростанцій, об'ємах виробництва інших секторів ПЕК та економіки країни в цілому, на 2–му та 3–му рівнях оптимізації проводять детальний опис технічних та режимних характеристик системи.

1.8.2. Обґрунтування задачі дослідження

Зміна умов роботи електроенергетики внаслідок реструктуризації та приватизації галузі не зменшила актуальності та структури поставлених задач, а, навпаки, через ускладнення умов роботи системи зробила більш актуальним використання економіко–математичних методів для обґрунтування рішень.

В той же час суттєво змінились формулювання задач та методи їх розв'язку.

Задача вибору раціональної структури єдиної електроенергетичної системи (ЄЕЕС) повинна вирішуватись на міжнародному рівні (у рамках групи країн). При цьому внаслідок припущення щодо максимізації сукупного

добробуту, задача може вирішуватись з використанням єдиного цільового функціоналу з методами лінійного та нелінійного програмування. Розвиток вказаних моделей пов'язан з розширенням їх масштабу (географічне охоплення, спектр технологій, тощо), інтегруванням до моделей макроекономічних блоків, а також врахуванням еластичного попиту на ресурси.

Задача вибору сукупності раціональних варіантів розвитку електростанцій ОЕЕС переходить зі сфери відповідальності Міністерства палива та енергетики та вертикально інтегрованих енергетичних об'єднань до конкуруючих компаній, які обирають перспективні проекти. Для розв'язку задач як і раніше використовують методи динамічного програмування, але для оцінки режимів роботи нового устаткування на ринку виникає необхідність використання моделей ринків з недосконалою конкуренцією (така модель пошуку ринкової рівноваги розроблена у межах даної роботи).

Найбільші зміни стосуються обґрунтування вибору раціональної структури генеруючих потужностей ЄЕЕС.

- замість одного монополіста з'явилося декілька конкуруючих фірм-виробників, оператор мережі, торгівці електроенергією, тощо, які оптимізують свою діяльність індивідуально;

- змінились критерії оптимізації діяльності – максимізація прибутку замість мінімізації витрат;

- виникла необхідність урахування наявної архітектури ринку та різних інструментів його функціонування.

В результаті стало неможливим використання однокритеріальних моделей мінімізації витрат галузі (або максимізації сукупного добробуту) та лінійного і нелінійного програмування для вирішення задач моделювання.

1.9. Висновки

У розділі проаналізовано характерні особливості процесів функціонування і розвитку генеруючого устаткування в ринкових умовах. Показана доцільність застосування наступних підходів:

Споживання електроенергії. Для врахування різноманітності графіків навантажень і обмежень з боку мережі енергосистему представлено сукупністю вузлів виробництва та споживання електроенергії. Споживання у межах вузла описується лінійними функціональними залежностями ціни від об'ємів споживання електроенергії.

Виробництво електроенергії. Генеруючі потужності укрупнюються за принципами: територіальної приналежності до певного вузла виробництва, належності до певної фірми, ідентичності технології і палива, яке використовується. Генератори характеризуються опуклими кусково-лінійними, рідше квадратичними функціями витрат. Пускові витрати не беруться до уваги.

Посилення взаємозв'язків між режимами роботи устаткування та введенням потужностей в ринкових умовах, обумовлює необхідність системного розгляду коротко- та довгострокових задач, що постають перед виробниками.

Врахування тарифікованого виробництва. Особливістю, як «старого», так і «нового» енергоринку України є одночасна присутність потужних конкуруючих виробників і потужних виробників, які діють за регульованим тарифом. Врахування цього фактору забезпечує адекватність моделі рівноважного стану ринку.

Особливості врахування процесу передачі електроенергії. Електрична мережа істотно впливає на роботу ринку електроенергії. Тому, практично всі сучасні ринкові моделі представляються у вигляді багатовузлових задач.

Для опису електричної мережі на першому етапі слід використати спрощену модель, в якій втрати в мережі та реактивні потоки не враховано, а для опису перетоків використано систему балансових співвідношень Кірхгофа аналогічну тій, що використовують в теорії мереж постійного струму. Такий підхід дозволяє описати міжвузлові перетоки за допомогою фіктивного вузла (хаба), виходячи з припущення, що вся електроенергія вироблена у окремому вузлі направляється виробником в хаб, а вже звідти – у вузол споживання.

При оптимізації структури генеруючих потужностей можна прийняти, що виробники не впливають на ціноутворення щодо послуг з передачі, тривалість спорудження мереж значно менша від тривалості спорудження генеруючих потужностей.

Плата за передачу по лінії береться тільки у випадку її перевантаження. При цьому прямі потоки, які сприяють перевантаженню штрафуються, а зворотні потоки, що розвантажують лінію, преміюються.

Врахування ринкових перетворень у галузі. При моделюванні експлуатації та розвитку генеруючого устаткування необхідно враховувати те, що із-за реорганізації галузі змінилась як структура, так і принципи поведінки учасників ринку:

- замість одного монополіста з'явилося декілька конкуруючих фірм-виробників, оператор мережі, торгівці електроенергією, тощо, які оптимізують свою діяльність індивідуально;
- змінились критерії оптимізації діяльності – максимізація прибутку замість мінімізації витрат;
- формуються потужні приватні компанії, які здатні впливати на ринок.

Сучасні моделі недосконалої конкуренції повинні враховувати особливості організації енергоринку та механізми його роботи. Відображення у моделі дії прямих договорів вимагає визначення об'ємів продажу

електроенергії кожним виробником кожному зі споживачів у розрізі регіонів. Наявність організованого оптового ринку моделюється шляхом введення арбітражних торгівців. Функцію арбітражної торгівлі може виконувати оператор оптового ринку.

Забезпечення надійності енергосистеми досягається через включення вимог щодо:

– гарячого резерву: сумарна потужність устаткування, що знаходиться у роботі, повинна перевищувати потужність споживання на задану величину. Поряд з оптимізацією об'ємів виробництва, оптимізація роботи устаткування повинна здійснюватись з урахуванням розподілу гарячого резерву між виробниками.

– проходження мінімуму навантаження: при виборі складу устаткування для покриття денного максимуму споживання необхідно враховувати, що вночі це устаткування може бути розвантажене до рівня нічного провалу. Як наслідок частина високоефективного устаткування, яке не може зупинятись на ніч, у ранжирі заміщується менш економічним устаткуванням, яке може зупинятись на ніч.

– обмежень потужності для генеруючого устаткування та пропускну здатності інтерфейсів.

Поглиблене дослідження **впливу екологічних чинників** на розвиток генерації електроенергії заслуговує окремого розгляду. Тому при моделюванні розвитку генерації в ринкових умовах доцільно забезпечити можливість врахування платежів за викиди та допущення до роботи лише виробників, які відповідають встановленим екологічним стандартам.

Часові характеристики планування. З метою спрощення адаптації моделей що розробляються до функціонуючої на сьогодні системи планування діяльності галузі доцільно застосувати 20–ти річний прогностичний період, з розбивкою на 5–ти річні етапи.

Аналіз складу типових задач розвитку електроенергетичної системи показав, що **найбільш актуальною задачею** при обґрунтуванні розвитку генерації на сьогодні є задача вибору раціональної структури генеруючих потужностей ЄЕЕС. В той час, коли перед енергетикою України гостро постає питання вибору раціональної структури потужностей, впровадження у галузі ринкових перетворень унеможливорює використання відповідних моделей розроблених у СРСР.

2. МЕТОДОЛОГІЯ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ В СУЧАСНИХ РИНКОВИХ УМОВАХ

2.1. Світові тенденції розвитку систем моделювання енергетики

2.1.1. Методолгії моделювання енергетичних систем

Методолгії моделювання енергетичних систем поділяються на три основні категорії: імітаційне, оптимізаційне та рівноважне моделювання.

Імітаційні моделі представляють енергетичну систему у вигляді сукупності рівнянь та характеристик. Побудова таких моделей здійснюється «знизу вгору» з детальним технологічним описом енергетичної системи. Імітаційні моделі дозволяють проаналізувати сучасний стан енергосистем, а також перспективи реалізації різних сценаріїв їх розвитку.

Оптимізаційні моделі визначаються критеріальними характеристиками та ресурсними обмеженнями. Більшість моделей оптимізації використовують лінійне програмування (LP) з цільовою функцією, яка або максимізується, або мінімізується (наприклад, мінімізація загальних витрат на систему) за умови виконання набору обмежень (наприклад, балансування попиту та пропозиції в мережі). Лінійне програмування зі змішаним цілочисельним програмуванням (MILP) застосовується, наприклад, в задачах визначення генеруючих блоків чи вітрогенераторів, в які слід інвестувати. Оптимізаційні моделі також можуть бути нелінійними: їх цільові функції або обмеження можуть бути нелінійними. Евристичні моделі оптимізації відрізняються від традиційних моделей оптимізації тим, що їх застосування не обов'язково пов'язано зі

знаходженням оптимального рішення. В таких моделях за допомогою простих і швидких методів, таких як стратегія еволюції коваріаційної матриці адаптації (CMA-ES), можна наблизити оптимальне рішення.

В **моделях рівноваги** застосовується економічний підхід до представлення енергетичного сектора як частини всієї економіки, що дозволяє вивчати впливи різних енергетичних політик на економіку в цілому. Моделі загальної рівноваги, або комп'ютерні моделі загальної рівноваги (CGE), відтворюють всю економічну систему. Такі моделі дозволяють визначати рівновагу на всіх ринках і знайти важливі економічні параметри, такі як валовий внутрішній продукт (ВВП). В моделях часткової рівноваги (PE) відтворюється баланс одного ринку, в даному випадку ринку електроенергії, а решта економіки не моделюється.

2.1.2. Огляд систем моделювання енергетики

Методології моделювання енергетичних систем реалізуються у вигляді програмних інструментів – систем моделювання енергетики (СМЕ), основні властивості яких розглядаються нижче.

Інструменти аналізу систем енергетики є частиною програмного забезпечення, що застосовуються для оцінки таких систем. **Інструменти** аналізу систем енергетики використовуються для створення різних **моделей**.

Основні показники **146** відомих у світі (станом на 2019 рік) СМЕ наведено нижче у таблиці 2.1. Тут можливе застосування СМЕ класифіковано за чотирма цільовими групами: **М** – “Моделювання”, **І** – “Інвестування”, **У** – “Управління” та **У+І** – “Управління+Інвестування”.

До групи “**Моделювання**” віднесено СМЕ, що реалізують методологію імітаційного моделювання енергетичних систем. Імітаційні моделі є доволі складними і базуються на логічному та переважно технологічному уявленнях стосовно функціонування енергетичних систем.

Вони часто використовуються у сценарному аналізі. Ефекти впливу політики ціноутворення в таких моделях є менш важливими.

До групи **“Інвестування”** віднесено СМЕ, призначені для аналізу інвестиційних проєктів в енергетиці. Такі програмні системи забезпечують користувача можливістю формувати задачі оптимізації інвестицій та отримувати їх розв’язки, а також порівнювати інвестиційні рішення.

До групи **“Управління”** віднесено СМЕ, що надають користувачам необхідні засоби створення моделей енергетичних систем, їх верифікації за вимірюваними даними, а також формування та вирішення оптимізаційних задач пошуку практичних рішень з управління такими складними системами. Прикладами задач оптимізації управління є мінімізація загальних витрат палива, мінімізація експлуатаційних витрат, максимізація доходу та інші.

До групи **“Управління та Інвестування”** віднесено СМЕ, що забезпечують комплексне вирішення оптимізаційних задач інвестування та управління в енергетиці.

В таблиці 2.1 зазначено часові горизонти прогнозування, які можуть складати не більше 2-х років (“ ≤ 2 ”), від 2-х до 30-и років (“ $> 2 \dots \leq 30$ ”), понад 30-ть років (“ > 30 ”). Для показника кількості інтервалів дискретизації кожного року прогнозного періоду обрано три групи значень: “ ≥ 8760 ” – для інтервалів тривалістю 1 година або менше; “ $> 1 \dots < 8760$ ” – для інтервалів понад 1 годину, але менших 1 року; “ ≤ 1 ” – для інтервалів тривалістю 1 рік або більше.

Таблиця 2.1. (початок)
Основні показники систем моделювання енергетики

Назва програмного інструменту	Джерело	Рік випуску	Призначення	Часовий горизонт, роки	Кількість інтервалів на рік
AEOLIUS	[119]	2005	M	≤ 2	≥ 8760
AIM	[120]	1996	I	> 30	≤ 1
AURORA _{xmp}	[205]	2017	У+І	> 30	≥ 8760

Таблица 2.1.(продовження)					
BALMOREL	[121]	2000	Y+I	$>1 \dots \leq 30$	≥ 8760
BCHP Screening Tool	[122]	2003	Y	≤ 2	≥ 8760
Calliope	[206]	2015	Y+I	$>1 \dots \leq 30$	≥ 8760
CASPOC	[207]	2018	M	≤ 2	≥ 8760
CYME	[208]	2018	M	$>1 \dots \leq 30$	≥ 8760
CGEN	[123]	2007	Y	≤ 2	≥ 8760
CHP capacity optimizer	[124]	2005	Y+I	$>2 \dots \leq 30$	≥ 8760
CHPSizer	[125]	2001	Y	>30	$>1 \dots <8760$
COMPETES	[126]	2004	Y	≤ 2	$>1 \dots <8760$
COMPOSE	[127]	2008	Y+I	>30	≥ 8760
COSMEE	[128]	1998	Y	≤ 2	≥ 8760
DEARS	[129]	2005	I	>30	≤ 1
DER-CAM	[130]	2000	Y+I	≤ 2	≥ 8760
DESSTinEE	[209]	2015	M	$>1 \dots \leq 30$	≥ 8760
DIETER	[210]	2015	Y+I	≤ 2	$>1 \dots <8760$
DigSILENT/PowerFactory	[211]	2019	M	$>1 \dots \leq 30$	≥ 8760
DIME	[131]	2007	Y+I	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
DNE21	[132]	1999	I	>30	≤ 1
DTI	[133]	1999	I	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
E2M2s	[134]	2002	Y+I	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
E3database	[204]	2008	M	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
E3ME / E3MG / MDM	[135]	1996	I	>30	≤ 1
E4cast	[136]	2000	I	$>2 \dots \leq 30$	≤ 1
EGEAS	[137]	1979	Y+I	$>2 \dots \leq 30$	≥ 8760

Таблица 2.1 (продовжения)					
Elfin	[136]	1991	Y	≤ 2	≥ 8760
EMCAS	[139]	2002	I	> 30	≥ 8760
EMELIE	[140]	2003	M	> 30	$> 1 \dots < 8760$
EMINENT	[141]	2005	M	≤ 2	≥ 8760
EMMA	[212]	2017	Y+I	$> 2 \dots \leq 30$	≥ 8760
EMPIRE	[213]	2016	I	> 30	≤ 1
EMPS	[142]	1975	Y	$> 2 \dots \leq 30$	$> 1 \dots < 8760$
Energy 2020	[143]	1972	M	$> 2 \dots \leq 30$	≤ 1
EnergyPLAN	[118]	1999	Y+I	≤ 2	≥ 8760
energyPRO	[144]	1987	Y+I	> 30	≥ 8760
Enertile	[214]	2019	Y+I	> 30	≥ 8760
ENPEP	[145]	1985	M	> 30	≤ 1
ENTIGRIS	[215]	2019	Y+I	> 30	≥ 8760
ERIS	[146]	1996	I	> 30	≤ 1
ESPAUT	[147]	2005	I	≤ 2	≥ 8760
ETM Model	[216]	2018	M	> 30	≥ 8760
Energy Transition Model	[217]	2017	M	> 30	≥ 8760
ETSAP-TIAM	[218, 219]	2008	Y+I	> 30	$> 1 \dots < 8760$
EUCAD	[220]	2015	Y	≤ 2	≥ 8760
EUPower-Dispatch	[221]	2013	Y	≤ 2	≥ 8760
ficus	[222]	2018	Y+I	≤ 2	≥ 8760
FOSSIL2	[148]	1972	I	> 30	$> 1 \dots < 8760$
GCAM	[223]	2019	M	> 30	≤ 1
GEM-E3	[224, 225]	2013	M	> 30	≤ 1
genEris	[149]	2005	I	> 30	≤ 1
GENESYS	[226]	2014	I	> 30	≥ 8760

Таблица 2.1 (продовжения)					
GridLAB-D	[227]	2019	M	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
GTM _{ax}	[150]	1995	Y	≤ 2	≥ 8760
H2A analysis	[151]	2003	Y+I	≤ 2	≥ 8760
H2RES	[152]	2000	Y	>30	≥ 8760
HOMER	[117]	1992	Y+I	≤ 2	≥ 8760
HUD CHP Screening Tool	[153]	2002	M	≤ 2	$>1 \dots <8760$
HYDROGEMS	[154]	1995	M	≤ 2	≥ 8760
HYPERSIM	[228]	2018	M	≤ 2	≥ 8760
HYPRO	[155]	2005	M	$>2 \dots \leq 30$	≤ 1
iHOGA	[229]	2019	Y+I	≤ 2	≥ 8760
IKARUS	[156]	1991	I	>30	≤ 1
IMAGE-TIMER	[157]	1997	Y+I	>30	$>1 \dots <8760$
IMAKUS	[230]	2012	Y+I	≤ 2	≥ 8760
INFORSE	[158]	2002	M	>30	≤ 1
Invert	[159]	2003	I	$>2 \dots \leq 30$	≤ 1
INVERT/EE-Lab	[131]	2015	M	>30	≤ 1
IPM	[160]	1980	Y+I	$>2 \dots \leq 30$	≥ 8760
IPSA 2	[232]	2015	M	≤ 2	≥ 8760
IRiE	[233]	2012	Y	≤ 2	≥ 8760
LEAP	[116]	1980	M	>30	≤ 1
LIBEMOD	[234]	2009	M	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
LIMES-EU	[235]	2011	M	>30	≤ 1
LOADMATCH	[236]	2015	M	$>2 \dots \leq 30$	≥ 8760
LUSYM	[237]	2014	Y	≤ 2	≥ 8760
MARKAL/TIMES	[115, 161]	1978	Y+I	>30	$>1 \dots <8760$
MELP	[162]	1997	I	$>2 \dots \leq 30$	≤ 1

Таблица 2.1 (продовжения)					
MERGE	[163]	1994	M	>30	≤1
Mesap PlaNet	[164]	1997	M	>30	≥8760
MESSAGE	[165]	1978	Y+I	>30	≤1
MiniCAM	[166]	1982	M	>30	≤1
MTSIM	[167]	2009	Y	≤2	≥8760
NARE	[168]	1973	Y+I	>2 ... ≤30	>1 ... <8760
NEMO	[238]	2011	Y+I	≤2	≥8760
NEMS	[169]	1993	M	>2 ... ≤30	≤1
NEWAVE	[170]	1992	Y	>2 ... ≤30	>1 ... <8760
ObjECTS-MiniCAM	[203]	2005	M	>30	≥8760
Oemof (SOLPH)	[239]	2017	M	>2 ... ≤30	>1 ... <8760
OpenDSS	[240]	2009	M	≤2	≥8760
ORCED	[171]	1996	Y+I	≤2	≥8760
OSeMOSYS	[241]	2011	I	>30	>1 ... <8760
OVER/UNDER	[172]	1977	I	>2 ... ≤30	≤1
PERSEUS	[119]	1996	I	>30	>1 ... <8760
PLEXOS	[173]	2003	Y+I	>2 ... ≤30	≥8760
POLES	[174]	1993	M	>30	≤1
PowerGAMA	[242]	2013	M	≤2	≥8760
POWERS	[175]	2001	M	>30	>1 ... <8760
PRIMES	[176]	1994	M	>30	≤1
ProdRisk	[177]	1994	Y+I	>2 ... ≤30	≥8760
PROMETHEUS	[178]	2007	M	>30	≤1
PROVIEW	[179]	1980	Y+I.	>2 ... ≤30	≥8760
PyPSA	[243]	2016	Y+I	≤2	≥8760
RAMSES	[180]	1988	Y	>2 ... ≤30	≥8760

Таблица 2.1 (продовжения)					
RAPSim	[244]	2014	M	≤ 2	≥ 8760
Ready Reckoner	[181]	1997	M	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
ReEDS	[245]	2018	M	>30	$>1 \dots <8760$
ReMIND	[246]	2015	M	>30	$>1 \dots <8760$
REMARK	[147]	2006	Y	≤ 2	≥ 8760
REMix	[247]	2012	Y+I	≤ 2	≥ 8760
renpass	[248]	2015	Y	≤ 2	≥ 8760
RETScreen	[182]	1996	I	>30	$>1 \dots <8760$
ROM	[183]	2007	Y	≤ 2	≥ 8760
RSTEM	[184]	2005	Y	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
SAFIRE	[185]	1997	I	>30	≤ 1
SAGE	[186]	2002	I	$>2 \dots \leq 30$	≤ 1
SAM	[249]	2017	I	≤ 2	≥ 8760
SAMLAST	[187]	1993	Y	≤ 2	$>1 \dots <8760$
SESAM	[188]	1987	M	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
SIMPOW	[250]	2019	M	≤ 2	≥ 8760
SimREN	[189]	1999	M	≤ 2	≥ 8760
SIREN	[251]	2014	M	≤ 2	≥ 8760
SIVAEL	[190]	1990	M	≤ 2	≥ 8760
SMART	[191]	2009	Y+I	>30	≥ 8760
SNOW	[252]	2015	M	>30	$>1 \dots <8760$
SPSEK	[192]	1984	Y+I	$>2 \dots \leq 30$	≤ 1
stELMOD	[253]	2013	Y	≤ 2	≥ 8760
STREAM	[193]	2004	M	≤ 2	≥ 8760
System optimizer	[194]	2004	I	$>2 \dots \leq 30$	$>1 \dots <8760$
SWITCH	[254]	2012	Y+I	$>2 \dots \leq 30$	≥ 8760
Temoa	[255]	2013	M	$>2 \dots \leq 30$	≤ 1

Таблиця 2.1 (кінець)					
TRNSYS16	[195]	1975	Y+I	>30	≥8760
TRNSYS18	[256]	2018	M	>30	≥8760
UniSyD3.0	[196]	2003	M	>30	>1 ... <8760
UPLAN	[197]	1988	Y	>2 ... ≤30	≥8760
urbs	[257]	2019	Y+I	>30	>1 ... <8760
UREM	[198]	2007	I	>30	≤1
VTT-EMM	[199]	2007	Y	>2 ... ≤30	>1 ... <8760
WASP	[197]	1972	I	>2 ... ≤30	>1 ... <8760
WEM	[200]	1993	I	>2 ... ≤30	≤1
WeSIM	[258, 259]	2013	Y+I	>2 ... ≤30	≥8760
WILMAR Planning Tool	[201]	2006	Y	≤2	≥8760
WITCH	[202]	2005	I	>30	≤1

Методології **економічної рівноваги** в основному використовуються для аналізу середньо- та довгострокової перспектив розвитку енергетичного сектору як частини загальної економіки. При цьому акцентують увагу на взаємозв'язках між енергетикою та іншими частинами економіки. В моделях застосовуються рівноважні ціни як показники балансування попиту і пропозиції на енергетичних ринках. Розрізняють моделі секторальної та загальної рівноваги. В моделях секторальної рівноваги відтворюється механізм балансування попиту та пропозиції на окремі види енергетичних ресурсів, а в моделях загальної рівноваги, до того ж, реалізується взаємодія енергетичних ринків з урахуванням ефектів зворотного зв'язку між ними.

Деякі СМЕ забезпечують пошук загальної та/або секторальної рівноваги в енергетиці. При цьому вважається, що всі агенти є ціноприймаючими сторонами економічних відносин, а рівновага

встановлюється лише між виробниками та споживачами енергетичних ресурсів.

В існуючих програмних інструментах моделювання загальної економічної рівноваги та секторальної рівноваги в енергетиці відтворюються механізми **лише маржинального ціноутворення**.

Тільки деякі СМЕ забезпечують можливість моделювання стану рівноваги між попитом та пропозицією на ринках енергетичних ресурсів. Поширені в світі програмні інструменти з такими можливостями представлено нижче в таблиці 2.2.

Протягом останніх чотирьох десятиліть структура попиту на СМЕ помітно змінюється (Рис. 2.1).

У 1970-х роках світова енергетична криза стала стимулом до розвитку ядерної енергетики, що, в свою чергу, сприяло появі СМЕ, призначених, в основному, для вирішення завдань оптимізації процесів інвестування та управління.

У 1980-і роки вводяться нові технології виробництва електроенергії, засновані на альтернативних джерелах енергії, і починаються процеси диверсифікації виробництва. У цей період з'являються СМЕ, що забезпечують детальний погодинний аналіз виробничих процесів.

Таблиця 2.2.

Системи моделювання економічної рівноваги енергетичних комплексів

AURORA _{xmp}	LIBEMOD	PLEXOS
BALMOREL	MARKAL/TIMES	POLES
E4cast	NEMO	PRIMES
ETM Model	NEMS	ReEDS
ENPEP	Oemof (SOLPH)	SNOW
ETSAP-TIAM	ObjCETS-MiniCFM	TIMES
GCAM	ORCED	UniSyD3.0
GEM-E3	PERSEUS	WITCH

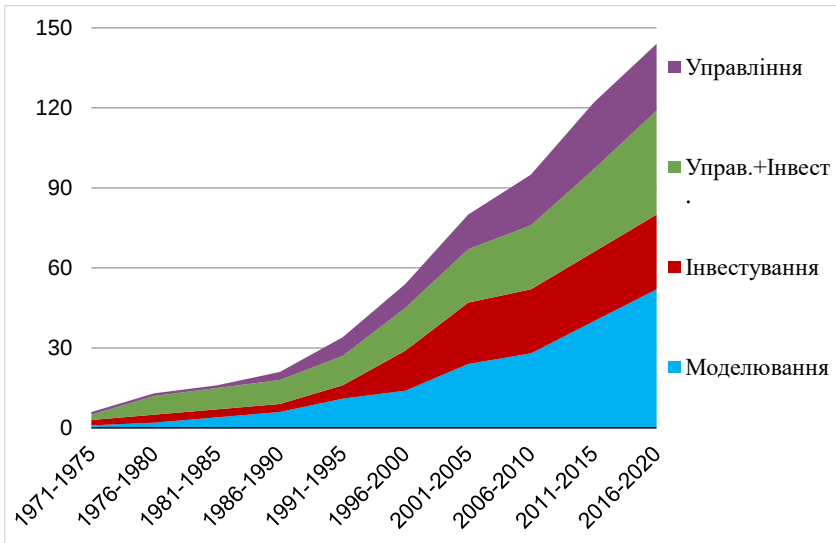


Рис. 2.1. Динаміка кількості СМЕ.

У 1990-ті роки відповіддю на екологічні проблеми стало введення нових технологій виробництва електроенергії, що використовують відновлювані джерела енергії. Число СМЕ значно зростає, особливо таких, які орієнтовані на вирішення завдань оптимізації процесів управління та інвестування.

У 2000-х роках здійснюються реформи в сфері управління окремими секторами енергетики та формуються стійкі енергетичні системи. У цей період з'являються СМЕ, придатні для вирішення завдань оптимізації процесів управління енергетичними системами в коротко- і середньостроковій перспективі (рис. 2.2).

Програмні інструменти аналізу енергетичних систем, від моменту свого першого випуску, багаторазово оновлювалися, про що свідчить значна кількість випущених їх версій. Інтенсивність удосконалення СМЕ свідчить про стале намагання їх розробників задовольнити постійно зростаючі нові потреби користувачів таких систем.

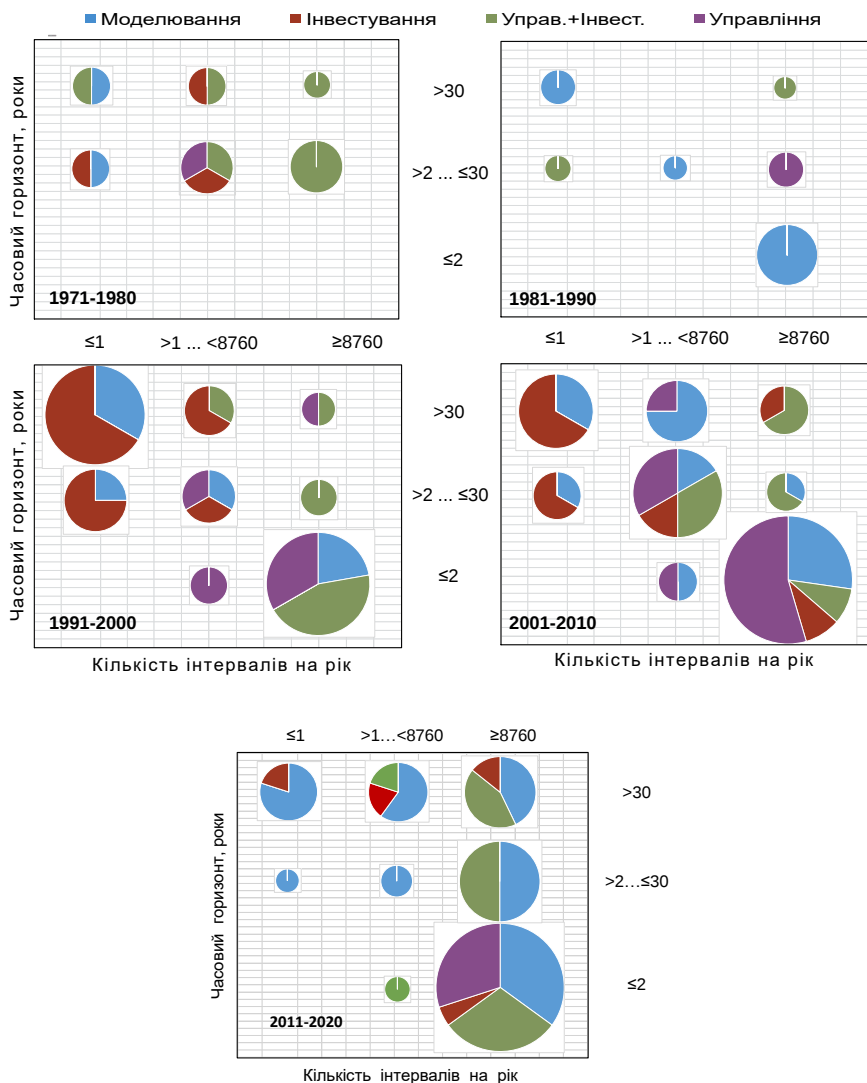


Рис. 2.2. Динаміка СМЕ за основними показниками
(діаметри кругових діаграм відповідають кількості СМЕ).

Програмні інструменти аналізу енергетичних систем відрізняються складністю і вимагають проходження спеціальних тренінгів для їх

опанування потенційними користувачами. Тривалість таких тренінгів для переважної більшості систем не перевищує 2-х тижнів, але для деяких систем може складати до 12-и тижнів.

Постійне розширення множини актуальних завдань аналізу енергетичних систем зумовило необхідність не тільки створення нових СМЕ, а й постійного оновлення раніше створених [116, 117]. При появі значного числа СМЕ виникла необхідність їх класифікації за різними ознаками [116, 117, 119], з яких базовими є методологічні основи побудови моделей енергетичних систем і методи вирішення математичних задач їх моделювання.

Основою побудови існуючих СМЕ є економетричні, макроекономічні, інвестиційні, імітаційні, ретрополяційні, багатокритеріальні моделі, моделі економічної рівноваги і гнучкі моделі у вигляді електронних таблиць.

2.1.3. Вирішувачі задач моделювання енергетичних систем

До складу найбільш поширених у світі СМЕ входить **операційне ядро** у вигляді вирішувачів оптимізаційних задач моделювання енергетичних систем з цільовими функціями найменших витрат і максимізації суспільного добробуту. При формулюванні таких задач завжди вважається, що виробники і споживачі енергоресурсів є ціноприймаючими сторонами, а ціноутворення відбувається за маржинальним принципом. До складу обчислювального ядра кожної СМЕ обов'язково входять вирішувачі математичних задач, оформлені у вигляді бібліотек (табл. 2.3).

Оптимізаційні задачі моделювання енергетичних систем представлені у вигляді математичних задач лінійного, нелінійного, змішаного цілочисельного і стохастичного програмування. Як правило, це задачі великої розмірності. Для їх вирішення у відносно простих СМЕ застосовуються вирішувачі, які знаходяться у відкритому доступі в мережі

інтернет. Однак, у більш досконалих СМЕ застосовуються вирішувачі, алгоритми яких розробляються й удосконалюються протягом десятиліть провідними науково-дослідними установами та спеціалізованими комерційними компаніями.

Таблиця 2.3.
Вирішувачі математичних задач, які використовуються в сучасних СМЕ

СМЕ	Вирішувач	Розробник	Рік розробки вирішувача
NEMS[6]	MPSIII Optimization and Modeling Library	Ketron Optimization	1980
PLEXOS[7]	Xpress-MP	FICO	1988
	CPLEX	IBM	1988
	MOSEK	MOSEK	2000
	GUROBI	Gurobi	2009
PRIMES[8]	GAMS	GAMS Dev. Cor.	1987
	CPLEX	IBM	1988
	PATH	Wisconsin Uni.	1995

2.1.4. Особливості національних систем моделювання енергетики Австралії, США та країн ЄС

Розвиток СМЕ з 2000 по 2010 роки пов'язано з реформуванням і лібералізацією енергетичних ринків (рис. 2.3).

Необхідність моделювання стану конкурентної рівноваги лібералізованого ринку електричної енергії Австралії обумовила появу адекватного програмного інструменту аналізу цього ринку у вигляді системи моделювання NEMSIM (the National Electricity Market simulator) [273]. Програмний інструмент NEMSIM є «агентно-орієнтованою імітаційною моделлю, в якій національний ринок електричної енергії Австралії представлено у вигляді еволюційної системи складних процесів взаємодій

між поведінкою людини на ринках, технічними інфраструктурами та навколишнім природним середовищем. Цей програмний інструмент є першим у своєму роді в Австралії».



Рис. 2.3. Енергетичні ринки світу станом на 2016 рік [123].

Розробку NEMSİM було здійснено на основі зібраних (за 6 років функціонування ринку) історичних даних стосовно попиту, цін та потужностей, які було реалізовано на NEM (національному ринку електричної енергії). Будучи динамічною та інформаційно дуже насиченою системою, NEM пропонує величезний обсяг даних. NEMSİM використовує ці дані для щоб витягти представницькі шаблони регіонального попиту (щоденний, щотижневий та сезонний), регіональних цін, зростання попиту та пропозиції, тощо. Історична база даних включає в себе широкий набір часових рядів даних стосовно торгів, що є важливим джерелом інформації про учасників ринку і їх торгових стратегій.

У NEMSİM агенти (наприклад, представники генеруючих компаній, провайдерів мережеских послуг, компаній роздрібної торгівлі, оператор ринку, і т.д.) купують і продають електроенергію в імітованому торговельному середовищі. Агенти мають різні цілі. Разом з максимізацією

прибутку, деякі агенти, можливо, забажають збільшити частку ринку, диверсифікувати джерела генерації електроенергії або більш тісно взаємодіяти з кінцевими користувачами. Короткострокові стратегії (наприклад, торгівельна тактика в NEM) залежать від середньострокових стратегій (наприклад, перекритих позицій на ринках OTC). У свою чергу, обидві ці стратегії страждають від інвестиційних рішень та інших змін в довгостроковій перспективі.

NEMSIM розглядає агентів як однозначно кмітливих, здатних прийняти оперативні і стратегічні рішення з використанням індивідуальної інформації, доступної для них. Крім того, вони є адаптивними, здатними навчитися та змінювати свою поведінку, щоб краще реалізувати свої цілі. Вивчення алгоритмів стратегічної поведінки може дозволити агентам озирнутися назад (втягнути уроки з їх історичної поведінки), озирнутися по сторонам (вивчити вже реалізовані стратегії інших учасників) і подивитися в своє майбутнє (взяти до уваги власні майбутні плани і прогнози).

В лібералізованому ринку такому, як NEM, жоден агент не має контролю над тим, що роблять всі інші агенти. Проте, завдяки певним особливостям структури ринку, маржинальний торговець може чинити більший вплив на результати функціонування ринку. В будь-якому випадку загальний результат є неочевидним.

Головна мета NEMSIM – надати платформу для взаємодії спільноти агентів, поведінка яких імітується, але обмежується лише діючими правилами та фізичними можливостями мережі. Індивідуальні та колективні форми поведінки агентів розвиваються спільно знизу вгору, виробляючи як очікувані, так і несподівано виникаючі наслідки їх поведінки на системному рівні.

В NEMSIM імітація життя агентів розгортається в трьох середовищах: по-перше, торгове середовище, в якому транзакції можуть відбуватися у взаємозалежних ринках спотової і форвардної торгівлі; по-

друге, фізичне середовище в якому генеруючі блоки та мережа ліній електропередачі формують потоки електроенергії; по-третє, природне середовище, яке надає енергетичні ресурси і накопичує викиди парникових газів. Кожне середовище відокремлено від агентів.

За результатами огляду публікацій наукових досліджень в 2002 році було сформовано повний перелік агентських стратегій [274], які були або можуть бути включені до складу інструментів моделювання лібералізованих ринків електроенергії, а саме:

- досконалої конкуренції;
- Бертрана узагальнена (гра цінами);
- Курно (гра обсягами);
- змови;
- Штекельберга (тип гри – слідування за лідером);
- рівноважної функції пропозиції (SFE);
- узагальнених приблизних варіацій;
- ймовірної рівноважної функції пропозиції (CSFE).

Які стратегії, з наведеного вище їх переліку, реалізовано в NEMSIM наразі не повідомляється.

Аналізуючи технологію агентного моделювання, яку реалізовано в NEMSIM, слід звернути увагу на таку її особливість, як обчислювальна складність та неможливість заздалегідь окреслити час знаходження рівноважного стану ринку електроенергії. Тому агентне моделювання застосовується для аналізу поведінки спрощених ринкових систем.

Процеси реформування енергетичних ринків США почалися ще в 1980-х роках як відповідь на енергетичну кризу 1970-х років. Тоді, мабуть вперше, розробники СМЕ США були змушені відмовитися від традиційного припущення про те, що всі виробники і споживачі енергоресурсів є ціноприймальними сторонами, а ціноутворення відбувається тільки за **маржинальним принципом**. Натомість було запропоновано дотримуватися

такого припущення тільки при моделюванні процесів ціноутворення для окремих секторів енергетики, а на макроекономічному рівні – шукати цінову рівновагу між попитом і пропозицією на енергоресурси, що формується між окремими секторами енергетики, між ними і іншими секторами економіки країни і зовнішнім світом.

Необхідність забезпечення адекватності моделей енергетики США в умовах реформування ринків енергетичних ресурсів зумовила розробку оригінальних підходів до формалізації та вирішення задач пошуку секторальної та загальної рівноваги. В результаті були запропоновані нова методологія моделювання рівноважного стану енергетики США та алгоритм PIES [125] вирішення нового класу задач моделювання – задач додатковості. Вирішувач PIES і його модифікації були втілені спочатку в систему моделювання IFFS, а пізніше – в NEMS [126]. Однак недосконалість вирішувача PIES і його нездатність знаходити розв’язки задач додатковості, що виникають при посиленні економічної взаємозалежності енергетичних ринків США, стимулювали багатьох розробників інших СМЕ до істотних переробок власних систем. В даний час в світі створено лише кілька СМЕ, що забезпечують рівноважне моделювання енергетичних ринків (табл. 2.4).

В Європі подібна NEMS система моделювання енергетики PRIMES була розроблена в лабораторії E3Mlab - ICCS Афінського національного технічного університету в результаті тривалих досліджень, фінансово підтриманих Європейською комісією. Різні версії системи PRIMES були успішно рецензовані в 1997 і 2011 р [122]. Сучасна її версія розроблена на основі методології рівноважного моделювання, застосованої для опису енергетичних систем ЄС у вигляді задач рівноважного програмування з рівноважними обмеженнями [132].

Огляд счасних СМЕ показав, що серед них є такі, які здатні задовольнити більшість потреб з моделювання окремих малих енергосистем та їх об’єднань аж до глобальної енергетичної системи.

Таблиця 2.4.

*Сучасні системи рівноважного моделювання енергетики, в яких
застосовуються вирішувачі задач додатковості*

Найменування СМЕ, країна походження	Вирішувач задач додатковості
IFFS [127], США	PIES, алгоритм Гауса-Зейделя [125, 126]
NEMS [120], США	PIES, блоковий Гауса-Зейделя [126, 128]
ENPEP [129], США	Дані не знайдено
GEMS [130], США	Дані не знайдено
GEMINI [131], Франція	PATH [134 – 137]
PRIMES [132], Греція	PATH
C-GEM [133], КНР, США	PATH

Разом з тим, застосування наявних програмних інструментів моделювання енергосистем, що функціонують в умовах дії лібералізованих ринків електроенергії, є доволі обмеженим і вимагає розробки нових СМЕ, заснованих на методології комплементарного моделювання конкурентних ринків електроенергії. В цьому контексті слід звернути увагу на декларації розробників PLEXOS стосовно придатності їх програмного інструменту відтворювати складні процеси взаємодії учасників конкурентних ринків енергії [275]. Рекламуючи таку можливість, автори PLEXOS, фактично, її не підтверджують. Такий висновок витікає з аналізу задекларованих класів задач математичного моделювання та можливості вирішувачів, що застосовуються для знаходження розв'язків таких задач. Жоден з зазначених вирішувачів не в змозі забезпечити пошук розв'язків задач рівноваги на конкуруючих олігополістичних ринках електричної енергії. Такі вирішувачі можуть забезпечити пошук рівноваги попиту та пропозиції лише на ринках з маржинальним ціноутворенням.

2.2. Узагальнена форма задач моделювання рівноважного стану енергетики в ринкових умовах

Задачі моделювання ринків електроенергії з N учасниками можна представити в узагальненому вигляді, а саме у вигляді системи задач нелінійного програмування з комплементарними обмеженнями:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Phi_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{-1}) \xrightarrow{\mathbf{X}_1 \in C_1} \max \\
 \dim \mathbf{X}_1 = K_1, \quad \dim \mathbf{X}_{-1} = K - K_1 \\
 C_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{K_1} : H_{1,i}(\mathbf{X}) = 0, i \in I_1, \quad G_{1,j}(\mathbf{X}) \geq 0, j \in J_1, \\ 0 \leq R_{1,m}(\mathbf{X}_1) \perp S_{1,m}(\mathbf{X}_1) \geq 0, m \in M_1 \end{array} \right\} \\
 \Phi_1, \{H_{1,i}\}, \{G_{1,j}\} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad \{R_{1,m}\}, \{S_{1,m}\} : \mathbb{R}^{K_1} \rightarrow \mathbb{R} \\
 |M_1| + |I_1| \leq K_1, \quad |J_1| < \infty \\
 \\
 \Phi_2(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{-2}) \xrightarrow{\mathbf{X}_2 \in C_2} \max \\
 \dim \mathbf{X}_2 = K_2, \quad \dim \mathbf{X}_{-2} = K - K_2 \\
 C_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{K_2} : H_{2,i}(\mathbf{X}) = 0, i \in I_2, \quad G_{2,j}(\mathbf{X}) \geq 0, j \in J_2, \\ 0 \leq R_{2,m}(\mathbf{X}_2) \perp S_{2,m}(\mathbf{X}_2) \geq 0, m \in M_2 \end{array} \right\} \\
 \Phi_2, \{H_{2,i}\}, \{G_{2,j}\} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad \{R_{2,m}\}, \{S_{2,m}\} : \mathbb{R}^{K_2} \rightarrow \mathbb{R} \\
 |M_2| + |I_2| \leq K_2, \quad |J_2| < \infty \\
 \\
 \vdots \\
 \Phi_N(\mathbf{X}_N, \mathbf{X}_{-N}) \xrightarrow{\mathbf{X}_N \in C_N} \max \\
 \dim \mathbf{X}_N = K_N, \quad \dim \mathbf{X}_{-N} = K - K_N \\
 C_N \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_N \in \mathbb{R}^{K_N} : H_{N,i}(\mathbf{X}) = 0, i \in I_N, \quad G_{N,j}(\mathbf{X}) \geq 0, j \in J_N, \\ 0 \leq R_{N,m}(\mathbf{X}_N) \perp S_{N,m}(\mathbf{X}_N) \geq 0, m \in M_N \end{array} \right\} \\
 \Phi_N, \{H_{N,i}\}, \{G_{N,j}\} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad \{R_{N,m}\}, \{S_{N,m}\} : \mathbb{R}^{K_N} \rightarrow \mathbb{R} \\
 |M_N| + |I_N| \leq K_N, \quad |J_N| < \infty \\
 \\
 \mathbf{G}_0(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_0 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{G_0}, \quad G_0 = \dim \mathbf{G}_0 \\
 \mathbf{H}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_0 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{H_0}, \quad H_0 = \dim \mathbf{H}_0 \\
 \mathbf{X} \in \mathbb{R}^K, \quad K = K_1 + K_2 + \dots + K_N.
 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Тут $\mathbf{X}$ – вектор невідомих розмірністю K , а символ $\perp$ – відношення ортогональності,

Функція $\Phi_n(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{-n}) \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}$ відображає мету діяльності учасника n ринку електроенергії. Її екстремум досягається шляхом варіювання значеннями невідомих $\mathbf{X}_n$ для параметрично заданих значень решти невідомих $\mathbf{X}_{-n} = [\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_{n-1} \quad \mathbf{X}_{n+1} \dots \mathbf{X}_N]^T$. Варіювання значеннями невідомих $\mathbf{X}_n$ здійснюється в обмеженому просторі C_n . Простір C_n визначається підсистемами нелінійних рівнянь $\mathbf{H}_n(\mathbf{X}) = 0$, нерівностей $\mathbf{G}_n(\mathbf{X}) \geq 0$ та комплементарних відношень $0 \leq \mathbf{R}_n(\mathbf{X}_n) \perp \mathbf{S}_n(\mathbf{X}_n) \geq 0$, які сукупно відображають суттєві особливості функціонування енергетичних об'єктів, якими володіє учасник n ринку електроенергії.

Зазвичай, цільові функції виду $\Phi_n(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{-n})$ відображають прибуток генеруючої компанії, прибуток трейдера, добробут споживачів, розташованих в енерговузлах електроенергетичної системи, рівень сприяння оператора системи передачі учасникам ринку у виконанні взятих на себе зобов'язань, обсяг поставок електроенергії споживачам компанією-постачальником, тощо.

До підсистем нелінійних рівнянь виду $\mathbf{H}_n(\mathbf{X}) = 0$ входять балансові рівняння, сформовані для: обсягів виробництва та продажу електроенергії, потоків електроенергії у вузлах мережі ЛЕП, купівлі-продажу електроенергії трейдерами, тощо. Підсистеми нелінійних нерівностей виду $\mathbf{G}_n(\mathbf{X}) \geq 0$ відображають технологічні обмеження на режимні навантаження енергетичних об'єктів, зокрема таких, як енергоблоки і ЛЕП.

Комплементарні нерівності виду $0 \leq \mathbf{R}_n(\mathbf{X}_n) \perp \mathbf{S}_n(\mathbf{X}_n) \geq 0$ відображають умови пуску-зупинки енергоблоків з метою покриття добових

коливань попиту на електроенергію, дискретні маніпуляції з енергоблоками, що можуть працювати як в одно-, так і в двохблоковому режимі, тощо

Підсистема нерівностей $\mathbf{G}_0(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}$ та підсистема рівнянь $\mathbf{H}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ відображають загальносистемні вимоги до умов функціонування електроенергетичної системи. Такі вимоги, як правило, стосуються резервування потужності, екологічних обмежень, тощо.

У зручній компактній формі система задач (2.1) має такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Phi_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{-1}) \xrightarrow{\mathbf{X}_1 \in C_1} \max \\
 \dim \mathbf{X}_1 = K_1, \quad \dim \mathbf{X}_{-1} = K - K_1 \\
 C_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{K_1} : \mathbf{H}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \mathbf{G}_1(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}, \\ 0 \leq \mathbf{R}_1(\mathbf{X}_1) \perp \mathbf{S}_1(\mathbf{X}_1) \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \\
 \Phi_1 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{H}_1 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{|I_1|}, \quad \mathbf{G}_1 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{|J_1|}, \\
 \mathbf{R}_1 : \mathbb{R}^{K_1} \rightarrow \mathbb{R}^{|M_1|}, \quad \mathbf{S}_1 : \mathbb{R}^{K_1} \rightarrow \mathbb{R}^{|M_1|}, \quad |M_1| + |I_1| \leq K_1, \quad |J_1| < \infty \\
 \\
 \Phi_2(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{-2}) \xrightarrow{\mathbf{X}_2 \in C_2} \max \\
 \dim \mathbf{X}_2 = K_2, \quad \dim \mathbf{X}_{-2} = K - K_2 \\
 C_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{K_2} : \mathbf{H}_2(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \mathbf{G}_2(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}, \\ 0 \leq \mathbf{R}_2(\mathbf{X}_2) \perp \mathbf{S}_2(\mathbf{X}_2) \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \\
 \Phi_2 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{H}_2 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{|I_2|}, \quad \mathbf{G}_2 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{|J_2|}, \\
 \mathbf{R}_2 : \mathbb{R}^{K_2} \rightarrow \mathbb{R}^{|M_2|}, \quad \mathbf{S}_2 : \mathbb{R}^{K_2} \rightarrow \mathbb{R}^{|M_2|}, \quad |M_2| + |I_2| \leq K_2, \quad |J_2| < \infty \\
 \\
 \vdots \\
 \Phi_N(\mathbf{X}_N, \mathbf{X}_{-N}) \xrightarrow{\mathbf{X}_N \in C_N} \max \\
 k_N = \dim \mathbf{X}_N, \quad \dim \mathbf{X}_{-N} = K - K_N \\
 C_N \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_N \in \mathbb{R}^{K_N} : \mathbf{H}_N(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \mathbf{G}_N(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}, \\ 0 \leq \mathbf{R}_N(\mathbf{X}_N) \perp \mathbf{S}_N(\mathbf{X}_N) \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \\
 \Phi_N : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{H}_N : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{|I_N|}, \quad \mathbf{G}_N : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{|J_N|}, \\
 \mathbf{R}_N : \mathbb{R}^{K_N} \rightarrow \mathbb{R}^{|M_N|}, \quad \mathbf{S}_N : \mathbb{R}^{K_N} \rightarrow \mathbb{R}^{|M_N|}, \quad |M_N| + |I_N| \leq K_N, \quad |J_N| < \infty \\
 \\
 \mathbf{G}_0(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_0 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{G_0}, \quad G_0 = \dim \mathbf{G}_0 \\
 \mathbf{H}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_0 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{H_0}, \quad H_0 = \dim \mathbf{H}_0 \\
 \mathbf{X} \in \mathbb{R}^K, \quad K = K_1 + K_2 + \dots + K_N.
 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Розв'язок $\mathbf{X}$ системи задач (2.2) задовольняє умовам оптимальності Каруша–Куна–Таккера, а саме

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}_n} \left[\begin{array}{l} -\Phi_n(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) + \\ + \boldsymbol{\mu}_n^T \mathbf{Z}_n(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}_n^T \mathbf{V}_n(\mathbf{X}) + \\ + \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{H}_0(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{G}_0(\mathbf{X}) \end{array} \right] \\ \mathbf{0} = \mathbf{Z}_n(\mathbf{X}) = \left| \begin{array}{l} \mathbf{H}_n(\mathbf{X}) \\ \mathbf{R}_n(\mathbf{X}_n) \circ \mathbf{S}_n(\mathbf{X}_n) \end{array} \right| \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda}_n \perp \mathbf{V}_n(\mathbf{X}) = \left| \begin{array}{l} \mathbf{G}_n(\mathbf{X}) \\ \mathbf{R}_n(\mathbf{X}_n) \\ \mathbf{S}_n(\mathbf{X}_n) \end{array} \right| \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_n \in \mathbb{R}^{|I_n|+|M_n|}, \quad \boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^{|J_n|+2|M_n|} \\ \mathbf{0} = \mathbf{H}_0(\mathbf{X}) \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda}_0 \perp \mathbf{G}_0(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^{H_0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^{G_0} \end{array} \right\}, \quad n=1 \dots N, \quad (2.3)$$

де символами ∇ та $\circ$ позначено, відповідно, оператор Гамільтона та операція добутку Адамара. Система рівностей і комплементарних нерівностей (2.3) з невідомими $\mathbf{X} = |\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_N|^T$ і дуальними невідомими $\boldsymbol{\lambda} = |\boldsymbol{\lambda}_1 \dots \boldsymbol{\lambda}_N|^T$, $\boldsymbol{\mu} = |\boldsymbol{\mu}_1 \dots \boldsymbol{\mu}_N|^T$, $\boldsymbol{\lambda}_0$ та $\boldsymbol{\mu}_0$ є задачею комплементарного програмування з комплементарними обмеженнями.

На сьогодні методів розв'язування задач виду (2.3) не існує, тому не існує програмних інструментів всеохоплюючого дослідження енергетичних систем в ринкових умовах.

За таких обставин дослідники обмежуються розглядом прикладних задач, які не потребують в своїх формулюваннях відображення особливих умов пуску-зупинки енергоблоків з метою покриття добових коливань попиту на електроенергію, дискретних маніпуляцій з навантаженням двохкорпусних енергоблоків, та інших енергооб'єктів, що потребують використання бінарних змінних для математичного опису режимів їх роботи.

На сьогодні задачі моделювання рівноважного стану електроенергетичних систем в ринкових умовах формуються у вигляді змішаних задач додатковості виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{X}_n} \left[\begin{array}{l} -\Phi_n(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) + \\ + \boldsymbol{\mu}_n^T \mathbf{H}_n(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}_n^T \mathbf{G}_n(\mathbf{X}) + \\ + \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{H}_0(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{G}_0(\mathbf{X}) \end{array} \right] \\ \mathbf{0} = \mathbf{H}_n(\mathbf{X}) \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda}_n \perp \mathbf{G}_n(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_n \in \mathbb{R}^{|I_n|+|M_n|}, \quad \boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^{|J_n|+2|M_n|} \end{array} \right\}_{n=1 \dots N}, \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} = \mathbf{H}_0(\mathbf{X}) \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda}_0 \perp \mathbf{G}_0(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^{H_0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^{G_0} \end{array} \right\},$$

які є окремим випадком задач комплементарного програмування з комплементарними обмеженнями виду (2.3), коли $\forall n$ вектор-функції $\mathbf{R}_n(\mathbf{X}_n)$ та $\mathbf{S}_n(\mathbf{X}_n)$ дорівнюють нуль-вектору.

2.3. Проблеми математичного моделювання стану конкурентної рівноваги на ринку електроенергії

Моделювання стану конкурентної рівноваги на ринку електроенергії пов'язане з пошуком таких цін на електричну енергію в енерговузлах і обсягів виробництва, передачі та споживання електроенергії, при яких результати діяльності кожного з учасників ринку найбільшою мірою близькі до досягнення власних цілей, а саме: споживачі – максимуму власного добробуту, компанії-постачальники – максимуму обсягів поставок електроенергії споживачам, генеруючі компанії – максимуму власного

прибутку, компанія-оператор системи передачі електроенергії – максимуму сприяння учасникам ринку у виконанні їхніх зобов'язань.

Переслідуючи свою мету, учасники ринку, які є власниками електроенергетичних об'єктів, своїми управлінськими діями формують рівноважний стан електроенергетичної системи і реалізують його в межах допустимих технологічних режимів функціонування окремих енергетичних об'єктів та системи в цілому.

Адекватність моделі рівноважного стану електроенергетичної системи в ринкових умовах досягається відображенням в ній таких визначальних факторів:

- стратегій поведінки учасників ринку;
- організаційно-економічних та технічних умов функціонування підприємств електроенергетики;
- вимог щодо надійності роботи електроенергетичної системи в цілому.

Математичне моделювання конкурентної рівноваги на ринку електроенергії виконується за умов:

- 1) неприпустимості спрощення системи взаємопов'язаних задач оптимізації діяльності учасників ринку до будь-якої однокритеріальної задачі оптимізації;
- 2) відсутності уніфікованої форми задачі комплементарного програмування з комплементарними обмеженнями виду (2.3) такої, яка б спрощувала процес її програмної імплементації та надавала можливість застосовувати відомі та оригінальні вирішувачі задач додатковості;
- 3) великої розмірності задач моделювання;
- 4) обмежених можливостей застосування відомих математичних методів та алгоритмів для знаходження розв'язків змішаних задач додатковості виду (2.4).

2.4. Висновки

Не зважаючи на стрімке зростання кількості систем моделювання енергетики, їх можливості адекватно відтворювати складні процеси системної організації та управління електроенергетичними комплексами залишаються доволі обмеженими.

Необхідність врахування в моделях поведінки окремих учасників ринку призводить до суттєвого ускладнення математичних задач моделювання, які навіть після їх відображення в формі ККТ-умов оптимальності представляються у вигляді задач комплементарного програмування з комплементарними обмеженнями.

Розробка методів та алгоритмів, придатних для розв'язування таких задач є математичною проблемою, яка на сьогодні не вирішена, а отже не існує програмних інструментів всеохоплюючого дослідження енергетичних систем в ринкових умовах.

Виходячи з викладеного, виникає необхідність у визначенні переліку задач моделювання енергетики в ринкових умовах, які можуть бути сформульовані та розв'язані вже сьогодні наявними програмними інструментами, а також у розробці нових методів, алгоритмів та програмних інструментів, придатних для виконання розширеного кола досліджень складних процесів розвитку енергетики.

3. ПРЕДСТАВЛЕННЯ МЕРЕЖІ ЛІНІЙ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧІ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ

3.1. Особливості моделювання мережі

Математичні моделі електроенергетичних систем (ЕС) є основою вирішення задач планування розвитку таких систем. Взагалі задачі планування є багатокритеріальними оптимізаційними задачами великої розмірності, що відображають загальносистемні вимоги, режимні особливості функціонування окремих електроенергетичних об'єктів, ресурсні обмеження, цілі діяльності основних учасників енергоринку [288—292]. Магістральна електрична мережа обумовлює визначальний вплив на процеси перерозподілу та балансування потоків електроенергії у всій множині вузлів її виробництва та споживання. Для адекватного відображення в моделях основних властивостей магістральної електричної мережі беруть до уваги її топологію, а також величини провідностей і граничні значення потоків потужності, що передаються у різних теплових умовах експлуатації ліній [283—298].

За певних припущень щодо періодичності та гладкості напруг і струмів у лініях електропередачі математична модель мережі представляється матрицею Ω чутливості змін потоків навантаження ліній $m \in M$ до змін незбалансованих потоків потужностей від генерації-споживання електроенергії у вузлах мережі $i \in I$. Матриця Ω розмірності $M \times (I - 1)$ розраховується методом потоку навантажень, заснованим на законах Ома і Кірхгофа [294, 295].

Труднощі формування матриці Ω полягають у великій розмірності мережі. Наприклад, для енергосистеми України кількість високовольтних

ліній електропередачі напругою 110 кВ і вище досягає $\sim 10^3$, а кількість вузлів з'єднання ліній – $\sim 3 \cdot 10^2$. Отже, матриця Ω такої мережі містить $\sim 10^3 \times (3 \cdot 10^2)$ ненульових елементів, які розраховуються шляхом виконання операцій множення і обернення матриць спеціального виду [290, 301].

У задачах планування розвитку ЕС спільне подання властивостей мережі для множини з L (зазвичай $L \geq \sim 10^2$) характерних навантажувальних станів призводить до істотного збільшення розмірності розв'язуваних оптимізаційних задач до величин порядку $L \times M \times I$ [290, 301].

Обчислювальні складності рішення оптимізаційних задач такої розмірності часто виявляються нездоланими. Тому необхідно у застосуванні алгоритму формування еквівалентної мережі ліній електропередачі, що складається з істотно меншої кількості ліній та вузлів, але такої, яка адекватно відображає основні властивості існуючої мережі магістральних ліній електропередачі. Нижче пропонуються алгоритми побудови еквівалентної мережі та ідентифікації параметрів її ліній. Особливості застосування таких алгоритмів показані на прикладі рішення задачі еквівалентування мережі магістральних ліній електропередачі України.

3.2. Формування еквівалентної мережі

Відзначимо, що в Україні до магістральних ліній електропередачі належать мережі напругою 220 кВ і вище, по яким здійснюється передача електроенергії між регіональними ЕС всередині країни, а також між об'єднаною ЕС (ОЕС) України і ЕС сусідніх країн.

Кожна регіональна ЕС організаційно є підрозділом Державного підприємства «Національна енергетична компанія «Укренерго»», причому

таким, яке в межах своєї території (таблиця 3.1) забезпечує комплекс заходів щодо:

- експлуатації мережі високовольтних ліній електропередачі;
- її централізованому управлінню для підтримки паралельної роботи в складі ОЕС;
- обліку переданої та відпущеної оптовим споживачам електроенергії, у тому числі за прямими договорами;
- веденню розрахунків регіональних учасників оптового ринку електроенергії; виконання ряду інших специфічних функцій.

Таблиця 3.1.

Регіональні ЕС України

Номер вузла	Регіональна ЕС	Територіальне охоплення регіону у розрізі областей
1	Західна	Волинська, Закарпатська, Івано-Франківська, Львівська, Рівненська
2	Центральна	Житомирська, Київська, Черкаська, Чернігівська
3	Північна	Сумська, Харківська, Полтавська
4	Донбаська	Донецька, Луганська
5	Південно-Західна	Вінницька, Хмельницька, Тернопільська, Чернівецька
6	Дніпровська	Дніпропетровська, Запорізька, Кіровоградська
7	Південна	Миколаївська, Одеська, Херсонська
8	Кримська	АР Крим

Враховуючи просторову розподіленість споживачів електроенергії, регіональні відмінності рівнів споживчого попиту і концентрації генеруючих потужностей в різних регіонах, в якості вузлів еквівалентної мережі будемо розглядати регіональні ЕС. На рисунку 3.1 нумерація і позиціонування вузлів

еквівалентної мережі надані відповідно до нумерації регіональних ЕС у таблиці 3.1 і їх розміщенням по території України, відповідно.

Безпосереднє визначення місця розташування і значень параметрів ліній еквівалентної мережі не представляється можливим, оскільки на території кожної регіональної ЕС міститься мережа ліній електропередачі напругою 110 кВ (154 кВ) і нижче, яка використовується для передачі і розподілу електроенергії, виробленої і спожитої у множині внутрішніх вузлів даного регіону. Як приклад на рисунку 3.2 представлено мережу регіональних і магістральних ліній електропередачі Південно-Західної ЕС, які позначено тонкими і жирними лініями відповідно. Тут тонкі лінії з'єднують між собою внутрішні вузли (у форматі їх позначення присутня буква «і»), а жирні лінії з'єднують вузли Південно-Західної ЕС з вузлами суміжних регіональних ЕС.

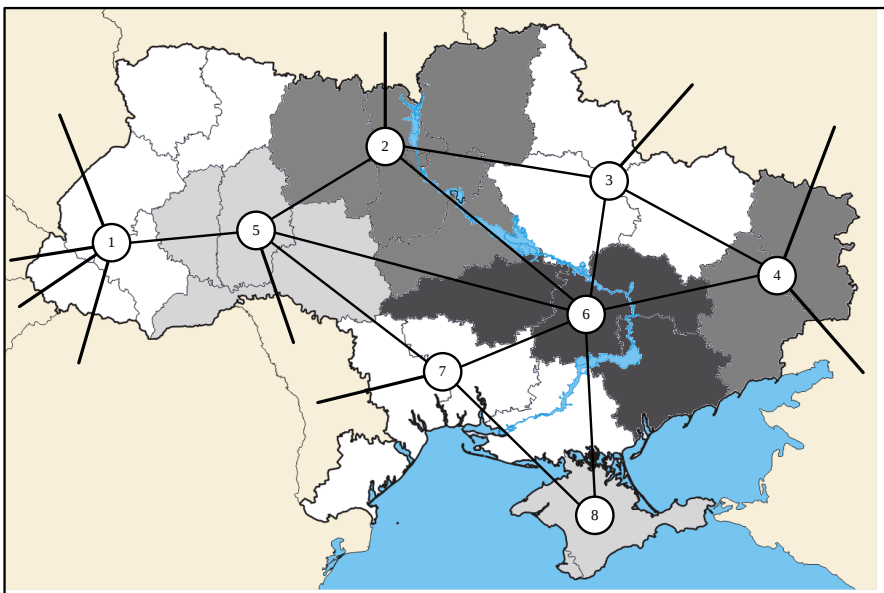


Рис. 3.1. Еквівалентна мережа магістральних ЛЕП України

Для представлення високовольних ліній електропередачі в еквівалентній мережі пропонується замістити внутрішню мережу кожної

регіональної ЕС відповідним їй узагальненим вузлом. При цьому магістральні лінії електропередачі, багато з яких, після введення узагальнених вузлів, виявляються паралельно з'єднаними, еквівалентувати і розглядати в якості ліній еквівалентної мережі. В результаті еквівалентного представлення магістральних ліній електропередачі отримаємо топологічний опис еквівалентної мережі у тому вигляді, в якому вона представлена на рисунку 3.2.

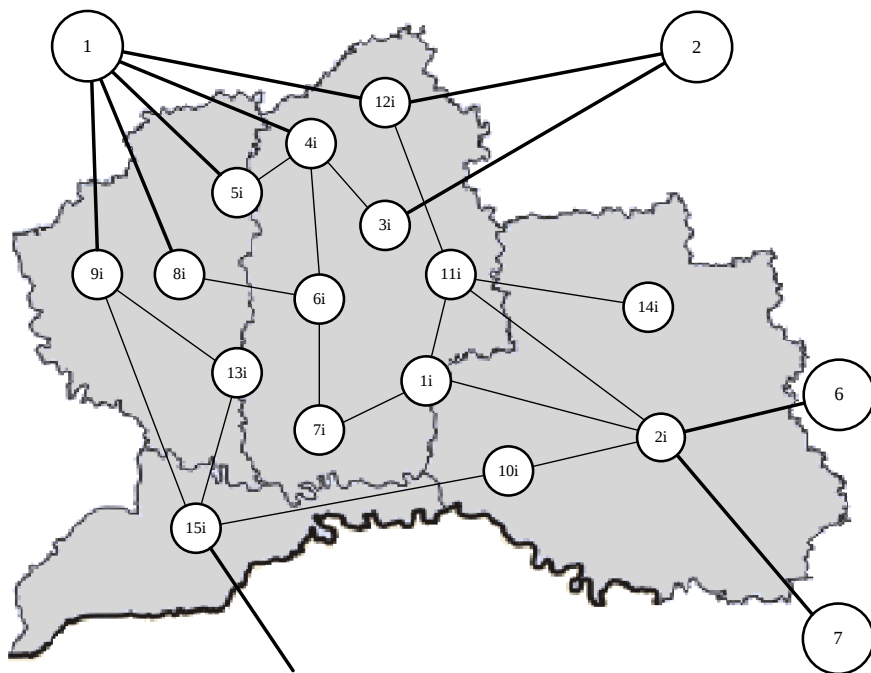


Рис. 3.2. Мережа ЛЕСП Південно-Західної ЕС

Таким чином алгоритм формування еквівалентної мережі магістральних ліній електропередачі складається з 3-х кроків, що виконуються послідовно:

1. Мережа ЕС країни територіально поділяється на регіональні ЕС з характерними рівнями споживчого попиту і концентрації генеруючих потужностей.

2. Регіональні ЕС заміщуються узагальненими вузлами шляхом об'єднання внутрішніх вузлів кожного регіону без урахування електричних зв'язків між ними.

3. Об'єднання магістральних ліній електропередачі ЕС з урахуванням можливого паралельного або послідовного їх приєднання до утворених на кроці 2 узагальнених вузлів.

3.3. Математичний опис мережі

Для математичного опису мережі змінного струму зазвичай застосовують спрощений варіант методу повного навантаження у вигляді співвідношень, аналогічних тим, що використовуються у теорії кіл постійного струму [293—298]. Адекватність такого опису досягається при виконанні наступних умов:

- кути зсуву фаз напруг δ_i у вузлах мережі $i \in I$ відрізняються на досить малу величину:

$$\sin(\delta_i - \delta_j) \approx \delta_i - \delta_j, \quad \cos(\delta_i - \delta_j) \approx 1;$$

- активний опір R_m лінії $m \in M$ незначний в порівнянні з реактивним опором X_m , тобто

$$R_m \ll X_m;$$

- графіки напруг є гладкими.

Тоді потік потужності Y_m по лінії m в напрямку від вузла i до вузла j визначається співвідношенням:

$$Y_m = Y_{i-j} \approx \frac{\delta_{i-j}}{X_m}, \quad (3.1)$$

де $\delta_{i-j} = \delta_i - \delta_j$ – різниця між кутами зсуву фаз напруг у вузлах i та j , до яких підключено лінію m .

Рівняння виду (3.1) для всієї множини M ліній розглядаються спільно з множиною I балансових рівнянь потоків потужностей у вузлах мережі. При цьому незбалансований вузловий потік потужності y_i у кожному вузлі $i \in I$ визначається різницею між обсягами генерації та споживання електроенергії.

У матрично-векторній формі співвідношення між вектором $\mathbf{Y}$ потоків потужностей в лініях, вектором $\mathbf{y}$ незбалансованих вузлових потоків потужностей і вектором $\boldsymbol{\delta}$ кутів зсуву фаз напруг у вузлах мережі мають вигляд

$$\mathbf{Y} = (\Psi D) \boldsymbol{\delta}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{y} = (D^T \Psi D) \boldsymbol{\delta}, \quad (3.3)$$

де $D - (M \times I)$ матриця інцидентності мережі; $\Psi - (M \times M)$ діагональна матриця, m -й ненульовий елемент якої $\psi_{m,m} = X_m / (X_m^2 + R_m^2)$ визначається значеннями R_m та X_m – активним та реактивним опорами лінії m .

Слідуючи узагальненому екстремальному принципу дії в енергетичному колі [299], співвідношення (3.2) та (3.3) слід доповнити виразом

$$\sum_{i \in I} \delta_i^2 \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

Засновані на законах Ома і Кірхгофа, рівняння (3.2) – (3.3) спільно з екстремальним виразом (3.4) утворюють математичний опис мережі ліній електропередачі.

3.4. Ідентифікація параметрів ЛЕП еквівалентної мережі

Запропонований вище алгоритм формування еквівалентної мережі, що вимагає заміщення мереж регіональних ЕС узагальненими вузлами, знижує адекватність представлення фізичних властивостей існуючих мереж, оскільки не враховує впливу провідностей ліній електропередачі регіональних ЕС на розподіл потоків електроенергії. Тому провідності магістральних ліній електропередачі в еквівалентній мережі слід коригувати, тобто значення параметрів $\psi_{m,m}$ для всіх $m \in M$ необхідно шукати в обмежених областях значень виду

$$\psi_m^{\min} \leq \psi_{m,m} \leq \psi_m^{\max}, \quad (3.5)$$

де нижні граничні значення $\psi_m^{\min}$ визначаються безпосередньо в процесі еквівалентування існуючих магістральних ліній електропередачі, а верхні граничні значення $\psi_m^{\max}$ встановлюються рівними максимальним значенням таких параметрів, знайдених для внутрішніх ліній електропередачі відповідних регіональних ЕС. Отримані значення величин $\psi_m^{\min}$, $\psi_m^{\max}$ для високовольтних ЛЕП ОЕС України представлено в таблиці 3.2.

Для пошуку значень параметрів $\psi_{m,m}$ еквівалентної мережі необхідно використовувати диспетчерські дані про обмін потужностями між регіональними ЕС. Якщо скористатися цими даними для утворення векторів $\mathbf{Y}^*$ та $\mathbf{y}^*$, відповідно, потоків потужностей в лініях і незбалансованих вузлових потоків потужностей еквівалентної мережі, то задачу пошуку значень параметрів $\psi_{m,m}$ можна звести до вирішення задачі пошуку екстремуму

$$\frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} (y_i^* - y_i)^2 + \frac{1}{|M|} \sum_{m \in M} (Y_m^* - Y_m)^2 \xrightarrow{\{\psi_{m,m}\}} \min, \quad (3.6)$$

при виконанні умов (3.2) — (3.5). Очевидно така двокритеріальна задача може бути зведена до однокритеріальної шляхом урівноваження складових виразів за допомогою вагового коефіцієнта α . В результаті задача ідентифікації параметрів $\psi_{m,m}$ ліній електропередачі еквівалентної мережі набуває вигляду задачі квадратичної оптимізації

$$\frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} (y_i^* - y_i)^2 + \frac{1}{|M|} \sum_{m \in M} (Y_m^* - Y_m)^2 + \frac{\alpha}{|I|} \sum_{i \in I} \delta_i^2 \xrightarrow{\{\psi_{m,m}\}} \min, \quad (3.7)$$

з умовами (3.2) — (3.3), (3.5).

Таблиця 3.2.
Граничні параметри ЛЕП еквівалентної мережі ОЕС України

Номер лінії m	Вузол входу	Вузол виходу	$\psi_m^{\min}$	$\psi_m^{\max}$
1	1	5	0.138311	0.3980
2	5	2	0.071533	0.1745
3	5	6	0.022972	0.1745
4	5	7	0.038936	0.4228
5	3	2	0.032461	0.1650
6	6	2	0.024515	0.1650
7	4	3	0.054793	0.3616
8	6	3	0.086585	0.3616
9	6	4	0.091559	0.5053
10	6	8	0.015038	0.1227
11	6	7	0.185022	0.4228
12	7	8	0.077576	0.2648

Наприклад, залучаючи фактичні дані про обмін потужностями між регіональними ЕС України, які наведено на рисунку 3.3, сформуємо вектори

$$\mathbf{Y}^* = \begin{vmatrix} 809 & 998 & 101 & 567 & 54 & 159 & 206 & 235 & 925 & 297 & 324 & 771 \end{vmatrix}^T,$$

$$\mathbf{y}^* = \begin{vmatrix} 809 & -1211 & -387 & -719 & 857 & 1839 & -120 & -1068 \end{vmatrix}^T,$$

і підставимо значення їх елементів у функціональний вираз (3.7). Склавши матрицю інцидентності еквівалентної мережі магістральних ліній електропередачі

$$D = \begin{array}{c|cccccccc} \text{лінії/вузли} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1-5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5-2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3-2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6-2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4-3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6-3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6-4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 6-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 7-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}.$$

і вирішивши оптимізаційну задачу (3.7) з параметром $\alpha = 10^{-6}$ і умовами (3.2) – (3.3), (3.5), знайдемо шукані вектори

$$\text{diag}(\Psi) = \begin{array}{|c|} \hline 0.398000 \\ 0.175000 \\ 0.075550 \\ 0.269563 \\ 0.032461 \\ 0.036281 \\ 0.232994 \\ 0.086585 \\ 0.505300 \\ 0.080753 \\ 0.422800 \\ 0.264800 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{Y} = \begin{array}{|c|} \hline 808.986 \\ 997.936 \\ 101.024 \\ 567.014 \\ 54.107 \\ 158.972 \\ 206.019 \\ 235.064 \\ 925.008 \\ 297.001 \\ 323.983 \\ 770.995 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{y} = \begin{array}{|c|} \hline 808.986 \\ -1211.015 \\ -386.976 \\ -718.989 \\ 856.988 \\ 1839.004 \\ -120.002 \\ -1067.996 \\ \hline \end{array}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{array}{|c|} \hline 4452.845 \\ -3298.616 \\ -1631.803 \\ -747.578 \\ 2420.217 \\ 1083.035 \\ 316.756 \\ -2594.857 \\ \hline \end{array}.$$

Тут значення потужностей наведені в мегаватах, а кути зсуву фаз вузлових напруг — в мікрорадіанах.

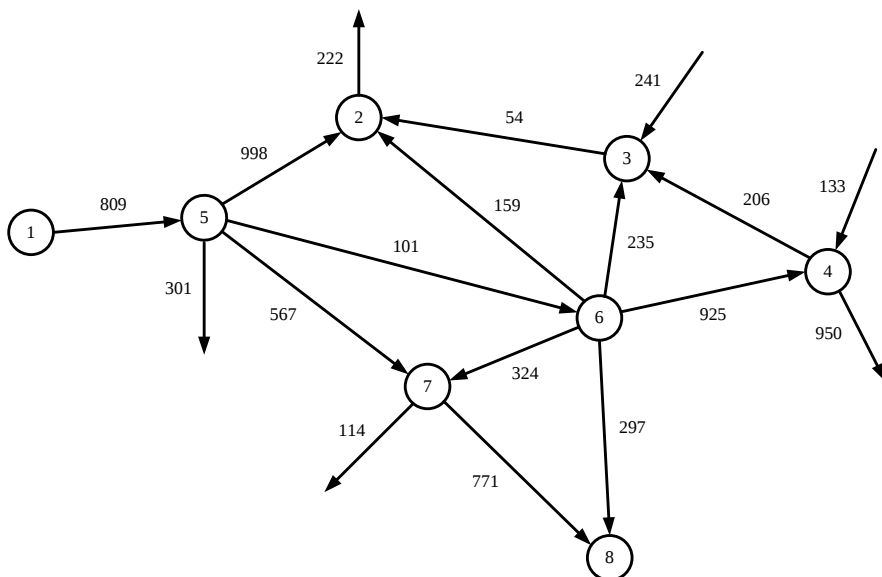


Рис. 3.3. Схема обміну потужностями між регіональними ЕС України станом на 17:00 27 грудня 2006 року, МВт

Знайдені за допомогою моделі еквівалентної мережі значення векторів $\mathbf{Y}$ та $\mathbf{u}$ порівняємо з відповідними диспетчерськими даними, представленими вище у вигляді векторів $\mathbf{Y}^*$ та $\mathbf{u}^*$. Очевидно, в сенсі отриманих результатів, розроблена математична модель еквівалентної мережі ЛЕП адекватно відображає властивості існуючої мережі магістральних ліній електропередачі ОЕС України.

Алгоритм ідентифікації параметрів ліній еквівалентної мережі складається з 3-х кроків, що виконуються послідовно:

1. Обчислюються значення параметрів ψ_m^{min} для всіх ліній $m \in M$ за значеннями активних і реактивних опорів магістральних ліній

електропередачі, об'єднаних в паралельні або послідовні групи ліній в результаті формування еквівалентної мережі.

2. Оцінюються значення параметрів ψ_m^{max} для всіх ліній $m \in M$ за значеннями активних і реактивних опорів внутрішніх високовольтних ліній електропередачі регіональних ЕС.
3. Для всіх $m \in M$ визначаються значення параметрів $\psi_{m,m}$ ліній еквівалентної мережі шляхом вирішення задачі квадратичного програмування з критерієм (3.7) і умовами (3.2) – (3.3), (3.5).

3.5. Матриця передачі і розподілу потоків електроенергії

В задачах планування розвитку ЕС модель мережі магістральних ліній електропередачі у вигляді системи рівнянь (3.2) – (3.3) і критеріального виразу (3.4) представляється рівнозначним співвідношенням [288—292, 294—298, 301]

$$\mathbf{Y} = \Omega \mathbf{y}, \quad (3.8)$$

що містить PTDF (Power Transfer Distribution Factors) -матрицю виду

$$\Omega = \Psi \hat{D} (\hat{D}^T \Psi \hat{D})^{-1}, \quad (3.9)$$

де $\hat{D}$ – $M \times (I - 1)$ матриця, яку утворено з $M \times I$ матриці інцидентності D шляхом видалення в ній довільно обраного стовпця h , що відповідає вибору номера h базового вузла (вузла-хаба) еквівалентної мережі, в якому значення кута зсуву напруги найбільш близьке до нуля. У нашому прикладі таким є вузол 7. Тому, після виконання необхідних розрахунків отримуємо PTDF-матрицю ОЕС України в наступному вигляді:

$\Omega =$	1	0	0	0	0	0	0
	0.178215	-0.55497	-0.30056	-0.20042	0.178215	-0.1405	0
	0.169417	0.050761	-0.06238	-0.10691	0.169417	-0.13356	0
	0.652368	0.504208	0.362936	0.307331	0.652368	0.274055	0
	-0.11778	-0.29411	0.329594	0.181485	-0.11778	0.09285	0
	-0.06044	-0.15092	-0.02904	0.018936	-0.06044	0.047645	0
	-0.07825	-0.1954	-0.4454	0.246229	-0.07825	0.061687	0
	-0.03953	-0.09871	-0.22501	-0.06474	-0.03953	0.031163	0
	-0.07825	-0.1954	-0.4454	-0.75377	-0.07825	0.061687	0
	0.087176	0.124331	0.159758	0.173702	0.087176	0.182047	0
	0.260456	0.371461	0.477307	0.518967	0.260456	0.543899	0
	-0.08718	-0.12433	-0.15976	-0.1737	-0.08718	-0.18205	0

3.5.1. Комп'ютерне моделювання еквівалентної мережі

В алгоритмі рішення задачі мінімізації квадратичного функціоналу (3.7) з умовами (3.2) – (3.3), (3.5) використано можливість адекватного представлення цієї задачі у вигляді змішаної задачі додатковості з подальшим застосуванням негладкого неточного методу Ньютона для її вирішення.

Звертаючись до співвідношень (3.2) – (3.3), зазначимо, що складність обчислення PTDF-матриці Ω полягає в знаходженні $(I-1) \times (I-1)$ матриці B^{-1} , оберненої до матриці виду

$$B = \hat{D}^T \Psi \bar{A}. \quad (3.12)$$

Для обчислення оберненої матриці B^{-1} застосуємо метод CR – факторизації матриці B , тобто представимо останню у вигляді добутку

$$B = C R \quad (3.13)$$

матричних множників C та R [300]. Таке представлення матриці B дозволяє суттєво спростити пошук розв'язків систем рівнянь виду

$$C a_i = \mathbf{1}_i \quad (3.14)$$

та

$$Rb_i = a_i \quad (3.15)$$

для всіх $i \in I-1$, де вектори a_i та b_i – це невідомі, причому вектор $b_i \in i$ – м стовпцем матриці B^{-1} , а вектор $1_i \in$ відомим, причому всі його елементи приймають нульові значення, окрім i – го, який дорівнює одиниці.

Для обчислення PTDF-матриці Ω в середовищі GUI Linux розроблено спеціальний програмний додаток «МОДЕЛЮВАННЯ МЕРЕЖІ ЛІНІЙ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧІ (розрахунок PTDF-матриці)». Додаток написано мовою C++ з використанням інструментів середовища програмування Qt версії 4 та оформлено у вигляді проекту з файлом завантаження «SET.exe». Для зручності роботи користувача у додатку реалізовано три віконних інтерфейса: інформаційний – для вводу початкових числових даних з конструюванням та графічною візуалізацією мережі; виконання обчислювальних процедур, необхідних для знаходження PTDF-матриці Ω ; огляду та збереження результатів обчислення.

Особливості використання додатку проілюструємо двома прикладами побудови PTDF-матриць Ω високовольтних мереж ліній електропередачі, які мають різні топологічні особливості і містять різну кількість вузлів та ліній електропередачі.

3.5.2. Приклад мережі з 5-и вузлів і 6-и ЛЕП.

Схему мережі представлено на рисунку 3.4. В таблиці 3.3 наведено перелік ліній та відповідні номери вузлів, до яких вони під'єднані, а також значення активного та реактивного опорів кожної лінії разом з відповідними значеннями величин $\psi_{k,k}$.

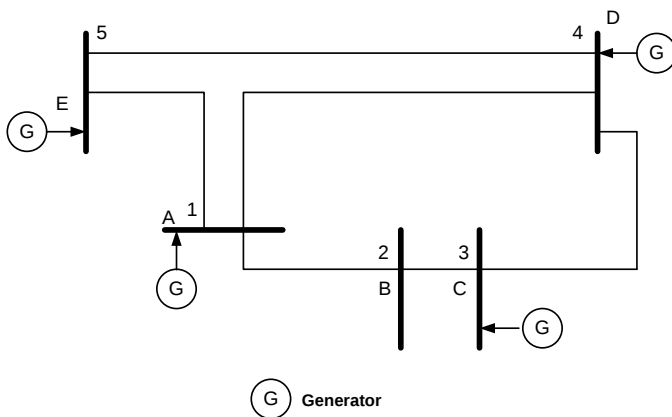


Рис. 3.4. Схема мережі ЛЕП з 6-и ліній та 5-и вузлів

Таблиця 3.3.

Параметри ЛЕП мережі з 6-и ліній та 5-и вузлів

Номер лінії m	Вузли підключення	R_m	X_m	$\psi_{m,m}$
1	A — B	0	0,0281	35,587
2	B — C	0	0,0108	92,593
3	C — D	0	0,0297	33,670
4	D — E	0	0,0297	33,670
5	E — A	0	0,0064	156,250
6	A — D	0	0,0304	32,895

Для обчислення PTDF-матриці високовольтної мережі з 6-х ліній та 5-и вузлів було застосовано програмний додаток SET. Отримана за допомогою цього додатку PTDF-матриця має вигляд

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0.0343783 & -0.635395 & -0.508497 & & -0.159537 & 0 \\ 0.0343783 & 0.364605 & -0.508497 & & -0.159537 & 0 \\ 0.0343783 & 0.364605 & 0.491503 & & -0.159537 & 0 \\ 0.1119510 & 0.262924 & 0.320939 & & 0.480476 & 0 \\ -0.8880490 & -0.737076 & -0.679061 & & -0.519524 & 0 \\ 0.0775729 & -0.101681 & -0.170564 & & -0.359987 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.5.3. Приклад мережі з 30-и вузлів та 41-ї ЛЕП

Схему мережі представлено на рисунку 3.5б, а її відображення у додатку SET – на рисунку 3.5а.

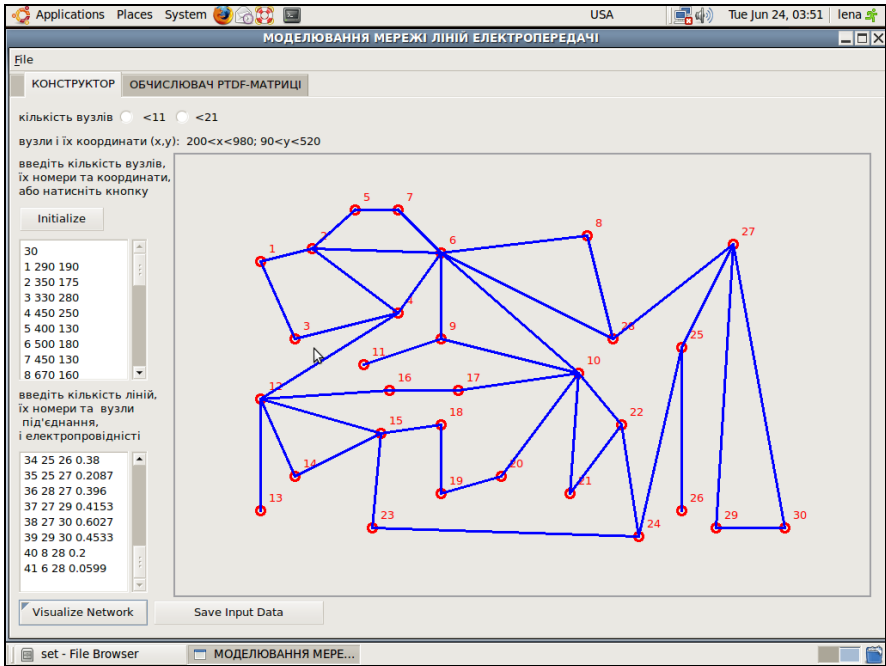


Рис. 3.5а. Відображення даних мережі з 41-ї лінії та 30-и вузлів у вікні «КОНСТРУКТОР» додатку SET.

В таблиці 3.4 наведено перелік ліній та номери вузлів, до яких вони під'єднані, значення активного та реактивного опорів кожної лінії разом з відповідними значеннями параметрів $\psi_{m,m}$ та максимально допустимого навантаження Y_m^{max} .

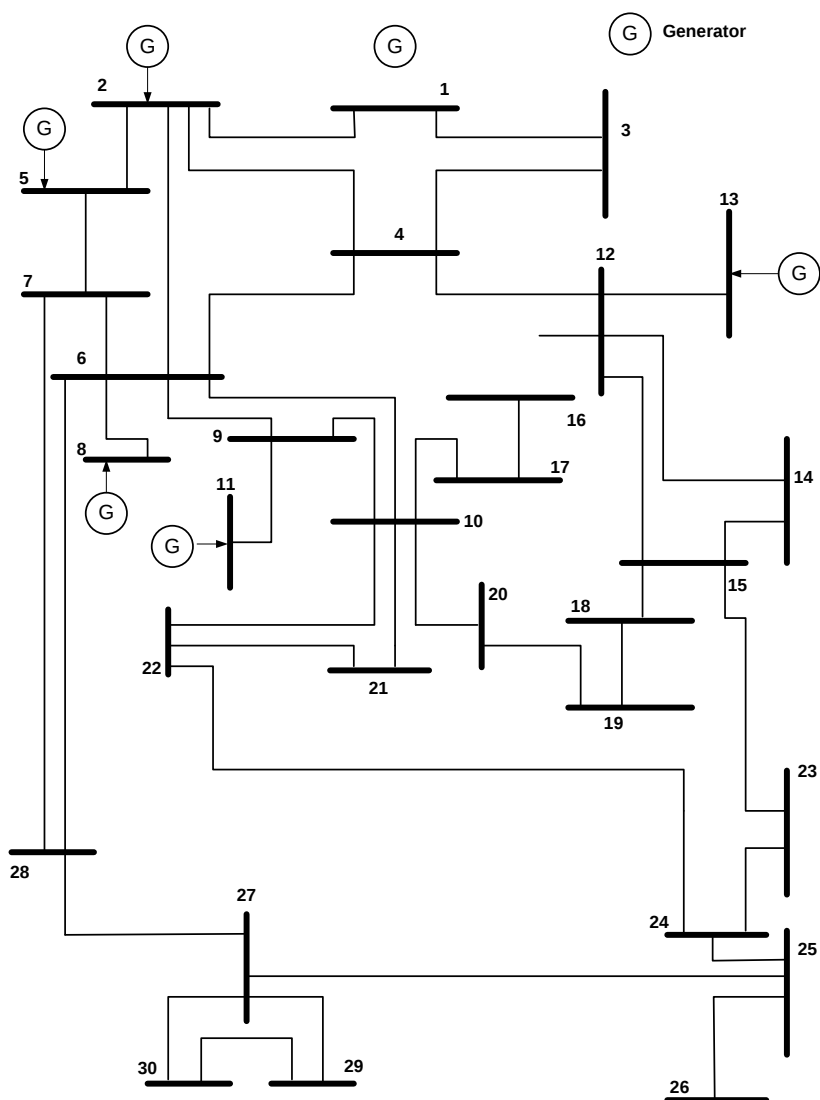


Рис. 3.56. Схема мережі з 41-ї лінії та 30-и вузлів

Таблиця 3.4 (початок).
 Параметри мережі з 41-ї лінії та 30-и вузлів

Номер лінії m	Вузли під'єднання	R_m	X_m	$\psi_{m,m}$	Y_m^{max}
1	1 — 2	0.0192	0.0575	15.6467	130.0
2	1 — 3	0.0452	0.1852	5.0960	130.0
3	2 — 4	0.0570	0.1737	5.1974	65.0
4	3 — 4	0.0132	0.0379	23.5309	130.0
5	2 — 5	0.0472	0.1983	4.7725	130.0
6	2 — 6	0.0581	0.1763	5.1165	65.0
7	4 — 6	0.0119	0.0414	22.3112	90.0
8	5 — 7	0.0460	0.1160	7.4493	70.0
9	6 — 7	0.0267	0.0820	11.0261	130.0
10	6 — 8	0.0120	0.0420	22.0126	32.0
11	6 — 9	0.0000	0.2080	4.8077	65.0
12	6 — 10	0.0000	0.5560	1.7986	32.0
13	9 — 11	0.0000	0.2080	4.8077	65.0
14	9 — 10	0.0000	0.1100	9.0909	65.0
15	4 — 12	0.0000	0.2560	3.9063	65.0
16	12 — 13	0.0000	0.1400	7.1429	65.0
17	12 — 14	0.1231	0.2559	3.1734	32.0
18	12 — 15	0.0662	0.1304	6.0973	32.0
19	12 — 16	0.0945	0.1987	4.1044	32.0
20	14 — 15	0.2210	0.1997	2.2509	16.0
21	16 — 17	0.0824	0.1932	4.3794	16.0
22	15 — 18	0.1070	0.2185	3.6914	16.0
23	18 — 19	0.0639	0.1292	6.2188	16.0
24	19 — 20	0.0340	0.0680	11.7647	32.0
25	10 — 20	0.0936	0.2090	3.9854	32.0
26	10 — 17	0.0324	0.0845	10.3174	32.0
27	10 — 21	0.0348	0.0749	10.9807	32.0
28	10 — 22	0.0727	0.1499	5.4008	32.0
29	21 — 22	0.0116	0.0236	34.1277	32.0
30	15 — 23	0.1000	0.2020	3.9761	16.0

Таблиця 3.4 (кінець).

Параметри мережі з 41-ї лінії та 30-и вузлів

Номер лінії m	Вузли під'єднання	R_m	X_m	$\psi_{m,m}$	Y_m^{max}
31	22 — 24	0.1150	0.1790	3.9544	16.0
32	23 — 24	0.1320	0.2700	2.9892	16.0
33	24 — 25	0.1885	0.3292	2.2876	16.0
34	25 — 26	0.2544	0.3800	1.8171	16.0
35	25 — 27	0.1093	0.2087	3.7602	16.0
36	28 — 27	0.0000	0.3960	2.5253	65.0
37	27 — 29	0.2198	0.4153	1.8810	16.0
38	27 — 30	0.3202	0.6027	1.2940	16.0
39	29 — 30	0.2399	0.4533	1.7234	16.0
40	8 — 28	0.0636	0.2000	4.5408	32.0
41	6 — 28	0.0169	0.0599	15.4636	32.0

Через велику розмірність PTDF-матриці представити її тут не має можливості. Проте нижче наведено результати її застосування в формулюванні та розв'язку задачі оптимізації потоків електроенергії в електроенергетичній системі [334].

Проілюструємо особливості використання математичної моделі високовольтної мережі в формулюванні такої задачі. Для цього попит на електроенергію та її пропозицію у вузлах мережі C та P представимо відповідними лінійними функціями цін

$$p_c = a_c + b_c q_c, \quad \forall c \in C, \quad (3.16)$$

$$p_p = a_p + b_p q_p, \quad \forall p \in P. \quad (3.17)$$

В загальному випадку $C \in I$ та $P \in I$, тобто обидві множини є підмножинами множини вузлів I . Перелік елементів множин C та P разом з відповідними значеннями параметрів a_c , b_c , a_p , b_p наведено в таблицях 3.5 – 3.6.

Таблиця 3.5.

Параметри a_c та b_c цінових функцій p_c , що характеризують споживачів у вузлах $c \in C$ мережі з 41-ї лінії та 30-и вузлів

c	a_c	b_c	q_c^{opt}
2	40.0	-0.2304	8.8548
3	40.0	-2.0833	0.9793
4	40.0	-0.6579	3.1010
5	40.0	-0.0531	38.4207
7	40.0	-0.2193	9.3030
8	40.0	-0.1667	12.2384
10	40.0	-0.8621	2.3665
12	40.0	-0.4464	4.5702
14	40.0	-0.8065	2.5296
15	40.0	-0.6098	3.3456
16	40.0	-1.4286	1.4281
17	40.0	-0.5556	3.6720
18	40.0	-1.5625	1.3057
19	40.0	-0.5263	3.8764
20	40.0	-2.2727	0.8977
21	40.0	-0.2857	7.1408
23	40.0	-1.5625	1.3057
24	40.0	-0.5747	3.5499
26	40.0	-1.4286	1.4281
29	40.0	-2.0833	0.9793
30	40.0	-0.4717	4.3251

Таблиця 3.6.

Параметри a_p та b_p цінових функцій p_p , що характеризують виробників у вузлах $p \in P$ мережі з 41-ї лінії та 30-и вузлів

p	a_p	b_p	q_p^{max}	q_p^{opt}
1	0.0	2.0000	200.0	18.9799
2	0.0	1.7500	80.0	21.6913
5	0.0	1.0000	50.0	37.9599
8	0.0	3.2500	35.0	11.6800
11	0.0	3.0000	30.0	12.6533
13	0.0	3.0000	40.0	12.6533

Оптимізація потоків електроенергії в електроенергетичній системі передбачає максимізацію соціального добробуту, що означає досягнення максимуму валового перевищення вигоди споживачів над витратами виробників електроенергії, тобто

$$\begin{aligned} & \sum_{c \in C} \int_0^{q_c} p_c dq - \sum_{p \in P} \int_0^{q_p} p_p dq = \\ & = \sum_{c \in C} \left(a_c q_c + \frac{b_c}{2} q_c^2 \right) - \sum_{p \in P} \left(a_p q_p + \frac{b_p}{2} q_p^2 \right) \xrightarrow{\{q_c\}, \{q_p\}} \max \end{aligned} \quad (3.18)$$

за умов

$$q_c \geq 0, \quad \forall c \in C; \quad 0 \leq q_p \leq q_p^{\max}, \quad \forall p \in P; \quad (3.19)$$

$$\left| \sum_{c \in C} \Omega_{mc} q_c - \sum_{p \in P} \Omega_{mp} q_p \right| \leq Y_m^{\max}, \quad \forall m \in M; \quad (3.20)$$

$$\sum_{c \in C} q_c - \sum_{p \in P} q_p = 0, \quad (3.21)$$

де q_c та q_p – невідомі обсяги споживання та виробництва електроенергії; $q_p^{\max}$ – граничний обсяг виробництва електроенергії генеруючим устаткуванням, розташованим у вузлі p .

Розв'язок задачі квадратичного програмування виду (3.18) – (3.21) представлено в таблицях 3.5 – 3.6 значеннями q_c^{opt} та q_p^{opt} оптимальних обсягів споживання та виробництва електроенергії у вузлах C та P , відповідно. Крім того, на рисунку 3.6 наведено рівні завантаження кожної з 41-ї високовольтної лінії електропередачі, обраховані за формулою

$$\frac{1}{Y_m^{\max}} \left| \sum_{c \in C} \Omega_{mc} q_c - \sum_{p \in P} \Omega_{mp} q_p \right| 100\%, \quad \forall m \in M.$$

Таким чином, розроблена комп'ютерна модель розподілу електроенергії в мережах високовольтних ліній електропередачі забезпечує користувача зручним та потужним інструментом адекватного відображення

топологічних та електрофізичних властивостей мереж в задачах планування розвитку електроенергетичних систем.

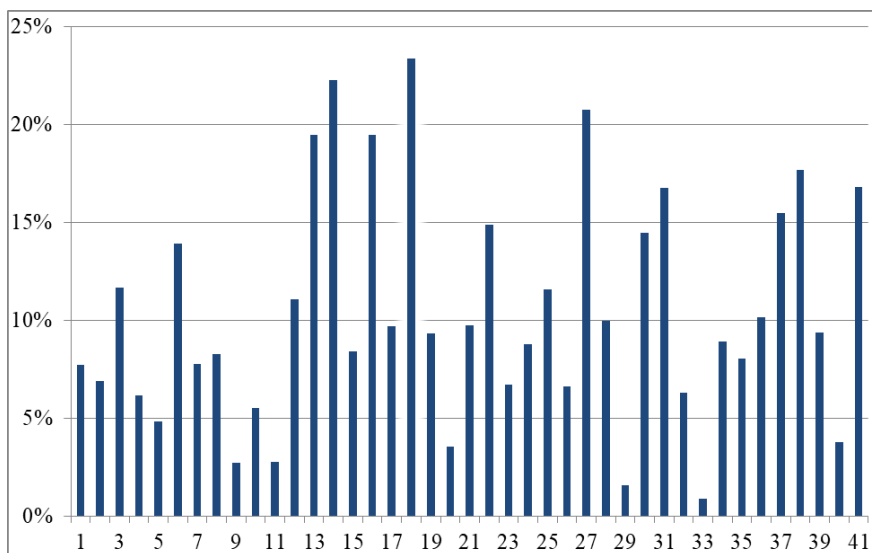


Рис. 3.6. Рівні завантаження ЛЕП мережі з 41-ї лінії та 30-и вузлів.

3.6. Модель мережі у вигляді нелінійного кола постійного потоку з втратами електроенергії в ЛЕП

Звертаючись до рис. 3.7, можна бачити, що при незмінних величинах частоти ω , амплітуд U_i та U_j , а також фазових кутів δ_i та δ_j змінних напруг $u_i(t)$ та $u_j(t)$ активні потужності $flow_{i \rightarrow m}$ та $flow_{m \rightarrow j}$ потоків електроенергії з енерговузла i в лінію m та з лінії m в енерговузол j в будь-який момент часу t є постійними величинами і визначаються постійною ж величиною різниці напруг $u_j(t) - u_i(t)$.

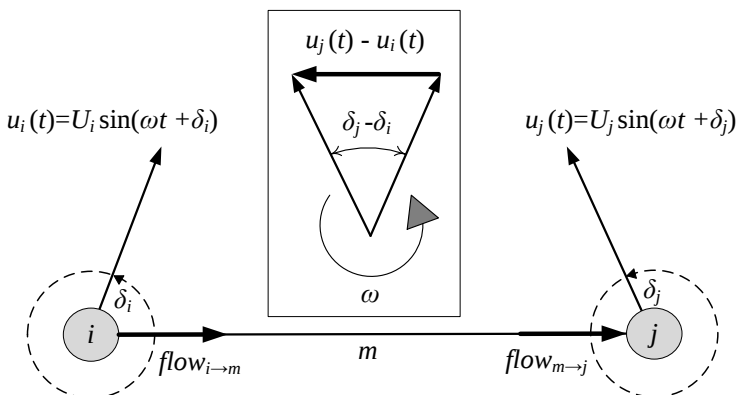


Рис. 3.7. Потужності $flow_{i \rightarrow m}$ та $flow_{m \rightarrow j}$ потоків електроенергії з енерговузла i в лінію m та з лінії m в енерговузол j в момент часу t при незмінних величинах частоти ω , амплітуд U_i та U_j , а також фазових кутів δ_i та δ_j змінних напруг $u_i(t)$ та $u_j(t)$.

Нехай електрична мережа утворена з M ліній електропередачі, що з'єднують I енерговузлів. Слідуючи [307], для лінії $m \in M$, приєднаної до енерговузлів $i \in I$ та $j \in I$, що має активний опір R_m та реактивний опір X_m і знаходиться під напругою V_m , запишемо вираз для активних потужностей $flow_{i \rightarrow m}$ та $flow_{m \rightarrow j}$ у вигляді

$$flow_{i \rightarrow m} = \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} [U_i^2 - U_i U_j \cos(\delta_i - \delta_j)] + \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} U_i U_j \sin(\delta_i - \delta_j), \quad (3.22)$$

$$flow_{m \rightarrow j} = \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} [U_j^2 - U_i U_j \cos(\delta_j - \delta_i)] + \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} U_i U_j \sin(\delta_j - \delta_i). \quad (3.23)$$

Вважаючи близькими значення амплітуд U_i та U_j напруг $u_i(t)$ та $u_j(t)$ в вузлах i та j до амплітуди V_m напруги на лінії m , маємо

$$U_i \cong U_j \cong V_m. \quad (3.24)$$

Крім того, вважаючи відносно малими аргументи $(\delta_i - \delta_j)$ та $(\delta_j - \delta_i)$ функцій косинуса та синуса, що входять в вирази (3.22) та (3.23), представимо їх у вигляді многочленів Тейлора з залишковими членами у формі Лагранжа [310]. У разі многочленів нульового і першого порядку, відповідно, запишемо

$$\cos(\delta_i - \delta_j) = \cos(\delta_j - \delta_i) = 1 + \frac{\cos^2(\theta_c(\delta_i - \delta_j))}{2!}(\delta_i - \delta_j)^2, \quad (3.25)$$

$$\sin(\delta_i - \delta_j) = -\sin(\delta_j - \delta_i) = (\delta_i - \delta_j) + \frac{\sin^3(\theta_s(\delta_i - \delta_j))}{3!}(\delta_i - \delta_j)^3, \quad (3.26)$$

де параметри $0 < \theta_c < 1$ та $0 < \theta_s < 1$.

З урахуванням виразів (3.24) – (3.26) співвідношення (3.22) – (3.23) можна представити у наближеному вигляді

$$flow_{i \rightarrow m} \cong + \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j), \quad (3.27)$$

$$flow_{m \rightarrow j} \cong - \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j). \quad (3.28)$$

В такому випадку втрати електроенергії в лінії m будуть дорівнювати нулю, оскільки

$$L_m = flow_{i \rightarrow m} + flow_{m \rightarrow j} = 0. \quad (3.29)$$

У кожному енерговузлі $i \in I$ потоки електроенергії підпорядковані першому закону Кірхгофа, тобто

$$\sum_{m \in M_-(i)} flow_{i \rightarrow m} + \sum_{m \in M_+(i)} flow_{m \rightarrow i} + y_i = 0, \quad i \in I, \quad (3.30)$$

де y_i – алгебраїчна сума потоків електроенергії виробленої і споживаної в цьому енерговузлі, а множини $M_-(i)$ та $M_+(i)$ предстваляють дві групи ліній, за якими потоки електроенергії залишають енерговузол i і надходять в нього, відповідно (рис. 3.8).

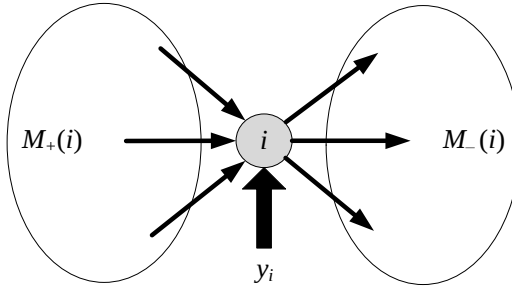


Рис. 3.8. Сумарний потік y_i електроенергії виробленої і споживаної в енерговузлі i , а також потоки електроенергії, що залишають цей енерговузол і надходять в нього за відповідним множинам $M_-(i)$ та $M_+(i)$ ліній електропередачі.

З огляду на (3.27) – (3.28), множину співвідношень (3.30) зручно розглядати у векторно-матричній формі виду

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{X} \mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}, \quad (3.31)$$

де вектори $\mathbf{y}$ та $\boldsymbol{\delta}$ складаються з елементів $\{y_i, i = \overline{1, I}\}$ та $\{\delta_i, i = \overline{1, I}\}$;

діагональна матриця $\mathbf{X} = \text{diag} \left\{ \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2}, m = \overline{1, M} \right\}$ містить елементи, що

обчислюються за заданим фізичними параметрами ліній; матриці $\mathbf{D}$ та $\bar{\mathbf{D}}$ є матрицями інцидентності орієнтованого і неорієнтованого графів мережі; матриця $\mathbf{D}^T$ утворена транспонуванням матриці $\mathbf{D}$.

Оскільки активні потужності $\text{flow}_{i \rightarrow m}$ та $\text{flow}_{m \rightarrow j}$ потоків електроенергії з енерговузла i в лінію m та з лінії m в енерговузол j задовольняють рівняння (3.29) і, тому, $\text{flow}_{i \rightarrow m} = -\text{flow}_{m \rightarrow j} = \text{flow}_m$, то, з урахуванням прийнятих позначень, множини співвідношень (3.27) – (3.28) можна представити у векторно-матричній формі виду

$$\mathbf{flow} = \mathbf{X} \mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}. \quad (3.32)$$

Тут вектор **flow** складається з елементів $\{flow_m, m = \overline{1, M}\}$.

Вирази (3.31) та (3.32) використовуються для виключення вектора δ і отримання співвідношення

$$\mathbf{flow} = \Omega y, \quad (3.33)$$

яке безпосередньо зв'язує активні потужності **flow** потоків електроенергії в лініях з алгебраїчними сумами y потоків електроенергії виробленої і споживаної в енерговузлах. Тут PTDF (Power Transfer Distribution Factors) – матриця Ω визначається виразом

$$\Omega = \left\langle x \hat{D}^T (\hat{D} x \hat{D}^T)^{-1}, \mathbf{0} \right\rangle, \quad (3.34)$$

де $\hat{D} - M \times (I - 1)$ матриця, утворена з матриці інцидентності D видаленням в ній довільно обраного стовпця з номером h , що відповідає вибору номера базового вузла (вузол-хаб) електричної мережі; $\langle \rangle$ – оператор об'єднання $M \times (I - 1)$ матриці $x \hat{D}^T (\hat{D} x \hat{D}^T)^{-1}$ та нульового вектор-стовпця $\mathbf{0}$, результатом дії якого є утворення $M \times I$ матриці Ω з нульовим h -м стовпцем.

Подання потужностей $flow_{i \rightarrow m}$ та $flow_{m \rightarrow j}$ у вигляді наближених співвідношень (3.27) – (3.28) є найбільш широко використовуваним в рівноважних моделях енергоринків, що функціонують в умовах досконалої чи недосконалої (олігополістичної) конкуренції. Такі співвідношення відрізняються простотою і є основою опису електричної мережі у вигляді лінійного кола постійного потоку. Однак їх використання знижує адекватність математичного опису технологічних процесів, які спостерігаються в електричній мережі, а також товарно-грошових відносин між основними учасниками ринку такими, як споживачі, оператор системи передачі та генеруючі компанії.

Якщо для представлення функції косинуса використовувати многочлен Тейлора другого порядку, тобто замість (3.25) вжити вираз

$$\cos(\delta_i - \delta_j) = \cos(\delta_j - \delta_i) = 1 - \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2} + \frac{\cos^{(4)}(\theta_c(\delta_i - \delta_j))}{4!} (\delta_i - \delta_j)^4, \quad (3.35)$$

то співвідношення (3.22) – (3.23) можна представити у вигляді

$$flow_{i \rightarrow m} \cong + \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j) + \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2}, \quad (3.36)$$

$$flow_{m \rightarrow j} \cong - \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j) + \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2}. \quad (3.37)$$

Тоді втрата потужності в лінії m складе величину

$$L_m = flow_{i \rightarrow m} + flow_{m \rightarrow j} = \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j)^2. \quad (3.38)$$

З огляду на (3.36) – (3.37), множину співвідношень (3.30) представимо в векторно-матричній формі

$$\mathbf{y} = D X D^T \bar{\delta} - \frac{1}{2} \bar{D} R \left[(D^T \bar{\delta}) \circ (D^T \bar{\delta}) \right]. \quad (3.39)$$

Тут діагональна матриця $R = diag \left\{ \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2}, m = \overline{1, M} \right\}$ містить елементи, що визначаються за заданими фізичними параметрами ліній, а символ $\circ$ позначає добуток Адамара.

Співвідношення (3.39) відрізняється від наведеного вище співвідношення (3.31) наявністю квадратичного доданка, що враховує втрати електроенергії в лініях електропередачі. Це співвідношення є основою представлення електричної мережі у вигляді нелінійного кола постійного потоку.

В системі рівнянь (3.39) відображено зв'язок між векторами вузлових потоків електроенергії $\mathbf{y}$ та фазових кутів $\bar{\delta}$. Однак, система (3.39) не встановлює взаємно однозначної відповідності між цими векторами. Так,

заданому вектору $\mathbf{y}$ можна поставити у відповідність безліч векторів $\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}$, де $\mathbf{1}$ – одиничний вектор, а δ_0 – довільно обрана константа. Таким чином, тотожною системі рівнянь (3.39) є множина систем рівнянь виду

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{D}^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{D}}\mathbf{R} \left[\left(\mathbf{D}^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) \right) \circ \left(\mathbf{D}^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) \right) \right]. \quad (3.40)$$

Для встановлення взаємної однозначності між векторами $\mathbf{y}$ та $\boldsymbol{\delta}$ звернемося до основних положень теорії енергетичних кіл [308], а саме, скористаємося класифікацією змінних в такому колі, відповідно до якої вектори $\mathbf{y}$ та $\boldsymbol{\delta}$ віднесемо до узагальнених послідовних і паралельних змінних дії. Пошук мінімуму узагальненої потенційної енергії в електричній мережі по параметру δ_0 приводить нас до необхідності пошуку рішення задачі виду

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) \xrightarrow{\delta_0} \min, \quad (3.41)$$

що рівнозначно пошуку рішення рівняння виду

$$\mathbf{1}^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) = \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Очевидно, для кожного фіксованого значення параметра δ_0 система рівнянь (3.40), разом з рівнянням (3.42), встановлює взаємно однозначну відповідність між векторами $\mathbf{y}$ та $\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}$. За умови $\delta_0 = 0$ рівняння

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

доповнює систему рівнянь (3.39) і утворює з ним модель електричної мережі.

4. МОДЕЛІ РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ ПОТУЖНОСТЕЙ В РИНКОВИХ УМОВАХ

4.1. Задачі, які вирішують виробники електроенергії

Для проведення порівняльного аналізу різних підходів до моделювання розвитку виробничих потужностей розглянемо спрощену енергосистему, для опису електричної мережі якої використано спрощену модель, аналогічну моделям мереж постійного струму. Планування діяльності виробників здійснюємо на період T .

Введемо умовні позначення:

$i, i \in I$ – множина вузлів електричної мережі;

$m, m \in M$ – множина ліній електропередачі (ЛЕП);

$f, f \in F$ – множина компаній-виробників електроенергії, що не вступають у змову;

$h, h \in H$ – множина типів енергоблоків (устаткування);

$t, t \in T$ – множина етапів планового періоду, для спрощення подальших викладок будемо застосовувати одиничну тривалість етапів;

$\tau, \tau \in T$ – підмножина етапів планового періоду;

$s, s \in S$ – множина сценаріїв розвитку електроенергетики;

g_{fht} та g_{-fht} – об'єми виробництва компанії f та її конкурентів $-f$ у вузлі i на устаткуванні h протягом етапу t ,

$c_{fht} = C_{fht}(g_{fht})$ – змінні виробничі витрати відповідного устаткування,

G_{fht} та G_{-fht} – потужність цього устаткування;

ΔG_{fht} та ΔG_{-fht} – приріст потужності на етапі t (вважається, що всі потужності вводяться на початку етапу), причому $G_{fht} = \sum_{t \in T} \Delta G_{fht}$;

$k_{iht} (G_{fht})$ – питомі капітальні витрати на спорудження устаткування;

$\delta < 1$ – коефіцієнт, який враховує зміну вартості грошей у часі і може розглядатись як норма рентабельності інвестицій;

$P_{it} - P_{it} = P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fht} \right)$ – обернена функція попиту в узлі i

протягом етапу t , є однаковою для всіх компаній f .

$d_{it} - d_{it} = d_{it} (P_{it})$ - попит на електроенергію в узлі i протягом етапу t ;

y_{mt} – перетік потужності по лінії електропередачі m протягом етапу t ;

γ_{mi} – коефіцієнти, які враховують залежність перетоку по лінії m від надходження потоку потужності в мережу з боку вузла i ;

Y_{mt} – максимальна пропускна здатність лінії m ;

CF_{iht} – коефіцієнт використання встановленої потужності устаткування h в узлі i протягом етапу t ;

$\xi_{\pi}, \sigma_{\pi}, \xi_p, \sigma_p$ та ξ_g, σ_g – математичне очікування та стандартне відхилення для розподілу прибутку, ринкових цін і об'ємів виробництва.

r_{ht} – резерв потужності, розміщений на устаткуванні h протягом етапу t ;

θ_s – вірогідність реалізації сценарію s розвитку електроенергетики;

Як відзначалось у першій главі, при роботі в ринкових умовах виробники електроенергії паралельно приймають два основних типи рішень:

3. Визначення оптимальних цінових заявок для поточного ринку електроенергії, яке можна охарактеризувати як короткострокову статичну задачу.

4. Вибір інвестиційних рішень, зважаючи на тривалі терміни експлуатації енергетичного устаткування, є довгостроковою динамічною задачею.

Довгострокова задача. При розробці планів введення нових потужностей компанії намагаються максимізувати прибутки від виробництва електроенергії

$$\pi_f^{long}(\Delta G_{fht}) \xrightarrow{\{\Delta G_{fht}\}} \max, \forall f, \quad (4.1)$$

де плановий прибуток компанії f :

$$\pi_f^{long}(\Delta G_{fht}) = \sum_{t \in T} \delta^t \cdot \left(\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left(P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fht} \right) \cdot \sum_{h \in H} g_{fht} \right) - \\ & - \sum_{i \in I, h \in H} (C_{fht}(g_{fht}) \cdot g_{fht}) - \\ & - \sum_{i \in I, h \in H} (k_{iht}(G_{fht}) \cdot \Delta G_{fht}) \end{aligned} \right), \forall f,$$

Короткострокова задача. При оптимізації об'ємів виробництва виробники вирішують задачу окремо для кожного часового етапу, та приймають до уваги лише поточний стан системи:

$$\pi_f^{short}(g_{fht}, g_{-fht}, y_{mt}) \xrightarrow{\{g_{fht}\}} \max, \forall f, t \quad (4.2)$$

де прибуток компанії f у короткостроковій перспективі складає:

$$\begin{aligned} \pi_{ft}^{short}(g_{fht}, g_{-fht}, y_{mt}) = & \sum_{i \in I} \left(p_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fht} \right) \cdot \sum_{h \in H} g_{fht} \right) - \\ & - \sum_{i \in I, h \in H} (C_{fht}(g_{fht}) \cdot g_{fht}) \end{aligned}$$

при цьому: $g_{fih t} = g_{fih t} \left(G_{fih t[0, T]}, G_{-fih t[0, T]} \right)$ – об'єм виробництва конкретного енергоблоку залежить від всієї множини потужностей як тих, що введені у попередні планові періоди, так і від потужностей, що будуть вводиться протягом планового періоду.

При цьому повинні виконуватись умови

- обмеження виробничої потужності

$$0 \leq g_{fih t} \leq G_{fih t}, \quad \forall f, i, h, t \quad (4.3)$$

- балансу обсягів споживання та виробництва електроенергії

$$\sum_{f \in F, i \in I, h \in H} g_{fih t} = \sum_{i \in I} d_{it}(P_t), \quad \forall t. \quad (4.4)$$

- обмеження на перетік потужності по лінії електропередачі m :

$$y_{mt} = \left| \sum_i \left(\gamma_{mit} \cdot \left(d_{it}(P_t) - \sum_{f \in F, h \in H} g_{fih t} \right) \right) \right| \leq Y_{mt}, \quad \forall m, t, \quad (4.5)$$

Умова рівноваги ринку визначається співвідношенням цін

$$P_{it} = P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fih t}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fih t} \right), \quad \forall i, t. \quad (4.6)$$

При цьому об'єми виробництва електроенергії кожного з виробників залежать не лише від попиту, але і від техніко-економічних показників (ТЕП) устаткування конкурентів.

Отже, результуюча задача має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \pi_f^{long}(\Delta G_{fih t}) \xrightarrow{\{\Delta G_{fih t}\}} \max, & \forall f \\ \pi_{ft}^{short}(g_{fih t}, g_{-fih t}, y_{mt}) \xrightarrow{\{g_{fih t}\}} \max, & \forall f, t \\ g_{fih t} = g_{fih t} \left(G_{fih t[0, T]}, G_{-fih t[0, T]} \right), & \forall f, i, h, t, \\ P_{it} = P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fih t}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fih t} \right), & \forall i, t \end{cases} \quad (4.7)$$

за умов дотримання обмежень (4.3), (4.4), (4.5).

Сформульована задача є багатокритеріальною задачею зі зворотними зв'язками. Відповідно до типу характеристик виробничих витрат, зворотних функцій попиту та опису мережі, задача може бути лінійною або нелінійною. Важливими аспектами задачі є врахування взаємозв'язку коротко- та довгострокових задач, недосконалої конкуренції на ринку, наявності багатьох виробників і технологій виробництва, врахування впливу мережі.

Практично фірми не можуть враховувати всього можливого комплексу стратегій та їх взаємозв'язків, а фокусуються на найважливіших з них.

Очевидно, що електростанції введені сьогодні внаслідок тривалого періоду експлуатації впливатимуть на майбутні рішення на оптовому ринку, в свою чергу майбутня робота компанії на оптовому ринку впливатиме на ефективність поточних інвестиційних рішень.

В той же час можна припустити, що поточні рішення на оптовому ринку не впливають на майбутні інвестиційні рішення і аналогічно майбутні інвестиційні рішення не впливають на поточні цінові заявки.

Застосоване спрощення дозволяє розглядати статичні та динамічні задачі окремо.

4.2. Регульована монополія – планове господарство

У секторі працює лише один регульований державою виробник. Задачею оптимізації (регулювання) є забезпечення мінімальних витрат на виробництво електроенергії. Оскільки існує єдиний центр прийняття рішень, отримуємо одну довгострокову задачу. Також при централізованому плануванні режими роботи устаткування можна запланувати заздалегідь одночасно з оптимізацією введення нових потужностей. В результаті задача

розвитку виробництва (4.7) вирішується у вигляді однокритеріальної задачі мінімізації сукупних витрат на виробництво:

$$C^{\Sigma}(\Delta G_{iht}, g_{iht}) \xrightarrow{\Delta G_{iht}, g_{iht}} \min, \quad (4.8)$$

де сукупні витрати на виробництво складають

$$C^{\Sigma}(\Delta G_{iht}, g_{iht}) = \sum_{t \in T} \delta^t \cdot \left(\sum_{i \in I, h \in H} C_{iht}(g_{iht}) \cdot g_{iht}(G_{iht}) + \sum_{i \in I, h \in H} K_{iht}(G_{iht}) \cdot \Delta G_{iht} \right).$$

за умови виконання обмежень (4.3), (4.4), (4.5).

Таким чином наведене традиційне формулювання поєднує коротко- та довгострокові задачі.

Повноцінне врахування у сучасних моделях подібного типу залежності майбутніх режимів експлуатації від поточних інвестиційних рішень вимагає застосування особливого ітераційного *алгоритму* [42]. Тому режим роботи нового устаткування протягом прогностичного періоду задають незмінним [8], а об'єм виробництва є фіксованою часткою від поточної потужності устаткування:

$$g_{iht}(G_{iht}) = CF_{iht} \cdot G_{iht}, \quad \forall i, h, t. \quad (4.9)$$

При застосуванні лінійних функцій попиту та витрат вказана задача стає задачею лінійного програмування. Відносна простота формулювання, наявність унікального рішення і існування потужних солверів, дозволяють врахувати необхідні технологічні особливості роботи енергосистеми, невизначеність даних та розв'язувати задачі великої розмірності. До вказаного типу моделей відноситься і модель розвитку електроенергетики, розроблена для обґрунтування енергетичної стратегії України на період до 2030 року [7].

Таким чином, при застосуванні описаного традиційного підходу можна врахувати технологічні особливості виробництва та вплив мереж. В

той же час не можливо врахувати дію зворотних зв'язків і вплив індивідуальної поведінки виробників при недосконалій конкуренції.

Альтернативним варіантом розв'язування задачі розвитку виробництва в умовах регульованої монополії є використання динамічного програмування. При цьому формується дискретна множина перспективних варіантів спорудження нових електростанцій на плановий період, для кожного з можливих станів розраховуються режими та ефективність роботи устаткування. За результатами здійснюється вибір оптимального плану розвитку [10]. Аналогічний підхід застосовано і у системі моделей «Союз» [30] для уточнення потужностей та черговості вводу попередньо відібраних перспективних електростанцій.

При такому підході режим роботи устаткування залежить від величин потужностей, введених на всіх попередніх етапах планового періоду. Вказаний підхід дозволяє отримати дискретні значення потужностей, що характерні для енергетичного устаткування і врахувати особливості роботи системи у кожному зі станів. В той же час недоліками підходу є неможливість врахування недосконалої конкуренції і зворотних зв'язків, а також обмеження розміру задачі.

4.3. Недосконала конкуренція

Як відзначалось вище, реструктуризація та приватизація галузі призводить до появи потужних приватних енергокомпаній здатних впливати на ціни та об'єми виробництва, тобто недосконалої конкуренції.

На сьогодні для моделювання розвитку виробничих потужностей в умовах недосконалої конкуренції використовуються наступні теоретичні підходи:

- теорія реального опціону.

- системна динаміка.
- агентне моделювання.
- теорія ігор.

У якості першого підходу моделювання розглянемо теорію опціонів.

4.4. Теорія опціонів

Опціон – це право, але не зобов'язання щодо купівлі або продажу цінних паперів. Термін «реальний опціон» введений S.Myers у 1977 відображає застосування теорії ціноутворення на опціони для оцінки реальних інвестицій (проектів).

Розглянемо компанію, яка може отримати дисконтований дохід R при внесенні дисконтованої величини інвестицій K , поточні витрати при цьому є малими та не враховуються.

При традиційному розрахунку NPV фірма здійснюватиме інвестицію якщо $R - K \geq 0$.

Якщо R змінюється з часом та підпорядковується розподілу Броунівського руху із очікуваними темпи зростання χ та стандартним відхиленням σ , тоді:

$$dR = \chi \cdot R \cdot dt + \sigma \cdot R \cdot dz. \quad (4.10)$$

Компанія обирає час для здійснення інвестицій R_t у момент часу t так, щоб максимізувати очікувану поточну вартість опціону на інвестування:

$$F(R) = \max E \left[(R_t - K) \cdot e^{-\delta t} \right]. \quad (4.11)$$

Відтермінування інвестиційного рішення і утримування опціону еквівалентне утриманню активів, що не приносять дивідендів, але можуть принести їх у майбутньому. Умовою оптимальності для випадку, якщо компанія відкладає інвестиції та утримує опціон є:

$$\delta \cdot F = \frac{E(dF)}{dt}. \quad (4.12)$$

Ліва частина рівняння (4.12) є дисконтованою нормою прибутку, яку інвестор буде вимагати від утримання опціону, права частина ж є сукупним очікуваним питомим прибутком від часу утримання опціону. Якщо ця умова виконана, компанія урівнює очікуваний прибуток від відтермінування інвестиції і відповідні витрати. В роботі [49] наводиться розв'язок (4.12):

$$F(R) = \alpha \cdot R^\beta, \quad (4.13)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{R^* - K}{R^{*\beta}} \text{ є константою та } \beta = \frac{1}{2} - \frac{\chi}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\chi}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2 \cdot \delta}{\sigma^2}}.$$

Дохід, що відповідає оптимальному часу інвестування:

$$R^* = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot K \quad (4.14)$$

Рівняння (4.14) визначає «ваговий коефіцієнт» $(\beta/(\beta-1))$ між грошовим потоком, який змушує інвестора реалізувати опціон (R^*) та теперішньою вартістю інвестицій (K) .

При моделюванні розвитку виробництва електроенергії ціни на електроенергію та майбутні об'єми виробництва задаються певним стохастичним розподіленням. Довгострокові задачі конкуруючих виробників та набір короткострокових задач замінюється набором розподілів (наприклад, нормальних) цін та об'ємів виробництва.

$$\pi^{long-opt}(\xi_\pi, \sigma_\pi) \xrightarrow{\{\Delta G_{ht}\}} \max, \quad (4.15)$$

де плановий прибуток виробника складає:

$$\pi^{long_opt}(\xi_\pi, \sigma_\pi) = \sum_{t \in T} \delta^t \left(\begin{aligned} &P_t(\xi_P, \sigma_P) \cdot \sum_{h \in H} g_{ht}(\xi_g, \sigma_g) - \\ & - \sum_{h \in H} (C_{ht}(g_{ht}(\xi_g, \sigma_g)) \cdot g_{ht}(\xi_g, \sigma_g)) - \\ & - \sum_{h \in H} (k_{ht}(G_{ht}) \cdot \Delta G_{ht}) \end{aligned} \right),$$

Розв'язок задачі знаходиться за умов обмеження виробничої потужності виду (4.3).

Зрозуміло, що в даній моделі неможливо повноцінно відобразити вплив мережі на розвиток потужностей.

Оскільки поведінка конкурентів та ринкові умови представляються через вірогідні розподіли цін і об'ємів виробництва, задача багатокритеріальної оптимізації (4.7) перетворюється у задачу однокритеріальної стохастичної оптимізації за умов обмеження потужності виду (4.3):

$$\begin{cases} \pi^{long_opt}(\xi_\pi, \sigma_\pi) \xrightarrow{\{\Delta G_{ht}\}} \max, \\ g_{ht} = g_{ht}(\xi_g, \sigma_g), & \forall h, t \\ P_t = P_t(\xi_P, \sigma_P), & \forall t \end{cases} \quad (4.16)$$

На основі теорії реального опціону в IEA (International Energy Agency) розроблена модель оцінки ефективності будівництва генеруючих потужностей в умовах невизначеності цін на електроенергію та плати за викиди CO₂. Опис моделі наведено у роботі [50].

У моделі вихідні дані представляють ціни на паливо, електроенергію і викиди CO₂ з певним статистичним розподіленням.

Модель побудовано за принципом дерева рішень, пошук оптимальних термінів інвестицій виконується зверху до низу дерева відповідно до методики реального опціону. Час поділено на дискретні періоди тривалістю Δt , у кожному з яких NPV відносно базової величини

G зростає з вірогідністю p або знижується на величину ΔG з вірогідністю $q = 1 - p$.

У час t модель знаходить NPV проекту беручи до уваги широкий спектр можливих змін цін на енергію і викиди CO_2 в умовах двох сценаріїв: інвестувати зараз або утриматись від інвестицій до наступного періоду.

Використання моделі реального опціону для багатоетапного прогнозного періоду призводить до розв'язку задачі динамічного стохастичного програмування. При цьому на кожному етапі для кожного вірогідного стану системи перевіряється умова додатності стохастичного приведенного прибутку (вигідності здійснення проекту) (Рис.4.1).

$$NPV_{\tau[t,T]}^{stoch} = \sum_{\tau=t}^T \delta^{\tau} (E(R_{\tau}) - K_{\tau}).$$

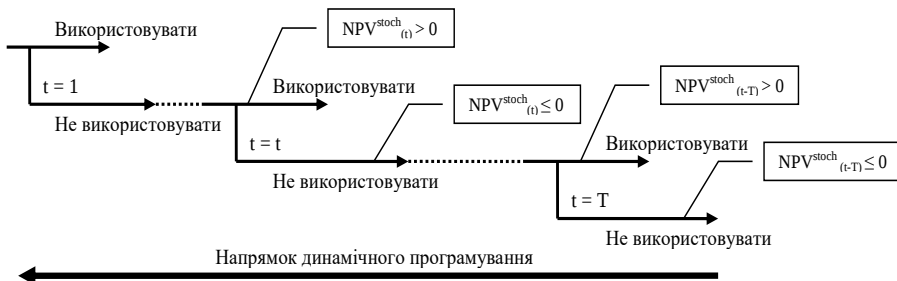


Рис.4.1. Схема виконання оптимізації за методикою реального опціону

Таким чином довгострокові інвестиційні рішення приймаються на основі визначення ціни опціонів, а розв'язок виробником короткострокових задач імітується шляхом встановлення вірогідного розподілу цін та об'ємів споживання.

Даний підхід може застосовуватись за умов недосконалої конкуренції, але через врахування поведінки лише одного гравця існує

значний суб'єктивізм опису поведінки конкурентів. Внаслідок використання динамічного програмування об'єми виробництва компанії залежать лише від потужностей, введених цією компанією, у поточному та попередніх періодах, вплив зворотних зв'язків не враховується. Одночасний розрахунок ефективності декількох опціонів дозволяє визначити ефективність багатьох технологій. Відсутність детального опису конкуруючих фірм не дозволяє повноцінно врахувати обмеження з боку електричної мережі.

Дані моделі є простим і ефективним інструментом. Існує значна кількість програмних продуктів для розрахунку вартості опціонів. Однак відсутність детального опису діяльності конкурентів та ринкового середовища дозволяє застосовувати вказані моделі для техніко–економічного обґрунтування конкретних електростанцій (замість традиційної методики *NPV*) або для використання інструментів теорії опціону як елементу більш складних моделей.

4.5. Системна динаміка

У 1956р. на базі дослідження циклів виробництва [51] була створена методика дослідження динамічних систем. Сьогодні вона має назву – системна динаміка.

При використанні системної динаміки для моделювання діяльності системи створюються причинно-наслідкові схеми, які дозволяють відобразити характерні для системи прямі та зворотні динамічні зв'язки. На основі вказаних схем формується математичне формулювання задачі, існуючі програмні середовища для створення моделей системної динаміки дозволяють автоматично перетворювати схеми на системи диференціальних рівнянь з подальшим їх розв'язком.

Моделі системної динаміки, як правило, є неперервними, моделювання здійснюється на агрегованому рівні в часі. Такі моделі призначені для аналізу усередненої поведінки систем з централізованим механізмом прийняття рішень.

Короткострокова задача. Зазвичай у моделях стратегічного розвитку, побудованих з використанням інструментів системної динаміки, робиться припущення щодо досконалої конкуренції на ринку, при цьому приналежність устаткування до певної компанії не впливає на розв'язок задачі [52].

При використанні системної динаміки для короткострокового аналізу [52] робота ринку описується лише приблизно, через залежність ціни та коефіцієнтів використання встановленої потужності устаткування від резерву потужностей.

Ринкова ціна:

$$P_{ht} = P_{ht}(r_{ht}, t). \quad (4.17)$$

Об'єми виробництва:

$$g_{ht} = CF_{ht} \cdot G_{ht} = CF_{ht}(r_{ht}, t) \cdot G_{ht}. \quad (4.18)$$

при цьому враховуються обмеження потужності устаткування (4.3).

Величина резерву потужності визначається попитом та наявними потужностями устаткування:

$$r_{ht} = R(d_t, G_{ht}, t).$$

Відображення в моделях системної динаміки недосконалої конкуренції є можливим у разі комбінації з засобами теорії ігор, а саме – рівноваги функцій пропозиції для опису ринку [53].

Важливо також відзначити, що інструменти системної динаміки дозволяють відобразити вплив на поточну ринкову рівновагу не лише поточних співвідношень попиту та потужності, але і впливу на ринкові ціни і

об'єми виробництва вже реалізованих та майбутніх інвестиційних рішень. Оскільки параметри попиту є заданими, то отримуємо:

$$P_{ht} = p_{ht} \left(r_{ht}[\overline{0,T}], t \right) = p_{ht} \left(G_{ht}[\overline{0,T}], t \right); \quad (4.19)$$

$$g_{ht} = CF_{ht} \left(r_{ht}[\overline{0,T}], t \right) \cdot G_{ht} = CF_{ht} \left(G_{ht}[\overline{0,T}], t \right) \cdot G_{ht}. \quad (4.20)$$

Таким чином враховується дія в системі прямих та зворотних динамічних зв'язків.

Моделі системної динаміки не враховують вплив мережі на роботу ринку, оскільки їх доповнення описом мережі робить задачі моделювання неопуклими [13]. Представлення електричної мережі призводить до включення в моделі системної динаміки задач додатковості [54].

В результаті модель короткострокової рівноваги ринку (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) має вигляд:

$$\begin{cases} g_{ht} = CF_{ht} \left(G_{ht}[\overline{0,T}], t \right) \cdot G_{ht}, & \forall h, t \\ P_{ht} = P_{ht} \left(G_{ht}[\overline{0,T}], t \right), & \forall h, t \end{cases}, \quad (4.21.)$$

при цьому враховується обмеження виробничої потужності (3).

Довгострокова задача. Традиційно системна динаміка використовують для розв'язку довгострокових задач. При цьому [52] задача пошуку об'ємів вводу нових потужностей, що максимізують прибуток (4.7) замінюється залежністю об'ємів вводу потужностей від рентабельності інвестицій ($\delta\pi$):

$$\Delta G_{ht} = \Delta G_{ht} \left(\delta\pi(t), t \right) \quad (4.22)$$

До уваги може прийматись лише стан ринку у попередньому періоді [52]:

$$\delta\pi_{h,t-1} = \frac{(P_{h,t-1} - c_{h,t-1}) \cdot CF_{h,t-1} \cdot n}{k} \quad (4.23)$$

де n – тривалість експлуатації устаткування.

Для врахування дії динамічних зв'язків необхідно охоплювати весь період прогнозування:

$$\Delta G_{ht} = \Delta G_{ht} \left(\delta \pi_{hr[\overline{0,T}]}, t \right) = \Delta G_{ht} \left(P_{hr[\overline{0,T}]}, CF_{hr[\overline{0,T}]}, t \right) \quad (4.24)$$

При застосуванні наведеного вище підходу довгострокова задача (4.7) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \Delta G_{ht} = \Delta G_{ht} \left(P_{hr[\overline{0,T}]}, CF_{hr[\overline{0,T}]}, t \right), & \forall h, t \\ g_{ht} = CF_{ht} \left(G_{hr[\overline{0,T}]}, t \right) \cdot G_{ht}, & \forall h, t \\ P_{ht} = P_{ht} \left(G_{hr[\overline{0,T}]}, t \right), & \forall h, t \end{cases} \quad (4.25)$$

за умови врахування обмеження виробничої потужності (4.3).

Приклад реалізації подібної моделі наведено у роботі [52]. Виробництво електроенергії поділено на H груп генерації, кожна з яких представляє певну технологію. Схема взаємозв'язків різних факторів при моделюванні інвестицій у нові потужності є однаковою для всіх груп технологій (Рис.4.2).

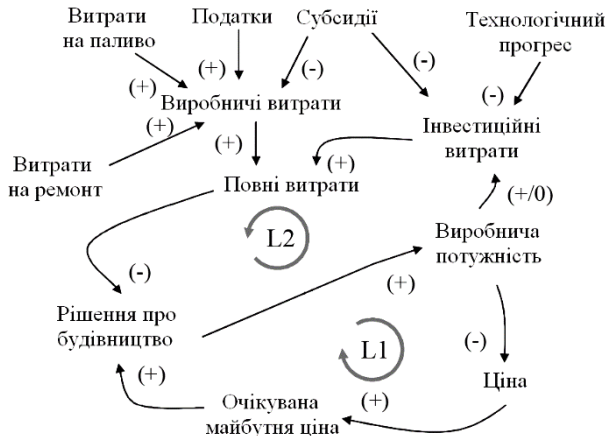


Рис.4.2. Причинно–наслідкова схема для довготермінового аналізу енергоринку, L1 та L2 – зворотні зв'язки

Для створення моделей системної динаміки існує достатня кількість комерційних програмних засобів: DYNAMO, Vensim, ITHINK, Powersim, тощо. Вони дозволяють автоматично перетворювати діаграми на системи диференційних рівнянь з подальшим їх розв'язком.

Таким чином, системна динаміка є єдиним інструментом, який дозволяє описати зворотні зв'язки, що характерні для енергосистеми. Методика дозволяє також розглянути різноманітність технологій виробництва. В той же час врахування впливу мережі та недосконалої конкуренції на ринку вимагає комбінації системної динаміки з іншими засобами моделювання.

Отже, методи системної динаміки найефективніші для узагальненого аналізу електроенергетики з метою дослідження впливу певних факторів, а також для аналізу роботи на ринку окремих виробників.

4.6. Агентне моделювання

Агентне моделювання описує (та передбачає) еволюцію динамічних систем шляхом імітації поведінки її компонентів – агентів. Агенти взаємодіють між собою, користуючись обмеженим набором правил, які визначають їх індивідуальну поведінку. Глобальна поведінка виникає як результат діяльності багатьох агентів.

Всі агентні моделі на відміну від системної динаміки є децентралізованими. В них не використовується опис у термінах середніх величин і не існує механізму централізованого визначення поведінки (динаміки) системи в цілому.

Короткострокова задача. Рівноважний стан на ринку визначають за результатами ітераційного процесу. Знаючи за результатами попередньої ітерації показники роботи ринку та маючи певні уявлення щодо реакції

споживачів, конкурентів, операторів ринку та мережі, конкуруючі виробники формують цінові заявки, які максимізують їх прибуток

$$\pi_{ft}^{short-AB} \left(g_{fih}, g_{-fih}, y_{mt} \right) \xrightarrow{\{g_{fih}\}} \max, \quad \forall f, t \quad (4.26)$$

за умови виконання обмеження потужності (4.3).

На основі цінових заявок виробників оператор мережі встановлює ціни на перетоки з метою недопущення перевантаження інтерфейсів (4.5) та забезпечує покриття максимального попиту (4.4), а оператор ринку встановлює ринкову ціну (4.6).

Ітераційний процес припиняється, коли жоден з виробників не має стимулів для зміни поведінки на ринку.

Таким чином, при використанні агентного моделювання короткострокова задача (4.2), (4.4), (4.5), (4.6) має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_{ft}^{short-AB} \left(g_{fih}, g_{-fih}, y_{mt} \right) \xrightarrow{\{g_{fih}\}} \max, & \forall f, t \\ g_{fih} = g_{fih} \left(G_{fih\tau: [0,t]}, G_{-fih\tau: [0,t]} \right), & \forall f, i, h, t \\ P_{it} = P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fih}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fih} \right), & \forall t \\ y_{mt} = \left| \sum_{i \in I} \left(\gamma_{mit} \cdot \left(d_{it}(P_{it}) - \sum_{f \in F, h \in H} g_{fih} \right) \right) \right| \leq Y_{mt}, & \forall m, t \\ \sum_{f \in F, i \in I, h \in H} g_{fih} = \sum_{i \in I} d_{it}(P_{it}), & \forall t \end{array} \right. , \quad (4.27)$$

за умов дотримання обмеження (4.3).

Подібний процес дозволяє детально описати особливості роботи ринку.

В доступній літературі відсутні докази збіжності подібних ітераційних алгоритмів. В той же час існує досвід практичного використання агентного моделювання для визначання короткострокової рівноваги на ринку [55, 16].

Довгострокова задача. Для реалізації довгострокової агентної моделі формують дискретну множину перспективних варіантів спорудження конкуруючими компаніями нових електростанцій. Для кожного з отриманих станів з використанням агентного моделювання розраховується ринкова рівновага (розв'язок короткострокової задачі). Оптимальна стратегія для кожного виробника (довгострокова задача) визначається за допомогою динамічного програмування.

Таким чином, використання агентного моделювання дозволяє розв'язати систему короткострокових та довгострокових задач. Отже, довгострокова задача (4.7) при застосуванні агентного моделювання має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_f^{long-AB}(\Delta G_{fht}) \xrightarrow{\{\Delta G_{fht}\}} \max, & \forall f \\ \pi_{ft}^{short-AB}(g_{fht}, g_{-fht}, y_{mt}) \xrightarrow{\{g_{fht}\}} \max, & \forall f, t \\ g_{fht} = g_{fht}(G_{fht: [0,t]}, G_{-fht: [0,t]}), & \forall f, i, h, t \\ P_{it} = P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fht} \right), & \forall i, t, \\ y_{mt} = \left| \sum_{i \in I} \left(\gamma_{mit} \cdot \left(d_{it}(P_t) - \sum_{f \in F, h \in H} g_{fht} \right) \right) \right| \leq Y_{mt}, & \forall m, t \\ \sum_{f \in F, i \in I, h \in H} g_{fht} = \sum_{i \in I} d_{it}(P_t), & \forall t \end{array} \right. \quad (4.28)$$

за умови виконання обмеження виробничої потужності (4.3).

Приклад агентного моделювання розвитку генеруючих потужностей наведено у роботі [55]. Планування здійснюється з позиції компанії f . Компанія здійснює прогнозування ринкового середовища (попиту на електроенергію, цін на паливо, тощо). Весь простір можливих інвестиційних рішень компаній та її конкурентів з урахуванням можливих змін ринкового середовища описується множиною станів системи (тобто здійснюється

дискретизація простору). Оцінка діяльності інших виробників здійснюється на рівні планування шляхом прогнозування можливих варіантів введення конкурентами нових потужностей (довгострокова задача), а також на рівні експлуатації шляхом моделювання їх поведінки на поточному ринку (короткострокова задача).

Алгоритм оптимізації розвитку потужностей з використанням агентного моделювання:

1. Встановлення $t = 1$.
 2. Для кожної варіанту розвитку потужностей та припущень щодо планів інших агентів розраховують ринкову рівновагу та визначають відповідний прибуток. Розраховують прирости прибутку, тобто різниць між прибутками для всіх станів на етапі $t + 1$ та на етапі t .
 3. Якщо $t < T$ встановлюють $t = t + 1$ та повертаються до Кроку 2.
 4. З використанням динамічного програмування здійснюють пошук найкращої стратегії починаючи від T до 0 для кожного t , що відповідає максимальному прибутку.
 5. Обирають найкращу стратегію: визначення потужностей та типів устаткування для введення протягом кожного з етапів
-

Агентне моделювання теоретично дозволяє врахувати присутність декількох виробників, які експлуатують різноманітне устаткування, наявність мережі та вірогідний характер параметрів.

Важливо також вказати, що внаслідок застосування динамічного програмування враховується залежність об'ємів виробництва лише від потужностей введених у поточному та попередніх періодах, тобто неможливо врахувати вплив майбутніх інвестиційних рішень при розв'язку поточних короткострокових задач.

Наявне стандартне середовище для розробки та роботи агентних моделей, зокрема Swarm, Echo, XRaptor.

Таким чином, перевагою агентного моделювання є можливість опису конкретних об'єктів та виробників з урахуванням дискретності потужностей, характерної для енергетичного устаткування, а також наявність комерційних програмних інструментів.

В той же час необхідність дискретизації простору рішень та необхідність пошуку рівноважного стану у кожному з них накладає значні обмеження на розмірність задачі. Для зменшення розмірності задачі у роботі [16] введення потужностей конкурентами узагальнюється однією змінною та приймається, що всі компанії використовують однакові сценарії.

Агентні методи більш перспективні при моделюванні поточної діяльності на енергоринку та при виборі черговості вводу конкретних об'єктів.

4.7. Теорія ігор

Методи теорії ігор найбільш широко використовуються для аналізу роботи виробників електроенергії в умовах недосконалої конкуренції.

Для пошуку ринкової рівноваги використовують наступні концепції розв'язку.

1. **Максимінне рішення** максимізує мінімальну винагороду гравців π_f . Стратегія g_f^* є максимінною для гравця f якщо інші гравці застосовують вектор стратегій g_{-f} та виконується нерівність:

$$\min_{g_{-f}} \pi_f(g_f^*, g_{-f}) \geq \min_{g_{-f}} \pi_f(g_f, g_{-f}), \quad \forall f. \quad (4.29)$$

Даний підхід відповідає найбільш консервативній поведінці гравців.

2. **Розв'язок Парето** вимагає, щоб жоден з гравців не міг покращити свою винагороду без погіршення результатів інших гравців. Інакше кажучи жодне інше рішення не дає результатів як мінімум таких саме привабливих для всіх гравців.

Стратегія g^* є рішенням Парето, якщо

$$\pi_f(g^*) \geq \pi_f(g), \quad \forall f. \quad (4.30)$$

Слід зауважити, що кооперативна поведінка учасників ринку (тобто змова) є рівновагою Парето.

3. **Модель Штакельберга** передбачає наявність у галузі лідера, який реагує на поведінку конкурентів, та послідовників, які вважають, що не можуть впливати на ціну. Тобто дана модель описує специфічну структуру галузі.

4. **Рівновагою Неша** називається рішення гри, в якому жоден з учасників не може збільшити виграш, змінивши своє рішення у односторонньому порядку, не викликавши реакцію інших гравців. Рішення Неша g^* досягається, якщо

$$\pi_f(g_1^*, \dots, g_f^*, \dots, g_F^*) \geq \pi_f(g_1^*, \dots, g_f, \dots, g_F^*), \quad \forall f \quad (4.31)$$

Даний тип рівноваги є найбільш адекватним для опису поведінки крупних виробників на енергоринку.

В залежності від ступеня монополізації ринку стан рівноваги описується моделями досконалої та недосконалої конкуренції.

4.7.1. Модель досконалої конкуренції

Для опису ринків з **досконалою конкуренцією** використовують модель Бертрана, в якій передбачають, що жоден з виробників не може впливати на ціну ($P_f = P$):

Дохід фірми f , яка виробляє g_f одиниць продукції складає:

$$R_f^{Bertrand} = P_f \cdot g_f = P \cdot g_f. \quad (4.32)$$

Маржинальний дохід:

$$MR_f^{Bertrand} = \partial(P \cdot g_f) / \partial g_f = P. \quad (4.33)$$

4.7.2. Недосконала конкуренція – модель Курно

Для характеристики поведінки виробників на ринку з недосконалою конкуренцією, зазвичай, застосовують модель Курно.

В цій моделі виробники усвідомлюють, що зміна їх об'ємів виробництва впливає на ціну ($\partial P / \partial g_f \neq 0$), але припускають, що інші виробники, які мають об'єми виробництва g_{-f} , не реагують на зміну їх об'ємів виробництва ($\partial g_{-f} / \partial g_f = 0$). Обсяги виробництва дорівнюють обсягам попиту, тому обернена функція попиту матиме вигляд $P = P(g)$. За цих умов дохід фірми f визначається виразом:

$$R_f^{Cournot} = P(g) \cdot g_f = P(g_f + g_{-f}) \cdot g_f, \quad (4.34)$$

а маржинальний дохід:

$$\begin{aligned} MR_f^{Cournot} &= \frac{\partial(P \cdot g_f)}{\partial g_f} = P + \frac{\partial P}{\partial g_f} \cdot \left(1 + \frac{\partial g_{-f}}{\partial g_f}\right) \cdot g_f = \\ &= P + \frac{\partial P}{\partial g_f} \cdot (1 + 0) \cdot g_f = P + \frac{\partial P}{\partial g_f} \cdot g_f \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.7.3. Модель узагальненої очікуваної реакції

Ця модель (General Conjectural Variations) є найбільш загальним описом конкуренції на ринку. Якщо відкинути припущення ($\partial g_{-f} / \partial g_f = 0$) прийняте у моделі Курно, дохід фірми складе:

$$R_f^{CV} = P \cdot g_f = P(g_f + g_{-f}(g_f)) \cdot g_f, \quad \forall f \quad (4.36)$$

об'єм виробництва $g_{-f}(g_f)$ всіх фірм, окрім f , приймається залежним від g_f , при цьому $(\theta = \partial g_{-f} / \partial g_f)$ - постійна очікуваної реакції (CV)..

Маржинальний дохід для f :

$$\begin{aligned} MR_f^{CV} &= \frac{\partial(P \cdot g_f)}{\partial g_f} = P + \frac{\partial P}{\partial g_f} \cdot \left(1 + \frac{\partial g_{-f}}{\partial g_f}\right) \cdot g_f = \\ &= P + \frac{\partial P}{\partial g_f} \cdot (1 + \theta) \cdot g_f \end{aligned} \quad (4.37)$$

Якщо $\theta = 0$, результатом є гра Курно, при $\theta = -1$ – чиста конкуренція, при $\theta = F$ має місце змова $F + 1$ подібних виробників.

4.7.4. Короткострокова задача.

Короткострокова задача виробника може бути розв'язана з урахуванням типу ринкової гри, технічних особливостей виробництва та передачі електроенергії, тощо:

$$\pi_f^{short}(g_{fht}) \xrightarrow{\{g_{fht}\}} \max, \quad \forall f, t \quad (4.38)$$

за умов (4.3 – 4.5).

4.7.5. Довгострокова задача.

У сучасних дослідженнях, присвячених оптимізації розвитку виробництва на енергоринках з недосконалою конкуренцією, розглядаються три структури гри [56, 15]:

- одноступенева гра;
- двоступенева гра;
- гра з S – адаптованими стратегіями.

4.7.6. Одноступенева гра

Рішення щодо нового будівництва та об'ємів виробництва приймаються одночасно. Цей механізм є аналогічним продажу всієї електроенергії за довгостроковими контрактами. Модель відповідає грі без зворотного зв'язку [15].

В даній моделі за умов використання гри Курно кожен виробник вирішує задачу:

$$\pi_f^{long_open}(g_{fht}, \Delta G_{fht}, y_{mt}) \xrightarrow{\{g_{fht}, \Delta G_{fht}\}} \max, \quad \forall f \quad (4.39)$$

за умов (4.3), (4.4), (4.5). Забезпечується ринкова рівновага (4.6).

Плановий прибуток виробника f :

$$\begin{aligned} \pi_f^{long_open}(g_{fht}, \Delta G_{fht}, y_{mt}) = \\ = \sum_{t \in T} \delta^t \cdot \left(\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left(P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fht} \right) \cdot \sum_{h \in H} g_{fht} \right) - \\ & - \sum_{i \in I, h \in H} (C_{fht}(g_{fht}) \cdot g_{fht}) \\ & - \sum_{i \in I, h \in H} (k_{iht}(G_{fht}) \cdot \Delta G_{fht}) \end{aligned} \right), \end{aligned}$$

тут $g_{fht} = g_{fht}(G_{fht})$, оскільки при грі Курно $\partial g_{-f} / \partial g_f = 0$.

В результаті задача розвитку потужностей (4.7) при застосуванні одноступеневої гри має вигляд:

$$\begin{cases} \pi_f^{long_open}(g_{fht}, \Delta G_{fht}, y_{mt}) \xrightarrow{\{g_{fht}, \Delta G_{fht}\}} \max, & \forall f \\ g_{fht} = g_{fht}(G_{fht}), & \forall f, i, h, t \\ P_{it} = P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fht} \right), & \forall t \end{cases} \quad (4.40)$$

за умови виконання обмежень (4.3), (4.4), (4.5).

Таким чином, одноступенева гра дозволяє описати роботу виробника на ринку з недосконалою конкуренцією, на якому продаж електроенергії здійснюється за довгостроковими договорами.

Об'єми виробництва певного виробника через обмеження пов'язані з приростами величини відповідних потужностей з початку планового періоду. Вплив власних інвестиційних рішень майбутніх періодів та інвестиційних рішень конкурентів на поточну роботу компанії при даному формулюванні задачі врахувати не вдається. Даний підхід дозволяє розв'язувати задачі великої розмірності, враховувати технічні та режимні особливості роботи електричної мережі, тощо.

У роботах [15, 57], на прикладі одноперіодичної детермінованої гри показано, що розв'язок одноступеневої детермінованої гри існує і є унікальним за умови опуклості витратних характеристик виробників. В роботі [26] показано, що ускладнення одноступеневої моделі за рахунок збільшення кількості планових етапів, типів технологій, тощо не змінює математичної суті задачі, а лише додає розмірності.

Отже, одноступенева гра є ефективним інструментом для моделювання розвитку та експлуатації генеруючого устаткування в умовах недосконалої конкуренції. Певним обмеженням є неможливість повного врахування впливу власних інвестиційних рішень майбутніх періодів та інвестиційних рішень конкурентів на поточну роботу.

При застосуванні теорії ігор наведені вище коротко- та довгострокової задачі виробників за допомогою умов Куна–Куроша–Таккера (ККТ) перетворюються на систему рівностей та нерівностей. Отримана задача характеризується як змішана задача додатковості (MCP) [58]. Безпосередній розв'язок подібних задач можливий з використанням програмних засобів MILES і PATH, інтегрованих до складу математичного пакету програм GAMS. При даному підході короткострокові та довгострокові

задачі всіх виробників розв'язуються взаємопов'язано, без застосування допоміжних методів та *алгоритмів*, що є безумовною перевагою методу.

4.7.7. Двоступенева гра

На першому кроці, виробники інвестують у потужності, а на другому – приймають рішення щодо об'ємів виробництва. Цей механізм є аналогічним продажу всієї електроенергії на поточному ринку. Модель відповідає грі зі зворотним зв'язком [15].

Кожен з виробників вирішує задачу:

$$\pi_f^{long_closed} \left(g_{fih}, \Delta G_{fih}, y_{mt} \right) \xrightarrow{\{g_{fih}, \Delta G_{fih}\}} \max, \forall f \quad (4.41)$$

де плановий прибуток виробника f при двоступеневій грі:

$$\begin{aligned} \pi_f^{long_closed} \left(g_{fih}, \Delta G_{fih}, y_{mt} \right) = \\ = \sum_{t \in T} \delta^t \cdot \left(\sum_{i \in I} \left(P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fih}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fih} \right) \cdot \sum_{h \in H} g_{fih} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{i \in I, h \in H} \left(C_{fih} \left(g_{fih} \right) \cdot g_{fih} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{i \in I, h \in H} \left(k_{iht} \left(G_{fih} \right) \cdot \Delta G_{fih} \right) \right), \end{aligned}$$

де $g_{fih} = g_{fih} \left(G_{fihr[\overline{0,T}]}, G_{-fihr[\overline{0,T}]} \right)$ – об'єм виробництва конкретного енергоблоку залежить від всієї множини потужностей як тих, що введені у попередні планові періоди, так і від потужностей, що будуть вводиться протягом планового періоду. При цьому використовується співвідношення:

$$B_{fih} \cdot g_{fih} \left(G_{fihr[\overline{0,T}]}, G_{-fihr[\overline{0,T}]} \right) = \frac{\partial g_{fih} \left(G_{fihr[\overline{0,T}]}, G_{-fihr[\overline{0,T}]} \right)}{\partial G_{fih}}, \quad (4.42)$$

за умов (4.3), (4.4), (4.5).

Забезпечується ринкова рівновага (4.6).

В результаті задача розвитку генеруючих потужностей (4.7) при двоступеневій грі має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_f^{long_closed} (g_{fht}, \Delta G_{fht}, y_{mt}) \xrightarrow{\{g_{fht}, \Delta G_{fht}\}} \max, \forall f \\ g_{fht} = g_{fht} \left(G_{fht, [0, T]}, G_{-fht, [0, T]} \right), \quad \forall f, i, h, t \\ P_{it} = P_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fht} \right), \quad \forall i, t \end{array} \right. \quad (4.43)$$

за умов (4.3), (4.4), (4.5).

Таким чином, двоступенева гра дозволяє моделювати роботу виробника на ринку з недосконалою конкуренцією при продажі всієї електроенергії на поточному ринку.

Об'єми виробництва електроенергії пов'язані з величинами введення генеруючого устаткування як компанією, що розглядається, так і її конкурентами протягом всього планового періоду.

Згідно результатів досліджень [15, 57], існування та унікальність рішення у детермінованій грі зі зворотним зв'язком на сьогодні не доведені. У разі існування розв'язку, він співпадає з розв'язком детермінованої гри без зворотного зв'язку. Вказаний недолік не дозволяє використовувати даний метод для вирішення практичних задач.

4.7.8. S – адаптована стратегія

Вказана структура гри є аналогічною до одноступеневої гри за виключенням того, що стратегії гравців адаптуються до варіантів траєкторій стохастичних змінних. В роботі [56] показано, що розв'язок гри з S – адаптованими стратегіями є рівновагою Неша та може бути розраховано з використанням стохастичного рівноважного програмування.

Рівновага гри з S – адаптованими стратегіями (за величинами цін, об'ємів виробництва, тощо) займає проміжні позиції між рівновагою двоступеневої гри та рівновагою одноступеневої гри.

У даній грі кожен з гравців максимізує свій очікуваний прибуток:

$$\pi_f^{long-S}(g_{fihts}, \Delta G_{fiht}, y_{mts}) \xrightarrow{\{g_{fihts}, \Delta G_{fiht}\}} \max, \quad \forall j \quad (4.44)$$

при цьому плановий прибуток виробника f при грі з S –адаптованими стратегіями складає:

$$\pi_f^{long-S}(g_{fihts}, \Delta G_{fiht}, y_{mts}) = \sum_{t \in T} \delta^t \sum_{s \in S} \theta_s \left(\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left(p_{it} \left(\sum_{h \in H} g_{fiht}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fiht} \right) \cdot \sum_{h \in H} g_{fiht} \right) - \\ & - \sum_{i \in I, h \in H} (C_{fihts}(g_{fihts}) \cdot g_{fihts}) - \\ & - \sum_{i \in I, h \in H} (k_{iht}(G_{fiht}) \cdot \Delta G_{fiht}) \end{aligned} \right),$$

за умов виконання (4.3 – 4.5) та забезпечення ринкової рівноваги (4.6).

При цьому $g_{fihts} \approx g_{fihts}(G_{fihts}[0, T], G_{-fihts}[0, T])$ – враховується

залежність об'єму виробництва конкретного енергоблоку від всієї множини потужностей як тих, що введені у попередні планові періоди, так і від потужностей, що будуть вводиться протягом планового періоду.

Задача розвитку генеруючих потужностей (4.7) при грі з S – адаптованими стратегіями має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} & \pi_f^{long-S}(g_{fihts}, \Delta G_{fiht}, y_{mts}) \xrightarrow{\{g_{fihts}, \Delta G_{fiht}\}} \max, \quad \forall f \\ & g_{fihts} \approx g_{fihts}(G_{fihts}[0, T], G_{-fihts}[0, T]), \quad \forall f, i, h, t, s \\ & P_{its} = P_{its} \left(\sum_{h \in H} g_{fihts}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fihts} \right), \quad \forall i, t, s \end{aligned} \right. \quad (4.45)$$

за умов (4.3 – 4.5).

Таким чином, гра з S-адаптованими стратегіями може використовуватись для опису роботи виробників на ринку з недосконалою конкуренцією. При цьому досягається наближення результату до відповідних результатів двоступеневої гри, тобто відображення взаємозв'язку об'ємів виробництва електроенергії з величинами введення генеруючого устаткування як компанією, що розглядається, так і її конкурентами протягом всього планового періоду.

Згідно з результатами аналізу [15, 57], при стохастичній постановці гри без зворотного зв'язку існування та унікальність рішення доводяться так саме як і при детермінованій постановці. Однак розв'язок стохастичної гри без зворотного зв'язку може відрізнитись від рішення при детермінованій постановці.

Для стохастичного випадку задачі більше не спостерігається відповідності рішень ігор зі зворотним зв'язком та без зворотного зв'язку.

4.7.9. Досконала рівновага Маркова

Альтернативним підходом при використанні теорії ігор для оптимізації введення потужностей в ринкових умовах є досконала рівновага Маркова.

Суть підходу полягає у тому, що можливий простір стратегій розвитку ринкового середовища описується марківським процесом, кожен зі станів якого характеризується потужностями конкуруючих фірм і ринковими умовами.

В роботі [59] застосовано розділення короткострокових та довгострокових задач, що дозволяє попередньо визначити стан короткострокової рівноваги для кожного зі станів процесу (в роботі [59] для цього використано модель Курно):

$$\pi_{fts}^{short-MPE} \left(g_{fhts}, g_{-fhts}, y_{mt} \right) \xrightarrow{\{g_{fhts}\}} \max, \quad \forall f, t, s \quad (4.46)$$

за умов виконання (4.3 – 4.5) та забезпечення ринкової рівноваги (4.6).

При цьому $g_{fihts} = g_{fihts} \left(G_{fihts}[\overline{0,t}], G_{-fihts}[\overline{0,t}] \right)$ – враховується

залежність об'єму виробництва конкретного енергоблоку від всієї множини потужностей як тих, що введені у попередні планові періоди, так і від потужностей, що будуть вводиться протягом планового періоду.

Тобто даний підхід дозволяє врахувати всі технологічні особливості виробництва електроенергії. Відмінністю від початкового формулювання (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) є те, що об'єми виробництва не залежать від майбутніх інвестиційних рішень.

На другому етапі за допомогою методів динамічного програмування для кожного з конкурентів визначається оптимальна стратегія:

$$\max_{\Delta G_{fiht}} \pi_f^{long_MPE}, \forall f. \quad (4.47)$$

Система коротко- та довгострокових задач (4.7) при використанні досконалої рівноваги Маркова має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_f^{long_MPE}(\Delta G_{fiht}) \xrightarrow{\{\Delta G_{fiht}\}} \max, & \forall f \\ \pi_{fts}^{short_MPE}(g_{fihts}, g_{-fihts}, y_{mts}) \xrightarrow{\{g_{fihts}\}} \max, & \forall f, t, s \\ g_{fihts} = g_{fihts} \left(G_{fihts}[\overline{0,t}], G_{-fihts}[\overline{0,t}] \right), & \forall f, i, h, t, s \\ P_{its} = P_{its} \left(\sum_{h \in H} g_{fihts}, \sum_{-f \in F, h \in H} g_{-fihts} \right), & \forall i, t, s \end{array} \right. \quad (4.48)$$

за умов (4.3), (4.4), (4.5).

Використання методів динамічного програмування для розв'язку довгострокової задачі накладає суттєві обмеження. Вимоги щодо зменшення розмірності задачі призводять до необхідності штучного укрупнення конкурентів, зменшення кількості технологій, що розглядаються, тощо. Слід відзначити що короткострокові моделі недосконалої конкуренції (наприклад,

модель Курно, що використана у роботі [59]) є винятково чутливими до кількості конкуруючих фірм.

В роботі показана наявність рішення сукупної задачі. Внаслідок дискретності потужностей виробників можливі рівнооефективні стратегії, тому для забезпечення унікальності рішення одному з виробників надається право першого кроку.

Використання наведеного підходу може бути доцільним при уточненні потужності та виборі черговості введення незначної кількості попередньо визначених електростанцій (наприклад, оприлюднені плани будівництва). Для подібного класу задач, традиційно, використовуються методи динамічного програмування [30].

Подолання недоліків моделі [59] можливе у разі одночасного спільного розв'язку статичних та динамічних задач всіх конкурентів.

4.7.10. Огляд моделей теорії ігор

Однією з перших масштабних робіт, в яких теорія ігор використовується для моделювання розвитку генеруючих потужностей є робота [27]. В розробленій моделі використовується одноступенева гра у детермінованій постановці, враховується багато гравців та технологій, мережу представлено за допомогою моделі потоків. Застосовано модель Курно у виробництві та модель Бертрана при передачі. Існуючі потужності не розглядаються. В роботі доведено існування та унікальність рішень. Екологічні обмеження та ринок резервів не розглядаються. Основним обмеженням розробленої моделі є одноперіодичність задачі, яка, однак, розв'язується одночасно для декількох зон навантаження. Для розв'язку використовується MСР солвер.

Подальший розвиток ігрових моделей зосереджувався на врахуванні екологічних факторів, вимог щодо резервування, невизначеності вхідних

даних. Двоступенева гра внаслідок відсутності впевненості щодо наявності та унікальності розв'язку використовується лише у теоретичних роботах.

В роботі [14] розглянуто одновузлову багатоперіодичну задачу з багатьма гравцями та технологіями виробництва. Враховуються наявні виробничі потужності, екологічні обмеження та ринок резервів не розглядаються. Особливістю роботи є формулювання поставленої задачі у вигляді задач Неша–Курно та Штакельберга, а також розгляд підходів до їх розв'язку за допомогою МСР пакету та стандартного пакету нелінійного програмування відповідно.

У [60] розглядається одновузлова одноперіодична задача розвитку потужностей з багатьма зонами навантажень. Розглядається декілька гравців та технологій. Особливістю роботи є врахування участі виробників як у ринку електроенергії, так і у ринку резервів. Екологічні обмеження не розглядаються. Розв'язок задачі здійснюється за допомогою генетичного алгоритму.

В роботі [47] розглянуто одновузлову багатоперіодичну задачу з багатьма гравцями та технологіями виробництва. Враховуються наявні виробничі потужності, екологічні обмеження та ринок резервів не розглядаються. Особливістю роботи є застосування методики уточнення рішення задачі з урахуванням дискретності потужностей реального устаткування.

Моделі, наведені у роботах [28] та [61], є розвитком роботи [14] для випадку рівноваги Неша–Курно з урахуванням механізму розподілу лімітів на викиди.

В роботі [29] розглядається одновузлова одноперіодична задача розвитку потужностей з багатьма зонами навантажень. Розглядається декілька гравців та технологій. Враховується функціонування ринку потужності і проводиться аналіз ефективності різних систем розподілу лімітів на викиди.

Модель Elmar [62] описує багатовузлову одноперіодичну задачу розвитку виробничих потужностей. Враховуються наявні виробничі потужності, ринок резервів не розглядаються. Розглядається декілька гравців, приріст потужності забезпечується за рахунок ГТУ. Задаються ціни на транспортування електроенергії. Особливістю роботи є використання очікуваних реакцій для опису недосконалої конкуренції. Для розв'язку задачі використовується ітераційний *алгоритм*.

Одним з перших прикладів зістосування S-адаптованих розміжнених моделей для прогнозування розвитку генеруючих потужностей у прив'язці до реальних енергосистем є роботи [26, 63]. У моделі розглядається одновузлова багатоперіодична задача з багатьма гравцями. Для зменшення розмірності задачі виробничі потужності представлено двома видами технологій АЕС-ГЕС та ТЕС, аргегована витратна характеристика яких має нелінійний вид. Наявні виробничі потужності, екологічні обмеження та ринок резервів в роботі не враховуються. Для розв'язку задачі застосовано два альтернативні методи: стандартний MСР солвер і *алгоритм* діагоналізації.

Роботи [64, 65] є своєрідним продовженням робіт [26, 63]. В них продовжено тривалість прогностного періоду, розширено можливості для врахування невизначеності та збільшено кількість технологій генерації. За допомогою вказаних моделей проведено аналіз перспектив розвитку виробничих потужностей Франції та Німеччини.

У розглянутій вище роботі [59] одновузлова багатоперіодична задача розвитку виробничих потужностей для декількох виробників та технологій розв'язується з використанням досконалої рівноваги Маркова.

Таким чином ігрові моделі дозволяють відобразити поведінку виробників на ринку з недосконалою конкуренцією з урахуванням технологічних особливостей устаткування та впливу мережі. Завдяки розвитку методів розв'язку MСР задач можливим стає розв'язок ігрових задач великої розмірності.

Недоліками методів є неможливість розв'язку задач зі зворотним зв'язком для реальних (великих за розміром) енергосистем, однак використання ігор з S-адаптованими стратегіями дозволяє отримати результат наближений до результату двоступеневої гри.

На практиці фірми враховують, що електростанції, введені сьогодні, впливатимуть на майбутні рішення на оптовому ринку, в свою чергу майбутня робота компанії на оптовому ринку впливатиме на ефективність поточних інвестиційних рішень. В той же час поточні рішення на оптовому ринку не впливають на майбутні інвестиційні рішення та аналогічно майбутні інвестиційні рішення не впливають на поточні цінові заявки. Тобто кількість необхідних для врахування у моделі зв'язків може бути суттєво зменшена.

Додаткові можливості для врахування стратегій конкурентів при роботі на ринку є застосування моделі очікуваних реакцій при формулюванні короткострокових задач. Як відзначалось вище, при даному підході при визначенні оптимальних об'ємів виробництва компанія враховує очікувану зміну об'ємів виробництва конкурентів у відповідь на свої дії, а отже опосередковано усвідомлює динаміку потужностей конкурентів. Отримання дискретних значень змінних можливе з використанням додаткових алгоритмів [47].

4.8. Висновки

Проведене дослідження показало, що прогнозування розвитку виробничих потужностей в ринкових умовах вимагає застосування спеціальних інструментів моделювання. На сьогодні для цієї мети використовуються інструменти теорії опціонів, системної динаміки, агентного моделювання та теорії ігор.

Порівняльний аналіз вказаних підходів показав наступне:

1. Засоби теорії опціонів є найбільш привабливими для обґрунтування ефективності конкретних інвестиційних проектів в умовах ринку. Підходи теорії опціонів також можуть бути використані при створенні більш складних комбінованих моделей.

2. Системна динаміка є ефективним інструментом для узагальненого аналізу впливу ринкових факторів та адміністративного регулювання на роботу та розвиток галузі в цілому.

3. Засоби агентного моделювання та пошук досконалої рівноваги Маркова є ефективними для уточнення потужності і вибору черговості введення незначної кількості попередньо визначених електростанцій.

4. Найефективнішим підходом для обґрунтування структури виробничих потужностей в ринкових умовах на сьогодні є методи теорії ігор. Завдяки розвитку методів розв'язку змішаних задач додатковості, вони можуть враховувати технологічні особливості устаткування та вплив мережі. Подолання обмежень, пов'язаних з неможливістю безпосереднього відображення зворотних взаємозв'язків між об'ємами виробництва та величинами потужностей, можливе шляхом застосування гри з S-адаптованими стратегіями, а також використання моделі очікуваних реакцій при формулюванні короткострокових задач.

5. РІВНОВАЖНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТА РОЗВИТКУ ГЕНЕРУЮЧИХ ПОТУЖНОСТЕЙ В РИНКОВИХ УМОВАХ

Розділ присвячений формулюванню задачі розвитку виробництва електроенергії з урахуванням властивих енергосистемі України особливостей, зокрема проблеми із проходженням нічного провалу навантаження та підтриманням необхідного гарячого резерву, наявності значного тарифікованого виробництва.

5.1. Задача визначення режимів роботи генеруючого устаткування

Для пошуку ринкової рівноваги розглянемо стандартну задачу визначення режимів роботи генеруючого устаткування, близьку за формулюванням до задачі, сформульованої в роботі [66].

Введемо умовні позначення:

$i, i \in I$ – множина вузлів електричної мережі;

$m, m \in M$ – множина ліній електропередачі (ЛЕП);

$f, f \in F$ – множина компаній-виробників електроенергії, що не вступають у змову;

$h, h \in H$ – множина типів енергоблоків (устаткування);

$t, t \in T$ – множина етапів планового періоду;

$P_i - P_i = \alpha_i - \beta_i \cdot \sum_{f \in F} s_{fi}$, ціна у кожному вузлі i описується зворотною

функцією попиту, де α_i , β_i – коефіцієнти зворотної функції попиту;

s_{fi} – об'єм поставок фірми f у вузол i ;

c_{fih} – витрати фірми f на виробництво у вузлі i за технологією h ;

g_{fih} – виробництво електроенергії фірми f у вузлі i за технологією h ;

G_{fih}^U – максимальна потужність енергоблоку типу h фірми f у вузлі i ;

$y_m - y_m = \sum_{i \in I} \gamma_{mi} \left(\sum_{f \in F} s_{fi} - \sum_{f \in F, h \in H} g_{fih} \right)$ потік через інтерфейс m ;

Y_m – пропускна спроможність інтерфейсу m ;

γ_{mi} – коефіцієнти, які враховують залежність перетоку електроенергії через інтерфейс m від її надходження в мережу у вузлі i ;

P_i^{TS} – ціна на передачу електроенергії з хабу у вузол i ;

a_i – поставки електроенергії трейдером (арбітражним торговцем) у вузол i ;

y_i^h – перетік електроенергії між хабом та вузлом i .

5.1.1. Задача оптимізації об'ємів виробництва в умовах досконалої конкуренції на ринку

Модель досконалої конкуренції описується задачею максимізації сукупного добробуту учасників ринку і має наступний вигляд:

$$\sum_{i \in I} \left(\alpha_i \sum_{f \in F} s_{fi} - \frac{\beta_i}{2} \left(\sum_{f \in F} s_{fi} \right)^2 \right) - \sum_{f \in F, i \in I, h \in H} C_{fih} g_{fih} \xrightarrow{\{s_{fi}\} \{g_{fih}\}} \max$$

$$s_{fi} \geq 0, \quad \forall f, i$$

$$g_{fih} \geq 0, \quad \forall f, i, h$$
(5.1)

Максимізація цільової функції здійснюється в умовах виконання балансів поставок та виробництва для кожної з фірм:

$$\sum_{i \in I} s_{fi} = \sum_{i \in I, h \in H} g_{fih}, \quad \forall f. \quad (5.2)$$

При цьому враховується:

– обмеження потужності генеруючого устаткування:

$$g_{fih} \leq G_{fih}^U, \quad \forall f, i, h.$$

- обмеження на перетоки через інтерфейси:

$$y_m \leq Y_m, \quad \forall m. \quad (5.3)$$

- додатність цін у вузлах:

$$P_i \geq 0, \quad \forall i. \quad (5.4)$$

- додатність прибутку виробників властива досконалій конкуренції:

$$g_{fih} (P_i - C_{fih}) \geq 0, \quad \forall f, i, h.$$

Задача знаходження рівноваги в умовах досконалої конкуренції у випадку застосування лінійних функцій попиту та лінійних характеристик виробників зводиться до задачі лінійного програмування.

5.1.2. Задача оптимізації об'ємів виробництва в умовах недосконалої конкуренції на ринку

У випадку незалежної оптимізації роботи багатьох учасників ринку (які до того ж мають ринкову владу) ситуація стає складнішою.

Модель ринку електроенергії з недосконалою конкуренцією складається із множини умов:

- максимізації прибутку генеруючих компаній, які реалізують один із механізмів конкуренції;
- максимізації прибутку оператора мережі;
- максимізації прибутку арбітражних торговців;
- досягнення рівноважного стану ринку.

Опис роботи виробника електроенергії

Метою діяльності кожної компанії $\forall f$ є максимізація її прибутку:

$$\sum_{i \in I} \left(\left(\alpha_i - \beta_i \left(\sum_{f \in F} s_{fi} + a_i \right) \right) \cdot s_{fi} \right) - \sum_{i \in I, h \in H} (C_{fih} \cdot g_{fih}) - \sum_{i \in I} \left(P_i^{TS} \cdot \left(s_{fi} - \sum_{h \in H} g_{fih} \right) \right) \xrightarrow{\{s_{fi}\} \{g_{fih}\}} \max, \quad (5.5)$$

При цьому дотримуються:

- баланси об'ємів поставок та виробництва електроенергії:

$$\sum_{i \in I} s_{fi} = \sum_{h \in H, i \in I} g_{fih}, \quad \forall f; \quad (5.6)$$

- обмеження потужності устаткування:

$$g_{fih} \leq G_{fih}^U, \quad \forall f, i, h; \quad (5.7)$$

- умови невід'ємності об'ємів виробництва та поставок електроенергії:

$$g_{fih} \geq 0, \quad \forall f, i, h \quad \text{та} \quad s_{fi} \geq 0, \quad \forall f, i. \quad (5.8)$$

Опис роботи оператора мережі

Оператор мережі намагається максимізувати плату за використання мережі. Така плата визначається величиною

$$\sum_{i \in I} y_i^h \cdot P_i^{TS} \xrightarrow{\{y_i^h\}} \max, \quad (5.9)$$

При цьому дотримуються:

- баланси потоків у інтерфейсах:

$$y_m = \sum_{i \in I} \gamma_{mi} \cdot y_i^h, \quad \forall m; \quad (5.10)$$

- обмеження пропускної спроможності інтерфейсів:

$$|y_m| \leq Y_m, \quad \forall m. \quad (5.11)$$

Опис трейдера (арбітражного торгівця)

Арбітражний торгівець намагається максимізувати прибуток:

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot (P_i - P_i^{TS}) \xrightarrow{\{a_i\}} \max; \quad (5.12)$$

- виконуючи баланс арбітражної торгівлі:

$$\sum_{i \in I} a_i = 0. \quad (5.13)$$

Умови рівноваги ринку

Формування цін у вузлах згідно зворотним функціям попиту:

$$P_i = \alpha_i - \beta_i \cdot \left(a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right), \quad \forall i. \quad (5.14)$$

Дотримання балансів електроенергії у вузлах:

$$y_i^h = a_i + \sum_{f \in F} \left(s_{fi} - \sum_{h \in H} g_{fih} \right), \quad \forall i. \quad (5.15)$$

5.2. Методи аналізу моделей недосконалої конкуренції на ринку електроенергії

Аналітичний розв'язок для гри Курно можна отримати лише у випадку ідентичності учасників ринку.

Так, для F компаній-виробників електроенергії, що мають однакові маржинальні витрати C , у випадку лінійності зворотної функції попиту

$P = \alpha + \beta \cdot \sum_{f \in F} g_f$ об'єми виробництва кожної компанії складуть:

$$g_f = \frac{1}{F+1} \cdot \frac{\alpha - c}{\beta}, \quad (5.16)$$

а рівноважна ціна на ринку дорівнюватиме:

$$P = \frac{\alpha}{F+1} \cdot \frac{c}{F+1}. \quad (5.17)$$

Значні відмінності характеристик виробників не дозволяють використовувати подібні аналітичні рішення на практиці.

У роботі [67] для розрахунку ринкової рівноваги застосовується ітераційний підхід. У відповідності з цим підходом кожен учасник ринку подає заявку з визначенням ціни та об'ємів виробництва. На основі заявок розраховується ринкова ціна, учасники ринку уточнюють свої цінові заявки. Ітераційний процес завершується, якщо ринкові ціни не змінюються у порівнянні з попередньою ітерацією, однак збіжність ітераційного процесу не є гарантованою.

В роботі [68] показана можливість використання квадратичного програмування для моделювання рівноваги Курно у мережних задачах, а в [66] квадратичне програмування застосоване для моделювання рівноваги Курно на енергетичному ринку за відсутності арбітражу.

Формулювання у вигляді задачі квадратичного програмування є близьким до формулювання задачі досконалої конкуренції на ринку і відрізняється цільовою функцією:

$$\sum_{i \in I} \left(\alpha_i \sum_{f \in F} s_{fi} - \frac{\beta_i}{2} \left(\sum_{f \in F} s_{fi} \right)^2 - \frac{\beta_i}{2} \sum_{f \in F} s_{fi}^2 \right) - \sum_{f \in F, i \in I, h \in H} C_{fih} g_{fih} \xrightarrow{\{s_{fi}\} \{g_{fih}\}} \max \quad (5.18)$$

Тут доданки $\left(-\frac{\beta_i}{2} \sum_{f \in F} s_{fi}^2 \right)$ враховують зниження маржинального прибутку через збільшення об'ємів виробництва.

Відсутність обґрунтування щодо можливості відображення у моделях з квадратичною цільовою функцією (5.18) арбітражної торгівлі та інших суттєвих складових ринку, робить проблематичним використання такого підходу.

Задача оптимізації у вигляді змішаної задачі додатковості.

Відомо, що розв'язок задачі оптимізації відповідає умовам Каруша-Куна-Таккера (ККТ), які представляють собою відповідну сукупність рівностей і нерівностей.

Розглянемо стандартну задачу максимізації з обмеженнями у вигляді нерівностей та рівностей:

$$\max F(x, y) \quad (5.19)$$

за умов:

$$G(x, y) = 0, \quad H(x, y) \leq 0, \quad x \geq 0. \quad (5.20)$$

Функція Лагранжа для даної задачі:

$$L(x, y) = F(x, y) - \mu \cdot G(x, y) - \lambda \cdot H(x, y), \quad (5.21)$$

де μ і λ є фіктивними змінними для обмежень G і H відповідно.

ККТ умови мають вигляд:

$$\text{Для } x: \quad \partial F / \partial x - \mu \cdot \partial G / \partial x - \lambda \cdot \partial H / \partial x \leq 0; \quad x \geq 0; \quad (5.22)$$

$$x \cdot (\partial F / \partial x - \mu \cdot \partial G / \partial x - \lambda \cdot \partial H / \partial x) = 0.$$

Тобто умови для x виконуються в наступних випадках:

- при $\partial L / \partial x < 0$ та $x = 0$;

- при $x > 0$ та $\partial L / \partial x = 0$;

- при $x = 0$ та $\partial L / \partial x = 0$.

Наведені співвідношення для x також називають умовами додатковості і можуть бути записані таким чином:

$$0 \leq x \perp (\partial F / \partial x - \mu \cdot \partial G / \partial x - \lambda \cdot \partial H / \partial x) \leq 0.$$

Аналогічно:

$$\text{Для } y: \partial F / \partial y - \mu \cdot \partial G / \partial y - \lambda \cdot \partial H / \partial y = 0. \quad (5.23)$$

$$\text{Для } \mu: G(x, y) = 0. \quad (5.24)$$

$$\text{Для } \lambda: H(x, y) \leq 0; \lambda \geq 0; \lambda \cdot H(x, y) = 0. \quad (5.25)$$

Рівняння пов'язані з невід'ємністю змінних x і λ називаються умовами додатковості. Система рівнянь (5.22 – 5.25) є аналогічною змішаній задачі додатковості [58].

Отже, оптимізаційні задачі виробників можуть представлятися рівностями та нерівностями відповідно до ККТ-умов.

5.3. Задача оптимізації об'ємів виробництва у вигляді змішаної задачі додатковості

Застосуємо ККТ-умови оптимальності для наведеної вище задачі визначення режимів роботи генеруючого устаткування (5.5 – 5.15).

У даному параграфі використовуються позначення введені у параграфі 3.1. Додатково введем позначення:

$\lambda_{ph}^{\max}$ – ціна обмеження об'ємів виробництва;

ϕ_f – ціна обмеження об'ємів поставок через;

λ_m^-, λ_m^+ – фіктивні змінні, які відповідають обмеженням пропускнуї здатності лінії m ;

ККТ умови для виробників

– для кожного g_{fih} :

$$0 \leq g_{fih} \perp -C_{fih} + P_i^{TS} - \lambda_{fih}^{\max} + \phi_f \leq 0, \quad \forall f, i, h \quad (5.26)$$

– для кожного $\lambda_{fih}^{\max}$:

$$0 \leq \lambda_{fih}^{\max} \perp g_{fih} - G_{fih} \leq 0, \quad \forall f, i, h \quad (5.27)$$

– для кожного ϕ_f :

$$\sum_{i \in I} s_{fi} = \sum_{i \in I, h \in H} g_{fih}, \quad \forall f. \quad (5.28)$$

– для кожного s_{fi} :

$$0 \leq s_{fi} \perp \alpha_i - \alpha_i \cdot \left(a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right) - \beta_i \cdot s_{fi} - P_i^{TS} - \phi_f \leq 0, \quad \forall f, i. \quad (5.29.)$$

ККТ умови оператора мережі

– для кожного y_i^h :

$$P_i^{TS} + \sum_{m \in M} \gamma_m \cdot (\lambda_m^+ - \lambda_m^-) = 0, \quad \forall i \quad (5.30)$$

– для кожного λ_m^+ :

$$0 \leq \lambda_m^+ \perp \sum_{i \in I} (\gamma_{mi} \cdot y_i^h) - Y_m \leq 0, \quad \forall m \quad (5.31)$$

– для кожного λ_m^- :

$$0 \leq \lambda_m^- \perp -\sum_{i \in I} (\gamma_{mi} \cdot y_i^h) - Y_m \leq 0, \quad \forall m \quad (5.32)$$

ККТ умови для арбітражного торгівця

- для кожного a_i :

$$P_i - P_i^{TS} - P^h = 0, \quad \forall i \quad (5.33)$$

- для P^h :

$$\sum_{i \in I} a_i = 0. \quad (5.34)$$

ККТ умови клірингового механізму ринка відповідають початковим формулюванням

- для кожного P_i :

$$0 \leq P_i; \quad P_i = \alpha_i - \beta_i \left(a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right), \quad \forall i; \quad (5.35)$$

- для кожного P_i^{TS} :

$$y_i^h = a_i + \sum_{f \in F} \left(s_{fi} - \sum_{h \in H} g_{fih} \right), \quad \forall i. \quad (5.36)$$

Сформульована задача є змішаною задачею додатковості. Ця задача є лінійною внаслідок використання лінійної зворотної функції попиту та лінійних витратних характеристик виробників.

5.4. Врахування особливостей енергосистеми України в моделях пошуку рівноваги на ринку електроенергії

Задачі пошуку рівноваги на ринку електроенергії в умовах недосконалої конкуренції із-за необхідності врахування технологічних та режимних особливостей виробництва, впливу мережі, конкурентної

поведінки виробників та інших важливих факторів є задачами значної розмірності. Тому для врахування впливу додаткових факторів на роботу виробників необхідно знайти баланс між детальним врахуванням впливу цих факторів та вимогами щодо збереження простоти формулювання.

В роботі [17] було проведене моделювання функціонування та розвитку генеруючих потужностей в умовах «старого» ринку електричної енергії України. При цьому були застосовані наступні підходи для врахування особливостей роботи енергосистеми України:

Енергосистема представлена системою вузлів та інтерфейсів.

Для врахування різноманітності графіків навантажень та обмежень з боку мережі енергосистема представлена сукупністю вузлів $i \in I$, в яких зосереджені виробничі потужності та регіональні споживачі електроенергії, поєднані між собою міжвузловими інтерфейсами $m \in M$, які мають обмеженнями на перетоки Y_{mt} .

Врахування нерівномірності попиту на електроенергію

Для врахування нерівномірності попиту на електроенергію річний графік споживання представлено чотирма сезонами, кожен з яких розбито на пікову та базову зони навантажень. Зони навантажень позначені $z \in Z$ та мають тривалість τ_{zt} . Додатково враховується проходження також річного максимуму навантаження енергосистеми.

Опис мережі

Для опису електричної мережі використовується спрощена модель, в якій втрати в мережі та реактивні потоки не враховуються, а для опису перетоків використовується система балансових співвідношень Кірхгофа згідно теорії мереж постійного струму. Такий підхід дозволяє описати міжвузлові перетоки за допомогою фіктивного вузла (хаба), виходячи з припущення, що вся електроенергія, що вироблена у окремому вузлі, направляється виробником в хаб, а вже звідти – у вузол споживання (P_{izt}^{TS} -

ціна передачі електроенергії з вузла-хаба у вузол i). Плата за передачу по інтерфейсу береться тільки у випадку його перевантаження. При цьому потоки, які сприяють перевантаженню штрафуються, а потоки, що розвантажують інтерфейс, преміюються.

Виробники електроенергії

На ринку представлені виробники $f \in F$, більшість з яких продають електроенергію за конкурентними цінами. Тип поведінки таких виробників встановлюється за допомогою коефіцієнта B ($B = 0$ - конкурентна поведінка за Бертраном або $B = 1$ - стратегічно спрямована поведінка за Курно). Виробники вважають, що не можуть впливати на ціноутворення при транспортуванні електроенергії.

Виробники вводять та експлуатують генеруючі потужності $h \in H$ типів, які мають змінні витрати - c_{fht} та питомі капіталовкладення - k_{ht} , максимальну і мінімальну потужність, задану до несення резерву та зупинки на ніч. Витрати на пуск енергоблоків не враховуються.

Також в енергосистемі працюють регульовані виробники (підмножина $h \in \Lambda$), для яких встановлено фіксований тариф (P_{fhtz}^{reg}) та об'єми виробництва (g_{fhtz}^{reg}).

Ціни у вузлах визначаються зворотними функціями попиту: $P_{izt}^{av} = \alpha_{izt} - \beta_{izt} \cdot d_{izt}$, де: α_{izt} і β_{izt} - постійні коефіцієнти, а попит у вузлі $d_{izt} = a_{izt} + \sum_{f \in F} s_{fizt}$ покривається поставками виробників s_{fizt} та арбітражного торгівця a_{izt} .

Природоохоронна політика

В моделі природоохоронна політика відображається шляхом включення плати за викиди до складу витрат та розгляду у якості

перспективних для застосування лише технологій, що відповідають сучасним екологічним вимогам.

Планування розвитку генеруючих потужностей здійснюється на плановому періоді $T = 20$ років, що складається з 4 часових етапів ($t \in T$), 5 років кожен.

Тарифіковане виробництво

Для запобігання дискримінації окремих споживачів прийнято, що всю електроенергію, вироблену регульованими виробниками, закуповує арбітражний торговець (наприклад, оператор енергоринку), який здійснює її продаж в усі вузли системи. В результаті баланс купівлі-продажу для арбітражного торговця має вигляд:

$$\sum_{i \in I} a_{izt} + \sum_{f \in F, i \in I} s_{fizt}^{reg} = 0. \quad \forall f, i, z, t \quad (5.37)$$

При цьому для всіх вузлів енергосистеми частка тарифікованої електроенергії у загальному об'ємі постачання (k_{zt}^{reg}) є однаковою. Сукупні поставки електроенергії у вузол мають вигляд

$$s_{izt}^{sum} = \sum_{f \in F} s_{fizt} + \sum_{f \in F} s_{fizt}^{reg} = (1 - k_{zt}^{reg}) \cdot s_{izt}^{sum} + k_{zt}^{reg} \cdot s_{izt}^{sum}, \quad \forall f, i, z, t \quad (5.38)$$

де s_{fizt}^{reg} – об'єми електроенергії, що постачаються регульованим виробником f і проданої арбітражним торговцем у вузлі i ; s_{fizt} – об'єми електроенергії, що постачаються конкуруючим виробником f у вузол i . При цьому для регульованих виробників виконується баланс

$$P_{zt}^{reg} \cdot \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in \Lambda} g_{fihzt}^{reg} = \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in \Lambda} P_{fihzt}^{reg} \cdot g_{fihzt}^{reg}, \quad \forall z, t \quad (5.39)$$

де P_{zt}^{reg} - середньозважений по регульованих виробниках тариф.

Отже ціна для споживачів у вузлі i складатиме:

$$P_{izt}^{av} = (1 - k_{zt}^{reg}) \cdot P_{izt} + k_{zt}^{reg} \cdot P_{zt}^{reg}, \quad \forall i, z, t \quad (5.40)$$

де: P_{izt} - конкурентна ціна на електроенергію у вузлі i .

За відсутності тарифікованого виробництва дохід конкуруючого виробника від продажу електроенергії складає:

$$R_{fzt} = \sum_{i \in I} \left((1 - B) \cdot P_{izt} + B \cdot \left(\alpha_{izt} - \beta_{izt} \cdot (a_{izt} + s_{izt}^{sum}) \right) \right) \cdot s_{fzt}, \quad \forall n, z, t. \quad (5.41)$$

В результаті підстановки (5.40.) до (5.41.) дохід конкуруючого виробника від продажу електроенергії за наявності тарифікованих виробників складатиме:

$$R_{fzt}^{tar} = \sum_{i \in I} \left(\frac{(1 - B) \frac{P_{izt}^{av} - k_{zt}^{reg} P_{zt}^{reg}}{1 - k_{zt}^{reg}} + B \frac{\alpha_{izt} - \beta_{izt} (a_{izt} + s_{izt}^{sum}) - k_{zt}^{reg} P_{zt}^{reg}}{1 - k_{zt}^{reg}}}{1 - k_{zt}^{reg}} \right) s_{fzt}, \quad \forall f, z, t. \quad (5.42)$$

Проходження нічного мінімуму

При складанні переліку устаткування для роботи протягом доби необхідно врахувати, що вночі навантаження всього працюючого устаткування повинно бути зменшене до величини нічного мінімуму для забезпечення балансу споживання та виробництва.

За наявних технологічних умов частина енергоблоків може бути зупинена на ніч, а отже потужність групи таких блоків може бути зменшена до мінімальної величини — $G_{fht}^{\min}$, виходячи з вимог надійності роботи електростанції та системи в цілому. Інше устаткування для проходження нічного мінімуму може бути лише частково розвантажене, а потужність станції в цілому зменшена до величини, яка значно перевищує $G_{fht}^{\min}$.

В результаті умова проходження нічного мінімуму споживання формулюється так:

$$d_{zt}^{\min} \geq \sum_{f \in F, i \in I, h \in H} (K1_{fih} K2_{fih} g_{fihzt} + (1 - K1_{fih}) G_{fih}^{\min}), \forall f, i, h, z, t, \quad (5.43)$$

де $d_{zt}^{\min}$ – величина навантаження енергосистеми у період нічного провалу, що покривається устаткуванням ТЕС; $K1$ – коефіцієнт, який вказує на можливість ($K1 = 0$) або неможливість ($K1 = 1$) зупинки на ніч кожного енергоблоку; $K2$ – коефіцієнт, що характеризує здатність до розвантаження енергоблоку без зупинки.

Умови проходження нічного мінімуму (5.43) відображають характерну особливість формування переліку задіяних енергоблоків – перевага надається певній множині енергоблоків, які можуть зупинятися на ніч, не зважаючи навіть на порівняно більшу їх собівартість виробництва електроенергії.

Резервування потужності

Вимоги щодо надійності при моделюванні виробничих потужностей враховуються шляхом встановлення резервів потужності необхідних для проходження максимуму навантаження і на випадок аварійних відмов устаткування. Для енергосистеми України найбільш актуальним питанням є забезпечення гарячого резерву. Таким чином, поряд з оптимізацією об'ємів виробництва, оптимізація роботи устаткування повинна враховувати розподіл гарячого резерву між виробниками.

У практиці моделювання недосконалої конкуренції використовуються наступні методи розподілу резервів між виробниками:

- встановлення обмежень на мінімальну величину резерву;
- плата за потужність є фіксованою або визначається за ринковими умовами;
- введення повноцінних ринків резервів.

В деяких випадках замість моделювання ринків додаткових послуг, штучно збільшується еластичність попиту.

Для врахування вимог щодо наявності гарячого резерву в системі пропонується наступний підхід.

До цільової функції виробників вводиться дохід від несення гарячого резерву потужністю (r_{fh}):

$$R_{fzt}^{hr} = P_{zt}^{hr} \sum_{i \in I, h \in H} r_{fihzt}, \quad \forall f, z, t, \quad (5.44)$$

де P_{zt}^{hr} - ціна гарячого резерву.

Таким чином, в моделі відтворено роботу ринка резервних потужностей.

Оскільки несення гарячого резерву зменшує можливості устаткування щодо несення навантаження, вводиться обмеження на обсяг виробництва електроенергії. Сума задіяної потужності устаткування та розміщеного на ньому гарячого резерву не повинна перевищувати наявної потужності устаткування:

$$g_{fihzt} + r_{fihzt} \leq G_{fih}, \quad \forall f, i, h, z, t, \quad (5.45)$$

де g_{fihzt} – об'єми виробництва конкуруючих виробників, G_{fih} – потужність конкуруючих виробників.

Для врахування здатності устаткування щодо несення гарячого резерву вводиться обмеження на об'єми резервування потужності, які враховують технологічний зв'язок між можливим об'ємом гарячого резерву, розміщеного на устаткуванні, та його навантаженням:

$$r_{fihzt} \leq KR_{fih} \cdot g_{fihzt}, \quad \forall f, i, h, z, t, \quad (5.46)$$

де KR_{fih} - коефіцієнт, що характеризує спроможність устаткування щодо несення резерву.

Обмеження на загальний об'єм гарячого резервування потужностей в енергосистемі: сумарна величина гарячого резерву, розміщеного на всьому устаткуванні, повинна бути не меншою від необхідної для системи величини

$$\sum_{f \in F, i \in I, h \in H} r_{fihzt} \geq K_{zt}^{hr} \cdot \sum_{i \in I} s_{izt}^{sum}, \quad (5.47)$$

де $K_{zt}^{hr} < 1$ – коефіцієнт гарячого резервування.

5.5. Висновки

1. Запропоновано математичні формулювання, які дозволяють врахувати особливості роботи енергосистеми України при моделюванні експлуатації та розвитку виробничих потужностей.

2. Розроблені коротко- та довгострокові моделі поведінки виробників електроенергії, оператора мережі, арбітражного торговця та умови узгодженого розв'язку задач учасників ринку, які враховують особливості роботи енергосистеми України. Показано, що отримана задача є багатофакторною, нелінійною і не може бути розв'язана з використанням традиційних методів математичного програмування.

3. На основі порівняльного аналізу методів розв'язку ігрових задач, за допомогою яких моделюються задачі оптимізації експлуатації та розвитку генеруючих потужностей, показана доцільність переформулювання задач учасників ринку у задачу додатковості.

4. Створено коротко- та довгострокові рівноважні моделі експлуатації та розвитку генеруючих потужностей шляхом переформулювання системи задач оптимізації учасників ринку у змішану задачу додатковості за допомогою умов Каруша-Куна-Таккера.

6. ЗАДАЧІ ДОДАТКОВОСТІ, МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задачі додатковості є узагальненням для багатьох задач оптимізації таких, як задач нелінійного програмування, мінімаксних задач, задач пошуку рівноваги у іграх n осіб, тощо. Саме пошук ринкової рівноваги, що є результатом безкоаліційної гри конкуруючих фірм, лежить в основі нашого дослідження.

Даний розділ підготовлено за матеріалами [70-76].

6.1. Формулювання задач додатковості

Нелінійна задача додатковості (Nonlinear Complementarity Problem – $\text{NCP}(F)$) полягає у визначенні вектору x такого, що:

$$0 \leq x \perp F(x) \geq 0. \quad (6.1)$$

Аналогічно можна записати:

$$0 \leq x, \quad F(x) \geq 0, \quad x_i F_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n..$$

Геометрична інтерпретація задачі додатковості полягає у пошуку невід'ємного вектора x такого, що його відображення $F(x)$ також є невід'ємним та ортогональним до x .

Якщо відображення F є афінним, тобто $F(x) = q + Mx$ для деякого вектора $q \in \mathbb{R}^n$ і матриці $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, то задача (6.1.) перетворюється на лінійну задачу додатковості (Linear Complementarity Problem – $\text{LCP}(q, M)$).

Багато практичних задач формуються у вигляді змішаної задачі додатковості (Mixed Complementarity Problem – MiCP). Змішана задача додатковості $\text{MiCP}(F, l, u)$ визначається нелінійною вектор-функцією

$F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, а також векторами l та u – відповідно нижньою та верхньою границями для вектора x . За таких обмежень на вектор x всі елементи F_i нелінійної вектор-функції F повинні задовільняти умовам

$$\begin{cases} x_i = l_i \Rightarrow F_i(x) \geq 0 \\ l_i < x_i < u_i \Rightarrow F_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \\ x_i = u_i \Rightarrow F_i(x) \leq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Множина $[l, u]$ часто позначається через $\mathbf{B}$ з метою еквівалентного представлення задачі (6.2) задачею пошуку розв'язку рівняння

$$F(\pi_{\mathbf{B}}(z)) + z - \pi_{\mathbf{B}}(z) = 0,$$

де $\pi_{\mathbf{B}}(\cdot)$ – евклідовий проєктор на множину $\mathbf{B}$. Якщо z^* є розв'язком цього рівняння, а x^* є розв'язком задачі (6.2), то $z^* = x^* - F(x^*)$.

Розглянемо деякі особливі формулювання $\text{MiCP}(F, l, u)$.

Якщо $l = -\infty$ та $u = +\infty$, то $\text{MiCP}(F, l, u)$ зводиться до задачі розв'язку системи лінійних рівнянь – знаходження $x \in \mathfrak{R}^n$ такого, що $F(x) = 0$.

Якщо $l = 0$ та $u = +\infty$, то $\text{MiCP}(F, l, u)$ перетворюється на $\text{NCP}(F)$.

Наступним прикладом є задача

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x} \min \\ \text{при } g(x) \leq 0, \end{cases}$$

для якої умови оптимальності Каруша–Куна–Такера мають вигляд

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0, \\ g(x) \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda^T g(x) = 0. \end{cases}$$

Такі умови можна записати у вигляді $\text{MiCP}(F, l, u)$, якщо скористатися позначеннями

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad F(z) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) \\ g(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_+^m.$$

Розглянемо послаблені вимоги щодо монотонності функції F , які застосовуються для формулювання умов існування та унікальності розв'язків задач додатковості.

Нехай $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ не є пустою множиною. Функція $F : X \rightarrow \mathfrak{R}^n$ називається:

- а) псевдо-монотонною на X для всіх $x, y \in X$, якщо
$$F(y)^T(x - y) \geq 0 \text{ передбачає } F(x)^T(x - y) \geq 0;$$
- б) P_0 -функцією на X , якщо для всіх $x, y \in X$ з $x \neq y$ існує індекс $i := i(x, y) \in \{1, \dots, n\}$ з $x_i \neq y_i$ та $(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0$;
- в) P -функцією на X , якщо для всіх $x, y \in X$ з $x \neq y$ існує індекс $i := i(x, y) \in \{1, \dots, n\}$ з $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ та $(x_{i_0} - y_{i_0})(F_{i_0}(x) - F_{i_0}(y)) > 0$;
- г) рівномірною P -функцією на X , якщо існує константа $\alpha > 0$ та
$$\min_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq \alpha \|x - y\|^2, \text{ для всіх } x, y \in X.$$

Кожна монотонна функція є псевдо-монотонною, а також P_0 -функцією; будь-яка строго монотонна функція є P -функцією. Будь-яка сильно монотонна функція є однорідною P -функцією.

Нехай $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ є неперервним відображенням на множині $\mathbf{B} = [l, u]$ з нижніми та верхніми границями, відповідно, $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ та $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ з $-\infty \leq l_i < u_i \leq +\infty$ для всіх $i \in \{1, \dots, n\}$, тоді наступні твердження виконуються:

- а) якщо F є псевдомонотонною на $\mathbf{B}$, тоді $\text{NCP}(\text{MCP})$ має опуклу множину розв'язків, яка не є пустою;

- б) якщо $F \in P$ -функцією на $\mathbf{B}$, тоді $\text{NCP}(\text{MiCP})$ має що найбільше один розв'язок;
- с) якщо $F \in P$ рівномірною P -функцією на $\mathbf{B}$, тоді $\text{NCP}(\text{MiCP})$ має унікальний розв'язок.

6.2. Розв'язування лінійної задачі додатковості методом Лемке

Розглянемо лінійну задачу додатковості (LCP), в якій необхідно знайти такі вектори w та x , що:

$$w = Mx + q, \quad (6.3)$$

$$w \geq 0, \quad x \geq 0, \quad (6.4)$$

$$w^T x = 0, \quad (6.5)$$

де $M \in$ квадратною $(n \times n)$ -матрицею, w, x, q – n -вимірні вектори-стовбці.

Вираз (6.3.) є системою лінійних рівнянь. Умови (6.4) вимагають невід'ємності розв'язку системи (6.3). З умови (6.5) слідує, що $w_i^T x_i = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$, оскільки $w \geq 0$ та $x \geq 0$. Таким чином, в задачі (6.3) – (6.5) маємо лише n однотипових нелінійних обмежень.

Серед методів розв'язку LCP найбільшого розповсюдження отримав метод Лемке [77] та його численні модифікації [78].

Невід'ємний розв'язок (w, x) системи рівнянь $w = Mx + q$ називається допустимим розв'язком LCP.

Допустимий розв'язок LCP – (w, x) , який задовольняє умові доповнюючої нежорсткості $w^T x = 0$, називається розв'язком LCP.

Умова $w^T x = 0$ еквівалентна умовам $w_i x_i = 0, i = 1, \dots, n$. Змінні w_i та x_i для кожного i називаються парою взаємододаткових змінних. Відзначимо, що у випадку, якщо всі елементи вектору q є невід'ємними, то маємо очевидний розв'язок задачі додатковості: $w = q, x = 0$. Отже, LCP є нетривіальною тільки за наявності хоча б одного від'ємного елементу у векторі q . В цьому випадку початковий базисний розв'язок $w = q, x = 0$, що задовольняє умові доповнюючої нежорсткості $w^T x = 0$, є недопустимим для LCP.

В [77] представлено алгоритм розв'язку задачі додатковості, який починає роботу з недопустимого базисного розв'язку: $w = q, x = 0$. Для отримання невід'ємного розв'язку виконується наступне перетворення задачі: у всі рівняння системи $w = Mx + q$ вводиться штучна змінна z з достатньо великим додатним значенням. Тоді праві частини цієї системи рівнянь приймають вигляд $(q_i + z)$. Для штучної змінної z , що дорівнює максимуму абсолютних величин від'ємних q_i , праві частини рівнянь стають невід'ємними. В результаті отримуємо наступний базисний розв'язок:

$$w_i = q_i + z; \quad x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$z = -\min(q_i).$$

Відзначимо, що цей розв'язок є невід'ємним, задовольняє обмеженням (6.4) та умові додатковості (6.5) ($w_i x_i = 0$), але не є допустимим, оскільки значення штучної змінної z є додатним. Такий розв'язок називається частковим розв'язком задачі додатковості.

Перший крок алгоритму розв'язку задачі додатковості полягає у знаходженні її часткового розв'язку шляхом введення штучної змінної z до початкової системи рівнянь $w = Mx + q$:

$$w - Mx - ez = q, \quad w, x, z \geq 0, \quad w^T x = 0,$$

де $e_{n \times 1} = (1, 1, \dots, 1)^T$. Таким чином початкова таблиця має вигляд:

Таблиця 6.1

Початкова таблиця алгоритму розв'язку LCP

Базис	w_1	...	w_s	...	w_n	x_1	...	x_s	...	x_n	z	q
w_1	1		0		0	$-m_{1,1}$		$-m_{1,s}$		$-m_{1,n}$	-1	q_1
w_s	0		1		0	$-m_{s,1}$		$-m_{s,s}$		$-m_{s,n}$	-1	q_s
w_n	0		0		1	$-m_{n,1}$		$-m_{n,s}$		$-m_{n,n}$	-1	q_n

Тут $m_{i,j}$ є елементом матриці M .

Крок 1. Для визначення початкового часткового розв'язку LCP до базису вводиться штучна змінна z , яка замінює базисну змінну з найбільшим за абсолютною величиною від'ємним значенням $\min(q_i)$. Нехай $q_s = \min(q_i) < 0$; у цьому випадку змінна z замінює у базисі змінну w_s .

Виконання першої ітерації методом виключень призводить до таблиці 6.2, де

$$q'_s = -q_s, \quad q'_i = q_i - q_s, \quad \forall i \neq s;$$

$$m'_{sj} = -m_{sj} / (-1) = m_{sj}, \quad \forall j = 1, \dots, n;$$

$$m'_{ij} = -m_{ij} + m_{sj}, \quad \forall j = 1, \dots, n; i \neq s.$$

Таблиця 6.2

Результат виконання першої ітерації методу Лемке

Базис	w_1	...	w_s	...	w_n	x_1	...	x_s	...	x_n	z	q
w_1	1		-1		0	$-m'_{1,1}$		$-m'_{1,s}$		$-m'_{1,n}$	0	q'_1
z	0		-1		0	$-m'_{s,1}$		$-m'_{s,s}$		$-m'_{s,n}$	1	q'_s
w_n	0		-1		1	$-m'_{n,1}$		$-m'_{n,s}$		$-m'_{n,n}$	0	q'_n

Відзначимо, що:

1. $q'_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$;
2. базисний розв'язок, для якого $w_1 = q'_1, \dots, w_{s-1} = q'_{s-1}$, $z = q'_s$, $w_{s+1} = q'_{s+1}, \dots, w_n = q'_n$, а значення всіх інших змінних дорівнюють нулю, є частковим розв'язком LCP;

3. частковий розв'язок LCP співпадає з розв'язком цієї задачі, якщо значення змінної z дорівнює нулю.

Алгоритм розв'язку LCP полягає у знаходженні послідовності часткових розв'язків (у вигляді послідовності таблиць), яка переривається, коли z стає рівним нулю. При цьому змінні базису повинні задовольняти наступним умовам:

- доповнюючої нежорсткості, тобто $w_i x_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$;
- невід'ємності базисного розв'язку, тобто праві частини рівнянь повинні бути невід'ємними у всіх таблицях.

Крок 2. Відзначимо, що обидві змінні w_s та x_s у таблиці 6.2 є небазисними. При введенні до базису однієї з цих змінних умова додатковості не порушується. Оскільки змінна w_s виведена з базису на попередній ітерації, природно ввести до базису змінну x_s . Отже, існує просте правило для вибору небазисної змінної що вводиться до базису. До базису завжди вводиться змінна, додаткова до базисної змінної, що виведена з базису на попередній ітерації. Це правило називається правилом доповнюючої нежорсткості.

Після обрання змінної, яка вводиться до базису, необхідно визначити ту базисну змінну, яка виводиться з базису. Для цього використовується правило мінімального відношення, аналогічне до правила, що застосовується у симплекс-методі для систем лінійних рівнянь. Застосування цього правила гарантує виконання умови невід'ємності базисного розв'язку. Таким чином, для визначення змінної, яку необхідно вивести з базису, слід розглянути сукупність відношень виду q'_i/m'_{is} для таких $i = 1, \dots, n$, що $m'_{is} > 0$.

Нехай

$$q'_k/m'_{ks} = \min_{m'_{is} > 0} (q'_i/m'_{is}).$$

Це означає, що базисну змінну w_k необхідно вивести з базису, а на її місце ввести змінну x_s . Нову таблицю отримуємо шляхом виконання ітерації методу виключення з m'_{is} як провідного елементу.

Крок 3.

Оскільки змінна w_k виведена з базису, то згідно з правилом доповнюючої нежорсткості змінну x_k необхідно ввести до базису. Всі наступні зміни базису виконуються описаним вище методом – методом Лемке.

Критеріями завершення роботи алгоритму є такі:

1. мінімальне відношення досягається у рядку s , а змінна z виводиться з базису. Тоді базисний розв'язок, отриманий за результатами ітерації методу виключення, – це розв'язок задачі додатковості;
2. правило мінімального відношення не може застосовуватись, оскільки всі коефіцієнти у провідному стовбці не є додатними. Це означає, що не існує розв'язку задачі. В цьому випадку кажуть, що задача додатковості має променевий розв'язок.

У [79] доведена збіжність описаного ітераційного методу розв'язку задачі додатковості за кінцеву кількість ітерацій, якщо виконується одна з наступних умов: всі елементи M є додатними, або додатними є головні мінори матриці M , тобто матриця M є додатно визначеною.

6.3. Основні методи розв'язування задач додатковості

На сьогодні існує багато методів розв'язку $NCP(F)$. Класичними методами є методи опорної точки [80, 81] та гомотопічні методи нерухомої точки [82, 81]. До сучасних методів відносяться методи, що базуються на

диференціальній оптимізації [83, 84, 85], проєкційні і проксимальні методи [86, 87, 88] та методи внутрішньої точки [89, 90].

Сучасні методи розробляються на основі переформулювань нелінійної задачі додатковості у систему нелінійних рівнянь з подальшим її розв'язком з використанням ньютонівських методів.

6.3.1. С-функції

Функція $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є С-функцією, якщо

$$\Psi(a, b) = 0 \Leftrightarrow [(a, b) \geq 0 \text{ та } a \cdot b = 0], \quad (6.6)$$

тобто С-функція дозволяє представити умови додатковості в одному рівнянні.

За допомогою будь-якої С-функції задачу у вигляді $\text{NCP}(F)$ можна переформулювати у систему рівнянь

$$0 = \Phi_{\Psi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \Psi(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \Psi(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix}.$$

Серед перших алгоритмів розв'язку $\text{NCP}(F)$ було багато таких, які включали гладкі переформулювання. Наприклад, у роботі [83] використано переформулювання у вигляді

$$\Phi_i(x) = (F_i(x) - x_i)^2 - |F_i(x)| |F_i(x) - x_i| x_i.$$

Основною перевагою гладких переформулювань $\text{NCP}(F)$ є те, що до них можуть бути застосовані методи ньютонівського типу без спеціальної переробки. Однак гладке переформулювання $\text{NCP}(F)$ має суттєвий недолік: швидка локальна збіжність досягається лише тоді, коли розв'язок є недегенеративним.

Нехай $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ є заданою функцією, для якої розглядається нелінійна задача додатковості $\text{NCP}(F)$. Розв'язок x^* для $\text{NCP}(F)$ називається:

- недегенеративним, якщо $x_i^* + F_i(x^*) > 0, \forall i = 1, \dots, n$;
- дегенеративним, якщо він не є недегенеративним, тобто існує хоча б один індекс $i \in \{1, \dots, n\}$ такий, що $x_i^* = 0$ та $F_i(x^*) = 0$.

Причиною цього є те, що у точці дегенеративного розв'язку x^* , матриця $\nabla F(x^*)$ є виродженою, а отже швидка локальна збіжність ньютонівського методу втрачається. На практиці дегенеративність зустрічається досить часто.

Тому в сучасних алгоритмах переважно застосовуються недиференційовані напіvgладкі переформулювання $\text{NCP}(F)$.

6.3.2. С-функції для негладких переформулювань задач додатковості

Для функції мінімуму

$$\Psi_{\min}(x) \equiv \min(a, b).$$

вектор x є розв'язком задачі

$$\text{NCP}(F) \Leftrightarrow \Phi_{\min}(x) \equiv \min(x, F(x)) = 0. \quad (6.7)$$

Отже система (6.7) може бути розширена до задачі додатковості. Наприклад, для функцій $G(x)$ та $H(x)$ маємо

$$[0 \leq G(x) \perp H(x) \geq 0] \Leftrightarrow \min(G(x), H(x)) = 0.$$

Розглянемо функцію Фішера-Бурмайстера

$$\Psi_{FB}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b), \quad \forall (a, b) \in \mathfrak{R}^2.$$

Функція Ψ_{FB} є С-функцією, причому Ψ_{FB}^2 є неперервно диференційованою.

Зазначимо, що вектори x та $F(x)$ задовольняють умовам додатковості, якщо та лише якщо:

$$0 = x - \pi_{\mathbb{R}_+^n}(x - F(x)),$$

де $\pi_{\mathbb{R}_+^n}(\cdot)$ позначає евклідов проектор на додатний ортант, а плюс-функція $(\cdot)_+$ визначена як:

$$(\xi)_+ = \max\{\xi, 0\}$$

для дійсного числа ξ . Для вектора x , вектор $(x)_+$ означає плюс-функцію, застосовану до всіх компонент x .

Розглянемо клас гладких апроксимацій функції $(x)_+ = \max\{0, x\}$ [91].

Відзначимо, що

$$(x)_+ = \int_{-\infty}^x \sigma(y) dy,$$

де функція стрибка

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y > 0 \\ 0, & \text{якщо } y \leq 0 \end{cases}.$$

Функція $\sigma(y)$ може бути представлена у вигляді

$$\sigma(y) = \int_{-\infty}^y \delta(\tau) d\tau,$$

де $\delta(\tau)$ – дельта функція Дірака, яка задовольняє умовам

$$\delta(\tau) \geq 0 \text{ та } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1.$$

Розглянемо кусково-неперервну функцію $D(x)$ з кінцевою кількістю відрізків, яка є функцією щільності, тобто задовольняє вимогам:

$$D(x) \geq 0 \text{ та } \int_{-\infty}^{+\infty} D(x) dx = 1.$$

Для параметризації функції щільності визначимо

$$\bar{t}(x, \beta) = \frac{1}{\beta} D\left(\frac{x}{\beta}\right),$$

де β є додатним параметром. Коли β прямує до 0, функція $\bar{t}(x, \beta)$ наближається до дельта функції Дірака $\delta(x)$. Таким чином визначається клас гладких апроксимацій, що описуються функціями

$$\bar{s}(x, \beta) = \int_{-\infty}^x \bar{t}(t, \beta) dt \approx \sigma(x)$$

та

$$\bar{p}(x, \beta) = \int_{-\infty}^x \bar{s}(t, \beta) dt \approx (x)_+.$$

Отже можна отримати апроксимацію плюс-функції шляхом дворазового інтегрування функції щільності.

Для переформулювання NCP (MiCP) також використовується оператор нормального відображення.

Оператор $\pi_{[l, u]}(\cdot)$ визначає евклідов проєктор на множину $[l, u]$.

Оператор $\pi_{[l, u]}(x)$ визначається покомпонентно, як:

$$\pi_{[l, u]}(x) = \begin{cases} l_i, & \text{якщо } x_i \leq l_i \\ u_i, & \text{якщо } x_i \geq u_i \\ x_i & \text{інакше} \end{cases}.$$

Нормальне відображення, визначене для функції F та множини $[l, u]$, є функцією $\Pi_{[l, u]}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданою як:

$$\Pi_{[l, u]}(x) = F(\pi_{[l, u]}(x)) + x - \pi_{[l, u]}(x).$$

Доведено [91], що для заданої MiCP (F, l, u) справедливими є твердження:

- якщо z є розв'язком MiCP (F, l, u) , то $\Pi_{[l, u]}(z - F(z)) = 0$;

- якщо $F_{[l,u]}(x) = 0$, то $\pi_{[l,u]}(x)$ є розв'язком $\text{MiCP}(F, l, u)$.

Тут $x = z - F(x)$, $z = \pi_B(x)$.

6.4. Локальні методи для негладких функцій

Алгоритм збігається локально, якщо для гарантування збіжності алгоритму вимагається приналежність початкової ітерації до прийнятого околу розв'язку.

Натомість алгоритм збігається глобально, якщо наведені вимоги щодо близькості початкової точки можуть бути опущені.

6.4.1. Диференціювання негладких функцій

Відображення $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ є диференційованим за Фреше (Fréchet), або F -диференційованим у точці $x \in \text{int } D$, якщо існує такий оператор $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1/\|h\|) \|F(x+h) - Fx - Ah\| = 0.$$

Оператор A є лінійним, позначається через $F'(x)$ та називається F -похідною відображення F у точці x .

Функція F є локально неперервною за Ліпшицем поблизу $x \in \mathbb{R}^n$, якщо існує $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ та постійна Ліпшиця $L = L(x) > 0$ такі, що

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in B_\varepsilon(x),$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма на $\mathbb{R}^n$.

Для функції дійсної змінної умова Ліпшиця є вимогою «не занадто швидкого» зростання або зниження величини цієї функції. Функція, яка має

такі властивості в околі певної точки не обов'язково має класичні похідні за напрямком в цій точці.

Нехай задана функція $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, де множина Ω є відкритою, функція F є локально неперервною за Ліпшицем на векторі $x \in \Omega$. При $m = n$ субдиференціал Булігана, або $B(\text{ouligand})$ -субдиференціал від F у точці $\bar{x}$ визначається як

$$\partial_B F(\bar{x}) \equiv \left\{ H \in \mathbb{R}^{m \times n} : H = \lim_{k \rightarrow \infty} JF(x^k) \right\},$$

для деякої послідовності $\{x^k\} \rightarrow \bar{x}$, $x^k \notin N_F$. Через N_F позначається незначна кількість точок, на яких функція F не є F -диференційованою.

Функція F називається B -диференційованою у точці $x \in X$, якщо функція F є диференційованою за напрямком d в x та

$$\|F(x+d) - F(x) - F'(x;d)\| = O(\|d\|) \quad \text{при } d \rightarrow 0.$$

При послабленні математичної строгості можна сказати, що функція F є B -диференційованою в x , якщо вона є диференційованою за напрямком в x та локально неперервною за Ліпшицем в околі x .

Якщо задана функція $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, де множина Ω є відкритою, функція F є локально неперервною за Ліпшицем на векторі $\bar{x} \in \Omega$, то узагальнений за Кларком (Clarke) якобіан визначається як:

$$\partial F(\bar{x}) \equiv \text{conv } \partial_B F(\bar{x}),$$

де $\text{conv } S$ – опукла оболонка множини S .

У випадку одновимірної функції, коли $m = 1$, $\partial F(\bar{x})$ називають узагальненим градієнтом від F на $\bar{x}$.

Узагальнений за Кларком якобіан часто називається узагальненим якобіаном Кларка від F .

Величина

$$\partial_C F(x)^T := \partial F_1(x) \times \dots \times \partial F_m(x)$$

визначає Qi-субдиференціал або C-субдиференціал від F в x , де права сторона позначає множину матриць, чий стовпець i є елементом узагальненого градієнту i -ї компонентної функції F_i . Для $m=1$ узагальнений градієнт та C-субдиференціал співпадають.

З визначень В-субдиференціалу, C-субдиференціалу та узагальненого якобіану Кларка, стає зрозумілим що, якщо $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ є неперервно диференційованою, то

$$\partial F(x) = \partial_B F(x) = \partial_C F(x) = \{F'(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

6.4.2. Узагальнені якобіани Кларка деяких C-функцій

Узагальнений градієнт функції $\Psi_{FB}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ у точці $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ є еквівалентним множині усіх $(g_a, g_b)^T \in \mathbb{R}^2$ з

$$(g_a, g_b) = \begin{cases} \left(\frac{a}{\|(a,b)\|} - 1, \frac{b}{\|(a,b)\|} - 1 \right), & \text{якщо } (a,b) \neq (0,0), \\ (\xi - 1, \zeta - 1), & \text{якщо } (a,b) = (0,0), \end{cases}$$

де (ξ, ζ) – будь-який вектор, що задовольняє умові $\|(\xi, \zeta)\| \leq 1$.

Узагальнений градієнт функції $\Psi_+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ є еквівалентним до $\partial \Psi_+(a,b) = (b_+ \partial a_+, a_+ \partial b_+)^T$, де

$$\partial x_+ = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0 \\ [0,1], & \text{якщо } x = 0. \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

Методику визначення В- та Qi-субдиференціалів можна знайти у роботах [73, 74].

Для функцій, визначених на множині дійсних чисел, узагальнений за Кларком градієнт може бути визначений певного типу похідною за напрямком.

Нехай функція $F : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задана та F є локально Ліпшицевою на відкритій множині Ω . Узагальнена похідна за Кларком від F в x за напрямком d визначається граничним співвідношенням

$$F^0(x, d) = \limsup_{y \rightarrow x, t \downarrow 0} \frac{F(y + t d) - F(y)}{t}.$$

Між $F^0(x, d)$ та $\partial F(x)$ існує зв'язок:

$$\partial F(x) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n, \xi^T d \leq F^0(x, d), \forall d \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

В результаті маємо

$$F'(x, d) \leq F^0(x, d),$$

де $F'(x, d)$ – звичайна похідна за напрямком.

Нехай функція $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною за Ліпшицем в околі необмеженого локального мінімуму x функції F . За таких умов

$$0 \in \partial F(x). \quad (4.8)$$

Якщо функція F опукла, тоді умова (6.8) є необхідною та достатньою для того, щоб x був глобальним необмеженим мінімумом функції F .

У розробках методів розв'язку систем негладких рівнянь, що виникають за результатами переформулювання $\text{MiCP}(F, I, u)$, важливе місце займає концепція напівгладкості. Напівгладкі функції представляють важливу підмножину локально неперервних за Ліпшицем функцій. Їх корисність пов'язана з тим, що екстремуми подібних функцій можуть бути знайдені із залученням ньютонівських методів.

Нехай $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ є не пустою та відкритою множиною. Функція $F : X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ називається напівгладкою в точці $x \in X$, якщо F є локально неперервною за Ліпшицем у околі x та якщо

$$\lim_{\substack{H \in \partial F(x+td') \\ d' \rightarrow d, t \downarrow 0}} Hd'$$

існує для всіх $d \in \mathfrak{R}^n$. Якщо функція F є напівгладкою у всіх $x \in X$, F називається напівгладкою на множині X .

Існує альтернативне визначення напівгладкості.

Нехай задана функція $F : \Omega \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, де Ω є відкритою множиною, функція F є локально неперервною за Ліпшицем на Ω . Функція F є напівгладкою у точці $\bar{x} \in \Omega$, якщо F є диференційованою за напрямком у околі $\bar{x}$, існує окіл $\Omega' \subseteq \Omega$ точки $\bar{x}$ та функція $\Delta : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ($\lim_{t \downarrow 0} \Delta(t) = 0$), такі що для будь-якого $x \in \Omega'$ відмінного від $\bar{x}$ виконується:

$$\frac{\|F'(x; x - \bar{x}) - F'(\bar{x}, x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} \leq \Delta(\|x - \bar{x}\|).$$

Якщо наведена вище вимога посилюється до:

$$\lim_{\bar{x} \neq x \rightarrow \bar{x}} \sup \frac{\|F'(x; x - \bar{x}) - F'(\bar{x}, x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} < \infty$$

функція F є сильно напівгладкою в $\bar{x}$.

За визначенням, якщо F є напівгладкою в $\bar{x}$ то похідна за напрямком $F'(\bar{x}, x - \bar{x})$ забезпечує хорошу апроксимацію для $F(x)$ для всіх x , що є істотно близькими до $\bar{x}$. Похідна за напрямком $F'(\bar{x}, x - \bar{x})$ може бути апроксимована з добрим ступенем точності шляхом використання будь-якого елемента узагальненого якобіана від F в x .

Таким чином, напівгладкі функції займають проміжне місце між Ліпшицевими функціями та диференційованими функціями.

Важливо, що сильно напівгладкими є наступні C -функції:

- функція Фішера-Бурмайстера $\Psi_{FB}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b)$;
- функція мінімуму $\Psi_{min}(x) = \min(a, b)$;
- плюс-функція $(\xi)_+ = \max\{\xi, 0\}$;
- нормальне відображення $\Pi_{[l, u]}(x) = F(\pi_{[l, u]}(x)) + x - \pi_{[l, u]}(x)$.

6.4.3. Базові методи ньютонівського типу

Ключовою ідеєю у загальному методі ньютонівського типу є заміна функції F її апроксимацією на кожній ітерації, що в результаті призводить до послідовності апроксимативних задач, які можуть бути розв'язані відносно легко. Розв'язок поточної апроксимованої задачі приймається у якості початкового наближення для нової ітерації і процес повторюється.

Якщо F є неперервно диференційованою, то ньютонівський метод розв'язку нелінійних систем рівнянь виду

$$F(x) = 0$$

генерує послідовність $\{x^k\}$ згідно наступного правила:

$$x^{k+1} = x^k - \left(F'(x^k)\right)^{-1} F(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.9)$$

де $x^0 \in \mathfrak{R}^n$ є початковою точкою.

Оскільки $x^{k+1} = x^k + d^k$, то у випадку гладкості F маємо

$$F(x^k) + JF(x^k) d^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

де $JF(x^k)$ – яacobіан функції $F(x^k)$.

Для негладкого випадку, якщо F є лише локально неперервною за Ліпшицем, вказану формулу можна замінити на

$$F(x^k) + H^k d^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

де H_k є елементом В-субдиференціалу $\partial_B F(x^k)$, С-субдиференціалу $\partial_C F(x^k)$ або узагальненого якобіану Кларка $\partial F(x^k)$.

Є дві особливості, які необхідно враховувати при використанні ньютонівського методу: лінійна апроксимація (6.9) повинна забезпечувати добру апроксимацію $G \approx F$ поблизу x^k а результуюче лінійне рівняння повинно мати розв'язок, тобто $JF(x^k)$ підлягає оберненню. Ці дві особливості залежать від неперервної диференційованості F та від невинродженості $JF(x^k)$.

Безпосереднє використання гладких ньютонівських методів для негладких функцій шляхом заміни якобіану на елемент узагальненого якобіану Кларка не дає результату [71]. Альтернативним підходом є використання напівгладких функцій, для яких узагальнений якобіан Кларка забезпечує ньютонівську схему апроксимації [71].

6.4.4. Напівгладкі ньютонівські методи

Розглянемо ньютонівські методи розв'язку негладких систем рівнянь. Використання таких методів зводить розв'язок задачі МіСР до послідовності розв'язків з квадратичними функціоналами. Однією з головних переваг напівгладких методів ньютонівського типу є те, що вони дуже схожі на класичні методи для гладких функцій та зберігають основні характеристики збіжності останніх методів при застосуванні до напівгладких систем.

Розглянемо систему $F(x)=0$, де F є напівгладкою. У [71] показано, що при застосуванні узагальненого за Кларком Якобіану $\partial F(x)$ за умов невинродженості, наступний алгоритм є локально добре визначеним та збігається Q-суперлінійно.

Алгоритм 6.1. Напівгладкий ньютонівський метод.

Дано: початкова точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

1. Встановлюємо $k = 0$.
2. Якщо $F(x^k) = 0$, тоді зупиняємо пошук.
3. Обираємо елемент $H^k \in \partial F(x^k)$. Знаходимо напрямок $d^k \in \mathbb{R}^n$ як розв'язок лінійної системи рівнянь

$$F(x^k) + H^k d^k = 0. \quad (6.10)$$

4. Встановлюємо $x^{k+1} = x^k + d^k$ та $k \leftarrow k + 1$.
 5. Переходимо до кроку 2.
-

Алгоритм 6.1. може практично застосовуватись, оскільки (6.10) є системою лінійних рівнянь, які мають унікальний розв'язок. Оскільки H^k є невідродженим, всі узагальнені якобіани Кларка від F у точці розв'язку x^* є невідродженими та x^k є достатньо близьким до x^* .

У [71] показано, що послідовність $\{x^k\}$, що генерується алгоритмом 6.1. є добре визначеною та збігається Q -суперлінійно до розв'язку x^* . Більш того, якщо F є сильно напівгладкою в x^* , тоді ступінь збіжності є Q -квадратичним.

Алгоритм 6.2. Напівгладкий неточний ньютонівський метод.

Дано: початкову точку $x^0 \in \mathbb{R}^n$ та послідовність скалярів $\{\eta_k \geq 0\}$.

1. Встановлюємо $k = 0$.
2. Якщо $F(x^k) = 0$, тоді зупиняємо пошук.

3. Обираємо елемент $H^k \in \partial F(x^k)$ та знаходимо напрямок $d^k \in \mathfrak{R}^n$ як розв'язок лінійної системи рівнянь

$$F(x^k) + H^k d^k = r^k, \quad (6.11)$$

де $r^k \in \mathfrak{R}^n$ – вектор, що задовольняє вимогам

$$\|r^k\| \leq \eta_k \|F(x^k)\|.$$

4. Встановлюємо $x^{k+1} = x^k + d^k$ та $k \leftarrow k+1$.

5. Переходимо до кроку 2.
-

У [70] показано, що неточний Алгоритм 6.2 генерує добре визначену послідовність $\{x^k\}$, що збігається Q -лінійно до розв'язку x^* . Якщо $\eta_k \rightarrow 0$, то ступінь збіжності є Q -суперлінійним. Нарешті, якщо F є сильно напівгладкою в x^* і існує $\tilde{\eta} > 0$ таке, що для всіх k $\eta_k \leq \tilde{\eta} \|F(x^k)\|$, то ступінь збіжності є Q -квадратичним.

Алгоритми 6.1 та 6.2 вимагають на кожній ітерації розв'язку (точно або неточно) лінійної системи рівнянь з матрицею $H^k \in \partial F(x^k)$, яка зазвичай є несиметричною. Також для цієї матриці теоретично гарантується невідродженість. На практиці, оскільки ітераційний розв'язок x^k не обов'язково є достатньо близьким до розв'язку x^* , система може бути виродженою або погано визначеною.

Алгоритм 6.3. Напівгладкий неточний метод Левенберга-Марквардта.

Дано: початкову точку $x^0 \in \mathfrak{R}^n$ та дві послідовності скалярів $\{\sigma_k \geq 0\}$, $\{\eta_k \geq 0\}$.

1. Встановлюємо $k = 0$.

2. Якщо $F(x^k) = 0$, тоді зупиняємо пошук.
3. Обираємо елемент $H^k \in \partial F(x^k)$ та знаходимо напрямок $d^k \in \mathbb{R}^n$ такий що:

$$\left((H^k)^T H^k + \sigma_k I \right) d^k = - (H^k)^T F(x^k) + r^k, \quad (6.12)$$

де $r^k \in \mathbb{R}^n$ – вектор, що задовольняє умові

$$\|r^k\| \leq \eta_k \left\| (H^k)^T F(x^k) \right\|$$

4. Встановлюємо $x^{k+1} \equiv x^k + d^k$ та $k \leftarrow k+1$.
 5. Переходимо до кроку 2.
-

Єдиною визначальною різницею між Алгоритмом 6.3 та Алгоритмом 6.2 є те, що лінійна система рівнянь (6.11) представлена через (6.12). Розв'язок останньої системи може мати певні особливості. По-перше, матриця $(H^k)^T H^k + \sigma_k I$ є симетричною та додатно визначеною, якщо $\sigma_k > 0$. По-друге, якщо ітерації не призводять до суттєвого наближення до регулярного розв'язку, тоді матриця H^k може бути виродженою, або близькою до виродженої, що виражається у поганий обумовленості лінійної системи (6.12). Такому перебігу подій у Алгоритмі 6.3 можна запобігти у разі прийнятного вибору σ_k . Обґрунтування такого вибору обговорюється у [93].

Таким чином модифікована система (6.12) є симетричною. Коли H^k є невиродженою, система (6.12.) з $\sigma_k = 0$ та $r^k = 0$ еквівалентна (6.10). Загалом система рівнянь

$$(H^k)^T H^k d = - (H^k)^T F(x^k)$$

еквівалентна задачі

$$\min (F(x^k) + H^k d^k)^T (F(x^k) + H^k d^k).$$

У роботі [73] наводяться умови збіжності Алгоритму 6.3.

6.4.5. Проекційний метод Левенберга-Марквардта

У змішаних задачах додатковості, зустрічаються нелінійні рівняння з прямокутними обмеженнями. Тому для забезпечення збіжності необхідно, щоб ітераційні розв'язки методу Левенберга-Марквардта залишались у межах цих обмежень.

Нехай $m > n$ та $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}^m$ є напіvgладкою функцією, яка визначена на відкритому околі $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{R}^n$ для прямокутного обмеження $\mathbf{B} := [l, u]$. Тут i надалі нижні границі $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ та верхні границі $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ задовольняють умовам $-\infty < l_i < u_i < +\infty$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Розглянемо прямокутно обмежену систему рівнянь

$$F(x) = 0, \quad x \in \mathbf{B},$$

що еквівалентно задачі квадратичної оптимізації з прямокутними обмеженнями:

$$\min \frac{1}{2} \|F(x)\|^2, \quad x \in \mathbf{B}.$$

Оскільки всі границі можуть бути невизначеними, це формулювання включає задачу квадратичної оптимізації без обмежень.

Замінюючи В-субдиференціал на С-субдиференціал у Алгоритмі 6.3, отримуємо ітеративну процедуру за формулою

$$x^{k+1} = x^k + p_{LM}^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

де p_{LM}^k є розв'язком лінійної системи рівнянь

$$\left((H^k)^T H^k + \sigma_k I \right) p_{LM}^k = - (H^k)^T F(x^k), \quad H^k \in \partial_C G(x^k). \quad (6.13)$$

Отже, коли всі або деякі з границь є визначеними, розглянемо наступний проекційний метод Левенберга-Марквардта:

$$x^{k+1} = x^k + p_{PLM}^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

Величина

$$p_{PLM}^k = \pi_{\mathbf{B}}(x^k + p_{LM}^k) - x^k$$

визначає необмежений напрямок спуску Левенберга-Марквардта, що задовільняє системі рівнянь (6.13).

В результаті отримуємо метод, який реалізує наступний алгоритм.

Алгоритм 6.4. Напівгладкий проєкційний метод Левенберга-Марквардта.

Дано: початкова точка $x^0 \in \mathbf{B}$ та послідовність $\{\sigma_k\}$ додатних скалярів.

1. Встановлюємо $k = 0$
2. Якщо $F(x^k) = 0$, тоді зупиняємо пошук.
3. Обираємо елемент $H^k \in \partial_C F(x^k)$ та знаходимо напрямок $p_{LM}^k \in \mathfrak{R}^n$ такий що

$$\left((H^k)^T H^k + \sigma_k I \right) p_{LM} = - (H^k)^T F(x^k),$$

4. Встановлюємо $x^{k+1} = x^k + p_{PLM}^k$, де $p_{PLM}^k = \pi_{\mathbf{B}}(x^k + p_{LM}^k) - x^k$.
 5. Встановлюємо $k \leftarrow k + 1$ та переходимо до кроку 2.
-

Умови збіжності Алгоритму 6.4 представлено у роботі [73].

6.5. Глобальні методи для негладких функцій

Методи ньютонівського типу та метод Левенберга-Марквардта, розглянуті вище, демонструють швидку локальну збіжність за прийнятних

умов. Отримання послідовності ітераційних розв'язків, які призводять до глобальної збіжності є зазвичай більш складним питанням.

Для ситуації, коли хороший початковий розв'язок є недоступним, виникає необхідність розробки алгоритмів, що збігаються глобально, та допускають початковий вектор, який може бути далеким від точки розв'язку системи рівнянь, що розглядається.

Для рівняння:

$$F(x) = 0; \quad x \in X \quad (6.14)$$

часто розглядається оціночна функція.

Функція $\theta: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ називається оціночною функцією для нелінійної задачі додатковості або змішаної задачі додатковості – $\text{NCP}(F)$ або $\text{MiCP}(F, I, u)$, якщо вона має дві наступні властивості:

- а) $\theta(x) \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n$;
- б) $\theta(x) = 0$, якщо і лише якщо x є розв'язком $\text{NCP}(F)$ або $\text{MiCP}(F, I, u)$, відповідно.

Наведене визначення охоплює значний клас функцій. Для того щоб бути корисною на практиці, оціночна функція повинна задовольняти додатковим властивостям, таким як неперервна диференційованість. У цьому випадку легко забезпечити глобальну збіжність алгоритму, використовуючи градієнт оціночної функції.

Оціночні функції є базою для розробки алгоритмів, що збігаються глобально, для розв'язку задачі (6.14.), оскільки вони дозволяють надати цій задачі нову форму – глобальної задачі мінімізації:

$$\min \theta(x) \quad \text{за умови} \quad x \in X.$$

Наступна функція є оціночною функцією для нелінійної задачі додатковості $\text{NCP}(F)$:

- а) Для заданого рівняння переформулювання задачі додатковості $\text{NCP}(F)$, виконаного за допомогою C -функції $\Psi: \Phi_\Psi(x)=0$, оціночна функція (на основі функції норми) становить:

$$\theta(x) := \frac{1}{2} \Phi_\Psi(x)^T \Phi_\Psi(x) = \frac{1}{2} \|\Phi_\Psi(x)\|^2.$$

Наведена оціночна функція, пов'язана з $\Phi_\Psi \in \{\Phi_{\min}, \Phi_{FB}\}$, буде позначатись як $\theta_{\min}, \theta_{FB}$, відповідно, де $\Phi_{\min}$ – функція мінімуму, Φ_{FB} – функція Фішера-Бурмайстера.

- б) Інша класична оціночна функція базується на нормальному відображенні

$$\theta_+(x) := \|F_+(x) + x - x_+\|.$$

Оціночні функції $\theta_{\min}$ та θ_+ є, загалом, недиференційованими. З іншого боку θ_{FB} є неперервно диференційованою (незважаючи на той факт, що наведений вище оператор Φ_{FB} є негладким). Отже, навіть якщо на перший погляд переформулювання $\text{NCP}(F)$ з використанням оператора $\Phi_{\min}$ має очевидні переваги у порівнянні з оператором Φ_{FB} , глобалізація локального методу є набагато простішим питанням для Φ_{FB} .

Нехай функція $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ є неперервно диференційованою. Тоді оціночна функція θ_{FB} є неперервно диференційованою з $\nabla \theta_{FB}(x) = H^T \Phi_{FB}(x)$ для будь-якого $H \in \partial_C \Phi_{FB}(x)$.

Оскільки найбільш часто використовувані оціночні функції є один раз неперервно диференційованими, то звичайні методи мінімізації для розв'язку задач додатковості розглядати не можна.

6.5.1. Методи лінійного пошуку

Методи, представлені у розділі 6.4, дозволяють розрахувати на кожній ітерації новий напрямок $d^k \neq 0$, за допомогою якого можна отримати новий наближений розв'язок. Якщо попередній ітераційний розв'язок не є суттєво близьким до розв'язку задачі, то може статись, що новий ітераційний розв'язок не буде ближчим до бажаного розв'язку, що може привести до стагнації і навіть до розбіжності методу. Для запобігання цього явища, стратегія лінійного пошуку масштабує пересування за обраним напрямком з додатним скаляром $\tau_k \leq 1$. Вибір цього параметру може бути здійснений з використанням оціночних функцій, визначених вище.

Розглянемо задачу мінімізації один раз неперервно диференційованої функції $\theta(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Для заданого вектору x^0 , алгоритм лінійного пошуку генерує послідовність $\{x^k\}$, яка має вигляд:

$$x^{k+1} = x^k + \tau_k d^k, k = 0, 1, \dots,$$

де $d^k \neq 0$ є напрямком пошуку, а τ_k є розміром кроку. Точне визначення d^k та τ_k на кожній ітерації відрізняють конкретний алгоритм від інших. Для випадку, коли θ є нормою функції F можна передбачити, що стаціонарна точка для θ буде нулем для F .

Нехай x^k є заданою нестаціонарною точкою. Тоді існує $\nabla \theta(x^k) \neq 0$. Для ненульового вектору d^k розглядається вектор $x^k + \tau d^k$ для $\tau \in (0, 1]$. Відповідно:

$$\theta(x^k + \tau_k d^k) = \theta(x^k) + \tau \nabla \theta(x^k)^T d^k + o(\tau).$$

Якщо d^k задовольняє умовам спуску

$$\nabla \theta(x^k)^T d^k < 0, \quad (6.15)$$

то для будь-якої постійної $\gamma \in (0,1)$ існує $\bar{\tau}_k \in (0,1]$ таке, що для всіх $\tau \in [0, \bar{\tau}_k]$ виконується умова:

$$\theta(x^k + \tau_k d^k) \leq \theta(x^k) + \gamma \tau \nabla \theta(x^k)^T d^k.$$

Зокрема при τ_k обраному таким як τ , отримуємо

$$\theta(x^{k+1}) \leq \theta(x^k) + \gamma \tau \nabla \theta(x^k)^T d^k.$$

Існує багато варіантів напрямку d^k , які задовольняють (6.15.). Множину таких напрямків можна задати через вираз

$$d^k = -M^k \nabla \theta(x^k)$$

для кожної симетричної додатно визначеної матриці M^k . Задаючи M^k одиничною матрицею отримуємо напрямок найшвидшого спуску $d^k = -\nabla \theta(x^k)$.

Якщо матриця Гессе $\nabla^2 \theta(x^k)$ існує і є додатно визначеною, тоді $M^k = \nabla^2 \theta(x^k)$ визначає «напрямок Ньютона»:

$$d_N^k = -(\nabla^2 \theta(x^k))^{-1} \nabla \theta(x^k).$$

Існує багато стратегій лінійного пошуку [93], які забезпечують необхідну довжину кроку τ_k . Часто використовується правило лінійного пошуку Арміго-Голдштайна (Armijo–Goldstein) [95, 97], яке для заданого параметру $\beta \in (0,1)$, наприклад $\beta = 1/2$, застосовується для оцінки оціночної функції на послідовності точок $\{x^k + \beta^i d^k | i = 0, 1, \dots\}$ допоки не буде знайдена така довжина кроку $\tau_k = \max\{\beta^i | i = 0, 1, \dots\}$, що

$$\theta(x^k + \tau_k d^k) \leq \theta(x^k) + \gamma \tau \nabla \theta(x^k)^T d^k.$$

Алгоритм лінійного пошуку дозволяє визначити d^k , що є напрямком спуску, та забезпечує, що θ є неперервно диференційованою. Узагальнення

правила Армїго (Armijo) для випадку В-диференційованої оціночної функції θ дозволяє отримати таку послідовність $\{\theta(x^k)\}$, що $\theta'(x^k, d^k) < 0$. За аналогією до класичного правила Армїго довжина кроку задається через $\tau_k = \beta^{i_k}$, де i_k є першим невід'ємним цілим i , для якого

$$\theta(x^k + \beta^i d^k) \leq \theta(x^k) + \gamma \beta^i \theta'(x^k; d^k).$$

Наведемо алгоритм мінімізації В-диференційованої функції θ на опуклій множині X . Цей алгоритм може бути застосований, якщо θ є неперервно диференційованою.

Алгоритм 6.5. Метод лінійного пошуку.

Дано: початкову точку $x^0 \in B$, та константи: $\rho > 0$, $p > 2$, $\sigma \in (0, 1/2)$.

1. Встановлюємо $k = 0$.
2. Якщо x^k задовольняє умові зупинки, тоді зупиняємо пошук.
3. Обираємо елемент $H^k \in \partial_B \Phi(x^k)$ та знаходимо розв'язок d^k системи рівнянь

$$H^k d^k = -\Phi(x^k).$$

Якщо ця система рівнянь не має розв'язку, або якщо умова

$$\nabla \theta(x^k)^T d^k \leq -\rho \|d^k\|^p$$

не задовольняється, тоді встановлюємо $d^k = -\nabla \theta(x^k)$.

4. Знаходимо найменше невід'ємне ціле i_k таке що для $i = i_k$

$$\theta(x^k + 2^{-i} d^k) \leq \theta(x^k) + \sigma 2^{-i} \nabla \theta(x^k)^T d^k.$$

5. Встановлюємо $x^{k+1} = x^k + 2^{-i_k} d^k$ та $k \leftarrow k + 1$.

6. Переходимо до кроку 2.
-

При застосуванні θ_{FB} напрямок Левенберга-Марквардта набуває вигляд:

$$d^k = -\left(H^k H^k + \sigma_k I\right)^{-1} \nabla \theta(x^k).$$

Відповідно, напрямок Левенберга-Марквардта є напрямком спуску для θ_{FB} .

6.5.2. Стратегія проксимального збурення

Ідея алгоритму спуску [74] полягає у мінімізації невід'ємної оціночної функції θ . Якщо F є сильно монотонною, легко побудувати оціночну функцію, яка має глобальний мінімум, але не має інших локальних мінімумів. Тоді досить просто знайти точку глобального мінімуму для θ та отримати розв'язок МіСР.

Якщо функція F не є монотонною, обрана оціночна функція буде у будь-якому випадку містити локальний мінімум, для якого $\theta \neq 0$. Тоді алгоритм може припинити роботу у подібному локальному мінімумі, а не у розв'язку.

Для подолання цієї проблеми необхідно знайти певний метод додання локального мінімуму. Це може бути зроблене шляхом побудови покращеної стартової точки $\tilde{x}$, для якої величина оціночної функції $\theta(\tilde{x})$ є меншою величини $\theta(x^k)$ у точці локального мінімуму. Оскільки згідно правила спуску величина θ не може зростати, ітераційні процедури можуть бути розпочаті знову у $\tilde{x}$ з гарантією, щодо не повернення до локального мінімуму.

Нехай базовий алгоритм зупинився у точці x^0 . Стратегія полягатиме у розв'язку послідовності збурених задач, що генерують послідовність розв'язків $\{x^k\}$, які ведуть до покращеної стартової точки $\tilde{x}$. Збурена задача, що розв'язується, базується на наступному збуренні функції F : для заданої центральної точки $\bar{x} \in \mathbf{B}$ та числа $\lambda > 0$ нехай

$$F^{\lambda, \bar{x}}(x) = F(x) + \lambda(x - \bar{x}).$$

Якщо F є неперервною за Ліпшицем, то для достатньо великого λ , $F^{\lambda, \bar{x}}$ є сильно монотонною. Отже, базовий алгоритм зможе розв'язати збурену задачу $\text{MiCP}(F^{\lambda, \bar{x}}, \mathbf{B})$.

При істотно великому λ можна згенерувати послідовність ітерацій так: для заданої точки x^0 , для $k = 0, \dots$, x^{k+1} обирається як розв'язок $\text{MiCP}(F^{\lambda, \bar{x}}, \mathbf{B})$. Відзначимо, що будь-яка підзадача у послідовності використовує одну величину λ , але різні центральні точки $\bar{x}$. Зокрема, центральна точка $(\bar{x})$ для однієї підзадачі є розв'язком попередньої задачі.

6.5.3. Алгоритм пошуку маршруту

Задачу $\text{MiCP}(F, \mathbf{B})$ з $\mathbf{B} = \{z \mid l \leq z \leq u\}$ можна представити у вигляді рівняння [92]:

$$\Pi_{\mathbf{B}}(x) = 0, \quad (6.16)$$

де $\Pi_{\mathbf{B}}$ є нормальним відображенням для F та прямокутної множини $\mathbf{B}: l \leq z \leq u$, а саме

$$\Pi_{\mathbf{B}}(x) = F(\pi_{\mathbf{B}}(x)) + x - \pi_{\mathbf{B}}(x). \quad (6.17)$$

Внаслідок застосування оператора проєктування $\pi_{\mathbf{B}}$ ця функція є негладкою.

Взаємозв'язок між переформулюванням (6.16) та $\text{MiCP}(F, l, u)$ полягає у наступному:

- якщо z розв'язує $\text{MiCP}(F, l, u)$, то $\Pi_{[l, u]}(z - F(z)) = 0$;
- якщо $F_{[l, u]}(x) = 0$, то $\pi_{[l, u]}(x)$ розв'язує $\text{MiCP}(F, l, u)$,

де $x = z - F(x)$ та $z = \pi_{\mathbf{B}}(x)$.

Завдяки кусково-лінійній природі оператора $\pi_{\mathbf{B}}(x)$ у загальному випадку неможливо апроксимувати $\Pi_{\mathbf{B}}$ лінійною функцією.

Апроксимація першого порядку для $\Pi_{\mathbf{B}}$ (6.17) у точці x^k є апроксимацією на базі точки, отриманої шляхом лінеаризації $F(z) \approx F(z^k) + \nabla F(z^k)(z - z^k)$ у околі $z = \pi_{\mathbf{B}}(x)$ [94]. Це призводить до апроксимації правої частини рівняння (6.17) функцією A_k виду

$$A_k(x) = F(\pi_{\mathbf{B}}(x^k)) + \nabla F(\pi_{\mathbf{B}}(x^k))(\pi_{\mathbf{B}}(x) - \pi_{\mathbf{B}}(x^k)) + x - \pi_{\mathbf{B}}(x). \quad (6.18)$$

Наведений вираз є еквівалентним представленням $\text{LMiCP}(M, q, \mathbf{B})$, оскільки

$$A_k(x) := M\pi_{\mathbf{B}}(x) + q + x - \pi_{\mathbf{B}}(x),$$

де $M = \nabla F(\pi_{\mathbf{B}}(x^k))$ та $q = F(\pi_{\mathbf{B}}(x^k)) - M\pi_{\mathbf{B}}(x^k)$.

Ньютонівська точка x_N^k є точкою мінімуму для лінійної апроксимації A_k . Ця точка може не бути унікальною.

Маршрут між поточною точкою x^k та ньютонівською точкою x_N^k узагальнює напрямок Ньютона d^k для гладкого випадку та слугує двом задачам: надає ньютонівську точку та покращує властивості збіжності алгоритму.

Замість спроби знаходження нуля апроксимації A_k безпосередньо, апроксимація (6.18.) розглядається як LMiCP . В результаті отримуємо кусочно-лінійний маршрут, що конструюється з використанням методу Лемке, при цьому кожний крок методу Лемке дає новий лінійний відрізок маршруту. Маршрут, що створюється так, є маршрутом до ньютонівської точки x_N^k .

Існує простий взаємозв'язок між змінними, що використовуються у методі Лемке, та змінними у переформулюванні (6.16.), що дозволяє перехід від $x \in \mathfrak{R}^n$ до $z \in \mathbf{B} \subset \mathfrak{R}^n$ та навпаки.

Встановимо:

$$z = \pi_{\mathbf{B}}(x),$$

$$v = (x - z)_+,$$

$$w = (z - x)_+.$$

Оскільки v та w є додатною та від'ємною частинами від $x - z$, то

$$v - w = x - z \text{ та } x = z - w + v,$$

де

$$w \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w^T v = 0,$$

$$z \in \mathbf{B},$$

$$z = \pi_{\mathbf{B}}(z - w + v).$$

Зрозуміло, що існує відповідність між трійками (z, w, v) та точками $x \in \mathfrak{R}^n$. Більш того, вектор x є точним розв'язком системи рівнянь $\Pi_{\mathbf{B}}(x) = 0$, якщо його компоненти (z, w, v) є розв'язком МіСР та навпаки.

Функція апроксимації A_k може бути сформована з використанням компонент x у вигляді

$$0 = A_k(x) = M\pi_{\mathbf{B}}(x) + q + x - \pi_{\mathbf{B}}(x) = Mz + q - w + v \quad (6.19)$$

де (z, w, v) складають x . У виразі (6.19) розраховується екстремум для апроксимації A_k . У процесі розв'язку (6.19) формуються допустимі трійки (z, w, v) ; вектори x^k складаються з трійок уздовж маршруту.

Маршрут у $\mathfrak{R}^n$ є неперервною функцією $p: [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^n$, де $T \in [0, 1]$. ньютонівський маршрут задовольняє наступним додатковим умовам:

$$p^k(0) = x^k, \quad (6.20)$$

$$A_k(p^k(t)) = (1 - t)\Pi_{\mathbf{B}}(x^k), \quad \forall t \in [0, T] \quad (6.21)$$

Відзначимо, що (6.21) передбачає, що норма апроксимації, як функції від $1 - t$, у точках на p лінійно зменшується, та, що точка $p(1)$ є ньютонівською точкою ($1 - t = 1 - 1 = 0$).

Якщо допустима множина для z становить $\mathbf{B} = \mathfrak{R}_+^n$, то апроксимація (6.19) звужується до лінійної задачі додатковості (LCP), до якої застосовується метод Лемке.

Розглянемо стратегію глобальної збіжності процедур пошук маршруту.

У збіжному ньютонівському методі пошуку маршруту для знаходження нуля функції $\Pi_{\mathbf{B}}$ маршрут від x^k до x_N^k шукається до точки, що задовольняє певним умовам спуску. Умовами спуску часто є істотне зменшення норми $\Pi_{\mathbf{B}}$ або іншої оціночної функції. Отже, оскільки маршрут розраховано з метою знаходження нуля для A^k , наступний ітераційний розв'язок буде точкою маршруту зі зменшеною оціночною функцією. У гладкому випадку ньютонівський напрямок прямує до нуля апроксимації та слугує напрямком спуску для оціночної функції. Маршрут має аналогічні властивості.

Нагадаємо (6.21), що норма апроксимації A^k знижується до нуля лінійно пропорційно $(1-t)$ на шляху p . Нехай $\sigma \in (0,1)$ тоді

$$\|\Pi_{\mathbf{B}}(p(t))\| = \|A^k(p(t)) + o(t)\| = (1-t) \|\Pi_{\mathbf{B}}(x^k) + o(t)\| \leq (1-\sigma t) \|\Pi_{\mathbf{B}}(x^k)\| \quad (6.22)$$

для певного $\bar{t} \in (0,1)$ та всіх $t \in [0, \bar{t})$. Отже, норма від $\Pi_{\mathbf{B}}$ знижується на відрізку маршруту поблизу 0, тобто $p \in$ «маршрутом спуску» для $\Pi_{\mathbf{B}}$.

Для розв'язку $F(x) = 0$ оціночною функцією може бути функція норми для F у вигляді

$$\theta(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x).$$

В цьому випадку ньютонівський напрямок $d^k = -\nabla F(x^k)^{-1} F(x^k)$ є напрямком спуску для $\theta(\cdot)$, оскільки $\theta'(x^k) d^k = -F(x^k)^T F(x^k) < 0$.

З метою знаходження величини t , яка задовольняє (6.22), може бути виконаний пошук Арміго [95, 96] на маршруті p . При типовій реалізації

такої техніки обирається параметр $\gamma \in (0,1)$, та точки $p(1), p(\gamma^1), p(\gamma^2), \dots$ випробовуються допоки не буде знайдена величина t , для якої

$$\| \Pi_{\mathbf{B}}(p(t)) \| \leq (1 - \sigma t) \| \Pi_{\mathbf{B}}(x^k) \|.$$

У гладкому випадку маршрут p складається з лінії між x^k до x_N^k , отже зберігання інформації щодо p та розрахунок $p(t)$ не є надзвичайним завданням.

Якщо маршрут p є кусково-лінійним, то необхідно модифікувати стандартну техніку лінійного пошуку для застосування спеціальної форми маршруту.

Пошук маршруту вперед перевіряє чи задовольняється умова спуску (6.22) при конструюванні маршруту. Припускаючи, що кожен крок Лемке у алгоритмі генерації маршруту призводить до зростання величини t від t_{old} до t_{new} пошук вперед гарантує, що t_{new} задовольняє (6.22). Генерація маршруту припиняється коли знайдена Ньютонівська точка або коли черговий крок Лемке призводить до неприйнятної величини t_{new} . В останньому випадку лінійний сегмент між $p(t_{old})$ та $p(t_{new})$ шукається для прийнятної точки, яка стає новим ітеративним розв'язком x^{k+1} . Основною перевагою пошуку вперед є простота, маршрут знаходиться так як він конструюється, отже відсутня необхідність у збереженні даних. Однак, при пошуку вперед прийнятна Ньютонівська точка може існувати на кінці маршруту, який був відкинутий внаслідок невиконання (6.22) у середні маршруту.

Для алгоритму пошуку маршруту також може застосовуватись техніка немонотонної стабілізації.

6.5.4. Метод довірчої області

Розглянемо задачу мінімізації

$$\min \theta(x) \quad \text{за умови} \quad x \in X.$$

На кожній ітерації методу лінійного пошуку розраховується напрямок пошуку d^k , після чого визначається розмір кроку. Один зі шляхів розуміння підзадачі пошуку напрямку є апроксимація оригінальної задачі з цільовою функцією $\theta(x)$:

$$\theta(x) \approx \theta(x^k) + \theta'(x^k, x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H^k (x - x^k)$$

У методі довірчої області, функція з правого боку береться як модельна функція, яка є хорошою апроксимацією для θ у певній області $B(x^k, \Delta)$ для якої $\Delta > 0$. У цій області мінімізують модельну функцію та приймають отриманий таким чином розв'язок у якості нового ітераційного розв'язку x^{k+1} . На підставі оцінки зменшення оціночної функції за результатами здійсненої ітерації приймається рішення щодо зменшення або збільшення радіусу Δ довірчої області.

Розглянемо простий випадок необмеженої мінімізації двічі неперервно диференційованої функції θ . Якщо норма $\|d^k\|$ є суттєво малою, то розклад Тейлора має вигляд:

$$\theta(x^k + d) \approx \theta(x^k) + \nabla \theta(x^k)^T d^k + \frac{1}{2}(d^k)^T \nabla^2 \theta(x^k) d^k,$$

що кореспондується з $H^k = \nabla^2 \theta(x^k)$. Тоді природною ідеєю є мінімізація квадратичної апроксимізації з метою знаходження зручного напрямку d^k . Необхідно врахувати дві особливості задачі: квадратична функція може бути необмеженою знизу; її розв'язок може лежати за межами області, у якій квадратична функція добре апроксимує функцію θ поблизу x^k . Таким чином можна розглянути наступну підзадачу знаходження напрямку:

$$\min \nabla \theta(x^k)^T d + \frac{1}{2}(d^k)^T \nabla^2 \theta(x^k) d^k \quad \text{за умови} \quad \|d^k\| \leq \Delta \quad (6.23)$$

де Δ – є додатним скаляром, який представляє радіус області, де ми припускаємо точність квадратичної апроксимації. Відзначимо, що задача (6.23) завжди має кінцевий оптимальний розв'язок, оскільки її допустима область є непустою та компактною. Існують ефективні процедури для розрахунку глобального мінімуму цієї задачі квадратичного програмування.

Розглянемо негладкий випадок. Обмежимося розглядом оціночних функцій норми, які приймають вид $\theta(x) = \frac{1}{2} \|\Phi(x)\|^2$, де $\Phi(x) = 0$ є переформулюванням СР та зробимо припущення:

$$\nabla \theta(x) = H^T \Phi(x) \text{ для } H \in \partial_B \Phi(x).$$

Це припущення звичайно дотримується, якщо функція Φ є неперервно диференційованою, але, як відзначено вище, ця умова також дотримується у деяких ситуаціях, коли Φ є негладкою функцією. Нагадаємо, що на кожному кроці напівгладкого ньютонівського методу необхідно знайти розв'язок d^k лінійної системи

$$H^k d^k + \Phi(x^k) = 0, \quad (6.24)$$

де $H^k \in \partial_B \Phi(x^k)$. У околі розв'язку це еквівалентно розв'язку задачі оптимізації:

$$\min \frac{1}{2} \|H^k d^k + \Phi(x^k)\|^2, \quad \forall d^k \in \mathbb{R}^n.$$

Квадратичний вираз

$$q^k(d^k) = \frac{1}{2} \|H^k d^k + \Phi(x^k)\|^2$$

можна розглядати у якості апроксимації першого порядку для $\theta(x^k + \cdot)$.

На кожній ітерації підлягає розв'язку підзадача, що є обмеженою задачею оптимізації:

$$\min q^k(d^k) \text{ за умов } \|d^k\| \leq \Delta_k. \quad (6.25)$$

Уточнення Δ_k робиться з метою зменшення оціночної функції.

Питання про те, чи може $x^k + d^k$ з d^k згідно (6.25.) бути прийняте у якості нової ітерації, залежить від відношення

$$r_k = \text{ared}_k(d^k) / \text{pred}_k(d^k), \quad (6.26)$$

де

$$\text{ared}_k(d^k) = \theta(x^k) - \theta(x^k + d^k), \quad \text{pred}_k(d^k) = \theta(x^k) - q_k(d^k)$$

позначають дійсне та прогнозоване зменшення оціночної функції відповідно.

В результаті отримуємо наступний алгоритм довірчої області.

Алгоритм 6.6. Метод довірчої області.

Дано: початкова точка $x^0 \in \mathfrak{R}^n$ та константи

$\Delta_0 > 0$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, $0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2$, $\Delta_{\min} > 0$. Встановлюємо $k = 0$.

1. Встановлюємо $k = 0$.
2. Якщо x^k задовольняє критерію зупинки, тоді зупиняємо пошук.
3. Обираємо $H^k \in \partial_B \Phi(x^k)$ та знаходимо d^k як розв'язок задачі

$$\min \frac{1}{2} \|H^k d + \Phi(x^k)\|^2, \quad \|d\| \leq \Delta_k.$$

4. Якщо r_k , визначене в (6.26), задовольняє умові $r_k \geq \gamma_1$, то ітерацію

k вважаємо успішною і встановлюємо $x^{k+1} = x^k + d^k$, інакше встановлюємо $x^{k+1} = x^k$.

5. Поновлюємо радіус довірчої області

$$\Delta_{k+1} := \begin{cases} \sigma_1 \Delta_k, & \text{якщо } r_k < \gamma_1 \\ \max\{\Delta_{\min}, \Delta_k\}, & \text{якщо } r_k \in [\gamma_1, \gamma_2) \\ \max\{\Delta_{\min}, \sigma_2 \Delta_k\}, & \text{якщо } r_k \geq \gamma_2 \end{cases}.$$

6. Встановлюємо $k \leftarrow k+1$ та переходимо до кроку 2.
-

У алгоритмі здійснюються два типи ітерацій. У зовнішній ітерації тест (6.26) виконується та x^k поновлюється, у внутрішній ітерації – тест (6.26) не задовольняється, та радіус довірчої області знижується у той час як, x^k зберігається незмінним. Протягом кожної зовнішньої ітерації цільова величина знижується. Радіус довірчої області оцінюється одним з наступних шляхів: залишається таким самим, збільшується, або встановлюється рівним нижній границі Δ_{min} . У будь-якому випадку радіус довірчої області не знижується після кожної наступної ітерації: область розширюється ($\sigma_2 > 1$) лише, якщо зниження функції θ вище ніж описане тестом (6.26), оскільки $\gamma_2 > \gamma_1$. Натомість, після кожної внутрішньої ітерації величина цільової функції залишається такою самою та радіус довірчої області зменшується ($\sigma_1 < 1$).

Корисно порівняти Алгоритми 6.5. та 6.6. Обидва алгоритми генерують послідовність допустимих векторів $\{x^k\}$ з незростаючою цільовою функцією $\{\theta(x^k)\}$. Алгоритми розрізняються методом генерації ітерацій. У першому алгоритмі, для заданого ітераційного розв'язку $x^k \in X$, спочатку ідентифікується напрямок пошуку d^k , а потім знаходиться розмір кроку τ_k . У другому алгоритмі, двокрокова процедура проводиться у зворотному порядку. Спочатку визначається (з попередньої ітерації) додатний скаляр Δ_k , який може розглядатись як максимальний розмір кроку, який буде використаний на поточній ітерації, а вже потім розраховується напрямок d^k з нормою, що є не більшою від Δ_k .

Може бути показано, що для суттєво великого k узагальнений напрямок Ньютона з (6.24.) (розв'язок необмеженої задачі оптимізації) існує та є унікальним та співпадає з обмеженою задачею оптимізації. Більш того,

ітерації є успішними. Отже, для істотно великого k метод довірчої області звужується до узагальненого Ньютонівського методу [97].

Розв'язок підзадачі не є простим питанням. Кожна ітерація вимагає розв'язку обмеженої задачі квадратичного програмування (6.25.). Ця задача має оптимальний розв'язок, оскільки її допустима область є не пустою та компактною. Існують ефективні та надійні методи для роботи з (6.25.), дивись [98, 99].

Стратегії лінійного пошуку здаються більш привабливими, оскільки вони вимагають розв'язку на кожній ітерації лише лінійної задачі. Однак, більші витрати, пов'язані з методом довірчої області з лихвою компенсуються його кращими властивостями збіжності [98].

Існує також немонотонний варіант Алгоритму 6.6.

6.6. Характеристики вирішувачів задач додатковості

6.6.1. MILES

У роботі [100] описано алгоритм MILES (A Mixed Inequality and nonLinear Equation Solver), який глобалізує метод Жозефі (Josephy) шляхом проведення лінійного пошуку між поточною ітерацією та ньютонівською точкою. Цей підхід добре працює на практиці, але теоретично не є обґрунтованим, оскільки напрямок лінійного пошуку не обов'язково є напрямком спуску.

Застосування методу Ньютона-Жозефі до нелінійних задач додатковості включає модифікацію напрямку пошуку. У цьому випадку напрямок d знаходиться в результаті рішення не системи лінійних рівнянь, а лінійної задачі додатковості (LCP), а саме на ітерації k , d є розв'язком задачі

$$\begin{aligned}
F(x^k) + \nabla F(x^k)d - w + v &= 0, \\
l \leq d + x^k \leq u, \quad w \geq 0, \quad v \geq 0, \\
w^T(d + x^k - l) &= v^T(u - d - x^k) = 0,
\end{aligned}$$

де $F(x) = F(x^k) + \nabla F(x^k)d$, $x = x^k + d$, w та v – фіктивні змінні.

В наведеній LCP враховуються верхні та нижні границі для частини або всіх невідомих для того, щоб послідовні ітераційні розв'язки завжди знаходились у заданих межах ($l \leq x^k \leq u$). Це може бути корисним у тих випадках, коли, як часто стається, $F(\cdot)$ є невизначеною для певних $x \in \mathcal{R}^n$.

Рышення LCP здійснюється методом Лемке.

В MILES відхилення $\varepsilon(x)$, що асоціюються з розв'язком-кандидатом x , базується на оцінюванні величин, на які x , w та v порушують нижні та верхні границі і умови додатковості.

Отримана ньютонівська точка використовується для знаходження ньютонівського напрямку, який уточнюється ітераційною процедурою затухаючого лінійного пошуку.

У випадку коли ньютонівська точка не може бути розрахована, MILES використовує спеціальну процедуру повторного запуску алгоритму.

6.6.2. PATH

Солвер PATH [102-105] базується на затухаючому ньютонівському методі пошуку маршруту, що застосовується до негладких переформулювань МіСР, створених за допомогою нормального відображення (розділ 6.3) виду

$$0 = F(\pi_{\mathbf{B}}(x)) + x - \pi_{\mathbf{B}}(x).$$

Тут $\pi_{\mathbf{B}}$ – оператор проектування на множину $\mathbf{B} = [l, u]$, який у загальному випадку не є диференційованим.

Алгоритм складається з головного ітераційного циклу, в якому здійснюється крок лінеаризації k , аналогічний тому, який використовується

в алгоритмі MILES у вигляді формування та рішення лінійної MiCP, а саме $\text{LMiCP}(q^k, M^k, \mathbf{B})$, де

$$M^k = F'(\pi_{\mathbf{B}}(x)) \quad \text{та} \quad q^k = F(\pi_{\mathbf{B}}(x)) - M^k \pi_{\mathbf{B}}(x).$$

Маршрут прокладається до ньютонівської точки шляхом знаходження розв'язку $\text{LMiCP}(q^k, M^k, \mathbf{B})$ методом Лемке.

В РАТН застосовано зворотний пошук маршруту. Маршрут конструюється без перевірки на дотримання умов спуску. Генерація маршруту завершується, коли ньютонівська точка знайдена, або коли стається переривання променю. При цьому, замість зберігання величин всіх змінних у кожній точці переламу маршруту, зберігається інформація лише про вхідну точку. Коли генерація маршруту припиняється у точці $p(T)$, з цієї точки прокладається маршрут у зворотному напрямку. Для цього використовується інформація про вхідні змінні, тобто здійснюється реконструкція точок переламу маршруту. В результаті виявляється оптимальна точка, що відповідає умовам спуску. Якщо точка $p(T)$ є прийнятною, інформація про маршрут може бути відкинута без проведення жодного зворотного ходу. У такому випадку здійснюється лише одна оцінка функції $F(x)$.

В алгоритмі РАТН використана стратегія немонотонної стабілізації. За результатами пошуку маршруту перевіряється критерій немонотонного спуску для оціночної функції. Якщо критерій спуску не задовольняється, алгоритм повертається до останньої точки, яка успішно пройшла перевірку, та збільшує довжину кроку.

Обмеженням солверу РАТН є те, що оцінчна функція, яка використовувалась попередню версією РАТН, не є диференційованою. Новіша версія для цілей глобалізації використовує альтернативну оцінчну функцію, побудовану на базі С-функції Фішера-Бурмайстера.

Іншим вдосконаленням, інтегрованим в алгоритм PATH, є застосування передрозрахункової фази алгоритму, де використовується прекційний ньютонівський метод знаходження початкової точки, яка краще співвідноситься з активним набором обмежень MiCP .

6.6.3. NE/SQP

Алгоритм NE/SQP (Nonsmooth Equations / Successive Quadratic Programming) [106, 74] базується на переформулюванні NCP у систему негладких рівнянь з використанням C-функцій виду

$$\Phi_{\min,i}(x) := \min(x_i - l_i, \max(u_i - x_i, -F_i(x))), \quad \forall x_i \in [l_i, u_i],$$

що веде до диференційованої оціночної функції:

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \|\Phi_{\min}(x)\|^2.$$

Алгоритм використовує підхід Гауса-Ньютона для мінімізації функції θ шляхом знаходження нуля вектор-функції $\Phi_{\min}$. При цьому в алгоритмі знаходження розв'язку відповідної системи негладких рівнянь застосовуються похідні за напрямком від $\Phi_{\min}$.

На кожній ітерації k напрямок d пошуку розв'язку NCP визначається шляхом пошуку розв'язку опуклої квадратичної задачі з прямокутними обмеженнями, а саме

$$\theta(d; x^k) \xrightarrow{d} \min \quad \text{за умовою} \quad d + x^k \in \mathbf{B}.$$

У точках, у яких похідна не є добре визначеною, лінійна апроксимація функції θ визначається шляхом вибору певного елементу В-субдиференціалу.

Коли напрямок розраховано, для визначення довжини кроку використовується модифіковане правило Арміго.

Перевагою цього підходу є те, що підзадача визначення напрямку спуску завжди має розв'язок. Це контрастує з градієнтним методом, який не

забезпечує отримання розв'язку у випадку виродженості матриці Якобі, а також з методами, реалізованими в алгоритмах MILES та PATH, які визначають напрямок пошуку шляхом розв'язку лінійної задачі додатковості, яка на практиці може не мати розв'язку. Необхідно зазначити, що результативність алгоритму NE/SQP залежить від вибору квадратичного солверу.

Слабким місцем алгоритму є чутливість його збіжності до локального мінімуму оціночної функції θ .

6.6.4. SMOOTH

Алгоритм SMOOTH [91] базується на переформулюванні NCP у систему негладких рівнянь виду

$$0 = x - \pi_{\mathbb{R}_+^n}(x - F(x)).$$

Значним недоліком плюс-функції $\pi_{\mathbb{R}_+^n}(\cdot)$ є її негладкість. Тому методи, що використовують градієнти, не можуть бути безпосередньо застосовані для рішення системи негладких рівнянь, що містить плюс-функцію.

Базовою ідеєю алгоритму є використання гладкої апроксимації для плюс-функції. У роботі [91] запропоновано клас параметризованих гладких функцій, які апроксимують плюс-функцію $(x)_+ = \max\{0, x\}$ функцією, отриманою у результаті подвійного інтегрування ймовірнісної функції щільності (розділ 6.3.). Це призводить до гладких нелінійних апроксимаційних переформулювань нелінійних та змішаних задач додатковості (NCP та MiCP). Для апроксимаційних систем гладких нелінійних рівнянь можуть бути застосовані ефективні алгоритми, такі як метод Ньютона. Алгоритм SMOOTH реалізує саме такий підхід.

Слід зазначити, що у солвері SMOOTH застосовується початкове масштабування даних.

На відміну від солвера РАТН, який використовує препроцесор лише для ідентифікації активної множини розв'язку, солвер SMOOTH використовує препроцесор для розв'язку задач додатковості. Якщо препроцесор не знайшов розв'язку, тоді солвер SMOOTH шукає його безпосередньо.

6.6.5. QPCOMP

QPCOMP [107] є розвитком алгоритму NE/SQP в частині застосування стратегії проксимального збурення, яка дозволяє минати локальні мінімуми оціночної функції. По суті алгоритм визначає, коли, ймовірно, ітерації збігаються до локального мінімуму, і тоді розв'язує послідовність збурених задач для запобігання збіжності ітерацій до локального мінімуму. Збурені задачі формуються шляхом заміни вектор-функції F на збурену вектор-функцію

$$F^{\lambda, \bar{x}} = F(x) + \lambda(x - \bar{x}),$$

де $\bar{x}$ - центральна точка, а λ - параметр збурення. Збурену функцію переглядають після кожної ітерації. Отже, збурені задачі формуються лише для визначення наступного ітераційного кроку. Кожного разу, коли розпочинається чергова ітераційна процедура, алгоритм повертається до розв'язку незбуреної задачі. Таким чином, поблизу розв'язку задачі додатковості алгоритм зберігає швидкий локальний ступінь збіжності ітераційних рішень, властивий алгоритму NE/SQP.

6.6.6. PROXI

Подібно до алгоритмів NE/SQP та QPCOMP алгоритм PROXI [74] реалізує метод переформулювання МіСР в систему негладких нелінійних рівнянь з використанням відображення

$$\Phi_{min,j}(x) := \min(x_i - l_i, \max(x_i - u_i, F_i(x))).$$

Однак, замість розв'язку утвореної системи рівнянь методом Гауса-Ньютона, алгоритм PROXI реалізує негладку версію ньютонівського методу. А саме, на кожній ітерації напрямок пошуку розраховується шляхом розв'язку лінійної системи, яка апроксимує Φ_{min} на поточній ітерації. Якщо Φ_{min} є недиференційованою на поточній ітерації, лінійна апроксимація здійснюється шляхом вибору певного елементу В-субдиференціалу.

Так, як і QPCOMP, алгоритм PROXI використовує стратегію проксимального збурення, яка дозволяє алгоритму минати локальні мінімуми оціночної функції θ . Крім того, ця стратегія дозволяє алгоритму долати труднощі, що виникають внаслідок виродженості матриць Якобі. Зокрема, якщо ньютонівське рівняння не може бути розв'язаним на поточній ітерації, алгоритм використовує легко збурену функцію з дуже малим λ . Для збуреної функції результуюча ньютонівська система рівнянь стає такою, що може бути розв'язана. За наявності підзадач, що не підлягають розв'язку, ця стратегія є відносно більш ефективною, ніж застосування метода Гауса-Ньютона так, як це реалізовно в алгоритмах NE/SQP та QPCOMP.

6.6.7. SEMISMOOTH

Алгоритм SEMISMOOTH базується на методі переформулювання NCP, описаному в [108], для чого використовується С-функція Фішера-Бурмайстера

$$\Psi_{FB}(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b),$$

зокрема, її властивість, що

$$\Psi_{FB}(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0.$$

В алгоритмі SEMISMOOTH використовується переформулювання NCP у напіvgладку нелінійну систему рівнянь $\Phi_{FB}(x) = 0$, де функція $\Phi_{FB} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ має вигляд

$$\Phi_{FB,i}(x) = \Psi_{FB}(x_i, f_i(x)).$$

Для рішення МіСР функцію $\Phi_{FB} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ використовують у вигляді $\Phi_{FB,i}(x) = \Psi_{FB}(x_i - l_i, \Psi_{FB}(u_i - x_i, -f_i(x)))$.

Для знаходження розв'язку напівгладкої нелінійної системи рівнянь $\Phi_{FB}(x) = 0$ застосовується ітераційний метод ньютонівського типу. На кожній ітерації напрямок d знаходиться шляхом розв'язку системи рівнянь виду

$$H^k d = -\Phi_{FB}(x^k),$$

де H^k є елементом В-субдиференціалу або узагальненого якобіана Кларка.

Визначення довжини кроку здійснюється методом лінійного пошуку з використанням оціночної функції

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \|\Phi_{FB}(x)\|^2,$$

яка є неперервно диференційованою [109]. Довжина кроку визначається за правилом Арміго.

6.6.8. SEMICOMP

Алгоритм SEMICOMP [74] є розвитком алгоритму SEMISMOOTH, який, так як QPCOMP та PROXI, використовує стратегію проксимального збурення, щоб минати локальні мінімуми оціночної функції.

Якщо SEMISMOOTH зупиняється, тоді алгоритм SEMICOMP розв'язує послідовність збурених задач, що генерує послідовність розв'язків $\{x^k\}$ та дозволяє визначити кращу стартову точку. При цьому використовується збурена функція виду

$$F^{\lambda, \bar{x}}(x) = F(x) + \lambda(x - \bar{x}),$$

де центральна точка $\bar{x}$, зазвичай, обирається в якості точки поточної ітерації x^k , а значення параметра $\lambda > 0$ обирається достатньо великим для того, щоб

функція $F^{\lambda, \bar{x}}(x)$ була строго монотонною. Отже, послідовність підзадач $\text{МіСР}(F^{\lambda, \bar{x}}, \mathbf{B})$ може бути розв'язана з використанням SEMISMOOTH, що дозволяє визначати початкове наближення X^{k+1} для наступної ітерації. Якщо алгоритм SEMISMOOTH зрушує з місця, алгоритм SEMICOMP повертається до незбуреної задачі.

6.7. Порівняння характеристик вирішувачів задач додатковості

В роботі [69] представлено програмне середовище розв'язку задач додатковості, до складу якого входять чотири основні компоненти: бібліотека тестових задач, GAMS та MATLAB інтерфейси для зручного формулювання задач у вигляді програмних кодів, засіби верифікації коректності розв'язку задач та деякі тестові драйвери для оцінки отримуваних результатів.

Центральним елементом програмного середовища є досить велика бібліотека тестових задач, з якими користувачі зустрічаються на практиці. До бібліотеки входять тестові задачі, особливості знаходження розв'язку яких демонструють відомі обчислювальні проблеми, властиві МіСР. Всі бібліотечні задачі є публічно доступними та можуть бути сформульовані як у системі моделювання GAMS, так і у середовищі MATLAB.

Наведені вище солвери досліджено у роботах [69, 73] з використанням вказаних бібліотек тестових задач, розроблених спеціально для тестування МіСР (NCP) солверів.

Розглянемо базові алгоритми, на основі яких з використанням методу проксимального збурення створено солвери PROXI, QPCOMP та SEMICOMP.

Базовий проєкційний ньютонівський метод (без проксимального збурення), що покладено в основу PROXI, є найпростішим серед базових алгоритмів та має найменші можливості розв'язку задач з усіх алгоритмів, що пройшли тестування.

Алгоритм NE/SQP (що є базовим алгоритмом для QPCOMP) був початково створений як метод для розв'язку NCP. Вже перша версія солверу NE/SQP мала суттєві переваги перед наявними на той час NCP солверами, оскільки на кожній ітерації цей солвер забезпечував розв'язання задачі опуклої квадратичної оптимізації, яка не є проблемною. На сьогодні його ефективність суттєво поступається солверам PATH, MILES та SMOOTH. На сьогодні солвер NE/SQP залишається прийнятним засобом розв'язку сильно монотонних МіСР. Більше того, NE/SQP має суттєву перевагу, яка полягає у необхідності оцінки функції F лише на множині $\mathbf{B}$. Цей солвер контрастує з солвером SMOOTH, застосування якого вимагає, щоб F була визначена на всій множині $\mathcal{R}^n$.

В результаті тестування солвер NE/SQP не зміг розв'язати задачі додатковості, які містять більше ніж 110 змінних. Також з'ясувалось, що, незважаючи на добру теоретичну обґрунтованість імплементованих методів, NE/SQP не може розв'язати навіть деякі одновимірні монотонні лінійні задачі додатковості.

Натомість, солвер SEMISMOOTH показав найбільшу спроможність до розв'язку тестових задач додатковості серед солверів, що реалізують базові алгоритми.

Проведене тестування продемонструвало ефективність стратегії проксимального збурення. У всіх трьох алгоритмах PROXI, QPCOMP та SEMICOMP стратегія збурення суттєво підвищила можливості знаходження розв'язку задач додатковості без суттєвої втрати швидкодії солверів.

Нажаль, солвер QPCOMP успадкував властиві своєму базовому солверу NE/SQP обмеження щодо розміру задач (не більше 110 змінних).

Лише при знаходженні розв'язків малих за розмірністю задач додатковості солвер QPCOMP виявився конкурентним по відношенню до солверів PATH та SMOOTH за показником здатності розв'язувати задачі, але істотно повільніше.

Солвер SEMICOMP є найменш ефективний у застосуванні серед солверів, які використовують алгоритм збурення, хоча він базується на алгоритмі, імплементованому в солвері SEMISMOOTH, що має найбільші можливості для розв'язку задач додатковості серед базових алгоритмів.

Солвер PROXI має найменше відмов у застосуванні серед усіх протестованих солверів навіть в умовах, коли базовий алгоритм має найменші можливості розв'язку з усіх інших, що пройшли тестування.

Таким чином, здатність до розв'язку базових алгоритмів відіграє малу роль у роботі збурених алгоритмів. Найкращі результати серед збурених алгоритмів демонструє алгоритм з найпростішим базовим солвером.

Тестування показало, що солвери PROXI та SEMICOMP можуть бути співставними з солверами PATH та SMOOTH за показниками ефективності. В той же час за спроможністю щодо розв'язку тестових задач суттєву перевагу демонструє солвер PROXI над SEMICOMP. Порівняння роботи солверів для великих моделей (≥ 110 змінних) наведено у таблиці 6.1 [69].

Таблиця 6.1.

Ефективність роботи солверів для моделей з більше ніж 110 невідомими

Відсоток моделей, для яких солвер:	MILES	PATH	PROXI	SEMI-COMP	SEMI-SMOOTH	SMOOTH
дуже ефективний	37%	65%	50%	22%	17%	59%
ефективний	56%	80%	67%	41%	43%	76%
забезпечує розв'язок	83%	98%	89%	91%	86%	98%

Примітка: Солвер C є ефективним інструментом розв'язку задачі, якщо витрачений ним час $T_C \leq 2T_{min}$, де T_{min} – час роботи найкращого солверу, та є дуже ефективним, якщо $T_C \leq 4/3T_{min}$. Порівняння роботи солверів для малих моделей (<110 змінних) наведено у таблиці 6.2 [69]:

Таблиця 6.2.

Ефективність роботи солверів для моделей з менше ніж 110 невідомими

Відсоток моделей, для яких солвер:	MILES	PATH	PROXI	SEMI- COMP	SEMI- SMOOTH	SMOOTH
дуже ефективний	32%	0%	43%	34%	0%	26%
ефективний	45%	2%	67%	54%	1%	44%
забезпечує розв'язок	84%	67%	94%	95%	90%	88%

В результаті доведено переважаючу ефективність солверів PATH, SMOOTH та, у меншій мірі, – PROXI.

В той же час необхідно відзначити, що солвер PATH значно переважає своїх кокурентів за кількістю його застосування для розв'язку задач рівноважного програмування. Солвер PATH, на відміну від солверів SMOOTH та PROXI, інтегровано до таких потужних середовищ математичного програмування як GAMS та AMPL.

7. МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДОДАТКОВОСТІ ВЕЛИКОЇ РОЗМІРНОСТІ

7.1. Метод регуляризації узагальненого якобіана Кларка

Розглянемо змішану задачу додатковості у компактному вигляді

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{0} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \leq \mu \perp \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \end{cases}, \quad (7.1)$$

де вектор-функція Лагранжа

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \left(\frac{d\mathbf{H}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right)^T \lambda - \left(\frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right)^T \mu \quad (7.2)$$

є функцією $\mathbf{L}(\mathbf{w})$ трьох векторних невідомих $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \lambda, \mu)$, серед яких множники $\lambda \in \mathbb{R}^{n_H}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^{n_G}$.

Застосуємо один з ефективних підходів до рішення змішаної задачі додатковості (7.1), заснований на її тотожному перетворенні в систему негладких рівнянь [285, 286, 322 – 326]. Таке перетворення здійснюється за допомогою C -функцій [322, 326], серед яких найчастіше використовують функцію Фішера-Бурмейстера вигляду

$$\varphi_{\text{FB}}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b. \quad (7.3)$$

Функція $\varphi_{\text{FB}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ і є опуклою. З її допомогою підсистема комплементарних нерівностей $\mathbf{0} \leq \mu \perp \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ представляється еквівалентною підсистемою негладких рівнянь виду

$$\Phi_{\text{FB}}(\mu, G(x)) = 0, \quad (7.4)$$

де $\forall i \in \overline{1, n_G}$, $\varphi_{\text{FB}}(\mu_i, g_i(x)) = \sqrt{\mu_i^2 + g_i^2(x)} - \mu_i - g_i(x) = 0$, що забезпечує дотримання умов комплементарності $\mu_i g_i(x) = 0$, $\mu_i \geq 0$, $g_i(x) \geq 0$ або $0 \leq \mu_i \perp g_i(x) \geq 0$.

Таким чином, пошук розв'язку задачі (7.1) зводиться до пошуку вектора $w^* = (x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^{n+n_H+n_G}$ – розв'язку нелінійної негладкої системи рівнянь виду

$$\Phi(w) = 0, \quad (7.5)$$

де

$$\Phi(w) = \begin{pmatrix} L(w) \\ H(x) \\ \Phi_{\text{FB}}(\mu, G(x)) \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

7.1.1. Неточний метод Ньютона

Присутність негладкої вектор-функції $\Phi_{\text{FB}}(\mu, G(x))$ у складі вектор-функції $\Phi(w)$ визначає необхідність застосування методів негладкого аналізу в алгоритмах пошуку розв'язку системи рівнянь (7.5). В даний час розроблено ряд ітераційних методів рішення подібних систем рівнянь, що мають властивість глобальної збіжності [322, 323]. Основою таких методів є представлення негладкої вектор-функції $\Phi(w)$ множиною лінійних вектор-функцій

$$\{\Phi_k(w) = \Phi(w_k) + \Phi_w \Delta w_k \mid k = 0, 1, \dots\} \quad (7.7)$$

в околицях ітераційної послідовності точок $\{w_k \mid k = 0, 1, \dots\}$. При цьому диференціювання негладких вектор-функцій $\Phi_{\text{FB}}(\mu, G(x))$ і $\Phi(w)$ з побудовою узагальнених якобіанів Кларка $\partial_B \Phi_{\text{FB}}(\mu, G(x))$ і $\partial_B \Phi(w)$, а також вибором їх представників $\varphi_G \in \partial_B \Phi_{\text{FB}}(\mu, G(x))$, $\varphi_\mu \in \partial_B \Phi_{\text{FB}}(\mu, G(x))$ і

$\Phi_{\mathbf{w}} \in \partial_B \Phi(\mathbf{w})$, здійснюється за допомогою B -субдиференціала (субдиференціала Булігана) [153 – 156]. У приведених виразах

$$\Phi(\mathbf{w}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{w}_k) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \\ \Phi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{G}(\mathbf{x}_k)) \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

$$\Phi_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{x}} & -H_{\mathbf{x}}^T & -G_{\mathbf{x}}^T \\ H_{\mathbf{x}} & 0 & 0 \\ \varphi_{\mathbf{G}} G_{\mathbf{x}} & 0 & \varphi_{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\varphi_{\mathbf{G}} = \text{diag} \left\{ \left(\frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1, \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \right), i = \overline{1, n_G} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

$$\varphi_{\boldsymbol{\mu}} = \text{diag} \left\{ \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1, \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \right), i = \overline{1, n_G} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

де

$$H_{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{H}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_k}, \quad G_{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_k}, \quad (7.12)$$

$$L_{\mathbf{x}} = \left(\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} - \frac{d^2\mathbf{H}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{d^2\mathbf{G}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \boldsymbol{\mu} \right) \Big|_{\mathbf{w} = \mathbf{w}_k}. \quad (7.13)$$

За допомогою множини лінійних функцій виду (7.7) систему рівнянь (7.5) можна апроксимувати множиною систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\left\{ \Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi_k(\mathbf{w}) \mid k = 0, 1, \dots \right\}. \quad (7.14)$$

7.1.2. Алгоритми розв'язування негладких систем рівнянь

Існуючі алгоритми пошуку шуканого розв'язку $\mathbf{w}^*$ негладкої системи рівнянь (7.5) засновані на методах ньютонівського типу або на

методі Левенберга-Марквардта [286, 322, 323], які дозволяють знаходити послідовність векторів $\{\mathbf{w}_k \mid k = 0, 1, \dots\}$ по направляючим векторам $\{\Delta \mathbf{w}_k \mid k = 0, 1, \dots\}$, отримуваних в результаті розв'язування систем рівнянь виду (7.14) або, відповідно, виду

$$\left\{ \Phi_{\mathbf{w}}^T \Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi_{\mathbf{w}}^T \Phi(\mathbf{w}_k) \mid k = 0, 1, \dots \right\}. \quad (7.15)$$

Якщо метод Левенберга-Марквардта забезпечує глобальну збіжність послідовності розв'язків $\{\mathbf{w}_k \mid k = 0, 1, \dots\}$ до шуканого розв'язку $\mathbf{w}^* = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \in \mathbb{R}^{n+n_H+n_G}$, то методи квазіньютонівського типу мають властивість лише локальної збіжності. Тому, для досягнення глобальної збіжності методів квазіньютонівського типу застосовуються спеціальні оціночні функції, наприклад, гладка функція виду

$$\Psi(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \|\Phi(\mathbf{w})\|^2, \quad (7.16)$$

по яких здійснюється контроль за виконанням умов збіжності ітераційного процесу і знаходяться верхні межі переміщень уздовж направляючих векторів $\{\Delta \mathbf{w}_k \mid k = 0, 1, \dots\}$.

У разі поганої обумовленості матриць $\Phi_{\mathbf{w}}$, коли їх числа обумовленості великі, тобто $\text{cond}(\Phi_{\mathbf{w}}) \gg 1$, тоді

$$\text{cond}(\Phi_{\mathbf{w}}^T \Phi_{\mathbf{w}}) \gg \text{cond}(\Phi_{\mathbf{w}}). \quad (7.17)$$

Це означає, що чисельні розв'язки систем рівнянь (7.15) схильні до впливу помилок кінцево-розрядних обчислень в значно більшому ступені, ніж аналогічні розв'язки систем рівнянь (7.14).

Знаходження направляючих векторів $\{\Delta \mathbf{w}_k \mid k = 0, 1, \dots\}$ методами прямого розв'язування відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності $n_{\mathbf{w}} = n + n_H + n_G$ зв'язане з труднощами використання обмежених обчислювальних ресурсів [324, 327].

Зазначимо, що у додатку РАТН направляючі вектори $\{\Delta \mathbf{w}_k \mid k=0,1,\dots\}$ обчислюються методом повної LU -факторизації матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що формуються оригінальним алгоритмом [330]. При цьому використовуються технології розріджених матриць.

Рационально використовувати обчислювальні ресурси дозволяють алгоритми, побудовані на основі методів неточного ітераційного рішення систем рівнянь (7.14) і методів ньютонівського типу ітераційного рішення задачі (7.5). Один з відомих таких алгоритмів представлено нижче [286, 324, 325].

Алгоритм 7.1 розв'язування напівгладкої нелінійної системи рівнянь (3.8) неточним методом Ньютона.

Крок 1. Встановлюємо початкове наближення $\mathbf{w}_0$ і вибираємо значення

параметрів $\rho > 0$, $\beta \in (0,1)$, $\sigma \in (0,1)$, $q > 2$, $\gamma_0 \geq 0$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Крок 2. Контролюємо критерії зупинки:

- (i) номер ітерації k досяг встановленої величини k_{max} ;
- (ii) $\|\Phi(\mathbf{w}_k)\| < \tau_1$;
- (iii) $\left| \|\Phi(\mathbf{w}_k)\| - \|\Phi(\mathbf{w}_{k-1})\| \right| < \tau_2$.

Крок 3. Вибираємо елемент $\Phi_{\mathbf{w}} \in \partial_B \Phi(\mathbf{w}_k)$ і обчислюємо напрямок $\Delta \mathbf{w}_k$.

Знаходимо розв'язок $\Delta \mathbf{w}_k$ системи рівнянь $\Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi(\mathbf{w}_k) + \varepsilon_k$ такий, що $\|\varepsilon_k\| \leq \gamma_k \|\Phi(\mathbf{w}_k)\|$. Якщо це неможливо або, якщо не виконується умова $\nabla \Psi(\mathbf{w}_k)^T \Delta \mathbf{w}_k \leq -\rho \|\Delta \mathbf{w}_k\|^q$, тоді встановлюємо $\Delta \mathbf{w}_k = -\nabla \Psi(\mathbf{w}_k) = -\Phi_{\mathbf{w}}^T(\mathbf{w}_k)$.

Крок 4. Вибираємо стратегію лінійного пошуку (правило Арміхо):

обчислюємо мінімальне ціле l таке, щоб для $d_k = \beta^l$ виконувалася умова $\Psi(\mathbf{w}_k + d_k \Delta \mathbf{w}_k) \leq \Psi(\mathbf{w}_k) + \sigma d_k \nabla \Psi(\mathbf{w}_k)^T \Delta \mathbf{w}_k$.

Крок 5. Обчислюємо $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + d_k \Delta \mathbf{w}_k$ і $k = k + 1$. Вибираємо $\gamma_k \geq 0$ і повертаємося до **кроку 2**.

Для пошуку наближених розв'язків систем рівнянь $\Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi(\mathbf{w}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k$ з контролем нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ на кроці 3 цього алгоритму в роботі [325] були використані різні методи підпросторів Крилова: квазімінімізації нев'язок (QMR и TFQMR), спряжених градієнтів квадратичний (CGS), біспряжених градієнтів стабілізований (BiCGSTAB), мінімізації нев'язок узагальнений (GMRES(m)).

Методи підпросторів Крилова виявилися ефективними для розв'язування систем алгебраїчних рівнянь з добре обумовленими матрицями $\Phi_{\mathbf{w}}$ і практично непридатними у разі їх поганої обумовленості. Тому в роботі [324] був застосований метод найменших квадратів з QR– розкладанням (алгоритм LSQR), а також узгоджений з ним алгоритм MINOS формування передобумовлювачів, який реалізує неповне LU–розкладання матриць $\Phi_{\mathbf{w}}$ з частковим вибором провідного елементу і пороговим методом відсікання малозначимих елементів у факторних матрицях $\tilde{L}$ і $\tilde{U}$ [327].

Оскільки серед матриць $\{\Phi_{\mathbf{w}} \mid k = 0, 1, \dots\}$ зустрічаються погано обумовлені, то формування передобумовлювачів традиційно здійснюється для матриць $\{\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E \mid k = 0, 1, \dots\}$ із зміщеними на величину α діагональними елементами, тобто із зміщеними спектрами власних чисел і зменшеними числами обумовленості. Проте, застосування передобумовлювачів матриць $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E$ істотно уповільнює збіжність ітераційних алгоритмів розв'язування рівнянь вигляду (7.14). Тому величину зміщення α вибирають, з одного боку, як можна меншою, намагаючись зберегти властивості матриць $\Phi_{\mathbf{w}}$ в матрицях $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E$, а, з другого боку, не настільки малою, щоб втратити стійкість алгоритму неповної факторізації

матриць $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E$ при відсіканні малозначимих елементів в факторних матрицях $\tilde{L}$ і $\tilde{U}$ таких, що $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E \approx \tilde{L}\tilde{U}$.

7.1.3. Причини утворення погано обумовлених матриць

Утворення погано обумовлених матриць з множини $\{\Phi_{\mathbf{w}} \mid k = 0, 1, \dots\}$ раніше не досліджувалися. Приведений нижче аналіз особливих властивостей узагальнених яacobіанів Кларка, представлених матрицями $\varphi_{\mathbf{G}} \in \partial_B \Phi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$, $\varphi_{\boldsymbol{\mu}} \in \partial_B \Phi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$ і $\Phi_{\mathbf{w}} \in \partial_B \Phi(\mathbf{w})$, дозволяє встановити такі причини і знайти підхід до їх усунення.

Звернімося до виразів (7.10) – (7.11) і дослідимо поведінку функцій, що містяться в них, в особливих точках:

$$\text{для } \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ і } \frac{\mu_i}{g_i(\mathbf{x})} \rightarrow 0 \text{ маємо } \begin{pmatrix} \left(\frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow 0 \\ \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow -1 \end{pmatrix}; \quad (7.18)$$

$$\text{для } \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ і } \frac{g_i(\mathbf{x})}{\mu_i} \rightarrow 0 \text{ маємо } \begin{pmatrix} \left(\frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow -1 \\ \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow 0 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

З одного боку, якщо для $\forall i \in \overline{1, n_G}$ справедливі вирази (7.18), то узагальнені яacobіани Кларка апроксимуються матрицями

$$\varphi_{\mathbf{G}} \rightarrow 0, \quad \varphi_{\boldsymbol{\mu}} \rightarrow (-E_{\varphi}) \text{ і } \Phi_{\mathbf{w}} \rightarrow \begin{bmatrix} L_{\mathbf{x}} & -H_{\mathbf{x}}^T & -G_{\mathbf{x}}^T \\ H_{\mathbf{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

де E_φ – одинична матриця розмірністю $n_G \times n_G$. Отже, за умови коректної постановки задачі (7.1), коли $n_H < n$, $\text{rank}(L_x) = n$ і $\text{rank}(H_x) = n_H$, матриця Φ_w виду (7.20) завжди може бути розкладена на факторні множники

$$L = \begin{bmatrix} L_x & 0 & 0 \\ H_x & H_x L_x^{-1} H_x^T & 0 \\ 0 & 0 & E_\varphi \end{bmatrix} \text{ і } U = \begin{bmatrix} E_x & -L_x^{-1} H_x^T & -L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & E_\lambda & (H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1} H_x L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & 0 & E_\varphi \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

З другого боку, якщо для $\forall i \in \overline{1, n_G}$ справедливі вирази (7.19), то узагальнені яacobіани Кларка апроксимуються матрицями

$$\varphi_G \rightarrow (-E_\varphi), \quad \varphi_\mu \rightarrow 0 \text{ і } \Phi_w \rightarrow \begin{bmatrix} L_x & -H_x^T & -G_x^T \\ H_x & 0 & 0 \\ -G_x & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Такі матриці Φ_w стають сингулярними за умов $n_H < n$, $\text{rank}(G_x) \leq \min(n, n_G)$ і $\text{rank}(L_x) + \text{rank}(H_x) + \text{rank}(G_x) < n + n_H + n_G$, де n_G – кількість нерівностей в (7.1), $\text{rank}(L_x) = n$, $\text{rank}(H_x) = n_H$.

Відмітимо, що виявлені властивості сингулярності узагальненого яacobіана Кларка функції Фішера-Бурмейстера і сингулярності матриць Φ_w досліджені в рамках уявлень про нескінченно малі величини. Очевидно, в умовах кінцево-розрядних обчислень вирази (7.18) – (7.19) слід представляти приблизно в нестрогій оціночній формі:

$$\text{для } \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ і } \frac{\mu_i}{g_i(\mathbf{x})} = \delta_i \ll 1 \text{ маємо } \begin{pmatrix} \left(\frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -\delta_i^2 \\ \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -1 + \delta_i \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

$$\text{для } \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ і } \frac{g_i(\mathbf{x})}{\mu_i} = \delta_i \ll 1 \text{ маємо } \begin{pmatrix} \left(\frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -1 + \delta_i \\ \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -\delta_i^2 \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Для таких взаємовиключних умов i_G – ий і i_μ – ий елементи діагональних матриць φ_G і φ_μ набувають малих значень тоді, коли відповідні їм i_G – ий або i_μ – ий елементи діагональних матриць φ_G і φ_μ набувають значень близьких до -1 . Наявність в матрицях φ_G і φ_μ певної кількості $n_\varphi \leq n_G$ малих діагональних елементів може створювати непереборні труднощі у застосуванні алгоритмів факторизації матриць Φ_w для формування їх передобумовлювачів по факторним множникам L і U вигляду

$$L = \begin{bmatrix} L_x & 0 & 0 \\ H_x & H_x L_x^{-1} H_x^T & 0 \\ \varphi_G G_x & \varphi_G G_x L_x^{-1} H_x^T & \varphi_\mu + \xi_\mu \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

і

$$U = \begin{bmatrix} E_x & -L_x^{-1} H_x^T & -L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & E_\lambda & (H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1} H_x L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & 0 & E_\varphi \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

де

$$\xi_\mu = \varphi_G \left(G_x L_x^{-1} G_x^T - G_x L_x^{-1} H_x^T (H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1} H_x L_x^{-1} G_x^T \right). \quad (7.27)$$

Дійсно, процес формування i_μ – го діагонального елементу матриці $\varphi_\mu + \xi_\mu$, що знаходиться у складі блокової матриці L , реалізується шляхом багаторазового додавання до i_μ – го діагонального елемента матриці φ_μ

доданків i_μ – го діагонального елемента матриці ξ_μ . Якщо результати виконання операцій підсумовування з накопиченням виявляються нечутливими до незіставно менших значень деяких діагональних елементів матриці φ_μ , то такі елементи, в кількості n_{φ_μ} , можна вважати рівними нулю, а ранг матриці φ_μ оцінювати величиною $\text{rank}(\varphi_\mu, \delta) = n_G - n_{\varphi_\mu}$, де δ – аппріорі встановлюване граничне значення оцінки малості елементів: $\delta_i^2 \leq \delta$. Отже, при

$$\text{rank}(L_x) = n, \quad \text{rank}(H_x) = n_H, \quad \text{rank}(\varphi_\mu, \varepsilon) < n_G \quad (7.28)$$

матриця Φ_w є погано обумовленою або сингулярною.

Неконтрольоване зростання помилок кінцево-розрядних обчислень також обумовлене обчисленням зворотних матриць до L_x^{-1} і $(H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1}$, що входять у вираз (7.29). Дійсно, якщо числа обумовленості матриць L_x і $(H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1}$ великі, тобто $\text{cond}(L_x) \gg 1$ і/або $\text{cond}(H_x L_x^{-1} H_x^T) \gg 1$, то формування елементів матриці ξ_μ супроводжуватиметься мультиплексією похибок обернення матриць L_x і $H_x L_x^{-1} H_x^T$ елементами діагональної матриці φ_G . Отже, ті значення $-\delta_i^2$ діагональних елементів матриці φ_G , які по абсолютній величині не перевищують деякого аппріорі встановленого рівня δ оцінки їх малості, доцільно встановлювати рівними нулю, блокуючи тим самим поширення похибок кінцево-розрядних обчислень на відповідні діагональні елементи матриці φ_μ , які мало відрізняються від -1 .

7.1.4. Алгоритм регуляризації узагальненого якобіана Кларка

Таким чином, для забезпечення обчислювальної стійкості алгоритмів побудови передобумовлювачів матриць $\{\Phi_w \mid k = 0, 1, \dots\}$ необхідно здійснювати корекцію значень відповідних їм діагональних елементів

субматриць φ_{μ} і φ_G , чий абсолютні значення не перевищують апіорі встановлюваного порогового рівня δ . Передобумовлювачі матриць $\tilde{\Phi}_w$, формованих алгоритмом 7.2 шляхом селективного зсуву діагональних елементів в субматрицях φ_{μ} і φ_G матриці Φ_w , мають кращі апроксимаційні властивості, в порівнянні з тими передобумовлювачами, які традиційно формуються на основі матриць із зміщеними діагональними елементами вигляду $\{\Phi_w + \alpha E \mid k = 0, 1, \dots\}$. Результати експериментальних досліджень переконливо підтверджують цей висновок.

Алгоритм 7.2 регуляризації узагальненого якобіана Кларка.

Крок 1. Вибираємо значення порогового параметра $\delta > 0$.

Крок 2. Для заданих $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, $\lambda = \lambda_k$, $\mu = \mu_k$ формуємо матриці L_x , H_x , G_x , $\varphi_G \in \partial_B \Phi_{FB}(\mu, G(\mathbf{x}))$, $\varphi_{\mu} \in \partial_B \Phi_{FB}(\mu, G(\mathbf{x}))$ і $\Phi_w \in \partial_B \Phi(\mathbf{w})$.

Крок 3. Зміщуємо малозначні діагональні елементи субматриці φ_{μ} і утворюємо субматрицю $\tilde{\varphi}_{\mu}$ з елементами

$$\tilde{\varphi}_{\mu i} = \begin{pmatrix} \varphi_{\mu i}, & \left| \varphi_{\mu i} \right| > \delta \\ \varphi_{\mu i} - \delta, & \left| \varphi_{\mu i} \right| \leq \delta \end{pmatrix} \quad \forall i \in \overline{1, n_G}.$$

Крок 4. Зміщуємо малозначні діагональні елементи субматриці φ_G і утворюємо субматрицю $\tilde{\varphi}_G$ з елементами

$$\tilde{\varphi}_{G i} = \begin{pmatrix} \varphi_{G i}, & \left| \varphi_{G i} \right| > \delta \\ 0, & \left| \varphi_{G i} \right| \leq \delta \end{pmatrix} \quad \forall i \in \overline{1, n_G}.$$

Крок 5. У матриці Φ_w субматриці φ_G і φ_{μ} замінюємо субматрицями $\tilde{\varphi}_G$ і $\tilde{\varphi}_{\mu}$. В результаті одержуємо матрицю:

$$\tilde{\Phi}_w = \begin{bmatrix} L_x & -H_x^T & -G_x^T \\ H_x & 0 & 0 \\ \tilde{\varphi}_G G_x & 0 & \tilde{\varphi}_{\mu} \end{bmatrix}.$$

7.1.5. Результати експериментальних досліджень

Обґрунтований вище алгоритм 7.2 застосовувався у складі алгоритму 7.1 для вирішення тестової задачі моделювання рівноважного стану об'єднаного ринку електроенергії країн Бенілюксу, Франції і ФРН. Узагальнена схема енергосистеми цих країн представлена на рисунку 7.1.

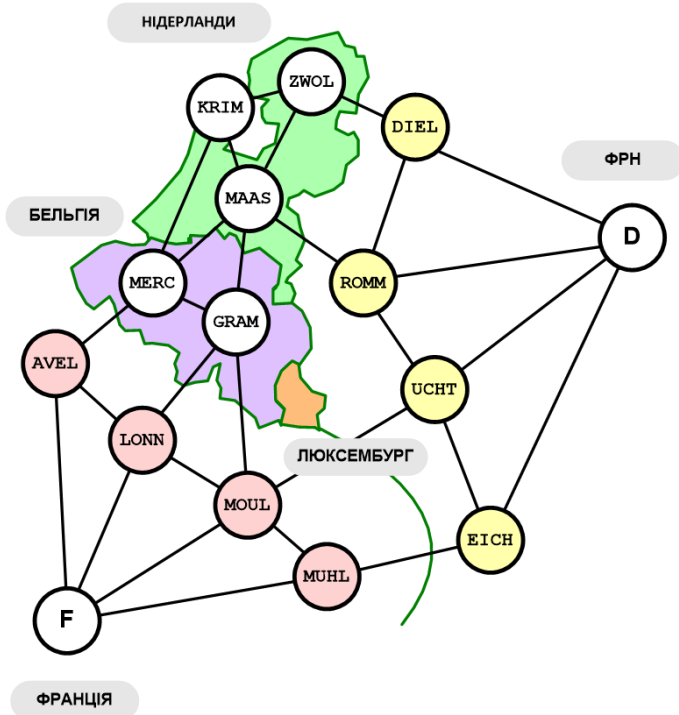


Рис. 7.1. Енергосистема країн Бенілюксу, Франції і ФРН.

Необхідні дані для обчислювальних експериментів були взяті в [331] і доповнені даними про зворотні функції попиту на електроенергію (таблиця 7.1), а також припущеннями щодо відсутності митного збору на торгівлю електроенергією між країнами, функціонування єдиного арбітражного торговця і відсутності фіксованих тарифів на електроенергію, що відпускається компаніями-виробниками. Крім того, була врахована вимога до об'єму гарячого резерву потужності, який не повинен бути менше 7,5% від

об'єму загального навантаження енергосистеми. Основні технічні і економічні характеристики об'єктів представлені в таблицях 7.2 і 7.3.

Таблиця 7.1

Коефіцієнти $\{\beta_j\}$ обернених функцій попиту на електроенергію

$\{P_j = 330 - \beta_j q_j\}$ у вузлах $\{j\}$ її споживання обсягами $\{q_j\}$.

Вузол	D	F	GRAM	KRIM	MAAS	MERC	ZWOL
j	1	2	3	4	5	6	7
β_j	0.00392	0.00445	0.07960	0.03824	0.17900	0.03824	0.10512

Таблиця 7.2

Параметри ЛЕП: реактивні опори $\{X_m\}$ і граничні навантаження $\{Y_m\}$.

m	Лінія	X_m , Ом	Y_m , MW
1	AVEL – LONN	22.23	2762
2	D – DIEL	45.90	20000
3	D – EICH	45.90	20000
4	D – ROMM	45.90	20000
5	D – UCHT	45.90	20000
6	DIEL – ROMM	69.23	1842
7	DIEL – ZWOL	12.21	2971
8	EICH – UCHT	41.31	3329
9	F – AVEL	45.90	20000
10	F – LONN	45.90	20000
11	F – MOUL	45.90	20000
12	F – MUHL	45.90	20000
13	GRAM – LONN	45.21	1207
14	GRAM – MOUL	156.48	267
15	KRIM – MERC	34.19	936
16	LONN – MOUL	27.13	1842
17	MAAS – GRAM	41.82	641
18	MAAS – KRIM	29.10	1842
19	MAAS – MERC	61.03	641
20	MERC – AVEL	55.38	898
21	MERC – GRAM	31.08	1842
22	MOUL – MUHL	38.25	3329
23	MUHL – EICH	11.47	1282
24	ROMM – MAAS	28.26	896
25	ROMM – UCHT	42.95	1842
26	UCHT – MOUL	25.43	1326
27	ZWOL – KRIM	33.06	1842
28	ZWOL – MAAS	50.01	1842

Таблиця 7.3 (початок)

Енергоблоки $\{h\}$ генеруючих компаній: розташування у вузлах енергосистеми, потужність G^U та маржинальні витрати C^M .

h	Назва компанії	Вузол	C^M , €/MWh	G^U , MW
1	Co. Belgium	GRAM	6.722	414.75
2		GRAM	18.080	24.83
3		GRAM	41.368	493.51
4		GRAM	51.708	118.56
5		MERC	0.000	0.18
6		MERC	13.335	274.03
7		MERC	37.444	551.99
8		MERC	55.403	67.39
9	Co. France	GRAM	42.064	8.57
10		F	0.559	4571.75
11		F	11.977	2748.09
12		F	41.689	2308.64
13		F	57.147	578.24
14		F	96.776	154.34
15	Co. Netherlands	GRAM	47.673	27.74
16		MAAS	3.616	22.36
17		MAAS	14.279	235.28
18		MAAS	35.371	171.61
19		KRIM	6.358	385.16
20		KRIM	15.568	457.01
21		KRIM	35.807	1170.83
22		KRIM	52.541	12.92
23		ZWOL	6.926	40.08
24		ZWOL	14.397	110.71
25		ZWOL	29.938	906.17
26	Electrabel	GRAM	7.508	3451.44
27		GRAM	12.973	678.54
28		GRAM	47.673	133.84
29		GRAM	74.151	19.20
30		GRAM	82.160	36.96
31		MERC	6.733	2748.84
32		MERC	13.465	900.54
33		MERC	42.718	1994.18
34		MERC	63.049	148.01
35		MERC	83.751	113.76
36		KRIM	9.762	16.06
37		KRIM	10.359	15.33
38		KRIM	26.816	62.93
39		ZWOL	16.792	549.09
40		ZWOL	26.057	2688.18

Таблиця 7.3 (кінець)

h	Назва компанії	Вузол	C^M , €/MWh	G^U , MW
41	EnBW	F	χ	48.90
42		D	6.166	3312.52
43		D	14.706	3435.08
44		D	40.392	719.03
45		D	60.735	186.04
46		D	88.439	209.78
47	Co. Germany	D	4.953	7827.50
48		D	14.523	18179.85
49		D	40.687	8264.79
50		D	55.947	682.93
51		D	88.433	783.10
52	E.ON	D	6.385	8408.85
53		D	14.768	8454.13
54		D	43.253	5843.88
55		D	60.085	309.57
56		D	92.938	230.39
57		KRIM	9.229	75.92
58		KRIM	16.073	873.30
59		KRIM	32.571	384.74
60	RWE	D	6.165	5207.75
61		D	13.525	11639.15
62		D	38.924	3383.34
63		D	51.785	76.98
64		D	83.914	70.02
65	Vattenfall	D	7.284	2099.58
66		D	13.046	6040.94
67		D	42.752	681.18
68		D	62.761	350.12
69		D	92.575	135.78
70	Essent	MAAS	9.229	65.70
71		MAAS	31.323	1072.38
72		KRIM	15.508	1070.91
73		KRIM	30.015	229.60
74	Nuon	KRIM	9.487	123.37
75		KRIM	15.623	567.94
76		KRIM	28.023	1729.21
77	EDF	F	4.212	68601.86
78		F	12.119	6666.80
79		F	44.866	6701.01
80		F	57.152	530.49
81		F	97.510	408.96
82		D	χ	54.00

Розрахунки виконувалися з використанням алгоритму повної CR -факторизації матриць $\{\Phi_w | k=0,1,\dots\}$ і зміщених по алгоритму 7.2 матриць $\{\tilde{\Phi}_w | k=0,1,\dots\}$ [131]. Факторні множники $\{(C_k, R_k) | k=0,1,\dots\}$ або $\{(\tilde{C}_k, \tilde{R}_k) | k=0,1,\dots\}$ використовувались або безпосередньо прямим методом розв'язування систем лінійних рівнянь $\{C_k R_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0,1,\dots\}$ та $\{\tilde{C}_k \tilde{R}_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0,1,\dots\}$, або як передобумовлювачі у складі ітераційних методів GMRES(3) и BiCGStab, де збіжність ітераційних процедур обмежувалася 20-ма ітераціями, а умовою завершення ітерацій було зниження норми нев'язок системи до значень менших величини 10^{-16} .

Розташування ненульових елементів у матриці $\Phi_w | k=0$ і у факторних матрицях $(C_k, R_k) | k=0$ можна бачити на рисунку 7.2. Розмірність матриць складає величину $n_w = n + n_H + n_G = 594$ з кількістю ненульових елементів $n_{NZ}(\Phi_w | k=0) = 3736$, $n_{NZ}(C_0) = 2916$, $n_{NZ}(R_0) = 2526$.

По приведенім у таблицях 4 і 5 результатам обчислювальних експериментів можна оцінити швидкість збіжності ітераційного алгоритму 7.1, в якому використовуються матричні компоненти узагальнених якобінов Кларка у вигляді незміщених і зміщених по запропонованому алгоритму 7.2 матриць Φ_w і $\tilde{\Phi}_w$, відповідно. Експериментальні результати одержано засобами комп'ютерного моделювання конкурентної рівноваги на енергоринку для двох умов: недосконалої олігополістичної конкуренції (задача Курно) і досконалої конкуренції (задача Бертрана) [162]. При цьому питомим маржінальним витратам двох генеруючих потужностей, позначеним в таблиці 7.3 параметром χ , синхронно і навмисно надавалися значення близькі до нуля і рівні нулю.

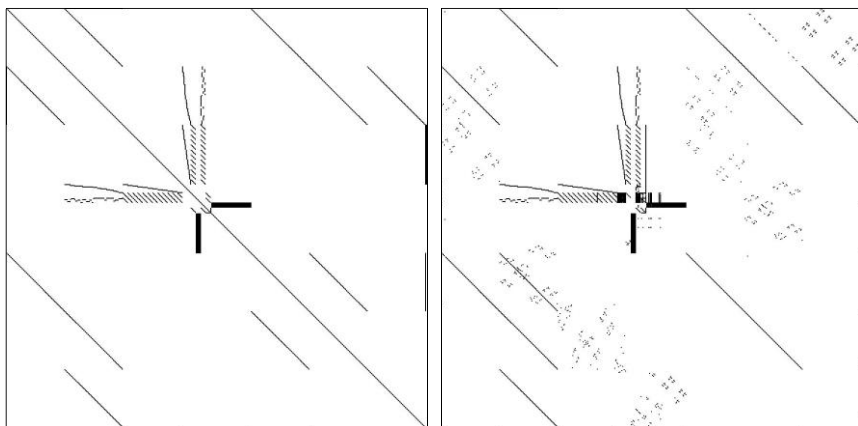


Рис. 7.2. Структура матриці Φ_w (ліворуч) і її суміщених факторних множників (C_k, R_k) (праворуч) на кроці $k = 0$ ітераційного Алгоритму 7.1.

Очевидно, малі значення маржинальних витрат χ погіршували обумовленість матриць Φ_w , що збільшувало похибки обчислення факторних матриць C_k та R_k а, отже, направляючих векторів Δw_k , одержуваних або прямим методом “ dCR ” розв’язування рівнянь $\{C_k R_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) \mid k = 0, 1, \dots\}$, або одним з ітераційних методів GMRES(3) і BiCGStab розв’язування рівнянь $\{\Phi_w \Delta w_k = -\Phi(w_k) \mid k = 0, 1, \dots\}$ із застосуванням передобумовлювачів $\{(C_k, R_k) \mid k = 0, 1, \dots\}$. У результаті виявилось, що в цілому традиційно використовувані методи формування і розв’язування систем рівнянь з матрицями вигляду Φ_w не забезпечують чисельну стійкість ітераційного алгоритму 7.1. Нестійкість алгоритму демонструється значним розкидом числа ітерацій, необхідних для отримання розв’язків однотипних задач. Більш того, в таблицях 7.3 і 7.4 символом “—” відмічені випадки неможливості отримання бажаних рішень і переривання ітераційних процесів на ітерації $k = k_{max}$ з апіорі встановленим граничним

значенням $k_{max} = 1500$. Навпаки, застосування алгоритму 7.2 для формування матриць $\tilde{\Phi}_w$, апроксимуючих матриці Φ_w , дозволяє досягти чисельної стійкості алгоритму 7.1 незалежно від використовуваних методів розв'язування формованих систем рівнянь виду $\{\tilde{C}_k \tilde{R}_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) \mid k = 0, 1, \dots\}$ або виду $\{\tilde{\Phi}_w \Delta w_k = -\Phi(w_k) \mid k = 0, 1, \dots\}$ з передобумовлювачами $\{(\tilde{C}_k, \tilde{R}_k) \mid k = 0, 1, \dots\}$.

Таблиця 7.4.

Кількість ітерацій, здійснених алгоритмом 7.1 для отримання розв'язків задачі Курно.

χ	Застосування алгоритма 3.2 і факторизації матриць виду $\tilde{\Phi}_w = \tilde{C}_k \tilde{R}_k$ в методах:			Застосування факторизації матриць виду $\Phi_w = C_k R_k$ в методах:		
	$d\tilde{C}\tilde{R}$	GMRES(3)	BiCGStab	dCR	GMRES(3)	BiCGStab
0.0	74	74	74	—	54	77
1.0e-06	74	74	74	66	563	—
1.0e-05	74	74	74	134	563	—
1.0e-04	74	74	74	134	611	69
1.0e-03	74	74	74	54	434	—

Таблиця 7.5.

Кількість ітерацій, здійснених алгоритмом 7.1 для отримання розв'язків задачі Бертрана

χ	Застосування алгоритма 7.2 і факторизації матриць виду $\tilde{\Phi}_w = \tilde{C}_k \tilde{R}_k$ в методах:			Застосування факторизації матриць виду $\Phi_w = C_k R_k$ в методах:		
	$d\tilde{C}\tilde{R}$	GMRES(3)	BiCGStab	dCR	GMRES(3)	BiCGStab
0.0	106	106	106	206	171	163
1.0e-06	108	108	108	—	158	—
1.0e-05	104	104	104	—	171	—
1.0e-04	104	104	104	164	160	158
1.0e-03	111	112	111	763	156	581

7.2. Методи розв'язування змішаних задач додатковості великої розмірності

Повертаючись до змішаної задачі додатковості (7.1), зазначимо, що квазіньютонівські методи їх розв'язування використовують лінійні функції виду (7.7) для апроксимації системи рівнянь (7.5) послідовністю систем лінійних алгебраїчних рівнянь (систем рівнянь Ньютона) виду

$$\{\Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_s = -\Phi(\mathbf{w}_s) \mid s = 0, 1, \dots\}, \quad (7.29)$$

Розв'язки цих рівнянь дозволяють визначати напрями $\{\Delta \mathbf{w}_s \mid s = 0, 1, \dots\}$ пошуку розв'язку змішаної задачі додатковості (7.1).

У разі великої розмірності $n + n_H + n_G$ систем рівнянь Ньютона (7.29) і великих рівнів заповнення матриць $\Phi_{\mathbf{w}}$ ненульовими елементами, отримання чисельних розв'язків $\Delta \mathbf{w}_s$ може бути істотно ускладнено або виявиться неможливим, зважаючи на обмежені обчислювальні ресурси. Тому, замість пошуку точних розв'язків $\Delta \mathbf{w}_s$ систем рівнянь Ньютона (7.29) вдаються до пошуку наближених розв'язків $\Delta \tilde{\mathbf{w}}_s$, що задовольняють системам рівнянь вигляду

$$\{\Phi_{\mathbf{w}} \Delta \tilde{\mathbf{w}}_s = -\Phi(\mathbf{w}_s) + \boldsymbol{\varepsilon}_s \mid s = 0, 1, \dots\}. \quad (7.30)$$

При цьому мінімізують нев'язки $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ так, щоб їх евклідові норми були менші ε , тобто верхньої межі прийнятних норм нев'язок. Для мінімізації нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ в роботі [325] використані методи підпросторів Крилова: квазімінімізації нев'язок (QMR и TFQMR), спряжених градієнтів квадратичний (CGS), біспряжених градієнтів стабілізований (BiCGSTAB), мінімізації нев'язок узагальнений (GMRES(m)). Методи підпросторів Крилова виявилися ефективними у разі рішення систем алгебраїчних рівнянь з добре обумовленими матрицями $\Phi_{\mathbf{w}}$ і практично непридатними у разі їх поганої обумовленості.

Для усунення цього недоліку в роботі [324] застосований метод якнайменших квадратів з QR - розкладанням (LSQR), а також узгоджений з ним алгоритм MINOS формування передобумовлювачів, що реалізує неповне LU – розкладання матриць Φ_w з частковим вибором провідного елемента і пороговим методом відсікання малозначимих елементів в матрицях $\tilde{L}$ і $\tilde{U}$ [158]. Результати експериментальних досліджень показали сумірність обчислювальної складності алгоритмів MINOS і LSQR. Сукупно саме ці витратні алгоритми визначають загальний час рішення варіаційних нерівностей великої розмірності.

У роботі [309] для забезпечення чисельної стійкості квазі-ньютонівських методів рішення негладких систем рівнянь (7.6) з погано обумовленими матрицями Φ_w запропонований метод зсуву малих елементів матричних компонент узагальнених яacobіанов Кларка, а для рішення систем рівнянь Ньютона (7.14) застосовано метод CR – факторизації матриць Φ_w , менш вимогливий до обчислювальних ресурсів в порівнянні з методом LU – факторизації [300].

Розглянемо необхідність застосування методу неповної CR – факторизації матриць Φ_w для пошуку розв’язку рівнянь Ньютона (7.14) і можливості істотного зниження вимог до обчислювальних ресурсів, що залучаються для рішення варіаційних нерівностей великої розмірності.

7.2.1. Метод CR – факторизації матриць

Основою методу CR – факторизації [300] є послідовність з m кроків обчислень, виконуваних над $m \times m$ матрицею A відповідно до формул

$$A_{(-i_1, -j_1)} = A - C_{j_1} \cdot R_{i_1},$$

$$A_{(-i_1, -j_1)}(i_1, :) = \mathbf{0}^T, \quad A_{(-i_1, -j_1)}(:, j_1) = \mathbf{0},$$

$$i_1 \in N, \quad j_1 \in N;$$

$$\begin{aligned}
A_{(-i_2, -j_2)} &= A_{(-i_1, -j_1)} - \mathbf{C}_{j_2} \cdot \mathbf{R}_{i_2}, \\
A_{(-i_2, -j_2)}(i_2, :) &= \mathbf{0}^T, \quad A_{(-i_2, -j_2)}(:, j_2) = \mathbf{0}, \\
\{i_2 \in N \mid i_2 \neq i_1\}, \quad \{j_2 \in N \mid j_2 \neq j_1\}; \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}
A_{(-i_m, -j_m)} &= A_{(-i_{m-1}, -j_{m-1})} - \mathbf{C}_{j_m} \cdot \mathbf{R}_{i_m} = \mathbf{0}, \\
\{i_m \in N \mid i_m \notin \{i_k \mid k=1, 2, \dots, m-1\}\}, \\
\{j_m \in N \mid j_m \notin \{j_k \mid k=1, 2, \dots, m-1\}\},
\end{aligned}$$

де N – множина вигляду $\{1, 2, \dots, m\}$; $\mathbf{A}_{(-i_k, -j_k)}(i_k, :) = \mathbf{0}^T$ і $\mathbf{A}_{(-i_k, -j_k)}(:, j_k) = \mathbf{0}$ – нульові вектор-рядок і вектор-стовпець матриці $A_{(-i_k, -j_k)}$, що формуються на k -му кроці обчислень.

Оскільки у формованих матрицях $\{A_{(-i_k, -j_k)} \mid k=1, 2, \dots, m\}$ стовпці з номерами $\{j_k \mid k=1, 2, \dots, m\}$ і рядки з номерами $\{i_k \mid k=1, 2, \dots, m\}$ є нульовими, підсумкова матриця буде також нульовою, тобто, $A_{(-i_m, -j_m)} \equiv \mathbf{0}$.

Елементи $\{c_{i_k j_k} \mid k=1, 2, \dots, m\}$ і $\{r_{i_k j_k} \mid k=1, 2, \dots, m\}$ вектор-стовпців $\{\mathbf{C}_{j_k} \mid k=1, 2, \dots, m\}$ і вектор-рядків $\{\mathbf{R}_{i_k} \mid k=1, 2, \dots, m\}$ легко визначаються по провідних елементах $\{A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k) \mid k=1, 2, \dots, m\}$ перетворюваних матриць $\{A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})} \mid k=1, 2, \dots, m\}$, де $A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})} = A \mid k=1$. Елементи $c_{i_k j_k}$ і $r_{i_k j_k}$, що задовольняють рівність $c_{i_k j_k} \cdot r_{i_k j_k} = A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)$, знаходимо, припускаючи, що $c_{i_k j_k} = 1$ і $r_{i_k j_k} = A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)$ або $r_{i_k j_k} = 1$ і $c_{i_k j_k} = A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)$.

Із співвідношень (10.8) впливає наступне рівняння

$$A = \sum_{k=1}^m C_{j_k} R_{i_k} = CR, \quad (7.32)$$

де матриці C і R утворені з вектор-стовпців $\{C_{j_k} | k=1,2,\dots,m\}$ і вектор-рядків $\{R_{i_k} | k=1,2,\dots,m\}$ шляхом їх розміщення у порядку зростання значень індексу $k=1,2,\dots,m$. Зазначимо, що при організації машинних обчислень подібне впорядковане розміщення вказаних вище груп векторів не виконується, а обчислювані на k -му кроці вектори C_{j_k} і R_{i_k} розміщуються безпосередньо в областях пам'яті, в яких утворюються нуль-вектори $A_{(-i_k, -j_k)}(:, j_k) = \mathbf{0}$ і $A_{(-i_k, -j_k)}(i_k, :) = \mathbf{0}^T$.

Перевага методу CR -факторизації над існуючими полягає в адаптивності виразів (7.31), (7.32) до позиціонування обираємих провідних елементів. Оскільки використання спеціальних схем зберігання розріджених матриць пов'язане з необхідністю виконання значної кількості неарифметичних операцій для отримання доступу до матричних елементів, відсутність в методі CR -факторизації перестановок рядків і стовпців приводить до істотного скорочення обсягу обчислень, в середньому на третину.

7.2.2. Чисельна стійкість методу CR – факторизації матриць

Співвідношення (7.31) визначають ітераційний характер формул CR -факторизації матриць з числом ітерацій m . У разі матриць великої розмірності такий послідовний ланцюг обчислень може приводити до істотного накопичення помилок. Тому для забезпечення стійкості обчислювального процесу на k -му кроці факторизації слід вибирати провідний елемент так, щоб мінімізувати вплив добутку $C_{j_k} \cdot R_{i_k}$ на матрицю $A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}$, з якої утворюється матриця $A_{(-i_k, -j_k)}$. Отже, пошук

провідного елементу $a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)$ в матриці $A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}$ необхідно виконувати відповідно до вимоги отримання таких множників $\mathbf{C}_{j_k}$ і $\mathbf{R}_{i_k}$, які мають мінімально можливу норму

$$\|A_{(-i_k, -j_k)} - A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}\| = \|\mathbf{C}_{j_k} \cdot \mathbf{R}_{i_k}\| \leq \|\mathbf{C}_{j_k}\| \cdot \|\mathbf{R}_{i_k}\| \rightarrow \min_{(i_k, j_k)}. \quad (7.33)$$

Тут $\|\circ\|$ — октаедральна норма матриці або вектора. Вибір саме такої норми пояснюється простотою алгоритму її обчислення і, що саме головне, стійкістю одержуваних результатів до обчислювальних помилок. Оскільки

$$\|\mathbf{C}_{j_k}\| = \sum_i |c_{ij_k}| = \frac{\sum_i |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j_k)|}{|r_{i_k j_k}|}, \quad (7.34)$$

$$\|\mathbf{R}_{i_k}\| = \sum_j |r_{i_k j}| = \frac{\sum_j |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j)|}{|c_{i_k j_k}|}, \quad (7.35)$$

$a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k) = c_{i_k j_k} r_{i_k j_k}$ і при цьому j_k — стовпець і i_k — рядок матриці $A_{(-i_k, -j_k)}$ є нульовими, з виразу (7.33), враховуючи (7.31), одержуємо уточнений вираз:

$$\left(\|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, *)\| - \|a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)\| \right) \times \\ \times \frac{\|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(*, j_k)\| - \|a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)\|}{|a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)|} \rightarrow \min_{(i_k, j_k)}, \quad (7.36)$$

де

$$\|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, *)\| = \sum_j |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j)|, \\ \|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(*, j_k)\| = \sum_i |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j_k)|.$$

Критерій (7.36) простий в реалізації, оскільки визначення норм, що входять до його складу, здійснюється рекуррентно і не вимагає значних

обчислювальних витрат. Крім того, для пошуку провідного елементу $a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j_k)$ немає необхідності виконувати оцінку функціонала у виразі (7.36) для всіх елементів матриці $A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}$. Пошук провідного елементу достатньо здійснити в $m_k \ll m$ ненульових рядках матриці $A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}$. Такий спосіб пошуку провідного елементу не тільки забезпечує стійкість обчислень, але і зменшує відмінність між шаблонами матриць $A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}$ і $A_{(-i_k, -j_k)}$.

7.2.3. Метод *ICR* – факторизації матриць

Звертаючись до рекурентних співвідношень вигляду (7.31), визначимо умови, при яких на k -му кроці факторизації можна нехтувати впливом окремих елементів стовпця $\mathbf{C}_{j_k}$ і рядка $\mathbf{R}_{i_k}$ формованих факторних матриць $\mathbf{C}$ і $\mathbf{R}$ на матрицю $A_{(-i_k, -j_k)}$. Очевидно, у разі незіставності рядкових і стовпцевих октаедральних норм відповідних векторів, а саме

$$|c_{ij_k}| \cdot \|\mathbf{R}_{i_k}\| \ll \|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, *)\| \quad (7.37)$$

і

$$|r_{i_k j}| \cdot \|\mathbf{C}_{j_k}\| \ll \|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(*, j)\|, \quad (7.38)$$

елементи c_{ij_k} і $r_{i_k j}$ виявляються неістотними і можна вважати, що вони рівні нулю. Для оцінювання значущості елементів c_{ij_k} і $r_{i_k j}$ немає необхідності в попередньому обчисленні стовпця $\mathbf{C}_{j_k}$ і рядка $\mathbf{R}_{i_k}$, оскільки вирази (7.37) і (7.38), з урахуванням (7.34) і (7.35), можна представити в тотожному вигляді:

$$\frac{|c_{ij_k}|}{|c_{i_k j_k}|} \ll \frac{\|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, *)\|}{\|A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, *)\|} = \frac{\sum_j |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j)|}{\sum_j |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j)|} \quad (7.39)$$

і

$$\frac{|r_{ikj}|}{|r_{ikj_k}|} < \frac{\|A_{(-i_k, -j_k)}(*, j)\|}{\|A_{(-i_k, -j_k)}(*, j_k)\|} = \frac{\sum_i |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j)|}{\sum_i |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j_k)|}. \quad (7.40)$$

Отримані співвідношення дозволяють оцінювати значущість елементів стовпця $\mathbf{C}_{j_k}$ і рядка $\mathbf{R}_{i_k}$, ґрунтуючись тільки на співвідношеннях норм відповідних рядків і стовпців матриці $A_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}$. Параметризація виразів (7.39) і (7.40) дозволяє представити їх у вигляді

$$\frac{|c_{ij_k}|}{|c_{ikj_k}|} < \tau \frac{\sum_j |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j)|}{\sum_j |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i_k, j)|} \quad (7.41)$$

$$\frac{|r_{ikj}|}{|r_{ikj_k}|} < \tau \frac{\sum_i |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j)|}{\sum_i |a_{(-i_{k-1}, -j_{k-1})}(i, j_k)|}, \quad (7.42)$$

зручному для практичного використання. Значення параметра τ , що апіорі задається, встановлює межу розділу елементів c_{ij_k} і r_{ikj} на значущі і незначущі. В процесі факторизації значущі елементи зберігаються в стовпцях $\tilde{\mathbf{C}}_{j_k}(\tau)$ і рядках $\tilde{\mathbf{R}}_{i_k}(\tau)$, утворюючи матриці $\tilde{\mathbf{C}}(\tau)$ і $\tilde{\mathbf{R}}(\tau)$.

Тотожність виразів (7.41) і (7.42) виразам (7.37) і (7.38) дозволяє інтерпретувати відкинуті малозначимі елементи c_{ij_k} і r_{ikj} у формулах (7.31) як помилки машинних обчислень, а параметр τ розглядати як узагальнену характеристику таких помилок. Зауважимо, що для факторних множників $\tilde{\mathbf{C}}(\tau)$ і $\tilde{\mathbf{R}}(\tau)$ справедливими є граничні вирази вигляду

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{C}}(\tau) = \mathbf{C}, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{R}. \quad (7.43)$$

Метод, заснований на формулах (7.31) CR – факторизації матриць з вибором провідних елементів відповідно до критерію (7.33) і нехтуванням

елементів факторних матриць, що задовольняють умовам (7.41) і (7.42), є методом неповної стовпцево-рядкової *ICR* – факторизації матриць.

7.2.4. Розв’язування лінеаризованих систем алгебраїчних рівнянь методом *ICR* – факторизації матриць

Застосовуючи методи *CR* – і *ICR* – факторизації матриць Φ_w , що входять в системи рівнянь виду (7.14), знаходимо, відповідно

$$\Phi_w = C_s R_s \quad \text{і} \quad \Phi_w = \tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau) + \Delta \Phi_s(\tau), \quad (7.44)$$

де матриця похибок *ICR* – факторизації визначається виразом $\Delta \Phi_s(\tau) = C_s R_s - \tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau)$. За допомогою факторизованих матриць (7.44) представимо системи рівнянь (7.14) у вигляді

$$\left\{ \tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau) \Delta w_s = -\Phi(w_s) - \Delta \Phi_s(\tau) \Delta w_s \mid s = 0, 1, \dots \right\}. \quad (7.45)$$

Беручи до уваги (7.43), маємо граничний вираз для матриці похибок

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta \Phi_s(\tau) = 0.$$

Аналіз співвідношень (7.33) і (7.37), (7.38) свідчить про те, що для будь-якого досить малого значення $\tau > 0$ справедливою є нерівність

$$\|\Delta \Phi_s(\tau)\| < \|\tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau)\|. \quad (7.46)$$

Це означає, що шукані розв’язки $\{\Delta w_s \mid s = 0, 1, \dots\}$ систем лінеаризованих рівнянь виду (7.45) можна оцінити наближеними розв’язками $\{\tilde{\Delta w}_s \mid s = 0, 1, \dots\}$ систем рівнянь виду

$$\left\{ \tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau) \tilde{\Delta w}_s = -\Phi(w_s) \mid s = 0, 1, \dots \right\}. \quad (7.47)$$

Для оцінки похибок таких розв’язків віднімемо рівняння (10.24) з відповідних рівнянь (7.45) і, після нескладних перетворень, отримаємо

$$\left\{ \Delta w_s - \tilde{\Delta w}_s = \left(\tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau) \right)^{-1} \Delta \Phi_s(\tau) \Delta w_s \mid s = 0, 1, \dots \right\}.$$

З урахуванням (7.46) і нерівності

$$\left\| \left(\tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau) \right)^{-1} \Delta \Phi_s(\tau) \right\| \leq \left\| \left(\tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau) \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta \Phi_s(\tau) \right\|,$$

справедливої для добутку норм будь-яких двох матриць, остаточно отримуємо шукані оцінки похибок у вигляді

$$\left\{ \left\| \Delta \mathbf{w}_s - \tilde{\Delta \mathbf{w}}_s \right\| \leq \delta_s(\tau) \left\| \Delta \mathbf{w}_s \right\| \mid s = 0, 1, \dots \right\}, \quad (7.48)$$

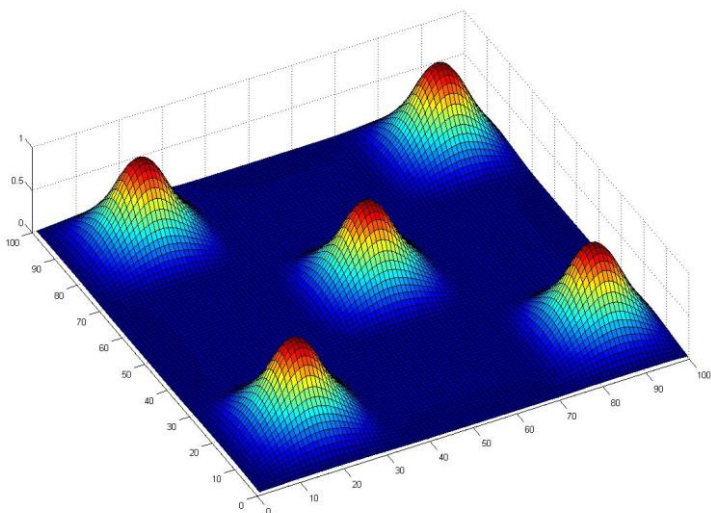
де $\delta_s(\tau) = \left\| \left(\tilde{C}_s(\tau) \tilde{R}_s(\tau) \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta \Phi_s(\tau) \right\| \ll 1$.

Аналізуючи вираз (7.48), що містить оцінки верхніх меж похибок наближених розв'язків $\left\{ \Delta \tilde{\mathbf{w}}_s \mid s = 0, 1, \dots \right\}$ систем рівнянь (7.47), бачимо основну перевагу методу *ICR* – факторизації матриць, а саме можливість формування передобумовлювачів, які дозволяють отримувати близькі до точних розв'язки систем рівнянь Ньютона. Оскільки метод *ICR* – факторизації забезпечує мінімальні похибки апроксимації матриць $\Phi_{\mathbf{w}}$ факторними множниками $\tilde{C}_s(\tau)$ і $\tilde{R}_s(\tau)$, його можна використовувати замість, а не у складі ітераційних методів мінімізації нев'язок в рівнянні (7.30), що дозволяє істотно скоротити витрати обчислювальних ресурсів при рішенні варіаційних нерівностей великої розмірності.

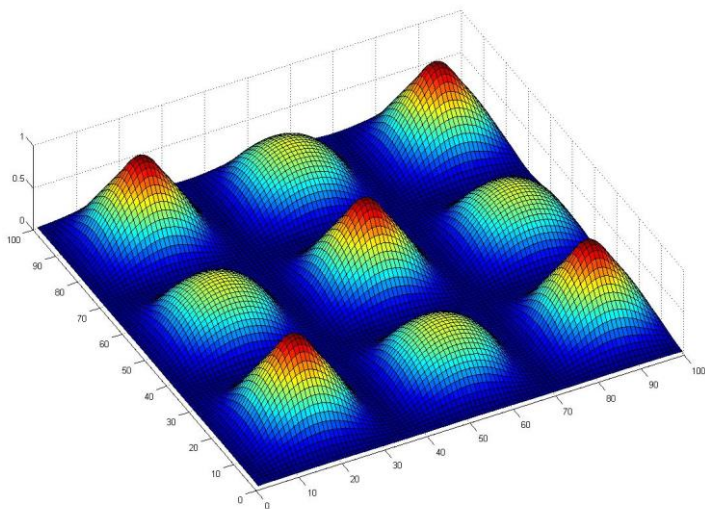
7.2.5. Результати експериментальних досліджень

В якості тестового прикладу розглядалася задача про перешкоду [329]. Завдання полягає в знаходженні положення рівноваги пружної мембрани, яка а) проходить через пустотілі ділянки жорсткої решітки, що лежить в «горизонтальній» площині координат б) знаходиться під дією «вертикальної» рівномірно розподіленого сили, з) утримується поблизу ребер решітки в межах допустимих відхилень від них.

На рисунку 7.3 можна бачити форми, прийняті пружною мембраною під дією рівномірно розподіленої сили щільністю 1 (Рис. 7.3, а) і щільністю 100 (Рис. 7.3, б) для випадку перешкоди у вигляді жорсткої решітки з 3×3 комірки.



a



б

Рис. 7.3. Форма пружної мембрани, на яку діє вертикально направлена рівномірно розподілена сила щільністю 1 (*a*) та 100 (*б*).

Задача про перешкоду має різні математичні формулювання, в тому числі, у вигляді змішаної задачі додатковості, яка тотожна співвідношенням (7.1). В обчислювальних експериментах область, що охоплюється жорсткою решіткою, – це $n \times n$ квадрат з n дискретними точками на стороні. Таким чином, загальне число шуканих змінних, включаючи лагранжеві множники, становить $N = 3 \times n \times n$.

Розв'язування задачі виконувалося за допомогою всесвітньо відомого вирішувача PATH і оригінального вирішувача ICRS з параметром зсуву малих елементів матричних компонент узагальнених якобіанів Кларка $\delta = 10^{-5}$ [324] і параметром ICR – факторизації $\tau = 10^{-4}$. Отримані нами результати представлені в таблиці 7.6.

Таблиця 7.6

Кількість ітерацій та тривалість обчислень, необхідних вирішувачам PATH та ICRS для розв'язування задач про пружну мембрану

n	N	PATH		ICRS		ICRS & GMRES	
		<i>itr</i>	<i>time</i> , с	<i>itr</i>	<i>time</i> , с	<i>itr</i>	<i>time</i> , с
100	30 000	12	2.3	14	5.5	14	6.8
150	67 500	16	10.8	20	18.1	21	25.6
200	120 000	21	36.0	24	45.4	26	67.2
300	270 000	31	200.7	30	167.5	35	266.4
400	480 000	41	681.1	38	462.6	44	744.4
500	750 000	51	1819.2	42	914.8	51	1 581.0
600	1 080 000	–	–	59	2 115.5	60	3 046.4
700	1 470 000	–	–	71	3 894.8	72	5 409.8
800	1 920 000	–	–	79	5 731.4	81	8 878.2
900	2 430 000	–	–	86	8 298.0	90	13 521.3
1000	3 000 000	–	–	93	9 761.8	100	20 536.0

Тут можна бачити підтвердження основного мотиваційного положення дослідження [336] про непридатність вирішувача PATH для розв'язання задач великої розмірності (прочерки в таблиці 7.6 вказують на неможливість отримання рішень відповідних задач).

Слід відзначити високу швидкість збіжності квазіньютонівських ітерацій (*itr*), здійснюваних вирішувачем ICRS. Кількість таких ітерацій порівнянна з аналогічним показником роботи вирішувача PATH.

Вирішувач ICRS вимагає помітно менших витрат часу на вирішення задач великої розмірності, що підтверджує доцільність побудови і використання факторних множників $\tilde{C}_s(\tau)$ і $\tilde{R}_s(\tau)$ для прямого методу розв'язування систем рівнянь Ньютона виду (7.47), а не для передобумовленого ітераційного методу GMRES(*m*) розв'язування систем рівнянь Ньютона виду (7.29), реалізованого в додатку ICRS & GMRES. В проведених експериментах значення параметра *m* методу GMRES встановлювалось рівним 10, крім експеримента з $n=1000$, де значення цього параметра було рівним 5.

Крім того, в порівнянні з відомим методом неповної ILU – факторизації матриць Φ_w , застосований нами метод неповної ICR – факторизації тих же матриць Φ_w вимагає значно менших обсягів пам'яті для розміщення ненульових елементів матриць $\tilde{C}_s(\tau)$ і $\tilde{R}_s(\tau)$, в порівнянні з обсягами пам'яті, які потрібні для розміщення ненульових елементів матриць $\tilde{L}_s$ і $\tilde{U}_s$. Цей висновок підтверджується порівнянням результатів обчислювальних експериментів, відображених в таблиці 7.7, де наведено сумарні показники кількості ненульових елементів матриць $\tilde{C}_0(\tau)$ і $\tilde{R}_0(\tau)$, що формуються додатком ICRS, а також матриць $\tilde{L}_0$ і $\tilde{U}_0$, що формуються додатком MINOS [324].

Таблиця 7.7

Кількість ненульових елементів факторних матриць, що утворюються в результаті ICR – та ILU – факторизації матриці Φ_w

n	Кількість ненульових елементів матриць		
	Φ_w	$\tilde{C}_0(\tau)$ и $\tilde{R}_0(\tau)$	$\tilde{L}_0$ и $\tilde{U}_0$
100	109 600	220 709	274 555
200	439 200	891 900	1 198 504
300	988 800	2 014 683	2 798 879
400	1 758 400	3 584 375	5 104 351
500	2 748 000	5 604 651	8 183 344
600	3 957 600	8 079 688	12 029 746
700	5 387 200	10 996 586	16 594 693
800	7 036 800	14 371 746	—
900	8 906 400	18 205 441	—
1000	10 996 000	22 463 848	—

Зауважимо, що всі обчислювальні експерименти виконувалися на комп'ютері Intel P4 (Chipset Intel 865 PE, FSB 800 MHz, CPU 3.0GHz with HT, Dual Channel Memory 2GB, DDR400), керованому операційною системою Microsoft Windows XP.

7.3. Висновки

1. Досліджено особливі властивості матричних компонент узагальнених яacobіанов Кларка негладких систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, які формуються спеціальними методами перетворення задач додатковості із застосуванням функції Фішера-Бурмейстера.

2. Визначено причини виникнення чисельної нестійкості квазі-ньютонівських методів вирішення таких задач.
3. Запропоновано метод усунення малих елементів матричних компонент узагальнених якобіанов Кларка, що забезпечує чисельну стійкість квазі-ньютонівських методів.
4. Обчислювальні експерименти показали необхідність використання запропонованого методу зсуву малих елементів, особливо при вирішенні погано обумовлених задач додатковості.
5. Застосування методу неповної стовпцево-рядкової факторизації матриць у складі квазі-ньютонівських методів розв'язування негладких систем рівнянь дозволяє здійснювати наближене рішення систем рівнянь Ньютона з достатньо малою похибкою. В результаті з'являється можливість заміни традиційно використовуваних ітераційних методів мінімізації нев'язок систем рівнянь Ньютона прямим методом рішення апроксимуючих систем рівнянь з факторизованими матрицями. Застосування методів неповної стовпцево-рядкової факторизації матриць і прямого рішення апроксимуючих систем рівнянь Ньютона дозволяє істотно скоротити об'єм обчислювальних ресурсів, необхідних для розв'язування задач додатковості великої розмірності.
6. Розроблений на оригінальній методичній основі додаток ICRS за своїми можливостями значно перевершує відомі в світі додатки, зокрема додаток PATH, імplementований в систему моделювання GAMS.
7. Додаток ICRS, як потужний програмний інструмент забезпечив виконання досліджень з моделювання рівноважного стану електроенергетичних систем в сучасних ринкових умовах, зокрема, були розроблені та експериментально досліджені авторські моделі ОЕС України та тестова модель об'єднання енергосистем країн Бенілюксу, Франції та ФРН.

8. МОДЕЛЮВАННЯ РІВНОВАЖНОГО СТАНУ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ УКРАЇНИ В УМОВАХ ЛІБЕРАЛІЗОВАНОГО РИНКУ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ

8.1. Структура лібералізованого ринку електроенергії України

Закон України «Про ринок електричної енергії» визначає правові, економічні та організаційні засади функціонування ринку електричної енергії, регулює відносини, пов'язані з виробництвом, передачею, розподілом, купівлею-продажем, постачанням електричної енергії для забезпечення надійного та безпечного постачання електричної енергії споживачам з урахуванням інтересів споживачів, розвитку ринкових відносин, мінімізації витрат на постачання електричної енергії та мінімізації негативного впливу на навколишнє природне середовище.

Нижче в таблицях 8.1 – 8.4 наведено основні структурні елементи окремих сегментів ринку таких, як «Ринок допоміжних послуг», «Ринок двосторонніх договорів», «Ринок «на добу наперед»», «Внутрішньодобовий ринок» та «Балансуючий ринок», а також «Роздрібний ринок».

Різноманіття товарів та способів встановлення цін в різних сегментах лібералізованого ринку електроенергії обумовлюють необхідність використання наведених вище сучасних методологій та програмних інструментів для адекватного моделювання таких ринків.

Таблиця 8.1.

*Структурні елементи сегмента «Ринок допоміжних послуг»
лібералізованого ринку електричної енергії України*

	Ринок допоміжних послуг
Тип торгів	торгівля за наявності одного продавця-покупця – аукціон, примусовий продаж за тарифом
Період укладання договорів (для доби D)	D-365, ..., D-1
Товар, що продається у сегменті ринка	• послуга з підтримання резерву потужності (S_R): первинне, вторинне, третинне регулювання частоти • послуги TSO • послуги DSO • послуга з підтримки на відповідному рівні реактивної потужності з використанням генеруючого обладнання • послуга з відновлення електропостачання «з нуля» • послуга з підключення споживачів до системи протиаварійної автоматики
Учасник сегмента ринку	• системний оператор (SO) • оператор системи передачі (TSO) • генеруюча компанія (GC), (ГЕС та ГАЕС – регульовані графіки) • оператор системи розподілу (DSO) • споживач (C)
Спосіб встановлення цін	вільний, по заявленій ціні продавця (спосіб встановлюється Регулятом на основі втраченої вигоди постачальника послуг за формулою «витрати+»)
Врахування ТЕП обладнання	враховується (щоденно в графіках обсягів виробництва, які виробники надають системному оператору, обов'язково вказується обладнання на якому розміщені резерви потужності)

Таблиця 8.2.

Структурні елементи сегментів «Ринок двосторонніх договорів» та «Ринок «на добу наперед»» лібералізованого ринку електричної енергії України

	Ринок двосторонніх договорів	Ринок «на добу наперед»
Тип торгів	позабіржова торгівля (OTC)	біржова торгівля
Період укладання договорів (для доби D)	D-365, ..., D-2	D-1
Товар, що продається у сегменті ринка	електроенергія (S)	- електроенергія (S) “продукти” (добові графіки погодинних обсягів електроенергії)
Учасник сегмента ринку	- генеруюча компанія (GC), (ГЕС, ГАЕС – регульовано) - постачальник універсальних послуг (USP) - оператор системи передачі (TSO) - оператор системи розподілу (DSO) - споживач (C) - трейдер (A)	- генеруюча компанія (GC), (ГЕС та ГАЕС – обмежено) - постачальник універсальних послуг (USP) - оператор системи передачі (TSO) - оператор системи розподілу (DSO) - споживач (C) - трейдер (A)
Спосіб встановлення цін	за домовленістю сторін договору	вільний (маржинальне ціноутворення за правилом середньої ціни між двох окремих ціноутворюючих пропозицій виробників та покупців)
Врахування ТЕП обладнання	до уваги не приймається	до уваги не приймається

Таблиця 8.3.

Структурні елементи сегментів «Внутрішньодобового та балансуєчого ринків» лібералізованого ринку електричної енергії України

	Внутрішньодобовий та балансуєчий ринки	Врегулювання небалансів
Тип торгів	торгівля за наявності одного продавця-покупця	—
Період укладання договорів (для доби D)	D-1 та D	D+(≥1)
Товар, що продається у сегменті ринка	електроенергія для балансування обсягів виробництва та споживання	електроенергія для врегулювання небалансів
Учасник сегменту ринка	• системний оператор (SO) • генеруюча компанія (GC)	всі учасники ринку
Спосіб встановлення цін	вільний (маржинальне ціноутворення) (по заявленій ціні продавця для вирішення системних обмежень)	примусовий (ціну розраховує системний оператор згідно правил ринку)
Врахування ТЕП обладнання	при укладанні договору на надання послуг з балансування виробники надають та актуалізують системному оператору всі характеристики генеруючого обладнання	до уваги не приймається

Таблиця 8.4.

Структурні елементи сегмента «Роздрібний ринок» лібералізованого ринку електроенергії України

	Роздрібний ринок
Тип торгів	договірний
Період укладання договорів (для доби D)	термін дії раніше укладених договорів не обмежений в часі, а період укладання нових договорів завжди передуює початку їх виконання
Товар, що продається у сегменті ринка	електроенергія
Учасник сегменту ринка	• постачальник універсальних послуг (USP) • оператор системи розподілу (DSO) • споживач (C) • трейдер (A)
Спосіб встановлення цін	договірна або за тарифом встановленим Регулятором
Врахування ТЕП обладнання	оператор системи розподілу при укладанні договору на передачу обмежує обсяги передачі виходячи з рівня потужності приєднання в договорі зі споживачем

У підсумку звернімося до особливостей функціонування лібералізованого ринку електроенергії України. Його узагальнену структуру в часовому вимірі представлено на рисунку 8.1. Очевидною складністю моделювання цього ринку є необхідність відтворення механізмів

формування цін на конкурентних сегментах ринку та відображення взаємодії між різними сегментами цього ринку, що принципово відрізняються.

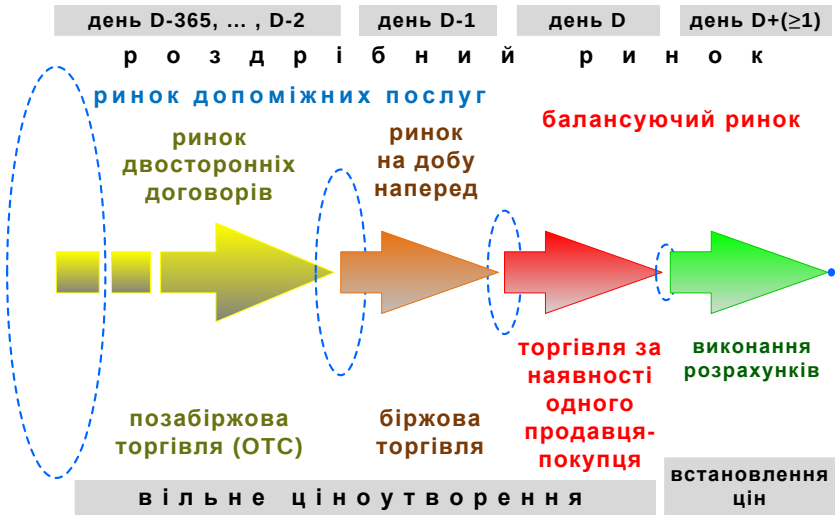


Рис. 8.1. Взаємодія окремих сегментів лібералізованого ринку електроенергії України у часовому вимірі.

8.2. Математична модель рівноважного стану конкурентного ринку електроенергії України

Модель рівноважного стану конкурентного ринку електроенергії є системною моделлю, що поєднує в собі моделі поведінки учасників ринку, таких як генеруючі компанії, оператор системи передачі, трейдер, оператори системи розподілу (постачальники електроенергії) і споживачі. У таблицях 8.5 – 8.6 наведені переліки основних виробників, постачальників і споживачів

електроенергії. Оператором системи передачі є ДП НЕК «Укренерго», який в своїй діяльності має на меті максимально сприяти учасникам ринку у виконанні зобов'язань.

Таблиця 8.5.

*Основні постачальники та споживачі електроенергії в Україні
і цілі їх діяльності*

Найменування постачальника	Найменування споживача
ПАТ «Вінницяобленерго»	Вінницька обл.
ПАТ Волиньобленерго»	Волинська обл.
ПАТ ДТЕК Дніпрообленерго»	Дніпропетровська обл.
ПАТ ДТЕК Донецькобленерго»	Донецька обл.
ПАТ ЕК Житомиробленерго»	Житомирська обл.
ПАТ «Закарпаттяобленерго»	Закарпатська обл.
ВАТ «Запоріжжяобленерго»	Запорізька обл.
ПАТ «Київенерго»	м. Київ
ПАТ «Київобленерго»	Київська обл.
ПАТ «Кіровоградобленерго»	Кіровоградська обл.
ТОВ «ЛЕО»	Луганська обл.
ПАТ «Львівобленерго»	Львівська обл.
ПАТ «Миколаївобленерго»	Миколаївська обл.
ПАТ «Одесаобленерго»	Одеська обл.
ПАТ «Полтаваобленерго»	Полтавська обл.
ПАТ «Прикарпаттяобленерго»	Івано-Франківська обл.
ПАТ «Рівнеобленерго»	Рівненська обл.
ПАТ «Сумиобленерго»	Сумська обл.
ВАТ «Тернопільобленерго»	Тернопільська обл.
АК «Харківобленерго»	Харківська обл.
ПАТ «ЕК Херсонобленерго»	Херсонська обл.
ПАТ «Хмельницькобленерго»	Хмельницька обл.
ПАТ «Черкасиобленерго»	Черкаська обл.
ПАТ ЕК «Чернівціобленерго»	Чернівецька обл.
ПАТ «Чернігівобленерго»	Чернігівська обл.
Цілі діяльності: максимізація обсягів поставок електроенергії	Цілі діяльності: максимізація добробуту

Таблиця 8.6.

Основні виробники електроенергії в Україні і цілі їх діяльності

Найменування виробника
ДП НАЕК «Енергоатом» ПАТ «Дніпренерго» ПАТ «Донбасенерго» ПАТ ДТЕК «Західенерго» ТОВ ДТЕК «Східенерго» ПАТ «Центренерго» ПАТ «Укргідроенерго» ПАТ «Київенерго» ПАТ «Харківська ТЕЦ-5» Компанії СЕС Компанії ВЕС
Цілі діяльності: максимізація прибутку

Модель ринку відображає особливості поведінки його учасників як на сегменті ринку двосторонніх договорів, так і на сегменті ринку «на добу вперед». При цьому враховується конкурентна поведінка виробників електроенергії на цих сегментах ринку. У моделі ринку ОЕС України представлена в агрегованому вигляді (рис. 8.2), де регіональні системи розподілу і постачання електроенергії для відповідних груп споживачів концентруються в енерговузлах, а міжвузлові інтерфейси визначаються фізико-технічними характеристиками існуючої мережі ліній електропередачі. Формування агрегованої мережі ОЕС України здійснено за спеціальними алгоритмами, представленими в [44].

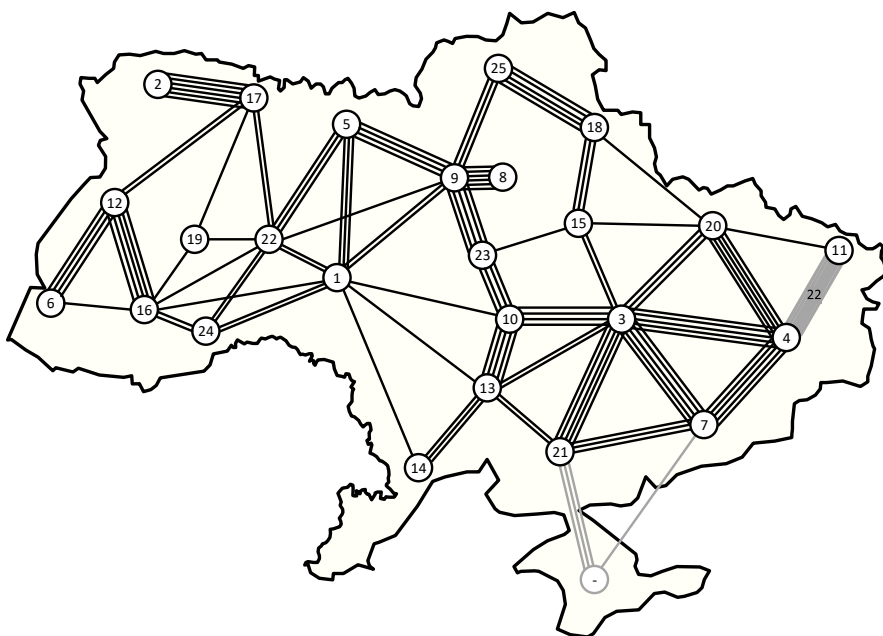


Рис. 8.2. Схема агрегованої ОЕС України: 26 регіональних енерговузлів, з'єднаних 133 лініями електропередачі; в енерговузлах розміщені 117 генеруючих блоків, які належать 9 компаніям.

Розглянемо математичну модель ринку, яка відрізняється від наведеною в [17, 18] розширенням множини шуканих змінних за допомогою введення нових двох підмножин бінарних змінних. У моделі одна підмножина бінарних змінних використовується для опису дискретних станів роботи генеруючих блоків: під навантаженням – стан «підключений до мережі», не навантажений – стан «відключений від мережі», а інша підмножина бінарних змінних використовується для опису витратних характеристик особливих генеруючих блоків ТЕС, здатних працювати, відповідно, зі зниженим навантаженням в однокорпусному режимі або з підвищеним навантаженням у двокорпусному режимі.

8.2.1. Модель генеруючої компанії

Модель складено з підмоделей окремих учасників ринку, що діють відповідно до власних інтересів.

Введемо умовні позначення:

$I = \{i\}$ – множина вузлів електроенергетичної мережі;

$I_N = |I|$ – кількість вузлів у мережі;

$F = \{f\}$ – множина компаній-виробників електроенергії;

$F_C = |F|$ – кількість компаній-виробників електроенергії;

$H(f, i) = \{h_{fi}\}$ – множина енергоблоків, що належать компанії f у вузлі i

(надалі використовується спрощене позначення h для елементів такої множини);

$H_G = \sum_{f \in F, i \in I} |H(f, i)|$ – кількість енергоблоків в енергосистемі;

$M = \{m\}$ – множина ЛЕП в еквівалентній мережі енергосистеми;

$M_L = |M|$ – кількість ЛЕП в еквівалентній мережі енергосистеми;

y_i – сумарний обсяг поставок електричної енергії оператором мережі ЛЕП у вузол i ;

Y_m – максимально допустимий обсяг перетоку електричної енергії по ЛЕП $m \in M$;

p_i^* – ціна продажу електроенергії її споживачам у вузлі i ;

$P_i = P_i \left(a_i^* + \sum_{f \in F} s_{fi} \right)$ обернена функція попиту на електроенергію у

вузлі i . Зазначимо, що наявність доданку a_i^* у визначенні незалежної змінної функції ціни P_i має сенс лише у випадку доступу трейдера до вузла i ;

g_h – обсяг виробництва електроенергії енергоблоком h ;

G_h^{max} – максимальне навантаження енергоблоку h ;

G_h^{min} – мінімальне навантаження енергоблоку h ;

p_r^* – ціна резервування потужності в системі;

r_h – обсяг резерву потужності, розміщеного на енергоблоці h ;

s_{fi} – обсяг електроенергії, проданої компанією f у вузлі i ;

a_i^* – обсяг електроенергії, проданої або купленої трейдером у вузлі i ;

$C_h^M(g_h)$ – собівартість електроенергії g_h , виробленої на енергоблоці h .

Зазвичай функція C_h^M є квадратичною або афінною;

B_{fi} – параметр, значення якого встановлюється в залежності від того, чи є поведінка компанії f на ринку конкуруючою, тобто поведінкою по Бертрану ($B_{fi}=0$), стратегічно осмисленою, тобто поведінкою по Курно ($B_{fi}=1$) або такою, що реалізує різні стратегії на різних сегментах ринку ($0 \leq B_{fi} \leq 1$).

Якщо змінну x позначено зірочкою (x^*), то така змінна є зовнішньою для моделі поведінки даного учасника ринку (генеруючої компанії, системного оператора мережі, трейдера, споживача), але внутрішньою для моделі ринку в цілому.

Модель генеруючої компанії представляємо у вигляді оптимізаційної задачі максимізації її прибутку, а саме: $\forall f \in F$ навантаження $g_h \geq 0$ генеруючих блоків $h \in H(f,i)$, множиною $H(f,i)$ яких володіє компанія f в енерговузлах $i \in I$ ЕС, обсяги $r_h^+ \geq 0$ та $r_h^- \geq 0$ резервування потужності для завантаження та розвантаження цих блоків, а також обсяги $s_{fi} \geq 0$ продажу

електроенергії компанією f вибираємо такими, щоб у підсумку забезпечити отримання максимально можливого прибутку:

$$\begin{aligned}
 & Tr_f^{PSO} K_f^{PSO} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h + \\
 & + \sum_{i \in I} \left[(1-B) p_i + B P_i \left(\langle s_{fi} \rangle + s_i^{PSO} + s_i^H + a_i + \sum_{j \in F, j \neq f} s_{ji} \right) - P^{TS} - P_i^{DS} - P_i^O \right] s_{fi} + \quad (8.1) \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h \left[P^+ r_h^+ + P^- r_h^- - C_h^M(g_h) \right] \xrightarrow{\{s_{fi}, n_h, g_h, \kappa_h, r_h^+, r_h^-\}} \max
 \end{aligned}$$

Тут використані умовні позначення, сенс яких наведено нижче.

Змінна n_h , що характеризує стан «включений» ($n_h = 1$) або «виключений» ($n_h = 0$) відповідного генеруючого блоку, задовольняє умові $0 \leq n_h \perp (1 - n_h) \geq 0$ [322, 323].

Параметри K_f^{PSO} і Tr_f^{PSO} – регламентовані Кабінетом Міністрів України частина обсягу електроенергії, що виробляється компанією f , і тариф, за яким цей обсяг підлягає обов'язковому продажу учаснику ринку ДП «Гарантований покупець».

Параметри P^+ і P^- – попередньо визначені ціни резервування потужностей для завантаження і розвантаження генеруючих блоків.

Обернені функції попиту

$$p_i = p_i \left(s_i^{PSO} + s_i^H + a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right) = \alpha_i - \beta_i \left(s_i^{PSO} + s_i^H + a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right) \quad (8.2)$$

визначають ціну електроенергії в енерговузлах $i \in I$ в залежності від обсягів її продажу споживачам, які здійснюються трейдером в обсягах a_i , генеруючими компаніями $f \in F$ в обсягах s_{fi} і ДП «Гарантований покупець» в обсягах $s_i^{PSO} + s_i^H$, де s_i^{PSO} – обсяги електроенергії, що

продаються на конкурентних сегментах ринку, а s_i^H – обсяги електроенергії, що продаються населенню. Коефіцієнти $\alpha_i > 0$ і $\beta_i > 0$ лінійних функцій p_i визначаються на основі статистичних даних про обсяги та ціни продажу електроенергії на ринку

Параметр B може приймати одне з двох значень, а саме, 0 або 1, що відповідає моделям Бертрана або Курно стратегічної поведінки генеруючих компаній на ринку електроенергії [277, 302, 303].

Аргументи функцій p_i не вказані, оскільки вони не належать до варійованих параметрів, а аргументи функцій P_i виду

$$P_i \left(\langle s_{fi} \rangle + s_i^{PSO} + s_i^H + a_i + \sum_{j \in F, j \neq i} s_{ji} \right) = p_i \left(s_i^{PSO} + s_i^H + a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right)$$

представлені явно сумою варійованих $\langle s_{fi} \rangle$ і неварійованих

$s_i^{PSO} + s_i^H + a_i + \sum_{j \in F, j \neq i} s_{ji}$ частин доданків. Приховуванням аргументів

функцій p_i і виділенням змінних параметрів серед аргументів функцій P_i фіксується вплив параметрів максимізації функціоналу в виразі (8.1) на ці цінові функції і адекватно відображаються особливості моделей Бертрана і Курно стратегічної поведінки генеруючих компаній на ринку.

Функції $C_{fh}^M(g_h)$ представляють собівартості виробництва електроенергії на генеруючих блоках у вигляді залежностей від навантажень g_h , при цьому $\partial C_h^M / \partial g_h \geq 0$. Для однокорпусних агрегатів ці функції мають лінійну форму $C_h^M(g_h) = C_h g_h$, що дозволяє використовувати коефіцієнти питомих маржинальних витрат C_h для визначення собівартості виробництва електроенергії на відповідних генеруючих блоках. Для двокорпусних агрегатів існують інші функціональні залежності виду

$C_h^M(g_h) = [\kappa_h C_h^I + (1 - \kappa_h) C_h^{II}] g_h$, які враховують різні значення коефіцієнтів питомих маржинальних витрат C_h^I або C_h^{II} у випадках роботи блоків відповідно зі зниженим навантаженням в однокорпусному режимі ($\kappa_h = 1$) або з підвищеним навантаженням в двокорпусному режимі ($\kappa_h = 0$). Зауважимо, що шукані змінні κ_h , за якими здійснюється мінімізація функціоналу (8.1), задовольняють умовам виду $0 \leq \kappa_h \leq 1$ [322, 323].

Тариф на послуги оператора системи передачі і тариф на диспетчерське (організаційно-технологічне) управління ЕС в моделі представлені у вигляді сумарної їх величини P^{TS} .

Тариф оператора системи передачі враховує необхідність покриття витрат на покупку електроенергії, яка втрачається в магістральних і міждержавних електричних мережах, фонд заробітної плати підприємств, що надають послуги з передачі електроенергії, здійснення компенсаційного платежу ДП «Гарантований покупець», послуги комерційного обліку електроенергії.

Тариф на диспетчерське управління ЕС враховує необхідність покриття витрат на покупку допоміжних послуг, господарські потреби і фонд заробітної плати підприємства, що виконує зазначені вище функції; покриття витрат, що виникають у оператора системи передачі при усуненні системних обмежень механізмами балансуючого ринку; виконання функцій адміністратора комерційного обліку; виконання функцій адміністратора розрахунків.

Тарифи P_i^{DS} на розподіл електроенергії мережами першого і другого класів напруги в енерговузлах $i \in I$, а також тарифи P_i^O а також тарифи на поставку електроенергії споживачам першого класу першої групи, другого класу першої групи і населенню є величинами середньозваженими за

відповідними обсягами споживання електроенергії. У виразі (8.1) величини P_i^{DS} і P_i^O вважаються заданими.

Купівля електроенергії оператором системи передачі, а також регіональними розподільчими компаніями в обсягах, що покривають втрати електроенергії відповідно в магістральних і міждержавних електричних мережах, а також в розподільних мережах, здійснюється за середньозваженим тарифом обов'язкових продажів електроенергії генеруючими компаніями учаснику ринку ДП «Гарантований покупець», тобто

$$Tr^S = \frac{\sum_{f \in F} Tr_f^{PSO} K_f^{PSO} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h}{\sum_{f \in F} K_f^{PSO} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h}. \quad (8.3)$$

Вираз (8.1) доповнюємо такими умовами:

- балансом виробленої та проданої електроенергії компанією f у вигляді

$$\sum_{i \in I} s_{fi} + K_f^{PSO} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h - \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h = 0;$$

- обмеженнями зверху і знизу на величину генерованої потужності кожного блоку $h \in H(f,i)$, а саме,

$$-g_h - r_h^+ + n_h G_h^{max} \geq 0 \quad \text{і} \quad g_h - r_h^- - n_h G_h^{min} \geq 0,$$

де G_h^{max} і G_h^{min} – межі допустимих навантажень блоку h ;

- обмеженнями гарячого резервування потужностей на завантаження і розвантаження кожного блоку $h \in H(f,i)$, відповідно,

$$-r_h^+ + n_h r_h^{max+} \geq 0 \quad \text{і} \quad -r_h^- + n_h r_h^{max-} \geq 0,$$

де r_h^{max+} і r_h^{max-} – максимально допустимі рівні резервування таких потужностей.

Крім того, компанія f , поряд з іншими, бере участь в забезпеченні гарячого резервування потужностей на завантаження і розвантаження генеруючих блоків в ЕС в цілому. Тому відповідно запишемо

$$\sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} r_h^+ - R^+ = 0 \quad \text{і} \quad \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} r_h^- - R^- = 0,$$

де R^+ і R^- – обсяги резервування, які встановлюються оператором системи передачі.

8.2.2. Модель учасника ринку, що реалізує механізм PSO

В Україні механізм спеціальних зобов'язань (PSO, Public Service Obligation) реалізує учасник ринку ДП «Гарантований покупець», який, варіюючи обсягами $s_i^{PSO} \geq 0$ продажів електроенергії на конкурентних сегментах ринку, прагне максимізувати власний прибуток, тобто

$$\begin{aligned} & Tr^{TS} L^{TS} + Tr^{DS} \sum_{i \in I} L_i^{DS} + \sum_{i \in I} Tr_i^H s_i^H + Tr^{SCH} \left(\sum_{i \in I} s_i^H + \sum_{i \in I} s_i^{PSO} + \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} s_{fi} \right) + \\ & + \sum_{i \in I} \left[(1-B)p_i + BP_i \left(\langle s_i^{PSO} \rangle + s_i^H + a_i + \sum_{j \in F} s_{ji} \right) - P^{TS} - P_i^{DS} - P_i^O \right] s_i^{PSO} - \\ & - \sum_{i \in I} \left\{ Tr_i^{RES} - \left[(1-B)p_i + BP_i \left(\langle s_i^{PSO} \rangle + s_i^H + a_i + \sum_{j \in F} s_{ji} \right) - P^{TS} - P_i^{DS} - P_i^O \right] \right\} g_i^{RES} - \\ & - \sum_{f \in F} Tr_f^{PSO} K_f^{PSO} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h \xrightarrow{\{s_{PSO i}\}} max \end{aligned}$$

ДП «Гарантований покупець» формує свої доходи в результаті продажу електроенергії:

- операторам системи передачі і систем розподілу по тарифам Tr^{TS} і Tr^{DS} в обсягах, рівних втратам електроенергії в мережах цих

операторів L^{TS} і $\{L_i^{DS}, i \in I\}$, відповідно. При цьому тарифи Tr^{TS} і Tr^{DS} не перевищують величини Tr^S , яка визначається виразом (8.3);

- населенню за усередненими тарифами $\{Tr_i^H, i \in I\}$ в обсягах $\{s_i^H, i \in I\}$, відповідно;

- на ринку за цінами

$$\left\{ (1-B)p_i + BP_i \left(\langle s_i^{PSO} \rangle + s_i^H + a_i + \sum_{j \in F} s_{ji} \right) - P^{TS} - P_i^{DS} - P_i^O, i \in I \right\} \quad \text{в}$$

обсягах $\{s_i^{PSO}, i \in I\}$, відповідно.

Крім того, ДП «Гарантований покупець» отримує дохід величиною

$$Tr^{SCH} \left(\sum_{i \in I} s_i^H + \sum_{i \in I} s_i^{PSO} + \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} s_{fi} \right) \quad \text{від оператора системи передачі.}$$

Величина цього доходу визначається складовою Tr^{SCH} загального тарифу на послуги оператора системи передачі, введеної з метою утворення джерела коштів, необхідних для компенсації різниці між ринковою ціною і зеленим тарифом для генерації електроенергії з відновлюваних джерел енергії.

ДП «Гарантований покупець» витрачає отримані кошти на:

- компенсацію різниці між зеленими тарифами $\{Tr_i^{RES}, i \in I\}$ і діючими ринковими цінами

$$\left\{ (1-B)p_i + BP_i \left(\langle s_i^{PSO} \rangle + s_i^H + a_i + \sum_{j \in F} s_{ji} \right) - P^{TS} - P_i^{DS} - P_i^O, i \in I \right\} \quad \text{для}$$

тих обсягів електроенергії $\{g_i^{RES}, i \in I\}$, які генеруються з відновлюваних джерел енергії в енерговузлах $i \in I$;

- покупку електроенергії, виробленої генеруючими компаніями

$f \in F$, за тарифами $Tr_f^{PSO} \{Tr_f^{PSO}, f \in F\}$ в обсягах

$$\left\{ K_f^{PSO} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h, f \in F \right\}, \quad \text{які підлягають обов'язковим}$$

продажам.

Обсяги електроенергії, що купуються і продаються ДП «Гарантований покупець», є збалансованими, тобто

$$L^{TS} + \sum_{i \in I} (s_i^{PSO} + s_i^H + L_i^{DS}) = K_f^{PSO} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} n_h g_h.$$

8.2.3. Модель оператора системи передачі

Модель оператора системи передачі представляємо у вигляді оптимізаційної задачі, в якій відображені його основні функції, пов'язані з акцептуванням добових графіків електроенергії учасників ринку, експлуатацією мережі міжсистемних і міждержавних ліній електропередачі, а також диспетчеризацією режимів роботи ОЕС України, що виконуються з метою максимального сприяння учасникам ринку у виконанні взятих на себе договірних зобов'язань, тобто

$$\sum_{i \in I} \left(y_i(\delta) - a_i - L_i^{DS} + g_i^{RES} + \sum_{f \in F} \sum_{h \in H(f,i)} g_h \right) \xrightarrow{\{\delta_i\}, i \in I} \max,$$

де вираз в дужках визначає обсяг купівлі-продажу електроенергії всіма генеруючими компаніями і споживачами в енерговузлах $i \in I$. Функція $y_i(\delta)$ – це сумарний обсяг поставок електроенергії оператором системи передачі в енерговузол i , а L_i^{DS} – обсяг втрат електроенергії в розподільчій мережі енерговузла i . Множина варійованих величин $\{\delta_i\}, i \in I$, об'єднаних у

вектор δ , представляє миттєві фазові кути зсуву векторів напруги в енерговузлах з нульовою сумою значень, тобто $\sum_{i \in I} \delta_i = 0$ [337].

Обсяги поставок і споживання електроенергії в кожному регіональному енерговузлі є збалансованими, тому можна записати

$$y_i(\delta) - a_i - L_i^{DS} + g_i^{RES} + \sum_{f \in F} \sum_{h \in H(f,i)} g_h - s_i^H - s_i^{PSO} - \sum_{f \in F} s_{fi} = 0, \quad i \in I.$$

Для агрегованої мережі ОЕС, що має M міжвузлових інтерфейсів, які знаходяться під напругою $\{V_m, m \in M\}$ і мають активний $\{R_m, m \in M\}$ та реактивний $\{X_m, m \in M\}$ опори, обсяг поставок електроенергії в енерговузол i оператором системи передачі визначається виразом вигляду

$$y_i(\delta) = \sum_{m \in M_-(i)} \left[-\frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j) - \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2} \right] + \sum_{m \in M_+(i)} \left[\frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j) - \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2} \right],$$

де множини $M_-(i)$ і $M_+(i)$ представляють дві групи інтерфейсів, через які потоки електроенергії відповідно залишають енерговузол i і надходять в нього.

В [337] показано, що втрати електроенергії у міжвузловому інтерфейсі $m \in M$, приєднаному до енерговузлів $i \in I$ і $j \in I$, визначаються величиною

$$L_m = \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j)^2, \quad ,$$

а загальні втрати електроенергії в мережі міжсистемних і міждержавних ліній електропередачі – величиною $L^{TS} = \sum_{m \in M} L_m = \sum_{i \in I} y_i(\delta)$. За величиною L^{TS}

можна визначити складову P_L^{TS} тарифу P^{TS} , обумовлену втратами електроенергії в мережі:

$$P_L^{TS} = \frac{P^S L^{TS}}{\sum_{i \in I} \left(s_i^H + s_i^{PSO} + \sum_{f \in F} s_{fi} \right)} = \frac{P^S \sum_{i \in I} y_i(\delta)}{\sum_{i \in I} \left(s_i^H + s_i^{PSO} + \sum_{f \in F} s_{fi} \right)}.$$

Кожен міжвузловий інтерфейс $m \in M$ має обмежену пропускну здатність, яку в прямому і зворотному напрямках потоку електроенергії через нього характеризує параметр Y_m^+ і Y_m^- . Тому потоки електроенергії в міжвузловому інтерфейсі m задовольняють обмеженням виду

$$Y_m - \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} |\delta_i - \delta_j| \geq 0.$$

8.2.4. Модель оператора системи розподілу

Модель оператора системи розподілу представляємо у вигляді оптимізаційної задачі максимізації обсягів поставок електроенергії споживачам в енерговузлі i :

$$y_i(\delta) - a_i - L_i^{DS} + g_i^{RES} + \sum_{f \in F} \sum_{h \in H(f,i)} g_h \xrightarrow{L_i^{DS}} \max.$$

При цьому враховуємо квадратичну залежність втрат електроенергії в розподільчій мережі L_i^{DS} від обсягу споживання електроенергії

$a_i + s_i^H + s_i^{PSO} + \sum_{f \in F} s_{fi}$. Така залежність має вигляд квадратного рівняння

$$\bar{\alpha}_i L_i^{DS} - \bar{\beta}_i \left(L_i^{DS} + a_i + s_i^H + s_i^{PSO} + \sum_{f \in F} s_{fi} \right)^2 = 0$$

з коефіцієнтами $\bar{\alpha}_i = S_{i0} + L_{i0}^{DS}$ і $\bar{\beta}_i = \frac{L_{i0}^{DS}}{S_{i0} + L_{i0}^{DS}}$, обчисленими по раніше спостережуваним значенням відповідно S_{i0} і L_{i0}^{DS} обсягів споживання і втрат електроенергії.

Складова P_{Li}^{DS} тарифу P_i^{DS} , обумовлена втратами електроенергії в розподільчій мережі енерговузла i , визначається виразом

$$P_{Li}^{DS} = \frac{P^S L_i^{DS}}{s_i^H + s_i^{PSO} + \sum_{f \in F} s_{fi}}.$$

8.2.5. Модель трейдера

Модель трейдера має вигляд оптимізаційної задачі пошуку таких обсягів покупок електроенергії в енерговузлах з низькими цінами споживання і обсягів її продажів в енерговузлах з високими цінами споживання, при яких досягається його максимальний прибуток:

$$\sum_{i \in I} p_i a_i \xrightarrow{\{a_i\}, i \in I} \max.$$

Трейдер здійснює свою функцію за умови, що сальдо обсягів купівлі-продажу електроенергії є нульовим. Отже, $\sum_{i \in I} a_i = 0$.

8.2.6. Модель поведінки споживачів

Модель поведінки споживачів, зосереджених в енерговузлах $i \in I$, відображає їх спроби максимізувати власний добробут, який визначається інтегруванням зворотних функцій $p_i(q)$ попиту споживачів по частковим обсягам dq в межах обсягів Q_i споживаної ними електроенергії:

$$\int_0^{Q_i} p_i(q) dq \xrightarrow{\{Q_i\}} \max.$$

Обернені функції попиту $p_i(q)$ представляються у вигляді залежностей цін від обсягів споживання електроенергії для того, щоб охарактеризувати особливу поведінку кожної групи споживачів. Побудова зворотних функцій попиту здійснюється для кожної регіональної групи споживачів, окремо для побутової та промислової груп першого і другого класу напруги. На основі цих функцій формуються узагальнені зворотні функції попиту споживачів кожного енерговузла, які мають вигляд (8.2).

8.3. Обчислювальні експерименти з моделювання рівноважного стану конкурентного ринку електроенергії України

Моделювання рівноважного стану нового конкурентного ринку електроенергії України дозволяє визначати наступне:

- рівні потужностей для потоків електроенергії на вході-виході міжвузлових інтерфейсів і втрати електроенергії в них;
- вартість втрат електроенергії в магістральних і міждержавних електричних мережах;
- вартість втрат електроенергії в регіональних електромережах;
- рівні навантаження енергоблоків;
- обсяги резервування потужностей на енергоблоках ТЕС;
- обсяги продажів електроенергії в енерговузлах конкуруючими між собою генеруючими компаніями ТЕС, АЕС, ГЕС, ГАЕС, ТЕЦ та компаніями-виробниками електричної енергії з відновлюваних джерел енергії;
- ціни продажу електроенергії конкуруючими між собою генеруючими компаніями ТЕС, АЕС, ГЕС, ГАЕС, ТЕЦ та компаніями-виробниками електричної енергії з відновлюваних джерел енергії;
- обсяги кінцевого споживання електроенергії в енерговузлах;

- ціни на електроенергію, яка споживається в енерговузлах;
- обсяги електроенергії купленої та проданої трейдерами.

На сьогодні проведено ряд обчислювальних експериментів з моделювання рівноважних станів ринку електроенергії України в умовах:

- досконалої і недосконалої (олігополістичної) конкуренції між компаніями-виробниками електроенергії;
- різних стратегій ринкової поведінки компаній-виробників електроенергії, таких як Бертрана (гра цінами продажів) і Курно (гра обсягами продажів);
- присутності або відсутності трейдерів на ринку;
- регламентованого обмеження ліквідності сегмента ринку двосторонніх договорів.

На рис. 8.3 – 8.7 представлені результати таких експериментів, отримані в умовах, коли ринкова поведінка компаній-виробників електроенергії визначається стратегією Курно, на ринку діє компанія-трейдер, а діяльність компанії ДП «Гарантований покупець» припинена. Розрахунки виконані для однієї години вечірнього піку навантаження ОЕС України типового робочого липневого дня.

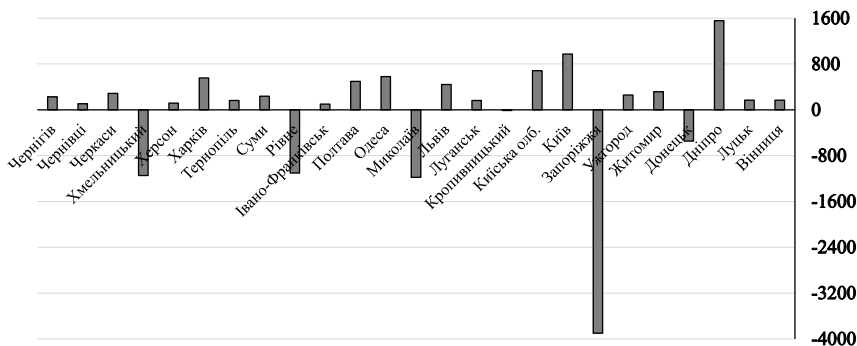


Рис. 8.3. Обсяги відбору-постачання електроенергії в енерговузлах передавальної мережі, МВт · год.

(Обсяг втрат в мережі ДП НЕК Укренерго – 282,6 МВт · год).

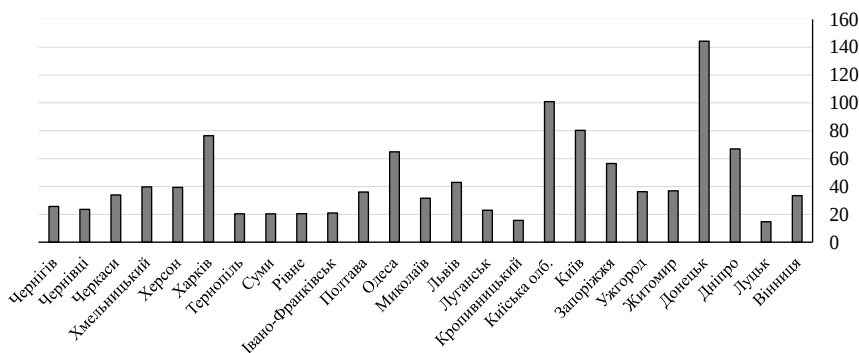


Рис. 8.4. Обсяги втрат електроенергії в розподільних мережах, МВт · год.
(Загальний обсяг втрат – 1105,7 МВт · год)

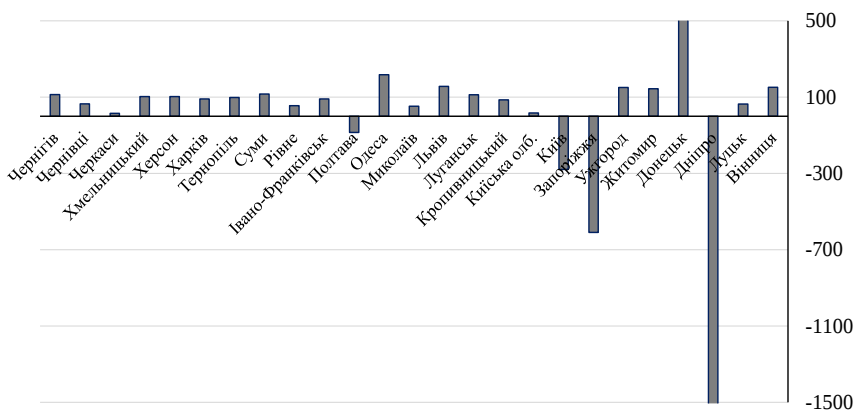


Рис. 8.5. Обсяги купівлі-продажу електроенергії, здійснюваних трейдером в енерговузлах, МВт · год.

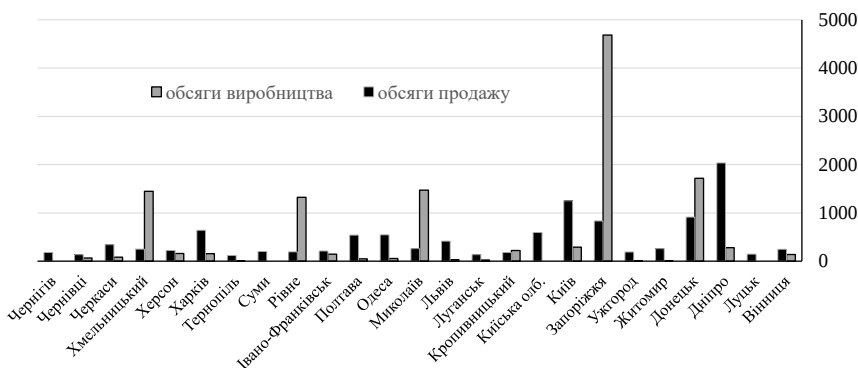


Рис. 8.6. Обсяги виробництва і продажів електроенергії, здійснюваних генеруючими компаніями в енерговузлах, МВт · год.

(Всього по ОЕС України: виробництво – 12369,9 МВт · год,
продажі – 10981,6 МВт · год).

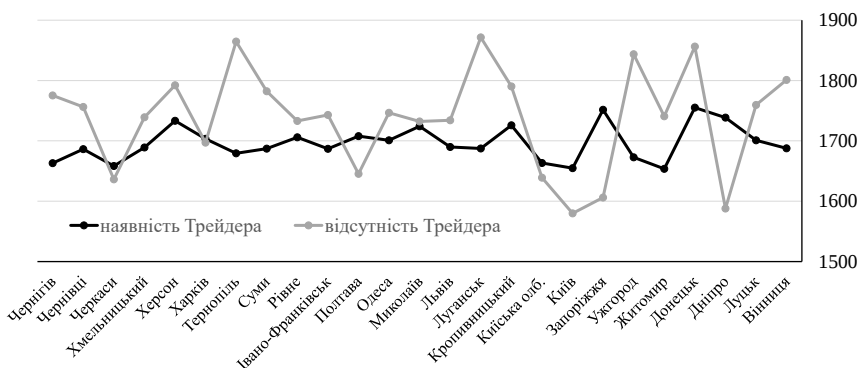


Рис. 8.7. Ціни на електроенергію в енерговузлах, \$/МВт·год.

Для порівняння на рис. 8.7 представлені ціни на електроенергію в енерговузлах, отримані в результаті моделювання двох рівноважних станів ринку, на які впливають фактор присутності-відсутності трейдера. Очевидно, в разі відсутності трейдера нерівномірність цін на електроенергію в енерговузлах значно зростає, що свідчить про помітну роль його участі в ринку.

Проведені обчислювальні експерименти підтверджують адекватність моделі і широкі можливості її застосування для аналізу процесів ціно- і тарифоутворення в умовах лібералізованого ринку електроенергії України.

На закінчення відзначимо, що розвиток енергетичних ринків обумовлює необхідність істотного підвищення рівня інтелектуального забезпечення сфери управління енергетичними комплексами. Для цього використовуються системи моделювання енергетики, які є інструментами вирішення актуальних завдань управління.

Створення адекватних систем моделювання енергетики на основі математичних моделей рівноважних станів конкурентного ринку електроенергії тривалий час було пов'язане з необхідністю проведення фундаментальних досліджень з формування методології побудови математичних моделей ринку і розробки методів та алгоритмів розв'язування відповідних задач моделювання. На сьогодні проведені дослідження привели до формування методології рівноважного моделювання енергетичних ринків і появи методів розв'язування задач додатковості великої розмірності. Таким чином створено основу для побудови систем моделювання енергетики в сучасних ринкових умовах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Masse P.* Application of linear programming to investments in the electric power industry / P.Masse, R.Gibrat // *Management Science*, 1957, №3 (1), p. 149–166.
2. *Арзамасцев Д.А.* Вопросы оптимизации развития и эксплуатации энергосистем. Сб. статей. / Под ред. Д.А.Арзамасцева. Свердловск, 1966, 170 с.
3. *Денисов В.И., Кохов В.И., Кретинина Ю.С.* Выбор оптимальной структуры мощностей энергосистемы // *Применение вычислительной техники в электроэнергетике*. М.: Энергия, 1964, с. 12–16.
4. *Макарова А.С., Макаров А.А.* Математическая модель для перспективного планирования энергосистемы // *Электрические станции*, 1964, №5, с. 5–59.
5. *Веселов Ф.В., Курилов А.Е., Хоршев А.А.* Построение и использование моделей линейного программирования в задачах исследования энергетики // *Сборник трудов конференции «Моделирование – 2006»*, 16–18 мая 2006. Киев: ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2006, с.147–152.
6. *Воропай Н.И., В.В.Труфанов* Математическое моделирование электроэнергетических систем в современных условиях // *Электричество*. М.: 2000, №10, с. 6–12.
7. *Костюковський Б.А., Шульженко С.В., Гольденберг І.Я., Власов С.В.* Методи та засоби дослідження перспектив розвитку електроенергетики в умовах впровадження ринкових відносин // *Проблеми загальної енергетики*. Київ, 2002, №2, с. 6–13.
8. *The electricity Market Module of the National Energy Modeling System.* Model Documentation Report. – Energy Information Administration, March 2004, 56 p. –
[http://tonto.eia.doe.gov/FTPROOT/modeldoc/m068\(2004\).pdf](http://tonto.eia.doe.gov/FTPROOT/modeldoc/m068(2004).pdf).

9. *The PRIMES Energy System Model. Reference Manual.* – National technical university of Athens. 2001, 247 p. – <http://www.e3mlab.ntua.gr/manuals/PRIMREFM.pdf>.
10. *Wien Automatic System Planning (WASP) Package. A Computer Code for Power Generating Expansion Planning.* – International Atomic Energy Agency (IAEA). Vienna, 2001, 274 p. – <http://www.pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/CMS-16.pdf>.
11. *Loulou R., Goldstein G., Noble K.* Documentation for the MARKAL Family of Models // Energy technology System Analysis Programme, 2004, 386 p. – http://www.etsap.org/MrklDoc-I_StdMARKAL.pdf.
12. *Neuhoff K.* Integrating Transmission and Energy Markets Mitigates Market Power // CMI Working Paper. Cambridge: University of Cambridge, 2003, №17, 53 p. – <http://www.econ.cam.ac.uk/electricity/publications/wp/ep17.pdf>.
13. *Hobbs B., Helman U.* Complementarity-Based Equilibrium Modeling for Electric Power Markets // Modeling Prices in Competitive Electricity Markets. Series in Financial Economics. Chichester: Wiley, 2004, 337 p.
14. *Ventosa M., Denis R., Redondo C.* Expansion planning in electricity markets. Two different approaches // 14th PSCC, 24-28 June 2002, Sevilla, 2002, 8 p. – http://www.iit.upco.es/publicaciones/mostrar_publicacion_conferencia.php.en.
15. *Murphy F., Smeers Y.* Generation capacity expansion in imperfectly competitive restructured electricity markets // Operations Research, 2005, Vol.53, №4, p. 646–661.
16. *Botterud A., Mahalik M.R., Veselka T.D., Ryu H.-S., Sohn K.-W.* Multi-Agent Simulation of Generation Expansion in Electricity Markets // International Journal of Innovations in Energy Systems and Power, 2009, Vol.4, №1, p. 36–43.

17. *Борисенко А.В.* Математичні моделі процесів функціонування та розвитку теплової енергетики України в ринкових умовах // Автореф. дис. докт. техн. наук, ІПМЕ ім.Г.Е.Пухова НАНУ, Київ, 2010, 33 с.
18. *Newbery D.M., Pollitt M.G.* The Restructuring and Privatisation of Britain's CEGB—Was It Worth It? // *The Journal of Industrial Economics*, 1997, № 45, p. 269-303. DOI:10.1111/1467-6451.00049
19. *Newbery D.* Refining Market Design // *Implementing the Internal Market of Electricity: Proposals and Time-Tables: conference*, 9 September 2005. Brussels, 2005, 28 p. — http://www.sessa.eu.com/documents/final/SESSA_report_wp3.pdf.
20. *Hogan W.W.* Electricity Market Hybrids: Mixed Market Design, Regulation and Investment // *Atlantic Energy Group Seminar*, January 10, 2008. Washington (DC): Federal Energy Regulatory Commission, 2008, 82 p. — http://www.environment.harvard.edu/docs/faculty_pubs/hogan_hybrid.pdf
21. *Bower J., Bunn D.* A Model-Based Comparison of Pool and Bilateral Market Mechanisms for Electricity Trading. London: London Business School, 1999, 19 p. — <http://www.econ.iastate.edu/tesfatsi/retasim.doc>.
22. *Васильев А.А.* Электрическая часть станций и подстанций. 2-е издание, переработанное и дополненное. М.: Энергоатомиздат, 1990, 551 с.
23. *Hunt S.*, Making Competition Work in electricity. NY: John Wiley & Sons, Inc., 2002, 450 p.
24. *Bushnell J.* Viewpoint. California's electricity crisis: a market apart? // *Energy Policy*, 2004, № 32, p. 1045–1052.
25. *Barquin J., Boots M.G., Ehrenmann A., Hobbs B.F., Neuhoﬀ K., Rijkers F.A.M.* Network-constrained Models of Liberalized Electricity Markets: the Devil is in the Details // *Cambridge Working Papers in Economics*

- CWPE, 2004, №0405, 36 p. –
<http://www.econ.cam.ac.uk/electricity/publications/wp/ep32.pdf>.
26. *Pineau P.-O., Murto P.* An Oligopolistic Investment Model of the Finnish Electricity Market // *Annals of Operations Research*, 2003, Vol.121, p. 123–148.
 27. *Wei J., Smeers Y.* Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Generators and Regulated Transmission Prices // *Oper. Res.*, 1999, №47(1), p.102—112.
 28. *Lapiedra L., Ventosa M., Linares P.* Expansion planning model considering an emission-based permits market. Instituto de Investigación Tecnológica // 8ª Jornadas Hispano-lusas de Ingeniería Eléctrica, 3-5 July 2003. – Algarve, Vilamoura, 2003, 8p. –
<http://www.iit.upcomillas.es/docs/03MVR03.pdf>.
 29. *Schulkin J.Z., Hobbs B.F., Pang J.-S.* Long-Run Equilibrium Modeling of Alternative Emissions Allowance Allocation Systems in Electric Power Markets // *CWPE*, 2007, №0748, 27 p. –
<http://www.electricitypolicy.org.uk/pubs/wp/eprg0719.pdf>.
 30. *Беляев Л.С., Войцеховская Г.Б., Савельев В.А.* Системный подход при управлении развитием электроэнергетики. Новосибирск: Наука, 1980, 379 с.
 31. *Model MESSAGE Command Line User Manual Version 0.18.* Vienna: International institute for applied systems analysis (IIASA), 2001. –
http://www.iiasa.ac.at/Research/ECS/docs/MESSAGE_man018.pdf (2001).
 32. *Manne, A. S., Mendelsohn R.* MERGE - A Model for Evaluating Regional and Global Effects of GHG Reduction Policies // *Energy Policy*, 1995, №23(1), p.17–34.
 33. *Kemfert C.* The Liberalisation process of the German Electricity Market Strategies and Opportunities // *Fondazione Eni Enrico Mattei Working*

Paper, 1999, №95.99, 20 p. –

<http://www.feem.it/NR/rdonlyres/836186D0-8EAE-445D-B654-39D6C7A6907B/148/9599.pdf>.

34. *Baldick R.* Computing the Electricity Market Equilibrium: Uses of market equilibrium models. –
[http://www.users.ece.utexas.edu/~baldick/papers/computing market equilibrium.pdf](http://www.users.ece.utexas.edu/~baldick/papers/computing_market_equilibrium.pdf).
35. *Крестинина Ю.С., Штейнгауз В.Е.* Моделирование развития электроэнергетики как блока системы задач по оценке уровня электрификации // Моделирование задач электрофикации и электроэнергетики: Сб. науч. тр. ЭНИН им.Г.М.Кржижановского. – М.: ЭНИН им.Г.М.Кржижановского, 1985, с.33–41.
36. *Hobbs B., Rijkers F.* Strategic Generation With Conjectured Transmission Price Responses in a Mixed Transmission Pricing. System – Part I: Formulation // IEEE Transactions on power systems, 2004, Vol.19, №2, p.707–717.
37. *Арзамасцев Д.А., Лунес А.В., Мызин А.Л.* Модели оптимизации развития энергосистем. М.: Высш. шк., 1987, 272 с.
38. *Schweppe F.C., Caramanis M.C., Tabors R.E., Bohn R.E.* Spot Pricing of Electricity. Norwell (MA): Kluwer, 1988, 355 p.
39. *Bai X., Shahidehpour S.M., Ramesh V.C., Yu E.* Transmission Analysis by Nash Game Method // IEEE Trans. Power Sys, 1997, № 12(3), p. 1046–1052.
40. *Purchala K., Meeus L., Belmans R.* Zonal network model of European interconnected electricity network // Working Paper K.U.Leuven, 2005, 8p. – (esat.kuleuven.be/electa/publications/fulltexts/pub_1469.pdf).
41. *Ольховский Г.Г.* Состояние и перспективы тепловой энергетики// Электрические станции, 2005, №2, с.12–21.

42. Макаров А.А., Мелентьев Л.А. Методы исследования и оптимизации энергетического хозяйства. Новосибирск: Наука, 1973, 275 с.
43. Barreto T.L. Technological Learning in Energy Optimisation. Models and Deployment of Emerging Technologies: PhD thesis. Zurich, 2001, 295 p.
44. Turton H., Barreto L. The extended energy-systems ERIS model: An overview // Environmentally Compatible Energy Strategies Project, 2004, 44 p. – <http://www.iiasa.ac.at/Admin/PUB/Documents/IR-04-010.pdf>.
45. Bahn O., Kypreos S. MERGE-ETL: An optimization equilibrium model with two different endogenous technological learning formulations// ENE, 2002, 40 p. – http://www.eem.web.psi.ch/Publications/Other_Reports/PSI_02-16.pdf.
46. Barquin J., Vazquez M. Cournot Equilibrium Calculation in Power Networks: An Optimization Approach with Price Response Computation // Power Systems: IEEE Transactions, 2008, Vol.23, №2, p.317 – 326.
47. Centeno E., Reneses J., García R., Sánchez J.J. Long-term Market Equilibrium Modeling for Generation Expansion Planning // Bologna Tech Conference, June 23-26, 2003. Bologna (Italy), 2003, 7 p. – <http://www.iit.upcomillas.es/docs/IIT-03-019A.pdf>.
48. Волькену И.М., Зейлигер А.Н., Хабачев Л.Д. Экономика формирования электроэнергетических систем. М.: Энергия, 1981, 320 с.
49. Dixit A.K., Pindyck R.S. Investment Under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994, 468 p.
50. Yang M., Blyth W. Modeling Investment Risks and Uncertainties with Real Options Approach //A Working Paper for an IEA Book: Climate Policy. Uncertainty and Investment Risk. Paris: IEA, 2007, 30 p. – http://www.iea.org/textbase/papers/2007/ROA_Model.pdf.
51. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика). М.: Прогресс, 1971, 325 с.

52. *Botterud A., Korpas M., Vogstad K.-O., Wangensteen I.* A dynamic simulation model for long-term analysis of the power market // 14th PSCC, 24-28 June 2002. Sevilla, 2002, 7 p. –
<http://www.citeulike.org/group/7502/article/3507965>.
53. *Sánchez J.J., Centeno E., Barquín J.* System dynamics modelling for electricity generation expansion analysis // 15th PSCC, 22-26 August 2005. Liege, 2005, 7 p. –
http://www.systemdynamics.org/conferences/2007/proceed/papers/SANC_H367.pdf.
54. *Ford A.* Simulating the Impact of a Carbon Market on the Electricity System in the Western U.S.A. // Proceedings International System Dynamics Conference. Nijmegen (Netherlands), 2006, 55 p. –
[http://www.wsu.edu/~forda/Carbon Paper 06 Conf.pdf](http://www.wsu.edu/~forda/Carbon_Paper_06_Conf.pdf).
55. *Gnansounou E., Dong J., Pierre S., Quintero A.* Agent-Based Model for Market Oriented Planning of Power Generation Expansion // Power Systems Conference and Exposition (PSCE'04), 2004, p. 457–462.
56. *Haurie A., Zaccour G., Smeers Y.* Stochastic Equilibrium Programming for Dynamic Oligopolistic Markets // Journal of Optimization Theory and Applications, 1990, Vol. 66(2), p. 243–253.
57. *Murphy F., Smeers Y.* On the Impact of Forward Markets on Investments in Oligopolistic Markets with Reference to Electricity. Part 2, Uncertain Demand // Harvard Electricity Policy Group Research Paper, 2007, 39 p. –
http://www.hks.harvard.edu/hepg/Papers/Murphy_and_Smeers_June_18_07.pdf.
58. *Billups S.C., Murty K.G.* Complementarity problems // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, Vol.124, №1–2, p. 303–318.
59. *Bushnell J.B., Ishii J.* An Equilibrium Model of Investment in Restructured Electricity Markets // Center for the Study of Energy

Markets Working Paper, 2007, №164, 38 p. –
<http://repositories.cdlib.org/ucei/csem/CSEMWP-164>.

60. *Chuang A., Wu F., Varaiya P.* A Game-Theoretic Model for Generation Expansion Planning: Problem Formulation and Numerical Comparisons // IEEE Transaction Systems on Power Systems, 2001, Vol.16, №4, p. 885–890.
61. *Linares P., Santos F.J., Ventosa M., Lapiedra L.* Incorporating oligopoly, CO2 emissions trading and green certificates into a power generation expansion model // Automatica, 2008, Vol.44, №6, p. 1608–1620.
62. *Cate A., Lijesen M.* The Elmar model: output and capacity in imperfectly competitive electricity markets // Workshop: Market modelling of the Central Western European Electricity Market, 15-16 September 2005. Leuven, 2005, 22 p. –
<http://www.cpb.nl/eng/pub/cpbreeksen/memorandum/94/memo94.pdf>.
63. *Pineau P.-O.* Electricity market reforms: Industrial developments, investment dynamics and game modeling: Ph.D. Thesis. Montreal, 2000, 199 p.
64. *Gilotte L., Finon D.* Oligopolistic game around capacity expansion in liberalised electricity industries: the case of the French market // European Colloquium of the International Association of Energy Economists (IAEE): Energy markets in transition, 26-27 August 2005. Bergen, 2005, 22 p. – [http://www.snf.no/iaee2005/7th IAEE European Energy Conference/Tuesday August 30th/ Concurrent Sessions III/Market Power in Electricity Markets/L. Gilotte, D. Finon and V. Pignone.pdf](http://www.snf.no/iaee2005/7th%20IAEE%20European%20Energy%20Conference/Tuesday%20August%2030th/Concurrent%20Sessions%20III/Market%20Power%20in%20Electricity%20Markets/L.%20Gilotte,%20D.%20Finon%20and%20V.%20Pignone.pdf).
65. *Gilotte L., Finon D.* Investments in generation capacities in an oligopolistic electricity market // Centre International de Recherche sur l'Environnement et le Développement Research Paper, 2006, 23 p. –
http://www.centre-cired.fr/IMG/pdf/9_Gilotte_Finon_inv_pouvoir_marche_.pdf.

66. *Hobbs B.F.* LCP models of Nash-Cournot competition in bilateral and POOLCO-based power markets // IEEE Trans. Power Syst, 2001, Vol. 16, p. 194–202.
67. *Otero-Novas I., Mesequer C., Alba J.J.* An Iterative Procedure for Modelling Strategic Behaviour in Competitive Generation Markets // 13th Power System Conference, July 1999. Trondheim (Norway), 1999, 7 p. – <http://www.iit.upcomillas.es/docs/99ION01.pdf>.
68. *Hashimoto H.* A spatial Nash equilibrium model in Spatial Price Equilibria: Advances in Theory // Computation and Application. Springer-Verlag, 1985, p. 20–41.
69. *Billups S.C., Dirkse S.P., Ferris M.C.* A Comparison of Algorithms for Large Scale Mixed Complementarity Problems // Computational Optimization and Applications, 1997, №7, p. 3–25.
70. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, 2003, Vol.I, 728 p.
71. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, 2003, Vol.II, 704 p.
72. *Giannessi F., Maugeri A., Pardalos P.M.* Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models // Kluwer Academic Publishers, 2004, 303 p.
73. *Petra S.* Semismooth Least Squares Methods for Complementarity Problems: Ph.D. Thesis. Wurzburg, 2008, 162 p. – http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2006/1866/pdf/dissertation_petra.pdf.
74. *Billups S.C.* Algorithms for complementarity problems and generalized equations: Ph.D. thesis. Madison, 1995, 168 p. – <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.24.9353&rep=rep1&type=ps>.

75. *Borwein J.M., Lewis A.S.* Convex Analysis and Nonlinear optimization: Theory and Examples // Canadian Mathematical Society. Books in Mathematics, 2000, 310p.
76. *Калашиников В.В.* Задачи о дополнительности и обобщенные модели олигополии. Диссертация д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09. М.: 1995, 243с.
77. *Lemke C.E.* Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming // Manage. Sci., 1965, №11, p. 681–689.
78. *Реклейтис Г., Ревиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике: В 2-х кн.; пер. с англ. М.: Мир, 1986, кн. 2, 320 с.
79. *Cottle R.W., Danzig G.B.* Complementary Pivot Theory and Mathematical Programming // J. Linear Algebra, 1968, №1, p. 105–125.
80. *Cottle R.W.* Nonlinear programs with positively bounded Jacobians // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1966, №14, p. 147–158.
81. *Берцанский Я.М., Мееров М.В.* Теория и методы решения задач дополнительности // Автоматика и телемеханика, 1983, № 6, с. 5–31.
82. *Garcia C.B., Zangwill W.I.* Pathways to Solutions, Fixed Points, and Equilibria. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, Inc., 1981, 479 p.
83. *Mangasarian O.L.* Equivalence of the complementarity problem to a system of nonlinear equations // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1976, №31, p. 89–92.
84. *Mangasarian O.L., Solodov M.V.* Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization // Mathematical Programming, 1993, №62, p. 277–298.
85. *Tseng P., Yamashita M., Fukushima N.* Equivalence of complementarity problems to differentiable minimization: A unified approach // SIAM Journal on Optimization, 1996, №6, p. 446–460.

86. *Ferris M.C., Ralph D.* Projected gradient methods for nonlinear complementarity problems via normal maps // *Recent Advances in Nonsmooth Optimization*. World Scientific Publishers, 1995, p. 57–87.
87. *More J.J.* Global methods for nonlinear complementarity problems // Technical Report MCS-P429-0494. Argonne (Illinois), Argonne National Laboratory, 1994, 32 p. – <http://mathor.highwire.org/cgi/reprint/21/3/589>.
88. *Solodov M.V., Tseng P.* Modified projection-type methods for monotone variational inequalities // *Mathematical Programming Technical Report*. Madison (Wisconsin): University of Wisconsin, 1994, №94-04, 28 p. – <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.57.4995&rep=rep1&type=pdf>.
89. *Monteiro R.D.C., Pang J.-S., Wang T.* A Positive Algorithm for the Nonlinear Complementarity Problem // *SIAM Journal on Optimization*, 1995, №5, p. 129–148.
90. *Wright S.J., Ralph D.* A superlinear infeasible–interior–point algorithm for nonmonotone complementarity problems // Technical Report. Argonne (Illinois): Argonne National Laboratory, 1993, MCS-P418-0249, 26 p. – ftp://info.mcs.anl.gov/pub/tech_reports/reports/P344.ps.Z.
91. *Chen C., Mangasarian O.L.* A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems // *Comput. Optim. Appl.*, 1996, №5, p. 97–138.
92. *Ralph D.* Global convergence of damped Newton's method for nonsmooth equations via the path search // *Math. Oper. Res.*, 1994, №19, p. 352–389.
93. *Ортега Дж., Рейнболдт В.М.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975, 560 с.
94. *Robinson S.M.* Normal maps induced by linear transformations // *Mathematics of Operation Research*, 1992, №17 (3), p. 691–714.

95. *Armijo L.* Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives // *Pac. J. Math*, 1966, №16, p. 1–3.
96. *Kanzow C., Zupke M.* Inexact trust-region methods for nonlinear complementarity problems // *Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*. Dordrecht (The Netherlands): Kluwer Academic Press, 1999, p. 211–233.
97. *Мишу М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990, 488 с.
98. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985, 509 с.
99. *Базара М. Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982, 583 с.
100. *Rutherford T.F.* MILES: A mixed inequality and nonlinear equation solver // *Working Paper*. Boulder: University of Colorado, 1993, 40 p. – <http://www.gams.com/dd/docs/solvers/miles.pdf>.
101. *Dirkse S. P.* Robust Solution of Mixed Complementarity Problems: Ph.D. Thesis. Madison (Wisconsin), 1994, 153 p.
102. *Dirkse S.P., Ferris M.C.* The PATH solver: A non-monotone stabilization scheme for mixed complementarity problems // *Optim. Methods Softw*, 1995, №5, p. 123–156.
103. *Dirkse S.P., Ferris M.C.* A pathsearch damped Newton method for computing general equilibria // *Annals of Operations Research*, 1996, p. 211–232.
104. *Ferris M.C., Munson T.S.* Interfaces to PATH 3.0: Design, implementation and usage // *Computational Optimization and Applications*, 1999, №12, p. 207–227.
105. *Ferris M.C., Munson T.S.* Complementarity problems in GAMS and the PATH solver // *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2000, №24, p. 165–188.

106. *Pang J.-S., Gabriel S.A.* NE/SQP: a Robust Algorithm for the Nonlinear Complementarity Problem // *Mathematical Programming*, 1993, №60, p. 295–337.
107. *Billups S.C., Ferris M.C.* QPCOMP: A Quadratic Programming Based Solver for Mixed Complementarity Problems // *Mathematical Programming Technical Report*. Madison (Wisconsin): University of Wisconsin, 1995, №95–09, 27 p. – <ftp://ftp.cs.wisc.edu/math-prog/tech-reports/>.
108. *De Luca T., Facchinei F., Kanzow C.* A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems // *Math. Program*, 1996, №75, p. 407–439.
109. *Munson T.S., Facchinei F., Ferris M.C., Fischer A., Kanzow C.* The semismooth algorithm for large-scale complementarity problems // *INFORMS Journal on Computing*, 2001, №13, p. 294–311.
110. *Annual Energy Outlook 2008 with Projections to 2030*. Washington: Energy Information Administration, 2008, 224 p. – [http://www.eia.doe.gov/oiaf/aeo/pdf/0383\(2008\).pdf](http://www.eia.doe.gov/oiaf/aeo/pdf/0383(2008).pdf).
111. *Energy in Europe*. European Union energy outlook to 2020. Special issue. European Commission, 1999, 217 p.
112. *Плачков І.В., Кулик М.М.* Зміст Енергетичної стратегії України на період до 2030-го року // *Відомості Міністерства палива та енергетики України: інформаційно-аналітичний бюлетень*. Спец. вип. «Енергетична стратегія України на період до 2030-го року», 2006, с. 29–111.
113. *Характеристики устаткування ДАЕК «Укргідроенерго»*. – <http://www.dhe-ua.com/rus/index.html>.
114. *Обзор технико-экономических показателей тепловых электростанций бывшего Минэнерго СССР и Минтопэнерго Российской Федерации за 1991 год*. М.: СПО ОРГРЭС, 1992, 147 с.

115. *European Commission*. 2050 Low-Carbon Economy; 2017.
https://ec.europa.eu/clima/policies/strategies/2050_en.
116. *LEAP* — Long range Energy Alternatives Planning system,
<http://www.energycommunity.org/default.asp?action=47>.
117. *HOMER* — Analysis of micropower systems options.—
<https://analysis.nrel.gov/homer/>.
118. *Sustainable Energy Planning Research Group, Aalborg University, EnergyPlan*.— <http://energy.plan.aau.dk/>.
119. *Rosen J., Tietze-Stockinger I., Rentz O.* Model-based analysis of effects from large-scale wind power production // *Energy*, 2007, Vol. 32, p. 575 – 583.
120. *Matsuoka Y., Kainuma M., Morita T.* Scenario analysis of global warming using the Asian Pacific Integrated Model (AIM) // *Energy Policy*, 1995, Vol. 23, p. 357–371.
121. *Karlsson K., Meibom P.* Optimal investment paths for future renewable based energy systems using the optimisation model Balmorel // *International Journal of Hydrogen Energy*, 2008, Vol. 33, p. 1777–1787.
122. *Oak Ridge National Laboratory, Whole-Building and Community Integration*.— <http://www.coolingheatingpower.org/about/bchpscreening-tool>.
123. *Chaudry M., Jenkins N., Strbac G.* Multi-time period combined gas and electricity network optimisation // *Electric Power Systems Research*, 2008, Vol. 78, p. 1265–1279.
124. *Hudson C. R.* ORNL CHP Capacity Optimizer User's Manual // Tech. rep. — Oak Ridge National Laboratory, 2005.—
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/citations;jsessionid=2CFF10B4B594334AC34749FEC3460D1B?doi=10.1.1.585.9925>.
125. *Aldi A., Anundson K., Bigelow A., Capulli A.* Decentralized Energy Master Planning // Tech. rep. — Worcester Polytechnic Institute, 2010.—

https://web.wpi.edu/Pubs/E-project/Available/E-project-042910-104852/unrestricted/DecentralizedEnergyMasterPlanning_Brent_2010.pdf.

126. *Energy* research Centre of the Netherlands, COMPETES.– <http://www.ecn.nl/units/ps/tools/modelling-systems/competes/>.
127. Aalborg University, EnergyInteractive.NET.– <http://energyinteractive.net>
128. Otero-Novas I., Meseguer C., Batlle C., Alba J. J. A Simulation Model for a Competitive Generation Market // IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS, 2000, Vol. 15-1, p. 250–256.
129. Homma T., Mori S., Akimoto K., Yamamoto H., Kosugi T., Tomoda T. Development of multi-regional and multi-sectoral energy economic model and the analysis of CO2 emission reduction // 8th Annual Conference on Global Economic Analysis: Lbeck, Germany, 2005.– <https://www.gtap.agecon.purdue.edu/resources/download/2116.pdf>.
130. DER-CAM - Distributed Energy Resources Customer Adoption Model.– <http://der.lbl.gov/dercam.html>.
131. EWI, *Dispatch* and Investment Model for Electricity Markets in Europe // A brief overview.– [http://www.ewi.unikoeln.de/fileadmin/user/PDFs/DIME Model description.pdf](http://www.ewi.unikoeln.de/fileadmin/user/PDFs/DIME_Model_description.pdf).
132. Akimoto K., Tomoda T., Fujii Y., Yamaki K. Assessment of global warming mitigation options with integrated assessment model DNE21 // Energy Economics, 2004, Vol. 26-4, p. 635–653.
133. *Energy* Paper 68. Energy Projections for the UK // Tech. rep., 2000.– <http://www.powerstationeffects.co.uk/pdf/EnergyPaper68.pdf>.
134. Swider D. J., Weber C., Barth R. The Value of Wind Energy in the European Electricity Market Application of a Stochastic Fundamental Model // European Wind Energy Conference & Exhibition, 2004.–

- <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=7C79BDD4663AC1539152AB401BA3B46F?doi=10.1.1.571.2873&rep=rep1&type=pdf>
135. *Pollitt H., Barker T., et al.* E3ME Manual, Tech. rep., Cambridge Econometrics. –
<https://www.camecon.com/wp-content/uploads/2016/09/E3ME-Manual.pdf>.
 136. *Pant H. M.* GTEM - global trade and environment model // Tech. rep. – Commonwealth of Australia. – 2007. –
[http://en.openei.org/wiki/Global_Trade_and_Environmental_Model_\(GTEM\)&https://www.gtap.agecon.purdue.edu/resources/download/1023.pdf](http://en.openei.org/wiki/Global_Trade_and_Environmental_Model_(GTEM)&https://www.gtap.agecon.purdue.edu/resources/download/1023.pdf)
 137. *Porat Y., Irith R., Turvey R.* Long-run marginal electricity generation costs in Israel // *Energy Policy*, 1997, Vol. 25-4, p. 401–411.
 138. *Milligan M. R.* Modeling Utility-Scale Wind Power Plants - Part 1: Economics // Tech. rep., National Renewable Energy Laboratory, 2000. –
<http://www.nrel.gov/docs/fy00osti/27514.pdf>.
 139. *Decision and Information Sciences Division - Center for Energy, Environmental, and Economic Systems Analysis, Electricity Market Complex Adaptive System (EMCAS)* // Model Introduction, Tech. rep., Argonne National Laboratory, 2008.–
<http://ceeesa.es.anl.gov/pubs/61084.pdf>.
 140. *Lise W., Linderhof V., Kuik O., Kemfert C., Stling R., Heinzow T.* A game theoretic model of the Northwestern European electricity market power and the environment // *Energy Policy*, 2006, Vol. 34(15), p. 2123–2136.
 141. *Segurado R., Pereira S., Pipio A., Alves L.* Comparison between EMINENT and other Energy Technology Assessment Tools // EMINENT 2d Workshop Energy for Sustainable Future, 2008. –
http://eminent2.dcs.uni-pannon.hu/presentations/EMINENT_idmec.pdf.

142. *Helseth A., Mo B.* Long-Term Scheduling of HydroThermal Power Systems Using Scenario Trees. – [https://www.energord.com/PSM2009/PSM 2009 Helseth.ppt](https://www.energord.com/PSM2009/PSM%2009%20Helseth.ppt).
143. *California* Environmental Protection Agency: Updated Economic Analysis of California's Climate Change Scoping Plan // Tech. rep. – 2010. – https://www.arb.ca.gov/cc/scopingplan/economics-sp/updated-analysis/updated_sp_analysis.pdf.
144. EMD International A/S. energyPRO - User's Guide // Tech. rep., 2011.– <http://emd.dk/energyPRO/Tutorials%20and%20How%20To%20Guides/energyPROHlpEng-4.4%20Apr.16.pdf>.
145. *ENPEP* – Energy and Power Evaluation Program.– [http://manhaz.cyf.gov.pl/manhaz/links/Environmental analysis tools /Environmental analysis tools.html](http://manhaz.cyf.gov.pl/manhaz/links/Environmental%20analysis%20tools/Environmental%20analysis%20tools.html) (2009).
146. *Barreto L.* Technological Learning in Energy Optimisation Models and Deployment of Emerging Technologies // Ph.D. thesis: Swiss Federal Institute of Technology. Zurich, 2001.– <https://iea-etsap.org/docs/BARRETO-thesis.pdf>.
147. *Belcredi D., Bon E. G., Bresesti P., Bruno G., Calisti R., Cazzol M. V., et al.* Un ambiente integrato per la pianificazione strategica dei sistemi di trasmissione // Tech. rep., CESI RICERCA, 2008.– <http://doc.rse-web.it/doc/doc-sfoglia/08000124-499/08000124-499.html>
148. *Naill R. F.* A system dynamics model for national energy policy planning // System Dynamics Review, 1992, Vol. 8(1), p. 1–19.
149. *Haller M.* CO2 Mitigation and Power System Integration of Fluctuating Renewable Energy Sources: A Multi-Scale Modeling Approach // Ph.D. thesis, Technische Universitat Berlin, 2012.– http://www.reiner-lemoine-stiftung.de/pdf/dissertationen/dissertation_haller.pdf.
150. *Argonne* National Laboratory, Generation and transmission maximization (GTMax) model.– <http://www.dis.anl.gov/projects/Gtmax.html>.

151. *Steward D. M., Penev M.* The Influence of Building Location on Combined Heat and Power/ Hydrogen (Tri-Generation) System Cost, Hydrogen Output and Efficiency, 2009. – <http://www.nrel.gov/docs/fy09osti/45628.pdf>.
152. *Martins R., Krajacic G., Alves L., Duic N., Azevedo T., Carvalho M. da Graca.* Energy storage in Islands – Modelling Porto Santo’s Hydrogen System // *Chemical Engineering Transactions*, 2009, Vol. 18, p. 367–372.
153. *U.S. Department of Energy, Oak Ridge National Laboratory, HUD CHP Guide #2: Feasibility Screening for Combined Heat and Power in Multifamily Housing* // Tech. rep., 2009. – <https://portal.hud.gov/hudportal/documents/huddoc?id=chpguide2.pdf>.
154. *Briguglio N., Ferraro M., Andaloro L., Antonucci V.* New simulation tool helping a feasibility study for renewable hydrogen bus fleet in Messina // *International Journal of Hydrogen Energy*, 2008, Vol. 33, p. 3077 – 3084.
155. *James B.* HyPro: Modeling the H2 Transition, 2007.– https://energy.gov/sites/prod/files/2014/03/f9/deliv_analysis_perez.pdf.
156. *Martinsen D., Linssen J., Markewitz P., Voge S.* CCS: A future CO2 mitigation option for Germany? A bottom-up approach // *Energy Policy*, 2007, Vol. 35, p. 2110–2120.
157. *De Vries B. J., van Vuuren D. P., den Elzen M. G., Janssen M. A.* The Targets IMage Energy Regional (TIMER) Model. Technical Documentation // Tech. rep. – The IMAGE Project, 2001.– <http://www.pbl.nl/sites/default/files/cms/publicaties/461502024.pdf>.
158. *International Network for Sustainable Energy* // *Vision 2050: visions for a renewable energy world.*– <http://www.inforse.dk/europe/Vision2050.htm>.
159. *Vienna University of Technology, INVERT.*– <http://www.invert.at/>
160. *ICF International, Introduction to the Integrated Planning Model (IPM)* // Tech. rep., 2008.

161. *Loulou R., Goldstein G., Noble K.* Documentation for the MARKAL Family of Models, 2004. – https://iea-etsap.org/MrklDoc-I_StdMARKAL.pdf.
162. *Lisboa M., Marzano L., Saboia C., Maceira M., Melo A.* A Mixed-Integer Programming Model for Long Term Generation Expansion Planning of the Brazilian System // 16th PSCC: Glasgow, Scotland, 2008.– http://www.psc-central.org/uploads/tx_ethpublications/psc2008_682.pdf.
163. *Susandi A.* Integrated Assessment Model for Indonesian Energy Forecast // Joint Convention Jakarta IAGI: Jakarta, Indonesia, 2003.– <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.670.8848&rep=rep1&type=pdf>.
164. *Krewitt W., Simon S., Graus W., Teske S., Zervos A., Schfer O.* The 2C scenario A sustainable world energy perspective // Energy Policy, 2007, Vol. 35(10), p. 4969–4980.
165. *Schrattenholzer L.* The Energy Supply Model Message // Tech. rep.: International Institute for Applied Systems Analysis, 1981.– <http://pure.iiasa.ac.at/1542/1/RR-81-031.pdf>.
166. *Scott M. J., Sands R. D., Edmonds J., Liebetrau A. M., Engel D. W.* Uncertainty in integrated assessment models: modeling with MiniCAM 1.0 // Energy Policy, 1999, Vol. 27(14), p. 855–879.
167. *ENEA Ricerca sul Sistema Elettrico, SECURE - Assessment of the impact of gas shortages risks on the power sector* // Tech. rep., 2009.– http://www.feem-project.net/secure/plastore/Deliverables/SECURE_Deliverable%205.6.2.pdf.
168. *Deloitte:* Deloitte Marketpoint – MarketBuilder Models and Data // Tech. rep.– <https://www.deloittemarketpoint.com/resources/reports>.

169. *NEMS* – The National Energy Modeling System.–
<http://www.eia.doe.gov/oiaf/aeo/overview/>.
170. *Maceira M., Terry L., Costa F., Dam'azio J., Melo A.* Chain of Optimization Models for Setting the Energy Dispatch and Spot Price in the Brazilian System // 14th PSCC: Sevilla, 2002.–
http://simsee.org/simsee/biblioteca/Brasil/ChainOfOptModelsForSettingTheEnergyDispatchAndSpotPriceinBrazil_2002.pdf.
171. *Hadley S., Hirst E.* ORCED: A Model to Simulate the Operations and Costs of Bulk-Power Markets // Tech. rep. – Oak Ridge National Laboratory, 1998. – <https://www.osti.gov/scitech/servlets/purl/656876>.
172. *Nuclear and Electricity Analysis Branch, Energy Supply and Conversion Division, Office of Integrated Analysis and Forecasting, Energy Information Administration, Model Documentation - Electricity Capacity Planning Submodule of the Electricity Market Module* // Tech. rep., 1994.– <https://www.osti.gov/scitech/servlets/purl/10166765>.
173. *Iowa State University, PLEXOS Overview & Tutorial* // Tech. rep.–
<http://home.eng.iastate.edu/~jdm/ee590-Old/PlexosTutorial.pdf>.
174. *Criqui P., Mima S., Viguier L.* Marginal abatement costs of CO2 emission reductions, geographical flexibility and concrete ceilings: an assessment using the POLES model// *Energy Policy*, 1999, Vol. 27(10), p. 585– 601.
175. *Energy research Centre of the Netherlands. Powers.*–
<http://www.ecn.nl/units/ps/tools/modelling-systems/powers/>.
176. *National Technical University of Athens, Energyeconomicsenvironment modelling laboratory research and policy analysis.*–
<http://www.e3mlab.ntua.gr/>.
177. *Gjelsvik A., Belsnes M., Haugstad A.* An algorithm for stochastic medium-term hydrothermal scheduling under spot price uncertainty // *Proc. of the 13th power systems computation conference: Trondheim, Norway*, 1999, p. 1079–1085.

178. *Prometheus* stochastic model // Tech. rep.: Energy, Economics and Environment Modeling Laboratory: National Technical University of Athens.–
<http://147.102.23.135/e3mlab/PROMETHEUS%20Manual/The%20PROMETHEUS%20MODEL.pdf>.
179. *Hobbs B., Rouse H., Hoog D.* Measuring the economic value of demand-side and supply resources in integrated resource planning models // IEEE Transactions on Power Systems, 1993, Vol. 8(3), p. 979–987.
180. *RAMSES* // Danish Energy Agency.– <http://www.ens.dk/da-DK/Info/TalOgKort/Fremskrivninger/modeller/ramses/Sider/Forside.aspx>.
181. *Australian Commonwealth Department of Industry, Tourism & Resources*, Cogeneration Ready Reckoner - Software to assist with an initial evaluation of the viability of cogeneration // Tech. rep., 2002.–
https://energy.gov/sites/prod/files/2014/05/f15/guide_chp_boiler.pdf.
182. *CANMET Energy Technology Centre - Varennes*, Solar Air Heating Project Analysis // CLEAN ENERGY PROJECT ANALYSIS: RETScreen Engineering & Cases Textbook.–
http://unfccc.int/resource/cd_roms/na1/mitigation/Module_5/Module_5_1/b_tools/RETScreen/Manuals/Solar_Air_Heating.pdf.
183. *Instituto de Investigaci3n Tecnol3gica - Universidad Pontificia Comillas*, ROM Model (Reliability and Operation Model for Renewable Energy Sources).– <http://www.iit.upcomillas.es/aramos/ROM.htm>.
184. *Regional Short-Term Energy Model (RSTEM) Overview* // Tech. rep.: U.S. Energy Information Administration.–
<https://www.eia.gov/outlooks/steo/documentation/overview.pdf>.
185. *Siemons R., Vis M., van den Berg D., Chesney I. M., Whiteley M., Nikolaou N.* Bio-Energy's Role in the EU Energy Market - A view of developments until 2020 // Tech. rep.: BTG biomass technology group BV, 2004.–

[https://np-net.pbworks.com/f/BTG+\(2004\)+Bioenergy%5C%27s+role+in+the+EU+2000-2020.pdf](https://np-net.pbworks.com/f/BTG+(2004)+Bioenergy%5C%27s+role+in+the+EU+2000-2020.pdf).

186. *Energy Information Administration (US-DOE), System for the Analysis of Global Energy markets (SAGE).*– <http://www.eia.doe.gov/>.
187. *Hornnes K. S. A Model for Coordinated Utilization of Production and Transmission Facilities in a Power System Dominated by Hydropower // Ph.D. thesis, University of Trondheim, 1995.*
188. *Illum K. A SESAM Model of the Nordic Energy System - Methodology and the Modelling of the Nordic Energy System // Tech. rep., Greenpeace Nordic, 2006.*
189. *Institute for Sustainable Solutions and Innovations, Energy rich Japan.*– <http://www.energyrichjapan.info/>.
190. *Energinet.dk, Sivael.*– <http://www.energinet.dk/en/>.
191. *Powell W. B., George A., Simao H., Scott W., Lamonty A., Stewart J. SMART: A Stochastic Multiscale Model for the Analysis of Energy Resources, Technology and Policy // Tech. rep., 2010.*
192. *Jankowski B., Pellekaan W., Winter J. Volume III: A comparison of the energy models DORSEK, ENPEP and EFOM, in: The Netherlands – Poland Task Force on Integrated Energy and Environmental Planning, 1993.*
193. *Energy Analyses. The STREAM modelling tool.*– <http://www.streammodel.org/>.
194. *Hoffman M. G., Sadovsky A., Kintner-Meyer M. C., DeSteese J. G. Analysis Tools for Sizing and Placement of Energy Storage in Grid Applications – A Literature Review // Tech. rep., Pacific Northwest National Laboratory, 2010.*
195. *University of Wisconsin-Madison, A TRaNsient SYtems Simulation program.*– <http://sel.me.wisc.edu/trnsys/>.

196. *Leaver J. D., Gillingham K. T., Leaver L. H. T.* Assessment of primary impacts of a hydrogen economy in New Zealand using UniSyD // International Journal of Hydrogen Energy, 2009, Vol. 34(7), p. 2855–2865.
197. *Kagiannas A. G., Didisz T., Askounis D. T., Psarras J.* Strategic appraisal of energy models for Mozambique // International Journal of Energy Research, 2003, Vol. 27, p. 173–186.
198. *Cai Y., Huang G., Lin Q., Nie X., Tan Q.* An optimization-modelbased interactive decision support system for regional energy management systems planning under uncertainty // Expert Systems with Applications, 2009, Vol. 36, p. 3470–3482.
199. VTT Technical Research Centre of Finland // VTT-EMM.– <http://www.vtt.fi/?lang=en>.
200. International Energy Agency. World Energy Model.– <http://www.worldenergyoutlook.org/model.asp>.
201. WILMAR: wind power integrated in liberalised electricity markets // Risoe National Laboratory.– <http://www.wilmar.risoe.dk/>.
202. Fondazione Eni Enrico Mattei, WITCH.– <http://www.witchmodel.org/pag/model.html>.
203. *Smith S.J.* Income and Pollutant Emissions in the ObJECTS MiniCAM Model // Journal of Environment & Development, 2005, Vol. 14 (1), p. 175–196.
204. E3database. An Introduction into the Life-Cycle Analysis Calculation Tool. 2008. – <http://www.e3database.com/>.
205. AURORA_{xmp}, 2017. – http://epis.com/aurora_xmp/.
206. Calliope, 2015. – <https://www.callio.pe/>.
207. CASPOC, 2003. – <https://www.caspoc.com/>.
208. CYME Power Engineering Software, 2018. – <http://www.cyme.com/>.
209. DESSTINEE, 2015. – <https://sites.google.com/site/2050desstinee/>.

210. *A Dispatch and Investment Evaluation Tool with Endogenous Renewables* DIETER, 2015. – <http://www.diw.de/dieter>.
211. *DigSILENT PowerFactory*, 2019. – <http://www.digsilent.de/index.php/products/powerfactory.html>.
212. *The power market model EMMA*, 2017. – <http://neon-energie.de/en/emma/>.
213. *Skar C, Doorman G, Pérez-Valdés GA, Tomasgard A. A multi-horizon stochastic programming model for the European power system*, 2016. – https://www.ntnu.no/documents/7414984/202064323/1_Skar_ferdig.pdf/855f0c3c-81db-440d-9f76-cfd91af0d6f0.
214. *Enertile*, 2019. – <http://www.enertile.eu>.
215. *Energy System Models at Fraunhofer ISE. Power System Model for expansion planning and unit-commitment «ENTIGRIS»*, 2016. – www.entigris.org.
216. *The EUOfusion TIMES Model (ETM Model)*, 2016. – <https://www.euro-fusion.org/collaborators/socio-economics/economics/model/>.
217. *Energy Transition Model* – 2017. – <https://energytransitionmodel.com/>.
218. *Loulou R., Labriet M. ETSAP-TIAM: the TIMES integrated assessment model Part I : model structure // Computational Management Science*, 2008, p. 7–40. – <https://DOI.org/10.1007/s10287-007-0046-z>.
219. *Loulou R. ETSAP-TIAM: the TIMES integrated assessment model Part II : mathematical formulation // Computational Management Science*, 2008, p. 41–66. – <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10287-007-0045-0>.
220. *Després J. Modelling the long-term deployment of electricity storage in the global energy system // Electric power. Université Grenoble Alpes*, 2015, NNT: 2015GREAT073. – <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01231455v1/document>.

221. *Brancucci Martinez-Anido C.* Electricity without borders – the need for crossborder transmission investment in Europe. University of Bristol, 2013.–
https://ses.jrc.ec.europa.eu/sites/ses.jrc.ec.europa.eu/files/documents/thesis_brancucci_electricity_without_borders.pdf.
222. *Atabay D.* ficus: A (mixed integer) linear optimisation model for local energy systems // Institute for Energy Economy and Application Technology, Technische Universität München, 2018. –
<https://ficus.readthedocs.io>.
223. *Global Change Assessment Model.* – Joint Global Change Research // University of Maryland, 2019. –
<http://www.globalchange.umd.edu/gcam/>.
224. *GEM-E3 model.* // European Commission, 2019. –
<https://ec.europa.eu/jrc/en/geme3/model>.
225. *Capros P, van Regemorter D, Paroussos L, Karkatsoulis P, Fragkiadakis C, Tsani S, et al.* GEM-E3 model documentation, 2013. –
<https://DOI.org/10.2788/47872>.
226. *Genesys.* // RWTH-Aachen University, 2019. – <http://www.genesys.rwth-aachen.de/>.
227. *GridLAB-D Simulation Software*, 2019. – <http://www.gridlabd.org/>.
228. *Power system simulation. Power system Analysis. Hypersim* // Opal-RT, – 2017. – <http://www.opal-rt.com/systems-hypersim/>.
229. *Dufo-Lopez R.* iHOGA – user manual. Version 2.5. // University of Zaragoza, 2019. –
<https://ihoga.unizar.es/Desc/iHOGA%202.5%20User%20manual.pdf>.
230. *Kühne M.R.* Drivers of energy storage demand in the German power system: an analysis of the influence of methodology and parameters on modelling results // Technische Universität München, 2015. –
<https://mediatum.ub.tum.de/doc/1280982/1280982.pdf>.

231. *Invert/EE-Lab*, 2015. – <http://www.invert.at/overview.php>.
232. *IPSA 2. IPSA POWER*, 2016. – http://www.ipsa-power.com/?Page_id=766.
233. *Jaehnert S.* Integration of regulating power markets in Northern Europe. Norwegian University of Science and Technology, 2012. – <https://core.ac.uk/download/pdf/52105695.pdf>.
234. *LIBEMOD*. LIBeralization MODEL for the European Energy Markets // – Frischsenteret, 2019. – <http://www.frisch.uio.no/ressurser/LIBEMOD/>.
235. *Nahmmacher P.* Strategies for a future European power system with high shares of renewable energy: A model-based analysis focusing on uncertainty // Technische Universität Berlin, 2016. – https://depositonce.tu-berlin.de/bitstream/11303/5909/4/nahmmacher_paul.pdf.
236. *Jacobson M.Z., Delucchi M.A., Cameron M.A., Frew B.A.* Low-cost solution to the grid reliability problem with 100% penetration of intermittent wind, water, and solar for all purposes. Proceedings of National Academy of Science of the USA, 2015, Vol. 112, № 49, 6 p. – <https://doi.org/10.1073/pnas.1510028112>.
237. *Bergh K Van Den, Bruninx K, Delarue E, D'haeseleer W.* LUSYM: a Unit Commitment Model formulated as a Mixed-Integer Linear Program.// University of Leuven (KU Leuven). Energy Institute, 2015. – https://www.mech.kuleuven.be/en/tme/research/energy_environment/Pdf/wpen2014-7.pdf.
238. *NEMO*, 2011. – <https://nemo.ozlabs.org/>.
239. *Oemof*, 2019. – <https://oemof.org/>.
240. *Electric Power Research Institute. Smart Grid Resource Center: Simulation Tool – OpenDSS*, 2010. – <http://smartgrid.epri.com/SimulationTool.aspx>.
241. *OSeMOSYS*, 2019. – <http://www.osemosys.org/>.

242. *Power Grid and Market Analysis (PowerGAMA)*, 2019. – https://bitbucket.org/harald_g_svensden/powergama/wiki/Home.
243. *Python for Power System Analysis (PyPSA)*, 2019. – <https://pypsa.org/>.
244. *Pöschacker M, Elmenreich W*. Model implementation for the extendable open source power system simulator RAPSim // International Workshop on Intelligent Solutions in Embedded Systems. – Ancona, Italy, 2015. – p. 103–108.
245. *Regional Energy Deployment System (ReEDS) Model* // NREL, 2017. – <http://www.nrel.gov/analysis/reeds/>.
246. *Luderer G., Leimbach M., Bauer N., Kriegler E., Baumstark L., Bertram C., et al*. Description of the REMIND model (version 1.6), 2015. – https://www.researchgate.net/publication/314539899_Description_of_the_REMIND_Model_Version_16.
247. *Scholz Y*. Renewable energy based electricity supply at low costs. – Universität Stuttgart, 2012. – <https://d-nb.info/1026242312/34>.
248. *Wiese F*. Renpass renewable energy pathways simulation system. Open source as an approach to meet challenges in energy modeling // University of Flensburg, 2015. – https://www.reiner-lemoine-stiftung.de/pdf/dissertationen/Dissertation_Frauke_Wiese.pdf.
249. *The System Advisor Model (SAM)*, 2019. – <https://sam.nrel.gov/>.
250. *Simpow* – highly integrated software for simulation of power systems, 2017. – <http://www.simpow.com/>.
251. *Modelling Overview – the SIREN Toolkit and more*, 2014. – http://www.sen.asn.au/modelling_overview.
252. *Bye B, Fæhn T, Rosnes O*. Residential energy efficiency and European carbon policies. A CGE-analysis with bottom-up information on energy efficiency technologies, 2015. – https://www.cree.uio.no/publications/pdf_other_publications/ssb_dp_817_bye_fehn_rosnes_residential_energy.pdf.

253. *StELMOD*: A Stochastic Multi-Market Model with Rolling Planning, 2019.–
https://www.diw.de/en/diw_01.c.599753.en/models.html#ab_608464.
254. *SWITCH* Power System Planning Model, 2019. – <http://switch-model.org/>.
255. *The TEMOA* Project, 2019. – <http://www.temoaproject.org/>.
256. *Klein SA, et al. TRNSYS 18: A Transient System Simulation Program* // The University of Wisconsin. USA: Madison, 2018. – <http://sel.me.wisc.edu/trnsys/>.
257. *Urbs*: A linear optimisation model for distributed energy systems, 2019. – <https://urbs.readthedocs.io/en/latest/>.
258. *Pudjianto D, Castro M, Strbac G, Gaxiola E*. Transmission infrastructure investment requirements in the future European low-carbon electricity system // Proc. of the International Conference on European Energy Market, EEM, 2013. – <http://dx.doi.org/10.1109/EEM.2013.6607327>.
259. *Pudjianto D., Aunedi M., Djapic P., Strbac G*. Whole-Systems Assessment of the Value of Energy Storage in Low-Carbon Electricity Systems // IEEE Transactions on Smart Grid, 2014, Vol. 5, p. 1098-1109.
260. *Connolly D*. Energy Tools for Analysing the Integration of Renewable Energy. Denmark: Aalborg, 2012, 53 p. – <https://www.google.com.ua/#q=Energy+Tools+for+Analysing+the+Integration+of+Renewable+Energy>
261. *Parkkonen O*. Customer benefits of Demand-Side Management in the Nordic electricity market // PhD thesis: Jyväskylä University School of Business and Economics, 2016, 65 p. – <https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/52033/URN:NBN:fi:jyu-201611284797.pdf?sequence=1>
262. *Weijermars R., Taylor P., Bahn O., Das S.R., Wei Y.-M*. Review of models and actors in energy mix optimization e can leader visions and

- decisions align with optimum model strategies for our future energy systems? // Energy Strategy Reviews, 2012, Vol. 1.–
<http://www.alboran.com/files/2013/07/ES-9.pdf>
263. *KETRON* Optimization. MPSIII. Mathematical Programming System.–
<http://www.ketronms.com/products.shtml>
264. *Belotti P.* FICO. Robust optimization with the Xpress Optimizer. Berlin, 2015. – http://co-at-work.zib.de/files/Xpress_Robust_Optimization.pdf
265. *IBM/CPLEX* Optimizer. – <https://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>
266. *Andersen E.D., Andersen K.D.* The MOSEK interior-point optimizer for linear programming // An implementation of the homogeneous algorithm. In High Performance Optimization, by H Frenk et al. (eds), 2000, p. 197–232.
267. *GUROBI* Optimization. <http://www.gurobi.com/index>
268. *Bixby R.E.* A Brief History of Linear and Mixed-Integer Programming Computation // Documenta Mathematica. Extra Volume ISMP, 2012, p. 107–121.
269. *GAMS.* – <https://www.gams.com/index.htm>
270. *Dirkse S., Ferris M.C., Munson T.* The PATH Solver.–
<http://pages.cs.wisc.edu/~ferris/path.html>
271. <http://energy.plan.aau.dk/links>
272. *Ahn B., Hogan W.W.* On convergence of the PIES algorithm for computing equilibria // Operations Research, 1982, Vol 30(2), p. 281–300.
273. *NEMSIM:* the National Electricity Market simulator. – <http://press-files.anu.edu.au/downloads/press/p96431/mobile/ch11s08.html>
274. *Anderson S.C.* Analyzing strategic interaction in multi-settlement electricity markets: A closed-loop supply function equilibrium model.–
https://www.hks.harvard.edu/crump/papers/Anderson_thesis.pdf

275. http://energyexemplar.com/wp-content/uploads/2015/03/02-15-Price-Forecasting-Forum-Berlin_-TF_Final.pdf
276. *Hobbs B., Helman U.* Complementarity-Based Equilibrium Modeling for Electric Power Markets// Modeling Prices in Competitive Electricity Markets. Series in Financial Economics. Chichester: Wiley, 2004, 338p.
277. *Murphy F., Smeers Y.* Generation capacity expansion in imperfectly competitive restructured electricity markets // Operations Research, 2005, Vol.53, №4, p. 646–661.
278. *Murphy F., Smeers Y.* On the Impact of Forward Markets on Investments in Oligopolistic Markets with Reference to Electricity. Part 2, Uncertain Demand // Harvard Electricity Policy Group Research Paper, 2007, 39p. – http://www.hks.harvard.edu/hepg/Papers/Murphy_and_Smeers_June_18_07.pdf.
279. *Pineau P.-O.* Electricity market reforms: Industrial developments, investment dynamics and game modeling: Ph.D. Thesis. Montreal, 2000, 199 p. – http://www.irec.net/upload/File/memoires_et_theses/260.pdf
280. *Саух С.Е., Борисенко А.В.* Равновесные модели процессов функционирования и развития генерирующих мощностей Украины в рыночных условиях // Энергетика России в XXI веке: стратегия развития – восточный вектор. Энергетическая кооперация в Азии: что после кризиса? // Сб. докл. объединенного симпозиума 30 августа – 3 сентября 2010 г., Россия, Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010, с. 413 – 419.
281. *Саух С.Е., Семагина Е.П.* Определение равновесного состояния рынка электрической энергии в Украине методами математического моделирования // Электрон. моделирование, 2011, 33, № 46 с. 3 – 14.
282. *Саух С.Е., Борисенко А.В., Подковальников С.В., Хамисов О.В.* Математическое моделирование конкурентного равновесия на электроэнергетических рынках Российской Федерации и Украины. –

- Ч. 2. Математические модели олигополистических рынков электроэнергии и их применение // Электрон. моделирование, 2012, **34**, № 3, с. 3 – 24.
283. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, 2003, Vol.I, 728 p.
284. *Delarue E., Bekaert D., Belmans R., D'haeseleer W.* Development of a comprehensive electricity generation simulation model using a mixed integer programming approach// Proc. of the International Conference on Computer, Electrical, and Systems Science, and Engineering. Prague, 2007, Jul 27-29, p. 99–104.
285. *Billups S. C., Dirkse S. P., Ferris M. C.* A comparison of large scale mixed complementarity problem solvers// Computational Optimization and Applications, 1997, № 7, p. 3 – 25.
286. *Petra S.* Semismooth Least Squares Methods for Complementarity Problems: Ph.D. Thesis. Wurzburg, 2008, 162 p. – http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2006/1866/pdf/dissertation_petra.pdf.
287. *Ruggiero V., Tinti F.* A preconditioner for solving large scale variational inequality problems by a semismooth inexact approach // International Journal of Computer Mathematics, 2006, №10, p. 723–739.
288. *Веселов Ф.В., Курилов А.Е., Хоршев А.А.* Построение и использование моделей линейного программирования в задачах исследования энергетики // Сб. трудов конференции «Моделирование-2006». Киев: ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2006, с.147–152.
289. *Воропай Н.И., Труфанов В.В.* Математическое моделирование электроэнергетических систем в современных условиях // Электричество, 2002, №10, с. 6–12.

290. *Борисенко А.В., Саух С.Є.* Рівноважна модель вводу генеруючих потужностей в умовах недосконалої конкуренції // *Новини енергетики*, 2009, №11, с. 36–39, №12, с. 23–39.
291. *Костюковский Б.А., Шульженко С.В., Гольденберг І.Я., Власов С.В.* Методи та засоби дослідження перспектив розвитку електроенергетики в умовах впровадження ринкових відносин // *Проблеми загальної енергетики*. Київ: 2002, № 2, с. 6–13.
292. *Hobbs B.F., Metzler C.B., Pang J.S.* Strategic gaming analysis for electric power system: an MPEC approach // *IEEE Transactions on Power Systems*, 2000, Vol. 15, № 2, p. 638-645.
293. *Poletti C.* The economics of electricity markets: theory and policy // Edward Elgar Publishing, 2013, 240 p.
294. *Bigger D.* The economic theory of electricity transmission, 2003. – http://www.ergo.ee.unsw.edu.au/Egy_MktWkshp/accc_biggar_paper.pdf
295. *Purchala K., Meeus L., Van Dommelen D., Belmans R.* Usefulness of DC power flow for active power flow analysis // *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2005, Vol. 1, 6 p. – http://www.esat.kuleuven.be/electa/publications/fulltexts/pub_1456.pdf
296. *Cheng Xu.* PTDF-based power system equivalents // *IEEE Transactions on Power Systems*, 2005, Vol. 20, №4, p. 1868–1876.
297. *Duthaler C., Kurzidem M., Emery M., Andersson G.* Analysis of the Use of PTDF in the UCTE Transmission Grid // *16th Power Systems Computation Conference*. Glasgow, 2008. 6 p. – http://infoscience.epfl.ch/record/153995/files/0807_PSCC_PTDF-Duthaler.pdf
298. *Chong Suk Song, Chang Hyun Park, Minhan Yoon, Gilsoo Jang* Implementation of PTDFs and LODFs for Power System Security // *Journal of International Council on Electrical Engineering*, 2011, Vol. 1, №1, p. 49–53.

299. Саух С.Е. Математическое моделирование энергетических цепей // Электрон. моделирование, 2011, **33**, №3, с. 3–12.
300. Саух С.Е. Метод CR-факторизации матриц большой размерности // Электрон. моделирование, 2007, **29**, №6, с. 3–22.
301. Саух С.Е. Методы компьютерного моделирования конкурентного равновесия на рынках электроэнергии // Электрон. моделирование, 2013, **35**, №5, с. 11–26.
302. Wei J.-Y., Smeers Y. Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Generators and Regulated Transmission Prices // Operations Research, 1999, Vol. 47 (№ 1), p. 102–112.
303. Hobbs B.F. Linear Complementarity Models of Nash–Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Markets // IEEE Transactions on Power Systems, 2001, Vol. 16 (№ 2), p. 194 – 202.
304. Day C.J., Hobbs B.F., Pang, J.-S. Oligopolistic Competition in Power Networks: A Conjectured Supply Function Approach // IEEE Transactions on Power Systems, 2002, Vol. 17 (№ 3), p. 597–607.
305. Борисенко А.В., Саух С.Е. Моделирование равновесного состояния электроэнергетических систем в рыночных условиях // Сб. трудов конференции «Моделирование-2008». Киев: ИПМЭ им. Г.Е.Пухова НАН Украины, 2008, с. 172 – 177.
306. Hobbs B.F., Drayton G., Fisher E.B., Lise W. Improved Transmission Representations in Oligopolistic Market Models: Quadratic Losses, Phase Shifters, and DC Lines // IEEE Transactions on Power Systems, 2008, Vol. 23 (№ 3), p. 1018 – 1029.
307. Schweppe F.C., Caramanis M.C., Tabors R.E., Bohn R. E. Spot Pricing of Electricity // Kluwer Academic Publishers. Boston, MA, 1988, 355p.
308. Саух С.Е. Математическое моделирование энергетических цепей // Электрон. моделирование, 2011, **33**, № 3, с. 3 – 12.

309. Саух С.Е. Метод смещения малых элементов в обобщенных якобинах Кларка для обеспечения численной устойчивости квазиньютоновских методов решения вариационных неравенств // Электрон. моделирование, 2015, **37**, № 4, с. 3 – 18.
310. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas. Graphs and Mathematical Tables // National Bureau of Standards, USA, 1972, 1046p.
311. Neuhoff K. Integrating Transmission and Energy Markets Mitigates Market Power // CMI Working Paper. Cambridge: University of Cambridge, 2003, №17, 53 p.
312. Ventosa M., Denis R., Redondo C. Expansion planning in electricity markets. Two different approaches // 14th PSCC, 24-28 June 2002. Sevilla, 2002, 8 p.
313. Lemke C.E. Howson J.T. Equilibrium Points of Bimatrix Games // Journal of Society for Industrial and Applied Mathematics, 1964, Vol. 12, №2, p. 413 – 423.
314. Murty, K. G. Linear complementarity, linear and nonlinear programming // Sigma Series in Applied Mathematics. Berlin: Heldermann Verlag, 1988, 629p.
315. Берцанский Я.М., Мееров М.В. Теория и методы решения задач дополнителности // Автоматика и телемеханика, 1983, №6, с.5–31.
316. Mangasarian O.L. Equivalence of the complementarity problem to a system of nonlinear equations // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1976, №31, p. 89–92.
317. Borwein J.M., Lewis A.S. Convex Analysis and Nonlinear optimization: Theory and Examples // Canadian Mathematical Society. Books in Mathematics. 2000, 310 p.

318. *Chen C., Mangasarian O. L.* A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems // *Comput. Optim. Appl.*, 1996, №5, p. 97–138.
319. *Billups S. C.* Algorithms for complementarity problems and generalized equations / Ph.D. thesis, Madison, 1995, 168 p.
320. *Dirkse S. P., Ferri M. C.* A pathsearch damped Newton method for computing general equilibria // *Annals of Operations Research*, 1996, p. 211–232.
321. *Billups S. C., Dirkse S. P., Ferris M. C.* A Comparison of Algorithms for Large Scale Mixed Complementarity Problems // *Computational Optimization and Applications*, 1997, №7, p. 3–25.
322. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Vol.I. Springer, 2003, 728 p.
323. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Vol.II. Springer, 2003, 728 p.
324. *Ruggiero V., Tinti F.* A preconditioner for solving large scale variational inequality problems by a semismooth inexact approach // *International Journal of Computer Mathematics*, 2006, №10, p. 723–739.
325. *Kanzow C.* Inexact Semismooth Newton Methods for Large-Scale Complementarity Problems // Preprint 249. Institute of Applied Mathematics and Statistics. Wurzburg, 2003, 22 p. – <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/paper/InSemiP.pdf>
326. A special Newton-type optimization method // *Optimization*, 1992, Vol. 24, № 3 – 4, p. 269 – 284.
327. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, 2003, 548 p.
328. *Сайх С.Е.* Неполная столбцово-строчная факторизация матриц для итерационного решения больших систем уравнений // *Электрон. моделирование*, 2010, **32**, № 6, с. 3 – 14.

329. *Tinti F.* VIPLIB: A matlab collection of variational inequality problems // Technical report, available. – <http://dm.unife.it/tinti/VIPs/test-problems.html>, 2003.
330. *Dirkse S.P., Ferris M.C.* The PATH solver: A non-monotone stabilization scheme for mixed complementarity problems // Optimization Methods and Software, 1995, № 5, p. 123 – 156.
331. *Energy Research Centre of the Netherlands.* COMPETES input data.– <http://www.ecn.nl/fileadmin/ecn/units/bs/COMPETES/flowgate-information.xls> [accessed 2015 June 17], cost-functions.xls.
332. *Саух С.Е., Борисенко А.В., Подковальников С.В., Хамисов О.В.* Математическое моделирование конкурентного равновесия на электроэнергетических рынках Российской Федерации и Украины. Ч. 2. Математические модели олигополистических рынков электроэнергии и их применение // Электрон. моделирование, 2012, **34**, № 3, с. 3 – 24.
333. *Саух С.Е.* Применение неполной столбцово-строчной факторизации матриц в квази-ньютоновских методах решения вариационных неравенств большой размерности // Электрон. моделирование, 2015, **37**, № 5, с. 3 – 15.
334. *Wang L. Mazumdar M.* Contingency Selection in Security Constrained Optimal Power Flow Problem: A Multi-Objective Approach, 2006. – http://www.ergo.ee.unsw.edu.au/EgyMktWkshp/accc_biggar_paper.pdf
335. *Саух С.Е., Борисенко А.В., Джигун Е.М.* Модель сети магистральных линий электропередачи в задачах планирования развития электроэнергетических систем // Электрон. моделирование, 2014, **36**, №4, с. 3 –14.
336. *Саух С.С.* Проблеми математичного моделювання конкурентної рівноваги на ринках електроенергії // Вісник Національної академії

наук України, 2018, **40**, №4, с. 53 – 67. – Режим доступу: <https://DOI.org/10.15407/visn2018.04.053>

337. Саух С.С., Борисенко А.В. Моделирование конкурентного равновесия на энергорынке с учетом потерь электроэнергии в электрических сетях // Проблеми загальної енергетики, 2016, **46**, №3, с. 5 – 11. – Режим доступу: <https://doi.org/10.15407/pge2016.03.005>

ДОДАТОК А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦІОНУВАННЯ ТА РОЗВИТКУ ОПТОВОГО РИНКУ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ УКРАЇНИ

У 1996 році відповідно до Закону України „Про електроенергетику” в Україні для підвищення конкурентоспроможності енергетики було створено оптовий ринок електричної енергії (ОРЕ).

ОРЕ діє на основі Договору між його членами, яким визначені умови, діяльності, права, обов’язки і відповідальність його учасників, а також порядок діяльності, інфраструктура ринку та його органи. Економічні та фінансові механізми функціонування ОРЕ регулюються Правилами Оптового ринку електроенергії та відповідними інструкціями.

Оператором ОРЕ було призначено ДП „Енергоринок”, яке виконувало функції єдиного оптового покупця електричної енергії, розпорядника системи розрахунків (формуvalo оптові ринкові ціни) і розпорядника коштів ОРЕ.

Функції оператора енергосистеми виконувало ДП «НЕК «Укренерго».

Компаній, що експлуатували ТЕС, працювали у конкурентних умовах. В той же час інші виробники (АЕС, ГЕС та ГАЕС, ТЕЦ та ВДЕ) працювали в умовах державного регулювання та продавали вироблену електроенергію в ОРЕ за встановленим тарифом.

Оптова ринкова ціна, за якою електрична енергія купувалась енергопостачальними компаніями на ОРЕ, формувалась як середньозважена ціна закупівлі електроенергії Оптовим ринком у виробників електричної енергії, з урахуванням цін експортно-імпортних операцій, платежів за надання послуг системним оператором та оператором ринку, на

фінансування інвестиційних проектів та платежів для компенсації втрат від здійснення постачання електричної енергії пільговим категоріям споживачів.

Розподіл електричної енергії в ОЕС здійснювався енергопостачальними компаніями, що мали ліцензії з постачання електроенергії за регульованим і нерегульованим тарифом. Постачальники за регульованим тарифом (обленерго) були власниками розподільчих електричних мереж і, крім ліцензії на постачання, отримували ліцензію на передачу електричної енергії власними мережами.

Значна частина як розподільчих, так і генеруючих активів були приватизовані.

Такий механізм дозволяв компенсувати високі тарифи ВДЕ при тому, що їх частка у виробництві була незначною, а також здійснити перехресне субсидіювання населення за рахунок побутових споживачів шляхом централізованого коригування оптових закупівельних цін для постачальників за регульованим тарифом (обленерго).

Описана модель зазнавала критики внаслідок багатьох причин:

1. Поєднання функцій розподілу та постачання у складі обленерго.
2. Відсутність довгострокових договорів, як механізму стабілізації ринкових цін забезпечення інвестицій у генеруючі потужності.
3. Складність зміни енергопостачальника споживачами.
4. Наявність перехресного субсидіювання.
5. Відсутність ринку системних послуг (резерв потужностей, регулювання частоти і напруги), тощо.

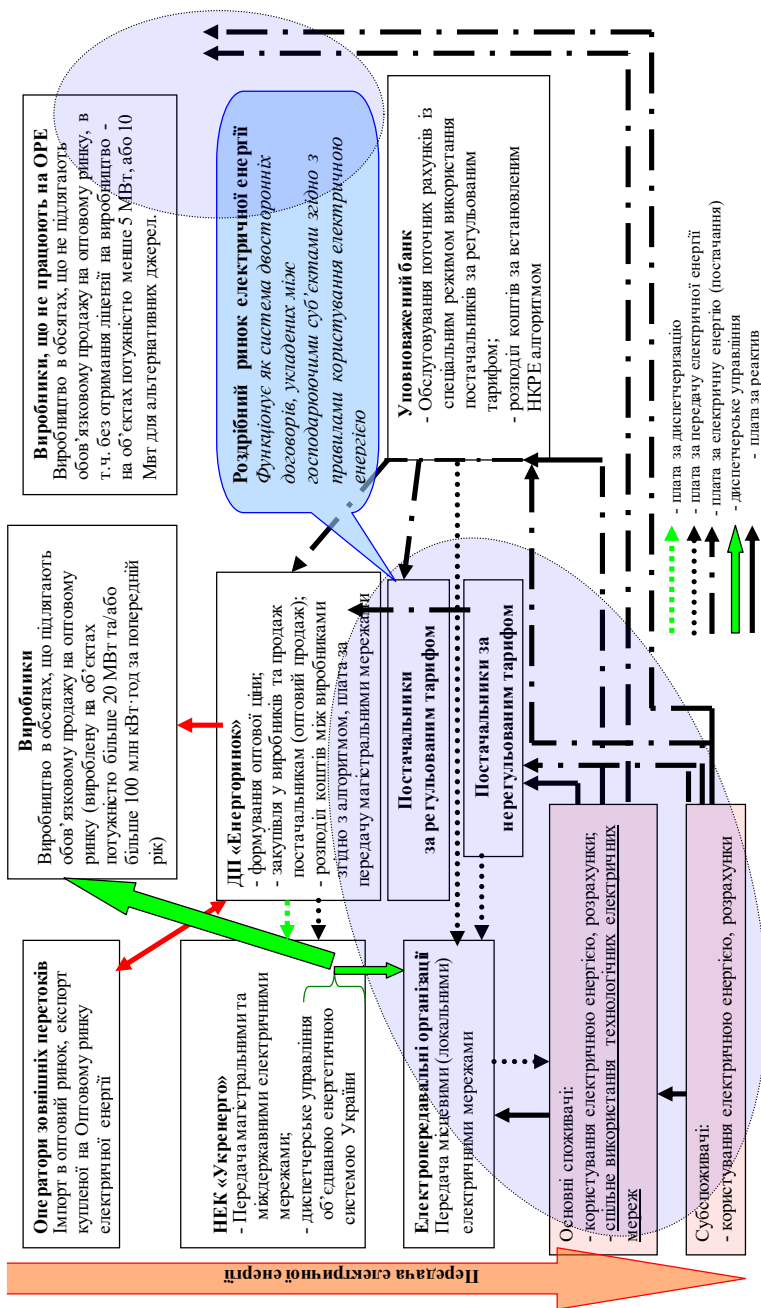


Рис. А.1. Схема функціонування оптового ринку електричної енергії [А1].

ВИКОРИСТАНЕ ДЖЕРЕЛО:

Звіт про результати діяльності Національної комісії, що здійснює державне регулювання у сфері енергетики, у 2012 році. Затверджено постановою НКРЕ від 22.03.2013р. № 282, 97 с.

ДОДАТОК Б.

ЗАСАДИ ФУНКЦІОНУВАННЯ НОВОЇ МОДЕЛІ РИНКУ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ УКРАЇНИ

З 1 січня 2019 року роздрібний ринок електричної енергії функціонує згідно з новими правилами та механізмами роботи [Б1].

Основними структурними змінами, які відбулись на роздрібному сегменті ринку електричної енергії з 1 січня 2019, стали:

- функціональне та юридичне розділення обленерго на два окремі суб'єкти господарювання – операторів систем розподілу та постачальників електроенергії;

- покладення на окремих постачальників електроенергії додаткових функцій для забезпечення загальносуспільного інтересу та безперервного і надійного електропостачання (виконання функцій постачальників універсальних послуг та постачальника «останньої надії»).

- вільний вибір та зміна постачальників електроенергії споживачами;

- рівноправний (недискримінаційний) доступ постачальників електроенергії до систем розподілу;

- закупівля технологічних втрат операторами систем розподілу;

- посилення механізмів забезпечення прав споживачів на якісні послуги електропостачання.

З 1 липня 2019 року відбулось відкриття оптової частини ринку електричної енергії (ринок «на добу наперед», внутрішньодобовий ринок, балансуючий ринок та ринок допоміжних послуг).

Основними структурними змінами в оптовому сегменті ринку електричної енергії, які відбулись у зв'язку з реформою ринку електричної енергії, стали:

- перехід від моделі «єдиного покупця» до моделі двосторонніх договорів та балансуючого ринку, поява нових сегментів ринку (ринок «на добу наперед», внутрішньодобовий ринок, балансуючий ринок, ринок допоміжних послуг, двосторонні договори) та лібералізація відносин на них;

- поява нових суб'єктів господарювання або наділення існуючих новими функціями, зокрема: ДП «Оператор ринку» (забезпечення організації купівлі-продажу електричної енергії на ринку «на добу наперед» та внутрішньодобовому ринку), ДП «Гарантований покупець» (гарантування купівлі всієї електричної енергії, виробленої на об'єктах електроенергетики, що використовують альтернативні джерела енергії, за «зеленим» тарифом), ПрАТ «НЕК «Укренерго» (функції оператора балансуючого ринку та оператора ринку допоміжних послуг);

- поява нового виду діяльності на ринку – трейдерська діяльність;

- реалізація учасниками ринку покладених на них спеціальних обов'язків для забезпечення загальносуспільного інтересу, зокрема спеціальних обов'язків із забезпечення доступності електричної енергії для населення (постанова Кабінету Міністрів України від 5 червня 2019 року № 483).

Крім того, з метою полегшення переходу до нової моделі ринку електричної енергії та недопущення неконтрольованого зростання цін для споживачів на першому етапі роботи нової моделі ринку НКРЕКП 24 червня 2019 року прийнято постанови «Про внесення змін до постанови НКРЕКП від 14 березня 2018 року № 307» та «Про внесення змін до постанови НКРЕКП від 14 березня 2018 року № 308», якими передбачено, зокрема, встановлення НКРЕКП цінових обмежень на ринку «на добу наперед», внутрішньодобовому ринку та балансуючому ринку.

Вагомим фактором впливу на функціонування нової моделі ринку у 2019 році стало прийняття Урядом рішення про покладення спеціальних обов'язків на учасників ринку електричної енергії для забезпечення

загальносуспільних інтересів у процесі функціонування ринку електричної енергії (Постанова КМУ від 5 червня 2019 року № 483) (далі – Положення). Метою зазначеного рішення було збереження цін (тарифів) на електричну енергію для побутових споживачів на рівні. Відповідно до Положення частина електричної енергії, вироблена державними компаніями, була вилучена з конкурентних торгів на всіх сегментах ринку та спрямовувалась через електронний майданчик (Товарна біржа «Українська енергетична біржа») і ДП «Гарантований покупець» для задоволення потреб побутових споживачів та мережевих операторів (Рис. Б.1).

Ці заходи з тимчасового врегулювання питання забезпечення доступності електричної енергії для побутових споживачів суттєво обмежили конкуренцію на ринку електричної енергії та разом з іншими чинниками не дозволили повною мірою реалізувати функціонування нової моделі ринку електричної енергії відповідно до принципів та засад, закладених Законом.

ВИКОРИСТАНЕ ДЖЕРЕЛО:

Звіт про результати діяльності Національної комісії, що здійснює державне регулювання у сферах енергетики та комунальних послуг, у 2019 році. Затверджено постановою НКРЕКП від 27 травня 2020 року, № 975, 354с.

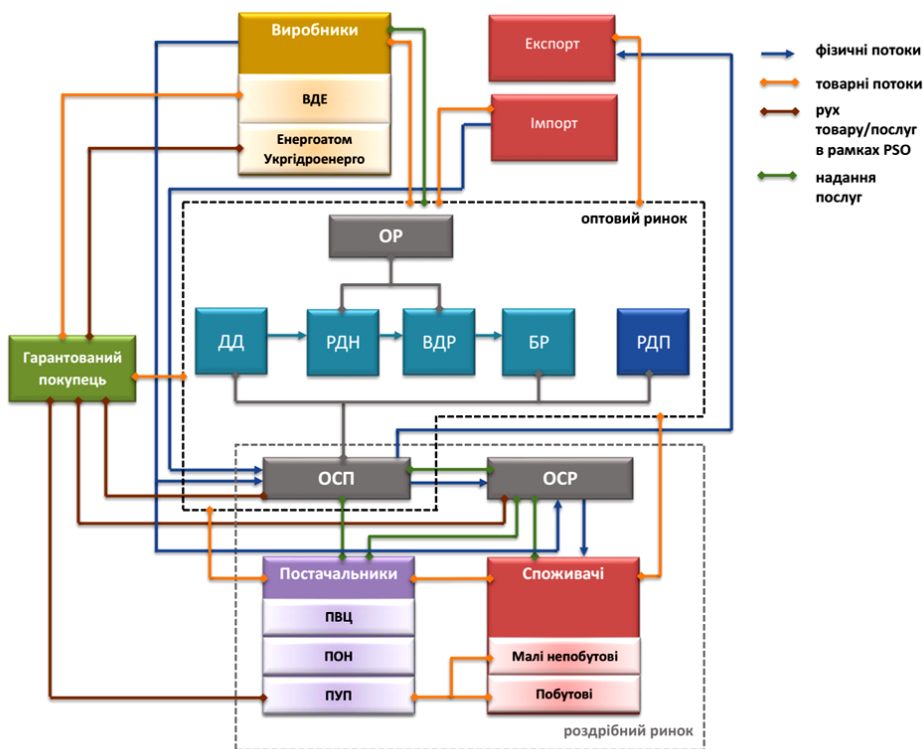


Рис. Б.1. Схема функціонування нової моделі ринку електричної енергії (враховано дію постанови Кабінету Міністрів України від 5 червня 2019 року, № 483 (зі змінами))

Наукове видання

Саух Сергій Євгенович

Борисенко Андрій Володимирович

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ
В РИНКОВИХ УМОВАХ**

Монографія

Відповідальний за випуск С. Є. Саух
Комп'ютерна верстка А. В. Борисенко

ISBN 978-966-7690-56-4

Підп. до друку 30.07.2020 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Спосіб друку – цифровий друк.
Умов. друк. арк. 21,31.
Наклад 300 прим. Зам. № 0709

Друкарня ООО «Три К»
м. Київ, вул. Святошинська, 34
т. (044) 592-4491, (044) 221-1883
e-mail: trik@trik.kiev.ua

свідоцтво суб'єкта видавничої справи
Серія ДК № 3986 від 22.02.2011