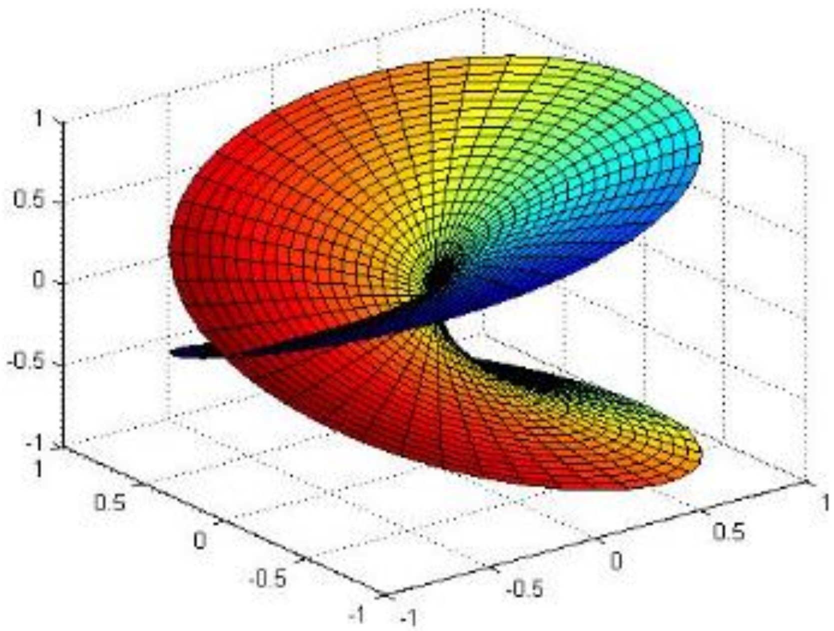
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Т. В. Боярищева, М. С. Герич

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Частина 1

Навчальний посібник



Ужгород

2025

УДК 517.53(075.8)
Б 86

Боярищева Т.В., Герич М.С. Комплексний аналіз у прикладах і задачах. Ч. 1.**:** навчальний посібник. Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла», 2025. 84 с. ISBN 978-617-8321-58-1

Навчальний посібник **«Комплексний аналіз у прикладах і задачах»** призначений для студентів фізико-математичних, інженерних, технічних та природничих спеціальностей закладів вищої освіти. Він охоплює деякі розділи комплексного аналізу, які в свою чергу поділені на три змістові лінії, кожна з яких структурована у шість тем: комплексні числа, дії із ними, корінь n-го степеня з комплексного числа; множини точок комплексної площини, границя послідовності комплексних чисел, числові ряди з комплексними членами; поняття функції комплексної змінної, границя та неперервність функції комплексної змінної; основні елементарні функції; диференційовність функції комплексної змінної, умови Коші – Рімана, поняття та умови моногенності, аналітичності; конформні відображення; конформні відображення, що здійснюються деякими елементарними функціями, функція Жуковського.

Посібник містить: стислі теоретичні відомості, що допомагають швидко засвоїти ключові поняття та методи; розв'язання типових задач, які ілюструють основні прийоми роботи з комплексними числами та функціями; 20 варіантів завдань для самостійної роботи до кожної теми, що сприяє поглибленню знань та розвитку практичних вмінь та навичок. Даний посібник стане корисним інструментом для самостійної підготовки, а також може бути використаний викладачами під час проведення занять і контрольних заходів.

Рецензенти:

Тилищак О. А., доктор фіз.-мат. наук, доцент, професор кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту ім. Ференца Ракоці ІІ;

Глебена М. І., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри системного аналізу та теорії оптимізації Державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет».

Рекомендовано до друку та опублікування:
Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(протокол № 2 від 25 лютого 2025 року);
Редакційно-видавничою радою
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(протокол № 2 від 21 лютого 2025 року).

ISBN 978-617-8321-58-1

ЗМІСТ

ВСТУП

Комплексний аналіз є однією з фундаментальних дисциплін сучасної математики, що досліджує властивості аналітичних функцій комплексної змінної. Ця дисципліна відіграє важливу роль не лише в теоретичній математиці, але й у прикладних науках, таких як фізика, інженерія, економіка, інформатика та багато інших. Її методи та результати використовуються для вирішення широкого спектра задач, зокрема в теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці, моделюванні динамічних систем тощо.

Навчальний посібник **«Комплексний аналіз у прикладах і задачах»** розроблений з метою полегшення вивчення та практичного засвоєння одного з фундаментальних розділів сучасної математики – комплексного аналізу. Цей курс займає важливе місце у підготовці фахівців із технічних, фізико-математичних та економічних спеціальностей, оскільки методи комплексного аналізу широко застосовуються в теорії електромагнетизму, квантовій механіці, теорії сигналів, економічному моделюванні та багатьох інших галузях.

У посібнику зібрано ключові теоретичні аспекти та методи, які супроводжуються великою кількістю розв'язаних задач і прикладів. Такий підхід дозволяє не лише краще зрозуміти теоретичні основи, але й здобути практичні навички у розв'язанні задач різної складності.

Разом із цим, автори не ставлять за мету детально висвітлити всі теоретичні аспекти матеріалу. Усі теоретичні факти подано вкрай стисло, і лише в тому обсязі, який необхідний для розв'язання як типових задач, так і задач для самостійного розв'язання, запропонованих у посібнику. Читач, що прагне ознайомитися з теорією більш докладно та ґрунтовно, має змогу звернутися до більш фундаментальних у цьому сенсі джерел, наприклад, розглянути «Комплексний аналіз: навчальний посібник» П.В. Слюсарчук та ін [5, 6], чи підручники [3, 7].

Натомість увазі читача пропонуються загальні методи розв’язання практичних задач та зразки їх застосування. У деяких випадках пропонуються альтернативні способи вирішення завдань, що дає змогу кожному здобувачу знань сформувати власну, індивідуальну систему оволодіння вміннями і навичками з кожної теми. При розв’язанні типових задач використано деякі ідеї, що містяться у [2, 8-10].

Основні теми, висвітлені в посібнику:

1) **Комплексні числа та дії над ними.** Розглядаються основні поняття комплексних чисел, їх геометричне тлумачення, алгебраїчні операції (додавання, множення, ділення), а також властивості модуля та аргументу.

2) **Корінь з комплексного числа.** Вивчаються способи добування коренів комплексних чисел, їх кількість, розташування на комплексній площині та застосування формули Муавра.

3) **Послідовності та ряди комплексних чисел.** Аналізуються збіжність послідовностей і рядів у комплексній площині, критерії збіжності та властивості.

4) **Функції комплексної змінної.** Охоплюються основні поняття функції комплексної змінної, границя функції, неперервність та аналітичність.

5) **Диференціювання функцій комплексної змінної.** Вводиться поняття похідної функції комплексної змінної, розглядається умови Коші — Рімана, а також їхнє значення у теорії аналітичних функцій.

6) **Конформні відображення.** Аналізуються основи конформних відображень, властивості кутів, застосування конформних перетворень у розв’язанні прикладних задач.

Серед особливостей посібника варто відзначити:

1) **Розв’язані задачі.** Для кожної теми наведено доволі широкий спектр детально розроблених прикладів, які допоможуть закріпити теоретичний матеріал.

2) **Задачі для самостійного розв’язання.** Посібник містить різні типи варіантів завдань для самостійної роботи здобувача, що сприяє розвитку

аналітичного мислення та практичних навичок. Задачний матеріал підібрано на основі особистого досвіду авторів при проведенні занять з комплексного аналізу в ДВНЗ «УжНУ», а також із використанням частково джерел [1, 4].

3) **Практичний підхід.** Задачі тісно пов’язані із застосуваннями комплексного аналізу, що допоможе студентам побачити важливість отриманих знань у майбутній професійній діяльності.

Цей посібник стане надійним супутником при вивченні комплексного аналізу для студентів різних спеціальностей, сприяючи як глибокому розумінню теорії, так і формуванню впевненості у здобутті практичних навичок та їх застосуванні на практиці. Запрошуємо до плідної роботи!

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

ТЕМА 1. Комплексні числа, дії із ними. Тригонометрична форма комплексного числа, дії із комплексними числами у тригонометричній формі. Формула Муавра. Корінь *n*-го степеня з комплексного числа.

Основні теоретичні відомості

Вираз виду $z = a + bi,\ a \in R, b \in R,$ де i – уявна одиниця (задовольняє умові $i^2 = -1$) – називається *комплексним числом*. При цьому вживаються позначення $a = Re\, z, b = Im\, z$, котрі відповідно називаються *дійсною* та *уявною частиною* комплексного числа. Наведений вираз ще називають *алгебраїчною формою комплексного числа.* Площина, на якій позначено всі комплексні числа, називається *комплексною площиною* і позначається $\mathbb{C}$.

Кожному комплексному числу $z = a + bi$ можна взаємно однозначно поставити у відповідність точку на координатній площині (a, b). При цьому точкам осі абсцис з координатами $(a, 0)$ відповідають комплексні числа $a + 0i = a \in R$. Тобто множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел і на ній справджуються всі твердження, які є вірними на $\mathbb{C}$. Вісь абсцис при цьому називається *дійсною віссю*, а вісь ординат, на противагу їй – *уявною віссю*. Адже точки на осі ординат з координатами $(0, b)$ відповідають комплексним числам $0 + bi$, тобто таким, які мають ненульову лише уявну частину.

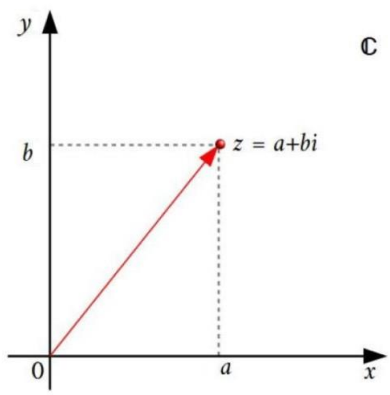


Рис. 1.1. Комплексне число

Комплексне число $\bar{z} = a - bi$ називається *комплексно спряженим* до $z = a + bi$. Виконуються рівності:

$$Re\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad Im\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі	
Додавання	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Віднімання	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Множення	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
Ділення	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

Додавання і віднімання комплексних чисел в алгебраїчній формі геометрично інтерпретується як додавання та віднімання радіус-векторів точок, що відповідають даним комплексним числам (див. рис. 1.2).

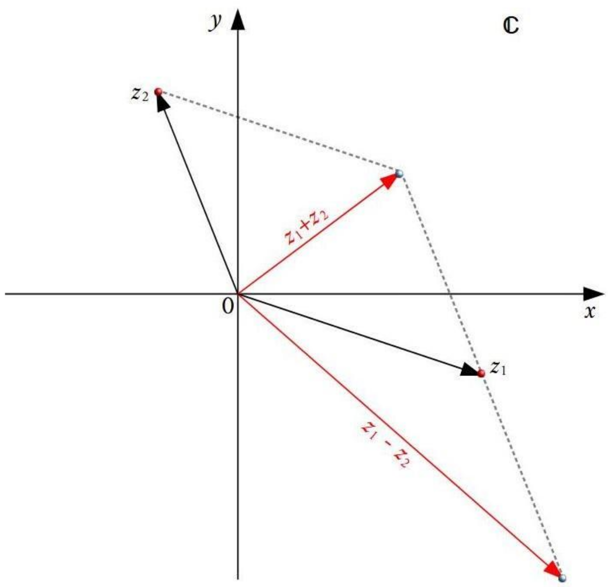


Рис. 1.2. Додавання і віднімання комплексних чисел

Поряд з декартовими координатами точки, що відповідає комплексному числу, можуть бути використані і полярні координати, що дозволяє записати це число у *тригонометричній формі*: $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ називається величина $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. За цим $|z| = 0$ лише. якщо $z = 0$.

Аргументом комплексного числа z називається кут φ між додатнім напрямком дійсної осі і радіус-вектором точки z, позначається $\varphi = Arg\, z$. Очевидно, $tg\varphi = \frac{b}{a}$. Аргумент визначається з точністю до $2\pi k$, відрахований проти годинникової стрілки є додатнім, за $-$ від'ємним. *Головним значенням аргументу,* що позначається $arg\, z$, називають кут φ в межах $(-\pi, \pi]$ (зустрічається умова $(0, 2\pi]$). Для z=0 аргумент не визначається.

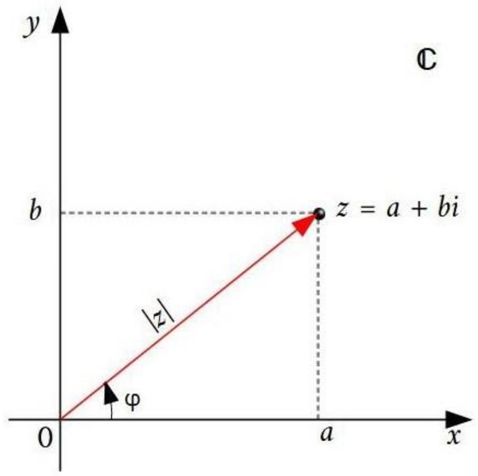


Рис. 1. 3. Модуль та аргумент комплексного числа

Дії над комплексними числами у тригонометричній формі	
Множення	$z_1 z_2 = \lvert z_1\rvert \lvert z_2\rvert \big(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$
Ділення	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}\big(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$

Додавати і віднімати комплексні числа у тригонометричній формі незручно. Натомість у цій формі дуже легко підносити комплексне число до натурального степеня. Виконується т.з. формула Муавра:

$$z^n = |z|^n(cosn\varphi + isinn\varphi).$$

Крім того, тригонометрична форма дозволяє здійснювати зворотню операцію: знаходження кореня n-го степеня з комплексного числа.

Існує n різних коренів n-го степеня з комплексного числа z:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\;\; k = 0,1, \dots, n-1.$$

Якщо розташувати точки z_k на комплексній площині, то помітимо, що вони утворюють вершини правильного n-кутника з центром у початку координат.

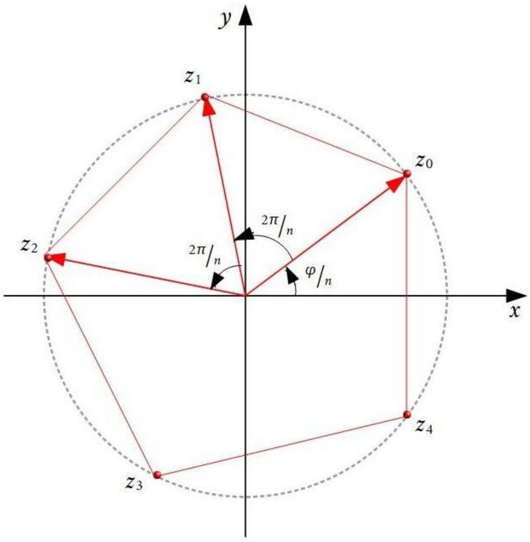


Рис. 1.4. Корені n-го степеня з комплексного числа

Для обчислення квадратного кореня з комплексного числа (обох значень), зручною є також формула, котра не потребує знаходження аргументу [1]:

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\,sign\,y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

Розв'язання типових задач

Завдання 1.1. Знайти дійсну та уявну частину комплексного числа $z = \frac{2+i}{(1-i)(3+2i)}$.

Розв'язання. Спершу треба виконати арифметичні дії.

Множення:

$$(1-i)(3+2i) = 3+2i-3i-2i^2 = 3-i-2\cdot(-1) = 5-i.$$

Ділення:

$$\frac{2+i}{5-i} = \frac{(2+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{10+2i+5i+i^2}{5^2-i^2} = \frac{9+7i}{25+1} = \frac{9}{26} + \frac{7}{26}i.$$

Таким чином, $Re\ z = \frac{9}{26}$, $\mathrm{Im}\ z = \frac{7}{26}$.

Завдання 1.2. Розв’язати рівняння $z \cdot \bar{z} + 2i = 2\bar{z} + 4$.

Розв’язання. Представимо невідому комплексну величину z в алгебраїчній формі: $z = x + iy$, де x і y – невідомі дійсні числа. При цьому рівняння набуде такого вигляду:

$$(x + iy)(x - iy) + 2i = 2(x - iy) + 4.$$

Виконаємо арифметичні дії і зведемо подібні доданки.

$$x^2 + y^2 + 2i = 2x - 2iy + 4.$$

Врахуємо також, що два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли відповідно рівні їх дійсні та уявні частини. Звідси слідує така система рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 4, \\ -2y = 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 1 = 2x + 4, \\ y = -1; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ y = -1; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння має два розв'язки: $z_1 = 3 - i, z_2 = -1 - i$.

Завдання 1.3. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = \frac{i}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Розв’язання. Спочатку запишемо це число у тригонометричній формі.

$a = -\frac{\sqrt{3}}{5}, b = \frac{1}{5}$, тому $|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

$tg\varphi = -\frac{1/5}{\sqrt{3}/5} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, що допускає дві можливості в межах $(-\pi, \pi]$:

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ і $\varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

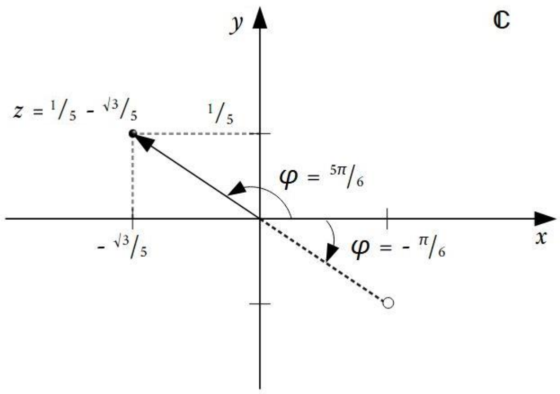


Рис. 1.5

Для з’ясування точного значення аргументу можливі такі міркування: точка, що відповідає даному комплексному числу, міститься у другій координатній чверті ($a < 0, b > 0$). А з-поміж двох можливих значень аргументу лише $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$ є кутом другої чверті. Отже, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ (див. рис. 1.5).

Тригонометрична форма даного комплексного числа: $z = \frac{2}{5}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Завдання 1.4. Визначити модуль та аргумент комплексного числа $sin\frac{\pi}{5} + icos\frac{\pi}{5} - 1$.

Розв'язання. Подамо дане число у вигляді різниці двох комплексних чисел $z_1 - z_2$, де $z_1 = sin\frac{\pi}{5} + icos\frac{\pi}{5}$, $z_2 = 1$.

При цьому $z_1 = sin\frac{\pi}{5} + icos\frac{\pi}{5}$ може бути записане у вигляді

$$sin\frac{\pi}{5} + icos\frac{\pi}{5} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = cos\frac{3\pi}{10} + isin\frac{3\pi}{10},$$

тобто у тригонометричній формі.

У геометричній інтерпретації точка, що відповідає різниці двох комплексних чисел, визначається радіус-вектором, котрий є різницею радіус-векторів відповідно зменшуваного і від'ємника (див. рис. 1.6).

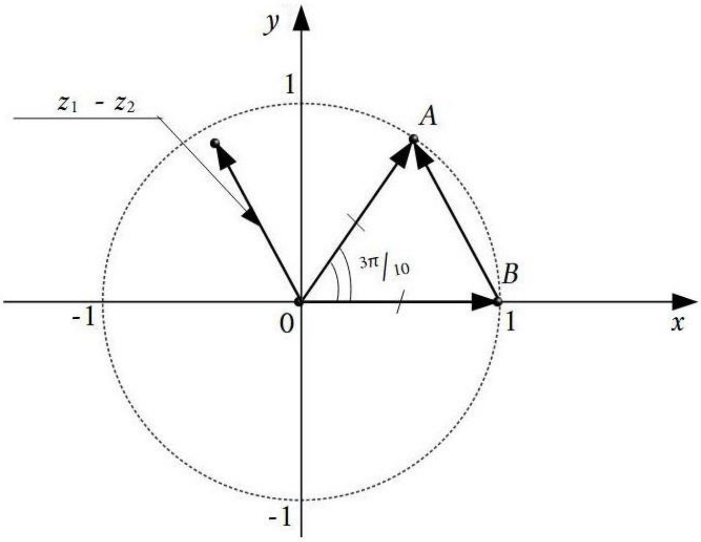


Рис. 1.6. Геометрична інтерпретація різниці двох комплексних чисел

$$|z_1| = \text{OA} = \sqrt{\left(cos\frac{3\pi}{10}\right)^2 + \left(sin\frac{3\pi}{10}\right)^2} = 1, |z_2| = \text{OB} = 1.$$

Тобто ΔOAB – рівнобедрений, з бічною стороною, рівною 1 і кутом при вершині $\frac{3\pi}{10}$. Тому

$$\left|sin\frac{\pi}{5} + icos\frac{\pi}{5} - 1\right| = \text{AB} = \sqrt{\text{OA}^2 + \text{OB}^2 - 2\text{OA} \cdot \text{OB}cos\frac{3\pi}{10}} = \sqrt{2 - 2cos\frac{3\pi}{10}},$$

$$arg\left(sin\frac{\pi}{5}+icos\frac{\pi}{5}-1\right)=\angle\mathrm{BOA_1}=\angle\mathrm{ABB_1}.$$

$$\angle\mathrm{OBA}=\left(\pi-\frac{3\pi}{10}\right):2=\frac{7\pi}{20};$$

$$\angle\mathrm{ABB_1}=\pi-\frac{7\pi}{20}=\frac{13\pi}{20}.$$

Отже, $sin\frac{\pi}{5}+icos\frac{\pi}{5}-1=\sqrt{2-2cos\frac{3\pi}{10}}\left(cos\frac{13\pi}{20}+isin\frac{13\pi}{20}\right)=$

$$=\sqrt{2\left(1-cos\frac{3\pi}{10}\right)}\left(cos\frac{13\pi}{20}+isin\frac{13\pi}{20}\right)=\sqrt{2\cdot 2sin^2\frac{3\pi}{20}}\left(cos\frac{13\pi}{20}+isin\frac{13\pi}{20}\right)$$

$$=2\left|sin\frac{3\pi}{20}\right|\left(cos\frac{13\pi}{20}+isin\frac{13\pi}{20}\right)\approx$$

$$\approx 2\cdot 0{,}454\cdot(-0{,}454+i\cdot 0{,}891)\approx -0{,}4122+i\cdot 0{,}809.$$

Завдання 1.5. Обчислити $\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^6}{(i-1)^4}$.

Розв'язання. Піднесення комплексних чисел до степеня найбільш раціонально здійснювати, коли вони записані у тригонометричній формі, тому подамо комплексні числа у тригонометричній формі

$$z_1=\sqrt{3}-i\Longrightarrow |z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2,\ tg\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Кут φ, як і в попередній задачі, може набувати двох значень: $\varphi_1=-\frac{\pi}{6}$ і $\varphi_2=\frac{5\pi}{6}$. Але зараз точка, що відповідає комплексному числу z, міститься у четвертій координатній чверті ($a>0, b<0$), і аргумент комплексного числа z_1 буде $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

Тобто $z_1=\sqrt{3}-i=2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

$$z_2=i-1\ \Rightarrow\ |z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\qquad tg\varphi=-\frac{1}{1}=-1.$$

Можливі значення аргументу $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ і $\varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Точка, що відповідає комплексному числу z_2, міститься у другій координатній чверті $(a < 0, b > 0)$, і аргумент даного комплексного числа z_2 є $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Тобто $z_2 = i - 1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Піднесення чисельника і знаменника до відповідних степенів здійснюється за формулою Муавра:

$$z_1^6 = \left(\sqrt{3} - i\right)^6 = \left(2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6 =$$

$$= 2^6\left(cos6 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin6 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 64\left(cos(-\pi) + isin(-\pi)\right),$$

$$z_2^4 = (i - 1)^4 = \left(\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(cos4 \cdot \frac{3\pi}{4} + isin4 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 4(cos3\pi + isin3\pi).$$

Ділення одержаних чисел теж зручно здійснювати в тригонометричній формі:

$$\frac{\left(\sqrt{3} - i\right)^6}{(i - 1)^4} = \frac{64\left(cos(-\pi) + isin(-\pi)\right)}{4(cos3\pi + isin3\pi)} = \frac{64}{4}\left(cos(-\pi - 3\pi) + isin(-\pi - 3\pi)\right)$$

$$= 16\left(cos(-4\pi) + isin(-4\pi)\right) = 16(1 + i \cdot 0) = 16.$$

Зауваження 1.1. *Можна обчислити цілий степінь комплексного числа, не переводячи його в тригонометричну форму, а з використанням формули бінома Ньютона, враховуючи при цьому те, що $i^2 = -1$ і правила зведення подібних доданків. Однак для достатньо великих степенів це більш громіздкий і затратний по часу спосіб.*

Завдання 1.6. Користуючись формулою Муавра, вивести формули для обчислення $sin5x$ і $cos5x$.

Розв'язання. Розглянемо комплексне число, записане у тригонометричній формі $z = cosx + i\,sinx$. Піднесемо його до 5-го степеня двома способами: відповідно за формулою Муавра і за допомогою бінома Ньютона.

$$z^5 = cos5x + i\,sin5x,$$

$z^5 = (cosx + i\,sinx)^5 = cos^5x + 5cos^4x \cdot (isinx) + 10\,cos^3x(isinx)^2 +$

$+10\,cos^2x(isinx)^3 + 5cosx(isinx)^4 + (isinx)^5 =$

$= cos^5x + 10cos^3x\,sin^2x - 10icos^2x\,sin^3x + 5cosx\,sin^4x + isin^5x =$

$= (cos^5x - 10cos^3x\,sin^2x + 5cosx\,sin^4x) + i(5cos^4x\,sinx - 10cos^2x\,sin^3x).$

Оскільки обидва отримані числа рівні, то в них мають бути рівні відповідно дійсні та уявні частини. Таким чином,

$$cos5x = cos^5x - 10cos^3x\,sin^2x + 5cosx\,sin^4x,$$

$$sin5x = 5cos^4x\,sinx - 10cos^2x\,sin^3x.$$

Завдання 1.7. Обчислити $\sqrt[4]{-1-i}$.

Розв'язання. Запишемо комплексне число $z = -1 - i$ у тригонометричній формі. Для цього відповідно знайдемо модуль і аргумент комплексного числа:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\ tg\varphi = 1.$$

Тому аргументом числа z є одне з чисел $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ або $\varphi_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Оскільки відповідна даному числу точка знаходиться у третій координатній чверті ($a < 0, b < 0$), то $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Як відомо, коренів 4-го степеня з комплексного числа є рівно чотири, і знаходимо їх за формулою $z_k = \sqrt[4]{|z|}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{4} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{4}\right)$, $k = 0,1,2,3$.

$$z_0 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 0}{4} + isin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 0}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{5\pi}{16} + isin\frac{5\pi}{16}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{4} + isin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{13\pi}{16} + isin\frac{13\pi}{16}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{4} + isin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{21\pi}{16} + isin\frac{21\pi}{16}\right),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 3}{4} + isin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 3}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{29\pi}{16} + isin\frac{29\pi}{16}\right).$$

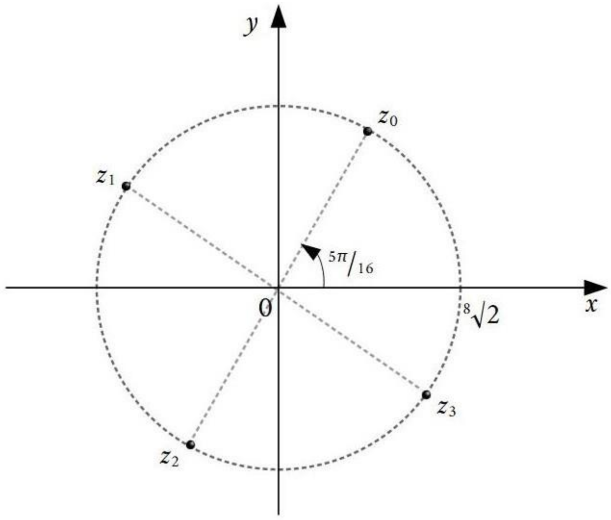


Рис. 1.7. Зображення коренів 4-го степеня з комплексного числа

Завдання 1.8. Обчислити $\sqrt{5-12i}$.

Розв'язання. Нехай шукане значення кореня дорівнює $z = x + iy$, де $x -$ дійсна і $y -$ уявна частини, які є невідомими дійсними числами. Тобто

$$\sqrt{5-12i} = x + iy.$$

Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрату:

$$5 - 12i = x^2 + 2ixy - y^2.$$

Прирівнявши дійсні та уявні частини комплексних чисел у лівій і правій частинах рівняння, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ 2xy = -12. \end{cases}$$

Піднесемо обидва рівняння до квадрату:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 25, \\ 4x^2y^2 = 144. \end{cases}$$

Додамо одержані рівняння:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 169,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 169,$$

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Отже, отримуємо нову систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом додавання:

$$\begin{cases} 2x^2 = 18, \\ 2y^2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 9, \\ y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Тобто отримано чотири розв'язки системи рівнянь: (–3, –2), (–3, 2), (3, –2) і (3, 2). Але, як відомо, квадратних коренів з комплексного числа є лише два, тож два розв'язки – сторонні. Щоб визначити їх, повернемося до рівняння $2xy = -12$, з якого слідує, що x та y – числа різних знаків. Зрештою, шуканими коренями будуть числа $z_1 = -3 + 2i, z_2 = 3 - 2i$.

Зауваження 1.2. *Обчислення даних коренів з допомогою загальної формули не дуже зручне, бо аргумент комплексного числа* $arctg(-2{,}4)$ *не дає наглядного уявлення про це число, і корені, знайдені з його допомогою, теж недостатньо наглядні.*

Задачі для самостійного розв'язання

1. Обчислити

1.1. $\frac{3+i}{(i-1)^3}$,

1.2. $\frac{(2+i)(4-i)}{(2-3i)^2}$,

1.3. $\frac{(4i+3)^2}{(i-2)(2i+1)}$,

1.4. $\frac{1+7i}{(8-i)(2-i)^2}$,

1.5. $\frac{(7-2i)^2}{(3-2i)^2}$,

1.6. $\frac{5i+2}{(1+i)^2(2i-3)}$,

1.7. $\frac{(3+4i)^2}{(3-4i)^2}$,

1.8. $\frac{(1-2i)^3}{2+i}$,

1.9. $\frac{1+i}{(2-i)^2(i-1)}$,

1.10. $\frac{3i(2+3i)}{(2i+1)^2}$,

1.11. $\frac{(i-3)^2}{(2+i)(i-5)}$,

1.12. $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$,

1.13. $\frac{2-i}{(1+2i)^3}$,

1.14. $\frac{2i(3+i)^2}{(2i+1)^2}$,

1.15. $\frac{(2-3i)^2}{(1+i)(3+2i)}$,

1.16. $\frac{5-i}{(2+i)^3}$,

1.17. $\frac{(1+3i)^3}{i-3}$,

1.18. $\frac{(7+2i)^2}{(7-i)^2}$,

1.19. $\frac{6+5i}{(2-i)^3}$,

1.20. $\frac{(2-3i)^2}{(1+i)(3+2i)}$.

2. Знайти модуль та аргумент комплексного числа, записати його в тригонометричній формі.

2.1. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$,

б) $-sin\frac{\pi}{6}+icos\frac{\pi}{6}+1$;

2.2. а) $-\frac{i}{5}$,

б) $1-cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}$;

2.3. а) $1-i$,

б) $1+sin\frac{2\pi}{7}+icos\frac{2\pi}{7}$;

2.4. а) $-\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}i}{2}$,

б) $cos\frac{\pi}{7}-isin\frac{\pi}{7}-1$;

2.5. а) $7+\sqrt{147}\,i$,

б) $-cos\frac{2\pi}{5}+isin\frac{2\pi}{5}-1$;

2.6. а) $-\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}i}{2}$,

б) $cos\frac{3\pi}{5}-isin\frac{3\pi}{5}-1$;

2.7. а) $\sqrt{27}-3i$,

б) $1+cos\frac{2\pi}{9}-isin\frac{2\pi}{9}$;

2.8. а) $-5-5i$,

б) $1-sin\frac{\pi}{8}-icos\frac{\pi}{8}$;

2.9. а) $-4i+\sqrt{48}$,

б) $1-sin\frac{\pi}{10}+icos\frac{\pi}{10}$;

2.10. а) $-2+\sqrt{12}i$,

б) $1+sin\frac{2\pi}{5}-icos\frac{2\pi}{5}$;

2.11. а) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$,

б) $1+cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}$;

2.12. а) $2-\frac{2i}{\sqrt{3}}$,

б) $1+cos\frac{3\pi}{4}-isin\frac{3\pi}{4}$;

2.13. а) $\frac{3i}{5}$,

б) $sin\frac{5\pi}{7}+icos\frac{5\pi}{7}-1$;

2.14. а) $-3+3i$,

б) $cos\frac{3\pi}{7}-isin\frac{3\pi}{7}-1$;

2.15. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i}{\sqrt{2}}$,

б) $cos\frac{2\pi}{5}+isin\frac{2\pi}{5}-1$;

2.16. а) $-\frac{5i}{2}$,

б) $sin\frac{\pi}{8}-icos\frac{\pi}{8}+1$;

2.17. а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{i}{3}$,

б) $cos\frac{\pi}{9}-isin\frac{\pi}{9}+1$;

2.18. а) -6,

б) $sin\frac{3\pi}{5}+icos\frac{3\pi}{5}-1$;

2.19. а) $1+\sqrt{3}i$,

б) $1-cos\frac{4\pi}{7}-isin\frac{4\pi}{7}$;

2.20. а) $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}i}{4}$, б) $1 + sin\frac{2\pi}{7} - icos\frac{2\pi}{7}$.

3. Піднести до степеня

3.1. $\left(6 + 2\sqrt{3}i\right)^8$;

3.2. $\left(2\sqrt{3} - 6i\right)^9$;

3.3. $\left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)^4$;

3.4. $\left(3i - \sqrt{3}\right)^5$;

3.5. $(2 - 2i)^{10}$;

3.6. $(1 - i)^{14}$;

3.7. $\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^8$;

3.8. $\left(3 + \sqrt{3}i\right)^5$;

3.9. $\left(i + \sqrt{3}\right)^{16}$;

3.10. $\left(\sqrt{3} - i\right)^7$;

3.11. $(3i - 3)^9$;

3.12. $\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)^7$;

3.13. $\left(i - \sqrt{3}\right)^9$;

3.14. $\left(-\sqrt{12} + 2i\right)^8$;

3.15. $\left(2i - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{15}$;

3.16. $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^8$;

3.17. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)^{17}$;

3.18. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{16}$;

3.19. $(1 + i)^{11}$;

3.20. $\left(3i + \sqrt{3}\right)^{12}$.

4. Знайти корінь комплексного числа

4.1. $\sqrt[6]{-1}$;

4.2. $\sqrt[10]{1}$;

4.3. $\sqrt[8]{i}$;

4.4. $\sqrt[9]{-i}$;

4.5. $\sqrt[6]{1 + i}$;

4.6. $\sqrt[7]{1}$;

4.7. $\sqrt[8]{3i - 3}$;

4.8. $\sqrt[7]{1 - i}$;

4.9. $\sqrt[5]{-1 - i}$;

4.10. $\sqrt[9]{1 + i}$;

4.11. $\sqrt[10]{2 - 2i}$;

4.12. $\sqrt[8]{i - \sqrt{3}}$;

4.13. $\sqrt[5]{\sqrt{3} + i}$;

4.14. $\sqrt[9]{1 + \sqrt{3}i}$;

4.15. $\sqrt[6]{1 - \sqrt{3}i}$;

4.16. $\sqrt[5]{2 + 2i}$;

4.17. $\sqrt[7]{i}$;

4.18. $\sqrt[8]{i - 1}$;

4.19. $\sqrt[9]{-1+\sqrt{3}i}$;

4.20. $\sqrt[10]{i-\sqrt{3}}$.

5. Знайти корінь квадратний:

5.1. $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$;

5.2. $\sqrt{\sqrt{3}+i}$;

5.3. $\sqrt{1+2\sqrt{2}i}$;

5.4. $\sqrt{2\sqrt{2}+i}$;

5.5. $\sqrt{2+\sqrt{5}i}$

5.6. $\sqrt{\sqrt{5}-2i}$;

5.7. $\sqrt{1+\sqrt{15}i}$;

5.8. $\sqrt{\sqrt{15}-i}$;

5.9. $\sqrt{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}$;

5.10. $\sqrt{3+\sqrt{7}i}$;

5.11. $\sqrt{\sqrt{12}-2i}$;

5.12. $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$;

5.13. $\sqrt{3+\sqrt{7}i}$;

5.14. $\sqrt{3+4i}$;

5.15. $\sqrt{4-3i}$;

5.16. $\sqrt{6+8i}$;

5.17. $\sqrt{8-6i}$;

5.18. $\sqrt{9-12i}$;

5.19. $\sqrt{12+9i}$;

5.20. $\sqrt{4+\sqrt{20}i}$.

6. Розв’язати рівняння або систему рівнянь у множині комплексних чисел, розв’язки зобразити на комплексній площині:

6.1. $z^2+i=0$;

6.2. $z^4-16i=0$;

6.3. $z^4+16i=0$;

6.4. $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)+1+7i=0$;

6.5. $z^2+\bar{z}=0$;

6.6. $|z|-z=3+4i$;

6.7. $4z^2+9(1+i)=0$;

6.8. $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i; \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} z_1+z_2=4+4i, \\ z_1\cdot z_2=8+14i; \end{cases}$

6.10. $z^2+1-i=0$;

6.11. $(z+i)^7+i=0$;

6.12. $(z+1)^4 = 4i - 7$;

6.13. $z|z| + 2z + i = 0$;

6.14. $(z+i)^7 + i = 0$;

6.15. $\frac{1}{z} + \frac{1}{1+2i} = 1$;

6.16. $\frac{1}{z} + \frac{1}{1-i} = 1$;

6.17. $z^2 + z + 4 = 0$;

6.18. $\frac{1}{z-i} + \frac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}$;

6.19. $z^2 + z + 1 = 0$;

6.20. $z^6 + 2z^3 - 3 = 0$.

ТЕМА 2. Розширена комплексна площина. Множини точок комплексної площини. Границя послідовності комплексних чисел. Числові ряди з комплексними членами.

Основні теоретичні відомості

Площина, на якій зображуються комплексні числа називається *комплексною площиною*.

Комплексне число $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *границею послідовності* точок z_n ($z_n \in \mathbb{C}$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n_\varepsilon$ виконується нерівність $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Позначається $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

У цьому випадку послідовність називається *збіжною*, інакше *розбіжною*.

Нескінченно віддалена точка є границею послідовності z_n ($\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n_\varepsilon$ виконується нерівність $|z_n| > \varepsilon$.

Послідовність $z_n = x_n + iy_n$ є збіжною тоді і тільки тоді, коли збіжними є послідовності дійсних чисел x_n і y_n.

Нехай задано послідовність комплексних чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ Символ виду $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$, де $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, називається *числовим рядом*. Сума $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = S_n$ називається *n-ю частинною сумою* числового ряду.

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$, то ряд називається *збіжним*. Інакше ряд називається *розбіжним*. При цьому число S називається *сумою* числового ряду.

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ збіжний тоді і тільки тоді, коли ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ є одночасно збіжними.

Розв’язання типових задач

Завдання 2.1. Зобразити на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $\bar{z} - z = 0$.

Розв’язання. Запишемо загальний вигляд комплексного числа в алгебраїчній формі: $z = x + iy$. Тоді $\bar{z} = x - iy$, і рівність в умові задачі набуває вигляду: $x + iy - (x - iy) = 0$.

Після спрощення отримуємо: $2iy = 0$, що можливо тільки при $y = 0$. А ця умова виконується лише на дійсній осі

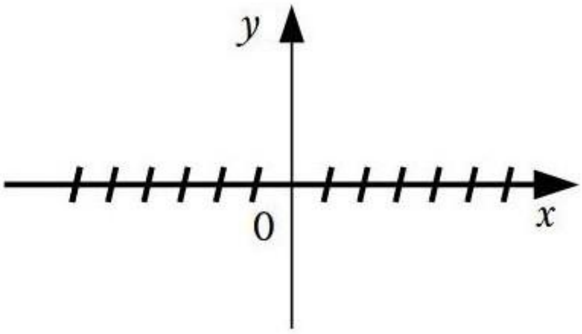


Рис. 2.1

Завдання 2.2. Зобразити на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $|z - i| + |z + i| = 5$.

Розв’язання. Можна використати метод, застосований у попередній задачі, подавши довільне комплексне число в алгебраїчній формі. Однак тут зручніше скористатися тим, що величина $|z - z_0|$ дорівнює відстані на координатній площині між точками, що відповідають комплексним числам z і z_0. У такій інтерпретації умова, якій мають задовольняти шукані точки, звучить так: множина точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (i та $-i$) рівна 5 (інакше кажучи, є сталою). Можна помітити, що це є означення еліпса, фокусами якого є точки i та $-i$. Знайдемо півосі еліпса:

$$2b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{2} = 2{,}5,\ a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 1^2} = \sqrt{5{,}25}$$ (див. рис. 2.2).

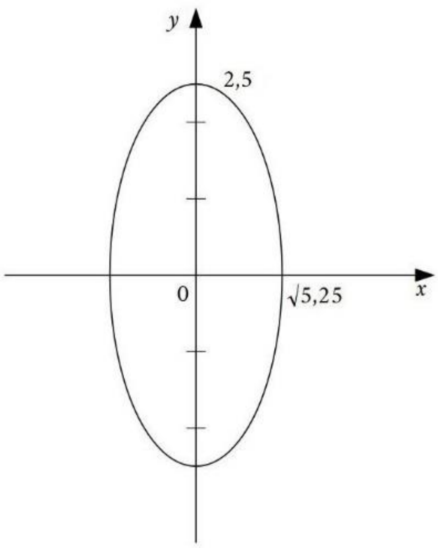


Рис. 2.2

Отже, шукана множина є еліпс $\frac{x^2}{5{,}25}+\frac{y^2}{6{,}25}=1$.

Завдання 2.3. Зобразити на комплексній площині множину точок, що задовольняють умові $\begin{cases} |Imz|<1, \\ 0<Rez<1. \end{cases}$

Розв'язання. Подамо довільне комплексне число в алгебраїчній формі $z=x+iy$. Тоді умову можемо переписати у наступному вигляді:

$$\begin{cases} |Imz|<1, \\ 0<Rez<1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y|<1, \\ 0<x<1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<y<1, \\ 0<x<1. \end{cases}$$

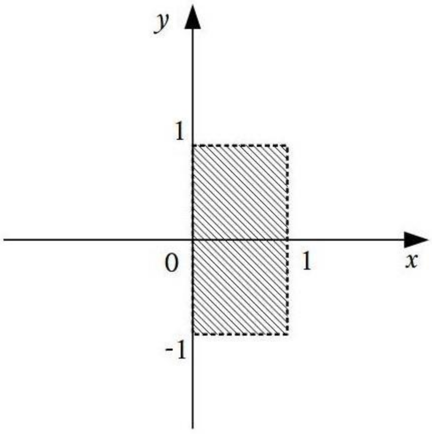


Рис. 2.3

Задана множина є прямокутником, що є перетином двох смуг. Перша смуга розташована між прямими $y=-1, y=1$, а друга смуга розташована між $x=0, x=1$, причому жодна із смуг не включає самі ці прямі. Отже, маємо прямокутник з вершинами $-i, 1-i, 1+i, i$ (не включаючи сторін прямокутника (див. рис. 2.3).

Завдання 2.4. Зобразити на комплексній площині множину точок, що задовольняють нерівності: а) $1\le|z-1|\le3$, б) $\frac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. а) Нехай $z=x+iy$. Тоді із умови випливає

$$|z-1|=|x+iy-1|=|(x-1)+iy|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

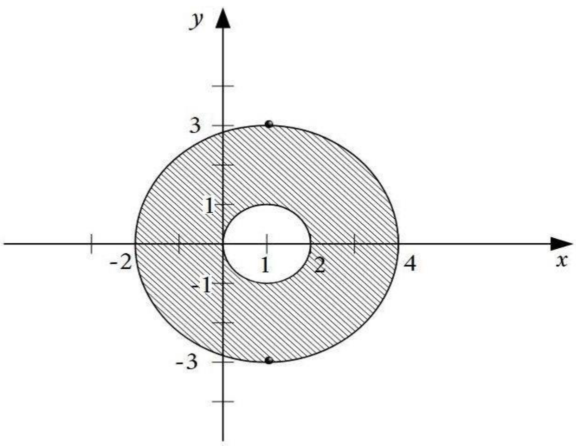


Рис. 2.4

Тоді початкову нерівність можна переписати у вигляді

$$1\le\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le3,$$

$$1\le(x-1)^2+y^2\le9.$$

Задана множина є кільцем, що міститься між колами із загальним центром у точці $z=1$ і радіусами $r_1=1$ і $r_2=3$, включаючи обидва кола (див. рис.2.4).

б) Виконаємо перетворення, поклавши $z = x + iy$, отримаємо

$$Z = z + i = x + iy + i = x + i(y + 1).$$

Тоді $\arg(z + i) = \arg \mathrm{Z} = \mathrm{arc}(X + iY) = arctg\frac{Y}{X}$, де $X = x$, $Y = y + 1$.

Оскільки за умовою $\frac{\pi}{4} < argZ < \frac{\pi}{2}$, маємо $X = x > 0$.

Далі з нерівності $\frac{\pi}{4} < arg\frac{y+1}{x} < \frac{\pi}{2}$ маємо: $1 < \frac{y+1}{x} < +\infty$,

$$\frac{y+1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{y+1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{y - x + 1}{x} > 0.$$

Враховуючи, що $x > 0$, отримуємо

$$\begin{cases} y - x + 1 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x - 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Отже, задана нерівність визначає множину, що є кутом градусної міри $\frac{\pi}{4}$ з вершиною в точці $z = -i$, сторони якого проходять через точки $z = i$ і $z = 0$, не включаючи сторін (див. рис. 2.5).

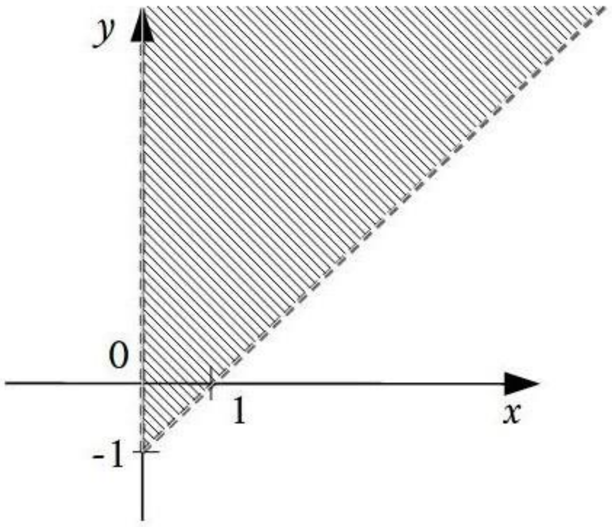


Рис. 2.5. Зображення множини точок $\frac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \frac{\pi}{2}$

Завдання 2.5. Знайти границю послідовності комплексних чисел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2 - n} - \sqrt[3]{n^2 + n} - in^2 sin\frac{1}{n^2 + n}\right).$$

Розв'язання. Знайдемо окремо границі дійсної та уявної частини:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n}-\sqrt[3]{n^2+n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2-n}-\sqrt[3]{n^2+n}\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^2-n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2-n}\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{n^2-n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2-n}\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2-n}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n^2-n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2-n}\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-(n^2+n)}{\left(\sqrt[3]{n^2-n}\right)^2+\sqrt[3]{n^4-n^2}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{3\sqrt[3]{n^4}}=0.$$

Тепер перейдемо до відшукання границі уявної частини:

$$\lim_{n\to\infty}n^2 sin\frac{1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{sin\dfrac{1}{n^2+n}}{\dfrac{1}{n^2+n}}\cdot\frac{n^2}{n^2+n}=1.$$

Таким чином, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n}-\sqrt[3]{n^2+n}-in^2 sin\frac{1}{n^2+n}\right)=0-i\cdot 1=-i.$

Завдання 2.6. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}+\frac{i}{n!}\right),$$

де a – дійсне число.

Розв'язання. Уявна частина даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ – ряд, збіжний за ознакою Даламбера. До дійсної частини $\sum_{n=1}^{\infty}\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$ застосуємо ознаку Коші. Адже для будь-якого фіксованого значення параметру a цей ряд є (починаючи з деякого номера) додатним.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+cos\frac{a}{n}-1\right)^{\frac{1}{cos\frac{a}{n}-1}\cdot n^2\left(cos\frac{a}{n}-1\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}n^2\left(cos\frac{a}{n}-1\right)}.$$

Знайдемо окремо границю з показника степеня:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(cos\frac{a}{n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{cos\frac{a}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{a^2}{2}.$$

Тут використано наслідок з першої чудової границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}}=e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

При будь-якому значенні параметру a, крім нуля, значення границі є меншим від одиниці. Тож і відповідний числовий ряд збігається. Якщо ж $a=0$, то дійсна частина початкового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}1$ – розбіжний ряд, бо для нього не виконується необхідна умова збіжності числового ряду. Зрештою, початковий ряд збігається при всіх відмінних від нуля значеннях параметра.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти множину точок, які задовольняють рівняння. Проілюструвати графічно.

1.1. $|z+2i|=|z|$;

1.2. $Re\left(z-\frac{1}{z}\right)=0$;

1.3. $|1+z|=|z+i|$;

1.4. $|z-i|+|z+i|=4$;

1.5. $|z|+Rez=1$;

1.6. $Im(z^2-\bar{z})=2-Imz$;

1.7. $Re(z^2-\bar{z})=0$;

1.8. $z^2+\bar{z}^2=1$;

1.9. $Re(1+z)=|z|$;

1.10. $|z|=Rez+2$;

1.11. $Re\frac{z-a}{z+a}=0\ (a\in R, a>0)$;

1.12. $z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0$;

1.13. $z^2+\bar{z}^2=2a^2, (a\in R)$;

1.14. $z\bar{z}+z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0$;

1.15. $Im\overline{(z^2-\bar{z})}=2-Imz$;

1.16. $Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=1$;

1.17. $|z-2|=|1-2\bar{z}|$;

1.18. $Im\frac{z-z_1}{z-z_2}=0,\ (z_1\neq z_2)$;

1.19. $|z-1-i|=|z+1+i|$;

1.20. $Re\left(\frac{z+1}{\bar{z}-1}\right)=0.$

2. Знайти множину точок, які задовольняють нерівність. Проілюструвати графічно.

2.1. $\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|} < 3;$

2.2. $|z+i| > |z-i|;$

2.3. $|z-1| \le |z+1|;$

2.4. $Rez^2 < 1;$

2.5. $|z+1| < |2-z|;$

2.6. $\frac{\pi}{4} \le argz < \frac{\pi}{3},\ 1 \le Imz \le 2;$

2.7. $Im(z-i) \ge 2;$

2.8. $-1 \le Rez \le 1, \frac{\pi}{6} \le argz < \frac{5\pi}{6};$

2.9. $Rez + Imz \ge 1,\ |z-1-i| \ge 1;$

2.10. $1 \le |z+1| \le 2,\ \frac{\pi}{2} \le argz < \pi;$

2.11. $|z+2| > z;$

2.12. $3 \le |z+2i| \le 4;$

2.13. $|z| > 2 + Imz;$

2.14. $-Rez + |z| \le 0;$

2.15. $\frac{\pi}{4} \le arg(z+1-i) < \frac{3\pi}{4};$

2.16. $Im\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < -\frac{1}{2};$

2.17. $1 \le |z+2+i| \le 2;$

2.18. $Im(z^2) > 2;$

2.19. $0 < Re(iz) < 1, |z+1| \ge 1;$

2.20. $Rez + Imz < 1, |z-1| < 1.$

3. Знайти границю послідовності

3.1. $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n + in\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right),\ (a \in R,\ a > 0);$

3.2. $\lim_{n\to\infty}\left(\left(sin\frac{1}{n} + cos\frac{1}{n}\right)^n + i\left(cos\frac{1}{n}\right)^n\right);$

3.3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}+i\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right);$

3.4. $\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}+i\frac{a^{n}}{n!}\right),\ (a\in R,\ a>0);$

3.5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-i}{n+i}\right)^{2};$

3.6. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+i\frac{\sqrt{n}+100}{n}\right);$

3.7. $\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)+i\frac{n-1}{3n}\right);$

3.8. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2i)^{n}-1}{(2i)^{n}};$

3.9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4n^{2}+a^{2}}}{n}+i\frac{n\sin\frac{\pi n}{3}}{n^{2}+5}\right),\ (a\in R);$

3.10. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n}+3}{3^{n}+2}+i\frac{1+2+\cdots+n}{n^{2}-3}\right);$

3.11. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4n^{2}+1}+n\right)^{2}}{\sqrt[3]{n^{6}+1}}+i\left(\frac{n^{2}-2}{n^{2}+2}\right)^{n^{2}}\right);$

3.12. $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n+2}+i\left(\sqrt[3]{n^{3}+n^{2}+1}-n\right)\right);$

3.13. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+2}}}{1+\sqrt{n}}+i\frac{\sqrt[3]{8n^{3}+2n^{2}-1}}{2n+3}\right);$

3.14. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^{2}+\sqrt{n^{2}+n}}-n+i\frac{(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}\right);$

3.15. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+n)(1+2n)\dots(1+10n)}{n^{10}+1}+i\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{1+\sqrt{n}}\right);$

3.16. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^{2}+4}+\sqrt[4]{16n^{4}+1}}{\sqrt[5]{n^{5}+2}}+i\frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}\right);$

3.17. $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^{2}+n+2}+i\frac{(2n+1)^{3}-(2n-1)^{3}}{(n+2)^{2}+(n-2)^{2}}\right);$

3.18. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)^{15}(3n-1)^{31}}{(n^{2}+13n+4)^{23}}+in\left(\sqrt[n]{5}-1\right)\right);$

3.19. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4n^{2}+\sqrt{n^{3}+n^{4}}}}{\sqrt{n^{2}+4}}+i\left(\sqrt{n^{2}-2n-1}-\sqrt{n^{2}-7n+3}\right)\right);$

3.20. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}+i\left(\frac{n+1}{n+10}\right)^{2n-3}\right).$

4. Дослідити ряд на збіжність

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{i}{n^2}\right)$;

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}+\frac{i}{2^{n-1}}\right)$;

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+3)}+\frac{i}{(2n-1)^2}\right)$;

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+i\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$;

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}+i\,\frac{2^n}{n\cdot 3^n}\right)$;

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{i}{n}\right)$;

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+i\,\frac{2^n}{n!}\right)$;

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}+i\,\frac{2n-1}{3^n}\right)$;

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\cdot lnn}+i\,\frac{2}{n^2+1}\right)$;

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2ni^n-1}{3n}\right)^n$;

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$;

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^3}$;

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}}$;

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+i^n)^n}{n}$;

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2i)^{n^2}}$;

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{(in)^{n^2}}$;

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ni}{3n+i}\right)^n$;

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(e-i)^n}{n^n}$;

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n\cdot 2^n}$;

4.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ni}{n^2+1}\right)^n$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

ТЕМА 3. Поняття функції комплексної змінної. Границя функції комплексної змінної. Неперервність функції комплексної змінної.

Основні теоретичні відомості

Введемо в розгляд поняття *розширеної комплексної площини:* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Нехай задано дві множини $D \subset \mathbb{C}$ (або $\overline{\mathbb{C}}$) і $G \subset \mathbb{C}$ (або $\overline{\mathbb{C}}$). Якщо кожному комплексному числу $z \in D$ поставлено у відповідність одне або декілька комплексних чисел $w \in G$, то кажуть, що на множині D задано функцію $w = f(z)$.

Будь-яку функцію $w = f(z)$ можна подати у вигляді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

де $u(x, y) = Ref(z) -$ дійсна частина функції,

$v(x, y) = Imf(z) -$ уявна частина функції.

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ називається *границею функції* $f(z)$ *в точці* z_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого $z \in D$, для якого $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Границю функції позначаємо: $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Властивості границі функцій комплексної змінної

Нехай існують границі $\lim_{z \to z_0} f(z) = A_0$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = B_0$. Тоді:

$$\lim_{z \to z_0}(f(z) \pm g(z)) = A_0 \pm B_0,$$

$$\lim_{z \to z_0}(f(z) \cdot g(z)) = A_0 \cdot B_0,$$

$$\lim_{z \to z_0}\big(C \cdot f(z)\big) = C \cdot A_0, \text{ де } C - const,$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A_0}{B_0}, B \neq 0.$$

Функція $f(z)$ називається *неперервною в точці* z_0, якщо $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функція $f(z)$ називається неперервною в точці $z = \infty$, якщо функція $f\left(\frac{1}{z}\right)$ неперервна в точці $z = 0$.

Функція $f(z)$ називається *неперервною в області* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Властивості неперервних функцій комплексної змінної

Сума, різниця та добуток двох неперервних функцій $f(z)$ та $g(z)$, неперервних в області D, також є неперервною функцією в цій області, а функція $\frac{f(z)}{g(z)}$ неперервна в тих точках області D, де $g(z) \neq 0$.

Якщо функція $g(z)$ неперервна в точці z_0, а $f(u)$ неперервна в точці $u_0 = g(z_0)$, то складна функція $f(g(z))$ неперервна в точці z_0.

Розв'язання типових задач

Завдання 3.1. Виділити дійсну та уявну частину функції $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

Розв'язання. Запишемо аргумент функції в алгебраїчній формі $z = x + iy$. При цьому

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} =$$

$$= x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Тобто $Ref(z) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$, $Imf(z) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$.

Завдання 3.2. Знайти границю функції $\lim_{z\to -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i}$.

Розв'язання. Обчислимо границю функції попередньо підставивши у функцію змість z точку $-i$.

$$\lim_{z\to -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{c} \text{розкладемо чисельник на} \\ \text{множники за формулою} \\ \text{розкладу квадратного тричлена} \\ \text{на множники} \end{array} \right| =$$

$$\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z+2i)}{z+i}=\lim_{z\to -i}(z+2i)=i.$$

Завдання 3.3. Довести, що функція $w=z^2+2$ неперервна в точці $z_0=-i$.

Розв'язання. Візьмемо довільне число $\varepsilon>0$. Оскільки

$$f(-i)=(-i)^2+2=-1+2=1,$$

то покажемо що існує додатне число $\delta(\varepsilon)$ таке, що виконується наступна нерівність $|f(z)-f(-i)|<\varepsilon$ при $|z+i|<\delta$.

Якщо $z\to -i$, то знайдеться таке число $M>0$, що $|z|<M$. Тоді

$$|f(z)-f(-i)|=|z^2+2-1|=|z^2+1|=|z^2-i^2|=|(z-i)(z+i)|=|z-i|\cdot |z+i|<|z-i|\cdot\delta\le(|z|+|i|)\cdot\delta<(M+1)\delta.$$

Якщо взяти $\delta=\frac{\varepsilon}{M+1}$, то з нерівності випливає

$$|f(z)-f(-i)|<(M+1)\delta<(M+1)\frac{\varepsilon}{M+1}=\varepsilon.$$

Тобто виконується означення неперервності функції $w=f(z)=z^2+2$ в точці $z_0=-i$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Виділити дійсну й уявну частини функції комплексної змінної:

1.1. $f(z)=z^3+z$;

1.2. $f(z)=\frac{z+2}{z-3}$;

1.3. $f(z)=\frac{z^2-1}{z}$;

1.4. $f(z)=\frac{z}{z^2+3}$;

1.5. $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$;

1.6. $f(z)=\left(\frac{z}{z+1}\right)^2$;

1.7. $f(z)=\frac{1}{z^2}$;

1.8. $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$;

1.9. $f(z)=\frac{z+5}{z^2}$;

1.10. $f(z)=\frac{z^2}{z-1}$;

1.11. $f(z)=z-2z^3$;

1.12. $f(z)=\frac{z^3}{z+3}$;

1.13. $f(z)=\frac{2z+1}{z+4}$;

1.14. $f(z)=\frac{z}{(z-1)^3}$;

1.15. $f(z)=z^3+3z-1$;

1.16. $f(z)=\frac{z^2+5}{z}$;

1.17. $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$;

1.18. $f(z) = z^2 + 3z + 5$;

1.19. $f(z) = \frac{z+4}{z-2}$;

1.20. $f(z) = \frac{1}{z^2} + z$.

2. Знайти границі функції:

2.1. $\lim_{z\to 0} \frac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z}$;

2.2. $\lim_{z\to \infty} \frac{z-2i}{z+i}$;

2.3. $\lim_{z\to i} \frac{z^2-4iz-3}{z-i}$;

2.4. $\lim_{z\to \infty} \left(\frac{z^3}{3z^2-4} - \frac{z^2}{3z+2}\right)$;

2.5. $\lim_{z\to i} \frac{z^2-6iz-5}{z-i}$;

2.6. $\lim_{z\to \infty} \frac{z^3-3z+1}{z^2+1}$;

2.7. $\lim_{z\to -i} 2arg z$;

2.8. $\lim_{z\to i} \frac{z^2-7iz-6}{z-i}$;

2.9. $\lim_{z\to 1-i} \frac{z^2-2z+2}{z-1+i}$;

2.10. $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{|z|^2}$;

2.11. $\lim_{z\to \infty} \frac{z^2-5z+1}{3z^3+1}$;

2.12. $\lim_{z\to \infty} \frac{z^3+15z+10}{3z^3+1}$;

2.13. $\lim_{z\to -i} \frac{z^2+6iz-5}{z+i}$;

2.14. $\lim_{z\to \infty} \frac{3z^4+3z+1}{4z^4+2z}$;

2.15. $\lim_{z\to -i} \frac{3z-i\bar{z}+1}{2z+i}$;

2.16. $\lim_{z\to 1-2i} \frac{\bar{z}-4i}{z}$;

2.17. $\lim_{z\to 1+i} \frac{z-2i}{\bar{z}+i+1}$;

2.18. $\lim_{z\to \infty} \frac{z^3+15z+10}{10z^2+7z+1}$;

2.19. $\lim_{z\to \infty} \frac{5z^2+15z+10}{2z^2+1}$;

2.20. $\lim_{z\to -i} \frac{z^2+4iz-3}{z+i}$.

ТЕМА 4. Степенева функція і корінь. Показникова функція і логарифм. Тригонометричні і обернені тригонометричні функції. Гіперболічні та обернені гіперболічні функції.

Основні теоретичні відомості

До основних елементарних функцій відносяться такі функції.

1) *Степенева функція* $y = z^n, n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = (x + iy)^n, n \in \mathbb{N}.$$

2) *Ціла раціональна функція* або *многочлен* n *−го степеня* ($n \in \mathbb{N}$):

$$y = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z^1 + c_0, c_n \neq 0, c_i \in \mathbb{C}, i = \overline{0, n}.$$

3) *Дробово-раціональна функція*:

$$y = \frac{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z^1 + c_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z^1 + b_0}.$$

4) *Показникова функція* $y = e^z$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (cosy + isiny). \quad (4.1)$$

З означення показникової функції слідує, що

$$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi) = |z| e^{i\varphi}.$$

Останній запис називають *показниковою формою* комплексного числа z.

5) Тригонометричні функції:

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (4.2)$$

$$tgz = \frac{sinz}{cosz}, \quad ctgz = \frac{cosz}{sinz}. \quad (4.3)$$

6) Гіперболічні функції:

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (4.4)$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, \quad cthz = \frac{chz}{shz}. \quad (4.5)$$

Між тригонометричними та гіперболічними функціями існує зв'язок:

$$\sin(iz) = ishz, \quad \cos(iz) = chz, \quad \mathrm{sh}(iz) = isinz, \quad \mathrm{ch}(iz) = cosz.$$

7) Логарифмічна функція $y = Ln\,z$:

$$Ln\,z = ln|z| + i(argz + 2k\pi), z \neq 0, k \in \mathbb{Z}. \qquad (4.6)$$

Логарифмічна функція $Ln\,z$ визначається як обернена до показникової. Функція $Ln\,z$ є многозначною. *Головним значенням* $Ln\,z$ називається те значення, яке отримується при $k = 0$. Воно позначається через $ln\,z$. Отже,

$$ln\,z = ln|z| + iargz,$$

а тоді

$$Ln\,z = ln\,z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

8) Загальна степенева функція $y = z^a, a \in \mathbb{C}$:

$$z^a = e^{aLnz}, a \in \mathbb{C}. \qquad (4.7)$$

Ця функція многозначна, її головне значення e^{alnz}.

Якщо $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, то отримуємо многозначну функцію — *корінь n-го степеня* з комплексного числа:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}(ln|z| + i(argz + 2k\pi))} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{argz+2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}.$$

9) Загальна показникова функція $y = a^z, a \in \mathbb{C}$:

$$a^z = e^{zLna}, a \in \mathbb{C}. \qquad (4.8)$$

Ця функція також многозначна, її головне значення e^{zlna}.

10) Обернені тригонометричні функції

$$y = Arcsinz, y = Arccosz, y = Arctgz, y = Arcctgz,$$

що визначаються як

$$\begin{gathered} Arcsinz = -iLn\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right), \\ Arccosz = -iLn\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right), \\ Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}, \\ Arcctgz = \frac{i}{2}Ln\frac{z - i}{z + i}. \end{gathered} \qquad (4.9)$$

11) Обернені гіперболічні функції:

$$y = Arshz, y = Archz, y = Arthz, y = Arcthz,$$

що визначаються як

$$\begin{aligned} Arshz &= Ln\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right), \\ Archz &= Ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right), \\ Arthz &= \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z}, \\ Arcthz &= \frac{1}{2} Ln \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Розв'язання типових задач

Завдання 4.1. Обчислити: а) $e^{\pi i}$; б) e^{2-3i}.

Розв'язання. а) Згідно формули (4.1), зокрема, $e^{\alpha i} = cos\alpha + isin\alpha$, то

$$e^{\pi i} = cos\pi + isin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Зауваження 4.1. *Обчислене значення показникової функції, записане у формі* $e^{\pi i} + 1 = 0$, *називають найкрасивішою формулою математики. У ній втілено всі революційні етапи розвитку математики як науки: введення абстрактного позначення для числа (символізується натуральним числом 1), позначення для «відсутності числа» (введення нуля), розширення множини цілих чисел до множини дійсних (ірраціональні величини* e і π*) і, зрештою, розширення множини дійсних чисел до множини чисел комплексних (уявна одиниця* i*).*

б) За формулою (4.1), наведеною вище,

$$e^{2-3i} = e^2\big(cos(-3) + isin(-3)\big) = e^2(cos3 - isin3).$$

Завдання 4.2. Обчислити: а) $ln(-1)$; б) $Ln(1+i)$.

Розв'язання. а) Відомо, що головне значення функції $y = Lnz$ має вигляд $lnz = ln|z| + i \cdot argz$.

Тому для обчислення значення логарифмічної функції необхідно знайти модуль та аргумент (а для головного значення логарифма – лише головне значення аргументу) комплексного числа.

Тому $|-1| = 1$, $arg(-1) = \pi$, і

$$ln(-1) = ln1 + i \cdot \pi = i\pi.$$

б) Використаємо формулу (4.6) з тією різницею, що друге завдання вимагає знайти не головне, а загальне значення логарифма, а, значить, потребує знаходження загального значення аргументу.

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},\ Arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$

Таким чином, $Ln(1+i) = ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$.

Завдання 4.3. Обчислити а) 1^i; б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

Розв'язання. а) Значення показникової функції обчислюється на основі означення логарифма за формулою (4.8): $1^i = e^{iLn1}$.

Спершу обчислимо значення $Ln1$. Оскільки $|1| = 1, Arg1 = 0 + 2\pi n$, то $Ln1 = ln1 + i \cdot 2\pi n = 2\pi ni.$ Тоді

$$1^i = e^{iLn1} = e^{i\cdot 2\pi ni} = e^{-2\pi n}.$$

Зауваження 4.2. *Варто звернути увагу на те, що в множині комплексних чисел порушується відома зі шкільного курсу математики властивість «одиниця в будь-якому степені рівна одиниці». Більш того, як видно з попереднього прикладу, значення степеневої функції не є єдиним, а залежить від значення цілочислового параметра* n.

б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{(1+i)Ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}.$

$$\left|\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1,$$

$$Arg\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Тому $Ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = ln1 + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$.

Зрештою, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{(1+i)Ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)} = e^{(1+i)i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)} = e^{\left(\frac{\pi}{4}-2\pi n\right)+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)} =$

$$= e^{\frac{\pi}{4}-2\pi n} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)} = e^{\frac{\pi}{4}+2\pi n}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\right) =$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}+2\pi n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Завдання 4.4. Обчислити а) $sin3i$; б) $tg\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$, в) $ch\left(-\frac{i}{2}\right)$.

Розв'язання.

а) За означенням і формулою для синуса (4.2), $sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Тому

$$sin3i = \frac{e^{i\cdot 3i} - e^{-i\cdot 3i}}{2i} = \frac{e^{-3} - e^{3}}{2i} = \frac{-i(e^{-3} - e^{3})}{-i\cdot 2i} = i\frac{e^{3} - e^{-3}}{2} = ish3.$$

б) За означенням і формулами (4.2)-(4.3), $tgz = \frac{sinz}{cosz} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$.

Тоді

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)}} = -i\cdot\frac{e^{1+\frac{\pi i}{2}} - e^{-1-\frac{\pi i}{2}}}{e^{1+\frac{\pi i}{2}} + e^{-1-\frac{\pi i}{2}}}.$$

Спершу обчислимо значення показникових функцій, що входять у даний вираз.

$$e^{1+\frac{\pi i}{2}} = e\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = e(0 + i\cdot 1) = ie.$$

$$e^{-1-\frac{\pi i}{2}} = e^{-1}\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-1}(0 - i\cdot 1) = -ie^{-1}.$$

Зрештою

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = -i\cdot\frac{e^{1+\frac{\pi i}{2}} - e^{-1-\frac{\pi i}{2}}}{e^{1+\frac{\pi i}{2}} + e^{-1-\frac{\pi i}{2}}} = -i\cdot\frac{ie + ie^{-1}}{ie - ie^{-1}} = -i\cdot\frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} = \frac{e^2 + 1}{1 - e^2}i.$$

в) За означенням і формулою (4.4), $chz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$. Тоді

$$ch\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{e^{\left(-\frac{i}{3}\right)} + e^{-\left(-\frac{i}{3}\right)}}{2} = \frac{e^{\frac{i}{3}} - e^{\left(-\frac{i}{3}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{cos\frac{1}{3} + isin\frac{1}{3} + cos\left(-\frac{1}{3}\right) + isin\left(-\frac{1}{3}\right)}{2} =$$

$$= \frac{cos\frac{1}{3} + isin\frac{1}{3} + cos\frac{1}{3} - isin\frac{1}{3}}{2} = \frac{2cos\frac{1}{3}}{2} = cos\frac{1}{3}.$$

Зауваження 4.3. *У завданні а) можна було скористатися властивостями, що пов'язують тригонометричні та гіперболічні функції комплексної змінної:*

$$\sin iz = i\,sh\,z,\quad \cos iz = \ ch\,z.$$

Завдання 4.5. Розв'язати рівняння $sinz - cosz = i$.

Розв'язання. Використаємо означення тригонометричних функцій, тобто формулу (4.2):

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=i.$$

Домножимо обидві частини рівняння на $2i$:

$$e^{iz}-e^{-iz}-i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=-2$$

і здійснимо заміну $e^{iz}=t$. Рівняння набуде вигляду:

$$t-\frac{1}{t}-i\left(t+\frac{1}{t}\right)+2=0,$$

і може бути приведене до форми

$$\frac{t^2-1-it^2-i+2t}{t}=0.$$

$t\neq 0$, що виконується завжди, адже показникова функція e^{iz} відмінна від нуля на всій комплексній площині.

Таким чином, $t^2-1-it^2-i+2t=0$, або, що те саме,

$$t^2(1-i)+2t-(1+i)=0.$$

Це звичайне квадратне рівняння з комплексними коефіцієнтами.

$$D=2^2+4\cdot(1-i)(1+i)=4+4\cdot(1-i^2)=4+8=12.$$

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2(1-i)}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2(1-i)}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{1-i}=\frac{\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=$$

$$=\frac{\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(1+i)}{2}.$$

Повертаючись до початкової змінної, одержимо:

$$e^{iz}=\frac{\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(1+i)}{2}.$$

$$iz = Ln\frac{(-1 \pm \sqrt{3})(1+i)}{2}, \;\; z = -iLn\frac{(-1 \pm \sqrt{3})(1+i)}{2}.$$

Обчислимо значення логарифмічної функції:

$$Ln\frac{(-1+\sqrt{3})(1+i)}{2} = ln\left|\frac{(-1+\sqrt{3})(1+i)}{2}\right| + iArg\frac{(-1+\sqrt{3})(1+i)}{2}$$

$$\left|\frac{(-1+\sqrt{3})(1+i)}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}(-1+\sqrt{3})}{2},$$

$$Arg\frac{(-1+\sqrt{3})(1+i)}{2} = Arg\frac{\sqrt{3}-1}{2} + Arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Таким чином,

$$Ln\frac{(-1+\sqrt{3})(1+i)}{2} = ln\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right),$$

і

$$z_1 = -i\left(ln\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)\right) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n - iln\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

Аналогічно

$$\left|\frac{(-1-\sqrt{3})(1+i)}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2},$$

$$Arg\frac{(-1-\sqrt{3})(1+i)}{2} = Arg\frac{-\sqrt{3}-1}{2} + Arg(1+i) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n =$$
$$= \frac{5\pi}{4} + 2\pi n.$$

Таким чином,

$$Ln\frac{(-1-\sqrt{3})(1+i)}{2} = ln\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right),$$

і

$$z_2 = -i\left(ln\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)\right) = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n - iln\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Завдання 4.6. Обчислити а) $Arcsin\, i$; б) $Arctg(1-i)$.

Розв'язання. а) За означенням, використаємо одну із формул (4.9) маємо:

$$Arcsin\, i \ = -iLn\left(i^2+\sqrt{1-i^2}\right) = -iLn\left(\pm\sqrt{2}-1\right).$$

Можливі такі варіанти:

$$Arcsin\, i \ = -i\left(ln\left(\sqrt{2}-1\right)+i\cdot 2\pi n\right) = 2\pi n - iln\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$Arcsin\, i \ = -i\left(ln\left(\sqrt{2}+1\right)+i\cdot(\pi+2\pi n)\right) = \pi + 2\pi n - iln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Зауваження 4.4. *Важливо враховувати, що на множині комплексних чисел значення квадратного кореня не обмежується арифметичним коренем, навіть якщо він знаходиться з дійсного додатного числа.*

Зауваження 4.5. *При обчисленні квадратного кореня з комплексного числа зручно користуватися формулою*

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\, sign\, y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

б) За означенням, $Arctg\, z = \frac{1}{2i}Ln\,\frac{1+iz}{1-iz}$. Тому

$$Arctg(1-i) = \frac{1}{2i}Ln\,\frac{1+i(1-i)}{1-i(1-i)} = -\frac{i}{2}Ln\frac{2+i}{-i} = -\frac{i}{2}Ln(-1+2i) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(ln|-1+2i| + iArg(-1+2i)\right) = -\frac{i}{2}\left(ln\sqrt{5} + i(\pi - arctg2 + 2\pi n)\right) =$$

$$= \frac{\pi - arctg2}{2} + \pi n + \frac{i\, ln5}{4}.$$

Завдання 4.7. Обчислити а) $Arch(3i)$; б) $Arth\left(\frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}}\right)$.

Розв'язання.

а) Згідно другої формули в (4.10) отримаємо,

$$Arch(3i) = Ln\left(3i \pm \sqrt{(3i)^2-1}\right) = Ln\left(3i \pm \sqrt{-9-1}\right) = Ln\left(3i \pm i\sqrt{10}\right) =$$

$$= Ln\left(3 \pm \sqrt{10}\right)i.$$

Обчислимо значення логарифмічних функцій. Для цього треба знайти модулі та аргументи комплексних чисел $\left(3 \pm \sqrt{10}\right)i$.

$$\left|(3+\sqrt{10})i\right| = 3+\sqrt{10}, \quad Arg(3+\sqrt{10})i = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\left|(3-\sqrt{10})i\right| = \sqrt{10}-3, \quad Arg(3-\sqrt{10})i = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Таким чином, $Ln(3+\sqrt{10})i = ln(3+\sqrt{10}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$,

$$Ln(3-\sqrt{10})i = ln(\sqrt{10}-3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

б) Застосуємо третю формулу із (4.10):

$$Arth\left(\frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}}\right) = Arth\left(1+\frac{2i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}Ln\frac{1+\frac{2i}{\sqrt{3}}+1}{1+\frac{2i}{\sqrt{3}}-1} = \frac{1}{2}Ln\frac{2+\frac{2i}{\sqrt{3}}}{\frac{2i}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}Ln\frac{\sqrt{3}+i}{i} = \frac{1}{2}Ln(1-\sqrt{3}i).$$

Оскільки $\left|1-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+3} = 2,\ Arg(1-\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, то

$Ln(1-\sqrt{3}i) = ln2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, і

$$Arth\left(\frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}Ln(1-\sqrt{3}i) = \frac{1}{2}\left(ln2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)\right) =$$

$$= \frac{ln2}{2} + i\left(\pi n - \frac{\pi}{6}\right).$$

Задачі для самостійного розв’язання

1. Обчислити

1.1

$e^{3+\frac{\pi i}{2}}$	$Ln\ i$
$(1+i)^{1+i}$	$cos2i$
$ch(1-i)$	$Arccos\ 2i$

1.2

$e^{\frac{\pi i}{3}}$	$Ln\ (2-2i)$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{i}$	$sin2i$
$sh\, i$	$Arcsin\, 3i$

1.3

$e^{3-\frac{\pi i}{4}}$	$Ln\,(1+i)$
i^{1-i}	$\cos\frac{i}{3}$
$th(2+2i)$	$Arcsin\,(-i)$

1.4

$e^{1-\frac{\pi i}{2}}$	$Ln\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$
$(1-i)^{\sqrt{3}+i}$	$sin(-2i)$
$cth(1+i)$	$Arccos\,(-3i)$

1.5

$e^{-1+\frac{\pi i}{4}}$	$Ln\left(\sqrt{3}-i\right)$
$\left(\sqrt{3}+i\right)^{1+i}$	$tg2i$
$ch(-1-i)$	$Arcsin\,\frac{i}{2}$

1.6

$e^{-1+\pi i}$	$Ln\left(\sqrt{12}+2i\right)$
$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{1-i}$	$ctgi$
$sh(-1+i)$	$Arccos\,(-2i)$

1.7

$e^{\frac{\pi i}{2}}$	$Ln\,(-i)$
$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{i}$	$ctg(-2i)$
$th\left(\frac{1+i}{2}\right)$	$Arcsin\left(-\frac{i}{2}\right)$

1.8

$e^{-3-\frac{\pi i}{2}}$	$Ln\left(-\frac{2i}{3}\right)$
$(-1)^{2+\sqrt{12}i}$	$cosi$
$cth\frac{1}{i}$	$Arccos\ i$

1.9

$e^{-2+\frac{3\pi i}{2}}$	$Ln\ (1+i)$
1^{5+5i}	$tg(-i)$
$sh\left(\sqrt{3}+i\right)$	$Arctg\ i$

1.10

$e^{1+\frac{2\pi i}{3}}$	$Ln\left(2-\sqrt{12}i\right)$
$(-i)^{3i}$	$tg\frac{i}{3}$
$ch\left(1+\sqrt{3}i\right)$	$Arcctg\ (-i)$

1.11

$e^{1-\frac{3\pi i}{4}}$	$Ln\left(2\sqrt{3}+2i\right)$
$(-1)^{\frac{i}{2}}$	$ctg\left(-\frac{i}{2}\right)$
$th\left(1-\sqrt{3}i\right)$	$Arcsin\ 2i$

1.12

$e^{-\frac{5\pi i}{2}}$	$Ln\ (2i-2)$
$(1+i)^{i}$	$sin\left(-\frac{i}{3}\right)$
$cth(-i)$	$Arccos\ \frac{i}{3}$

1.13

$e^{-2+\frac{5\pi i}{3}}$	$Ln\ \left(\frac{i}{5}\right)$

$i^{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$	$cos(-2i)$
$sh\left(-\frac{1}{i}\right)$	$Arctg\ 3i$

1.14

$e^{-1-\frac{2\pi i}{3}}$	$Ln\ (-e)$
$(-i)^{1+i}$	$tg2i$
$ch(1+i)$	$Arcctg\ \frac{i}{2}$

1.15

$e^{\frac{7\pi i}{4}}$	$Ln\ (ei)$
$(1-i)^{1+i}$	$sin\frac{i}{4}$
$th(5-5i)$	$Arcsin(-\ 2i)$

1.16

$e^{-\frac{5\pi i}{6}}$	$Ln\ (e-ei)$
$(2+2i)^{-i}$	$tg\frac{i}{4}$
$cth(-1-i)$	$Arccos\ \frac{i}{3}$

1.17

$e^{2-\frac{\pi i}{6}}$	$Ln\ \left(\frac{i}{e}\right)$
$\left(\sqrt{3}-i\right)^{2i}$	$cos\frac{i}{4}$
$sh\left(1-\sqrt{3}i\right)$	$Arctg\ \left(-\frac{i}{2}\right)$

1.18

$e^{1+\frac{3\pi i}{2}}$	$Ln\ (e^2 i)$
$(-i)^{2i-2}$	$ctg(-3i)$

$ch\left(\frac{1-i}{2}\right)$	$Arcctg\ 2i$

1.19

$e^{1-\frac{7\pi i}{6}}$	$Ln\ \left(\frac{i}{e^2}\right)$
$\left(\sqrt{12}+2i\right)^{i-1}$	tgi
$th(-i)$	$Arcsin\ \frac{i}{3}$

1.20

$e^{3+\frac{5\pi i}{4}}$	$Ln\ (-1+i)$
$(i-1)^{i-1}$	$ctg(-3i)$
$cth\left(\sqrt{3}-i\right)$	$Arccos\ 3i$

2. Знайти всі розв’язки рівняння у комплексній площині.

2.1. $\sin z - 2\cos z = 2i$;

2.2. $2\sin z + \cos z = i$;

2.3. $2\sin z - 3\cos z = 1$;

2.4. $2i\sin z + \cos z = i$;

2.5. $i\sin z - \cos z = 1$;

2.6. $\sin z + i\cos z = 1$;

2.7. $\cos z - \sin z = i$;

2.8. $2\cos z + i\sin z = 2$;

2.9. $i\cos z - \sin z = 1$;

2.10. $2i\cos z + \sin z = i$;

2.11. $\sin z + i\cos z = i$;

2.12. $\sin z - 2i\cos z = 1$;

2.13. $i\sin z + 2\cos z = i$;

2.14. $\sin z - i\cos z = i$;

2.15. $\sin z - 3i\cos z = 1$;

2.16. $3\sin z + \cos z = i$;

2.17. $3\cos z - \sin z = 1$;

2.18. $\sin z + 2\cos z = i$;

2.19. $2\sin z + i\cos z = i$;

2.20. $i\sin z - 2\cos z = 1$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

ТЕМА 5. Диференційовність функції комплексної змінної. Умови Коші ─ Рімана. Поняття моногенності, аналітичності. Умови моногенності, аналітичності. Правила і формули диференціювання. Похідні елементарних функцій. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної.

Основні теоретичні відомості

Якщо існує скінченна границя $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$, то така границя називається похідною функції $f(z)$ в точці z_0 та позначається $f'(z_0)$:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

При цьому функція $f(z)$ називається *диференційовною* у точці z_0.

Оскільки приріст комплексного аргументу в означенні прямує до нуля довільним способом, то справедливими є також формули

$$f'(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x},\qquad f'(z_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

Якщо функція комплексної змінної представляється у вигляді $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то вона є диференційованою при виконанні умов

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

що їх називають *умовами Коші – Рімана*.

Функція $f(z)$ називається *моногенною* в точці z_0, якщо вона має похідну в цій точці. Якщо функція $f(z)$ має похідні в кожній точці деякої області, то вона називається *моногенною в цій області*.

Функція $f(z)$ називається *аналітичною* в точці z_0, якщо вона має неперервну похідну в деякому околі цієї точки.

Для того, щоб функція $f(z)$ була моногенною в точці z_0, необхідно і достатньо, щоб у цій точці виконувалися умови Коші – Рімана.

Для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в області G, необхідно і достатньо, щоб в області G виконувалися умови Коші – Рімана.

Правила диференціювання

1. Якщо $f(z) = k = const$, то $f'(z) = 0$.
2. Нехай $f_1(z)$, $f_2(z)$ моногенні в точці z, тоді моногенними в точці z будуть функції $cf_1(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $f_1(z) + f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$, $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ при $f_2(z) \neq 0$, причому
$$(cf_1(z))' = cf_1'(z),$$
$$(f_1(z) + f_2(z))' = f_1'(z) + f_2'(z),$$
$$\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right)' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z),$$
$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{(f_2(z))^2}.$$
3. Нехай функція $f(z)$ моногенна в точці z_0, а функція $\varphi(w)$ моногенна в точці $w_0 = f(z_0)$, тоді $\varphi(f(z))$ буде моногенною в точці z_0, причому
$$\left(\varphi\big(f(z)\big)\right)' = \frac{d}{dz}\varphi(f(z))|_{z_0} = \varphi'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$
4. Нехай функція $f(z)$ однолистна і неперервна в області D, та моногенна в точці z_0, причому $f'(z_0) \neq 0$. Тоді існує обернена функція $g(w)$, яка буде моногенною в точці $w_0 = f(z_0)$, причому $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Похідні елементарних функцій.

5.1. $(az + b)' = a$;

5.2. $(z^n)' = nz^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

5.3. $(e^z)' = e^z$;

5.4. $(a^z)' = a^z Lna$;

5.5. $(sinz)' = cosz$;

5.6. $(\cos z)' = -sinz$;

5.7. $(tgz)' = \frac{1}{cos^2 z}$;

5.8. $(ctgz)' = -\frac{1}{sin^2 z}$;

5.9. $((\sqrt[n]{z})_k)' = \frac{(\sqrt[n]{z})_k}{nz}$;

5.10. $((Ln\, z)_k)' = \frac{1}{z}$.

У формулах 5.9 і 5.10 індекс k означає, що похідну обчислюють для однозначної k-ої вітки багатозначної функції.

Величина $|f'(z_0)|$ є *коефіцієнтом розтягу* в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$. Якщо $|f'(z_0)| > 1$, то в малому околі точки z_0 віддалі при відображенні $f(z)$ збільшуються і відбувається розтяг, а при $|f'(z_0)| < 1$ в малому околі точки z_0 відображення $f(z)$ приводить до стискування.

Нехай $\gamma = \{z: z = z(t), t \in [t_0, T]\}$ – гладка лінія, що виходить із точки $z_0 = z(t_0) \in G$. Її образом при відображенні $w = f(z)$ буде гладка лінія $L = \{w: w = w(t) = f\big(z(t)\big),\ t \in [t_0, T]\}$, і $argf'(z_0)$ – *це кут, на який необхідно повернути дотичну до лінії* γ *у точці* z_0, *щоб отримати дотичну до лінії* L *у точці* w_0. Якщо $\varphi = argf'(z_0) > 0$, то поворот відбувається проти руху годинникової стрілки, а при $\varphi = argf'(z_0) < 0 -$ за рухом годинникової стрілки.

Функція $\varphi(x, y)$ називається *гармонічною* в області D, якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє в цій області *рівняння Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ або } \Delta\varphi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *аналітична* в деякій області D, то її дійсна частина $u(x, y)$ і уявна частина $v(x, y)$ є *гармонічними* функціями.

Але ж, якщо $u_1(x, y)$ і $v_1(x, y) -$ дві будь-які гармонічні функції, то функція $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ зовсім не повинна бути аналітичною функцією; для аналітичності $f_1(z)$ треба, щоб функції $u_1(x, y)$ і $v_1(x, y)$ додатково задовольняли умови Коші – Рімана.

Схема відновлення функції за її дійсною або уявною частиною

Якщо відомо, що функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналітична в деякій області D і відома її тільки дійсна частина $u(x,y)$ або тільки уявна частина $v(x,y)$ (це означає, що функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ гармонічні), то цю функцію можна відновити.

Процес відновлення функції $f(z)$ можна виконати трьома способами.

1-ий спосіб. Використовуються формули:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - f(z_0), \tag{5.1}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)}, \tag{5.2}$$

Формули (5.1) і (5.2) використовуються для відновлення функції відповідно за її відомою дійсною частиною або відомою уявною частиною.

2-ий спосіб. Використовуються беспосередньо умови Коші – Рімана.

3-ий спосіб. Використовуються формули для знаходження дійсної та уявної частини відповідно, пов'язані з обчисленням криволінійних інтегралів другого роду:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy, \tag{5.3}$$

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy, \tag{5.4}$$

де у формулах (5.3) і (5.4) інтегрування здійснюється вздовж будь-якої кусково-гладкої кривої, що цілком міститься в області D і з'єднує фіксовану точку $(x_0, y_0) \in D$ з довільною точкою $(x,y) \in D$.

Розв'язання типових задач

Завдання 5.1. Знайти значення параметрів a, b і c, при яких функція $f(z) = x^2 + ax + by^2 + i(2xy + cy)$ є аналітичною на всій області визначення.

Розв’язання. Умовою аналітичності функції є виконання умов Коші – Рімана. Перевіримо їх. Оскільки $u = x^2 + ax + by^2,\ v = 2xy + cy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + c.$$

З умови $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ слідує, що $2x + a = 2x + c$, і $a = c$.

З умови $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ слідує, що $2by = -2y$, і $b = -1$.

Завдання 5.2. Відновити аналітичну функцію $w = f(z)$

а) за її дійсною частиною $u(x, y) = ln(x^2 + y^2)$;

б) за її уявною частиною $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Розв’язання. а) Згідно умов Коші – Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Знайдемо частинну похідну дійсної частини:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Тобто і

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Тоді

$$v(x, y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2} dy = \frac{2x}{x} arctg \frac{y}{x} + C(x) = 2arctg \frac{y}{x} + C(x).$$

З іншого боку, друга з умов Коші – Рімана стверджує, що $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2arctg \frac{y}{x} + C(x)\right) = 2 \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x) =$$

$$= -\frac{2y}{x^2 + y^2} + C'(x).$$

Тобто

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - C'(x).$$

Але

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(ln(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Тоді із рівності

$$\frac{2y}{x^2+y^2} - C'(x) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

слідує, що $C'(x) = 0$, і, як висновок, $C(x) = \mathrm{C} = const$.

Таким чином, шукана аналітична функція

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \ ln(x^2+y^2) + i\left(2arctg\frac{y}{x} + C\right).$$

б) Згідно умов Коші – Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Знайдемо частинну похідну уявної частини:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2) = -6xy.$$

Тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,$$

і звідси

$$u(x,y) = \int(-6xy)dx = -6y\cdot\frac{x^2}{2} + C(y) = -3x^2y + C(y).$$

За другою умовою Коші – Рімана $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2) = 3x^2 - 3y^2.$$

При цьому

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-3x^2y + C(y)\right) = -3x^2 + C'(y).$$

Таким чином,

$$-3x^2 + C'(y) = -(3x^2 - 3y^2),\ \ C'(y) = 3y^2.$$

Тобто $C(y) = \int 3y^2dy = y^3 + C$.

Зрештою,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = -3x^2y + y^3 + C + \ i(x^3 - 3xy^2).$$

Завдання 5.3. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту комплексної площини при відображенні, що здійснюється функцією $f(z) = i(z+1)^5$ в точці $z_0 = 1 - i$. Стискається чи розширюється комплексна площина $\mathbb{C}$ в точці z_0?

Розв'язання. Знайдемо значення похідної функції $f(z)$ у точці z_0:

$$f'(z) = 5i(z+1)^4;$$

$$f'(z_0) = f'(1-i) = 5i(1-i+1)^4 = 5i(2-i)^4 =$$
$$= 5i(2^4 - 4 \cdot 2^3 i + 6 \cdot 2^2 i^2 - 4 \cdot 2i^3 + i^4) =$$
$$= 5i(16 - 32i - 24 + 8i + 1) = 5i(-7 - 24i) = 120 - 35i.$$

Згідно геометричного змісту похідної функції комплексної змінної, коефіцієнт розтягу рівний $|120 - 35i| = \sqrt{120^2 + 35^2} = \sqrt{15625} = 125$, тобто комплексна площина в даній точці розширюється у 125 разів.

$$tg\big(arg(120 - 35i)\big) = -\frac{35}{120} = -\frac{7}{24}.$$

Оскільки точка, що відповідає комплексному числу $120 - 35i$, належить четвертій координатній чверті, то $arg(120 - 35i) = -arctg\,\frac{7}{24}$.

Зауваження 5.1. *Розширення комплексної площини у даній точці є однаковим у всіх напрямках (рівномірним), бо функція $f(z)$ у точці z_0 є аналітичною.*

Завдання 5.4. Відновити аналітичну в околі точки $z_0 = 0$ функцію $f(z)$ в за відомою її дійсною частиною $u(x,y) = 2sinx \cdot chy - x$ і значенням $f(z_0) = f(0) = 0$. Виконайте дане завдання трьома способами.

Розв'язання.

1-ий спосіб. Скористаємось формулою (5.1), де покладемо $\overline{z_0} = 0$:

$$f(z) = 2\left(2sin\frac{z}{2} \cdot ch\frac{z}{2i} - \frac{z}{2}\right) - 0 = 2\left(2sin\frac{z}{2} \cdot ch\left(-\frac{iz}{2}\right) - \frac{z}{2}\right) =$$

$$= 2\left(2sin\frac{z}{2} \cdot ch\frac{iz}{2} - \frac{z}{2}\right) = 4sin\frac{z}{2} \cdot cos\frac{z}{2} - z = 2sinz - z.$$

2-ий спосіб. Скористаємось безпосередньо умовами Коші – Рімана, враховуючи, що $u(x,y) = 2sinx \cdot chy - x$.

Згідно з першою умовою:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2cosx \cdot chy - 1 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$v = \int (2cosx \cdot chy - 1)dy = 2cosx \cdot shy - y + \varphi(x).$$

За другою умовою:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2sinx \cdot shy + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

але $\frac{\partial u}{\partial y} = 2sinxshy$.

Тоді:

$$-2sinx \cdot shy + \varphi'(x) = -2sinx \cdot shy,$$

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \mathrm{C}.$$

Отже, $f(z) = 2sinxchy - x + i(2cosx \cdot shy - y + C)$.

Знайдемо C з початкової умови: $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0 - 0 + i(0 - 0 + C) = 0 \ \Rightarrow \mathrm{C} = 0.$$

Таким чином отримаємо:

$$f(z) = 2sinxchy - x + i(2cosx \cdot shy - y) =$$

$$= 2\left((sinx + icosx)\frac{e^{y}}{2} + (sinx - icosx)\frac{e^{-y}}{2}\right) - (x + iy) =$$

$$= 2i\left((cosx - isinx)\frac{e^{y}}{2} - (cosx + isinx)\frac{e^{-y}}{2}\right) - z = 2i\left(\frac{e^{-ix}e^{y}}{2} - \frac{e^{ix}e^{-y}}{2}\right) - z$$

$$= -2i\frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2} - z = -2i\frac{e^{i(x\mp iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}i - z =$$

$$= 2\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} - z = 2sinz - z.$$

3-ий спосіб. Скористаємось формулою (5.4), де покладемо $z_0 = 0$:

$$v(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (-2sinxshy)dx + (2cosx \cdot chy - 1)dy =$$

$$= \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} d(2cosxshy - y) = (2cosxshy - y)|_{(0,0)}^{(x,y)} = 2cosxshy - y.$$

Тоді, $f(z) = 2sinx \cdot chy - x + i(2cosxshy - y) = 2sinz - z$.

Завдання 5.5. За яких умов тричлен $u(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, де $a, b, c \in \mathbb{R}$, є гармонічною функцією?

Розв'язання. Знайдемо від функції $u(x,y)$ частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + 2by, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2bx + 2cy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2b.$$

Бачимо, що всі частинні похідні є неперервними.

Згідно з означенням, функція $u(x,y)$ гармонічна, якщо вона задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, отже,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2a + 2c = 2(a + c) = 0 \Rightarrow a = -c.$$

При $a = -c$ заданий тричлен є гармонічною функцією.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Перевірити, чи дана функція є аналітичною. У випадку ствердної відповіді знайти похідну.

   1.1. $f(z) = (x^2 - y^2) + 2ixy$;

   1.2. $f(z) = (x^2 - y^2) - 2ixy$;

   1.3. $f(z) = e^{-y}cosx + ie^{-y}sinx$;

   1.4. $f(z) = e^{x}cosy + ie^{x}siny$;

   1.5. $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 - y^3)$;

   1.6. $f(z) = x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2)$;

   1.7. $f(z) = (x^2 - y^2 - 2x) + 2iy(x - 1)$;

1.8. $f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(4xy + 2y)$;

1.9. $f(z) = (4xy - y) - i(2x^2 - x - 2y^2)$;

1.10. $f(z) = (3x^2y + 2x) + 2i(4xy^2 + 2y)$;

1.11. $f(z) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x)$;

1.12. $f(z) = (4xsiny + cosx) + i(cosx - 4cosy)$;

1.13. $f(z) = sinxchy + icosxshy$;

1.14. $f(z) = sin(x - iy)$;

1.15. $f(z) = chx\ chy - ishx\ shy$;

1.16. $f(z) = cos(x - iy)$;

1.17. $f(z) = chx\ chy - ishx\ shy$;

1.18. $f(z) = shx\ cosy + ichx\ siny$;

1.19. $f(z) = (2x^3 - 3xy^2) + i(6x^2y - y^3)$;

1.20. $f(z) = (2x^2 - 2y^2 - 3x) + i(4xy + 3y)$.

2. Знайти аналітичну функцію $f(z)$, якщо задано її дійсну частину $Ref(z) = u(x, y)$ або уявну частину $Imf(z) = v(x, y)$.

2.1. $u(x, y) = e^x cosy$;

2.2. $v(x, y) = e^{-y} sinx$;

2.3. $u(x, y) = 3x + 2y + 1$;

2.4. $v(x, y) = 2x - y + 4$;

2.5. $u(x, y) = e^y cosx$;

2.6. $v(x, y) = e^{-x} cosy$;

2.7. $u(x, y) = shx\ cosy$;

2.8. $v(x, y) = -shx\ siny$;

2.9. $u(x, y) = cosx\ chy$;

2.10. $v(x, y) = sinx\ shy$;

2.11. $u(x, y) = x^2 - 6xy - y^2$;

2.12. $v(x, y) = -x^2 + 4xy + y^2$;

2.13. $u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2$;

2.14. $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$;

2.15. $u(x, y) = 6x^2y - 2y^3$;

2.16. $v(x, y) = 2y^2 - 2x^2 + x$;

2.17. $u(x, y) = y^2 - x^2 + 2xy - y$;

2.18. $v(x, y) = arctg\frac{y}{x}$;

2.19. $u(x, y) = y^2 - x^2$;

2.20. $v(x, y) = e^x siny$.

3. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту комплексної площини при відображенні, що здійснюється функцією $f(z)$ в точці z_0. Стискається чи розширюється комплексна площина $\mathbb{C}$ в точці z_0?

3.1. $f(z) = \cos(5 - z), z_0 = i + 5;$
3.2. $f(z) = (5z - 1)^2, z_0 = i;$
3.3. $f(z) = (z - 3i)^7, z_0 = 1 + 2i;$
3.4. $f(z) = (z - 2)^4 e^{\frac{i\pi}{4}}, z_0 = 3 + i;$
3.5. $f(z) = e^{iz-2}, z_0 = 4 - 3i;$
3.6. $f(z) = \operatorname{tg} z, z_0 = 3i - 1;$
3.7. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}, z_0 = i - 1;$
3.8. $f(z) = \frac{2z+3}{z+4}, z_0 = 1;$
3.9. $f(z) = \frac{z}{z+2i}, z_0 = -i;$
3.10. $f(z) = e^{-3z}, z_0 = \frac{\pi i}{3};$
3.11. $f(z) = \cos 2z, z_0 = 2i;$
3.12. $f(z) = \sin 3z, z_0 = i;$
3.13. $f(z) = 2z^2 + 5, z_0 = \sqrt{3} - i;$
3.14. $f(z) = 2z^3 + 4, z_0 = 1 - i;$
3.15. $f(z) = \frac{z+2}{z-i}, z_0 = -i;$
3.16. $f(z) = e^{-5z}, z_0 = \frac{\pi i}{10};$
3.17. $f(z) = \operatorname{sh} z, z_0 = \frac{\pi i}{2} + 2;$
3.18. $f(z) = \operatorname{ch} 2z, z_0 = \frac{\pi i}{4};$
3.19. $f(z) = \operatorname{sh} 2z, z_0 = \frac{\pi i}{2} + 1;$
3.20. $f(z) = e^{-2z}, z_0 = \frac{\pi i}{2} + 1.$

4. Перевірити, чи задані функції є гармонічними?

4.1. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2;$
4.2. $v(x,y) = 2y\sin x;$
4.3. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy;$
4.4. $v(x,y) = 2xy + 4;$
4.5. $u(x,y) = 2e^y \cos x;$
4.6. $v(x,y) = 2e^x \sin y;$
4.7. $u(x,y) = e^y \operatorname{sh} x;$
4.8. $v(x,y) = -e^x \operatorname{ch} y;$
4.9. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y;$
4.10. $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + 2x;$
4.11. $u(x,y) = arctg\frac{y}{x};$
4.12. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2);$
4.13. $u(x,y) = xy^2;$
4.14. $v(x,y) = e^x \cos y + 1;$
4.15. $u(x,y) = 1 + e^x \sin y;$
4.16. $v(x,y) = -y^2 + x^2 + 2xy;$
4.17. $u(x,y) = 4x^2 + 10xy - 4y^2;$
4.18. $u(x,y) = 3x^2 + 12xy - 6y^2;$
4.19. $u(x,y) = \frac{x^2+1}{2} y^2;$
4.20. $v(x,y) = 2\sin x \operatorname{ch} y - x.$

ТЕМА 6. Симетричні точки. Конформні відображення. Конформні відображення, що здійснюються деякими елементарними функціями. Лінійна функція. Дробово-лінійна функція. Функція Жуковського. Відображення, що здійснюються показниковою функцією. Відображення, що здійснюються тригонометричними функціями.

Основні теоретичні відомості

Точки z_1 і z_2 $(z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$ називаються *симетричними відносно прямої* L, якщо вони лежать на одному перпендикулярі до прямої по різні сторони і на однаковій віддалі від прямої.

Точки z_1 і z_2 $(z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$ називаються *симетричними відносно кола* $\gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = R\}$, якщо вони лежать на одному промені, що виходить із центра z_0 кола, і виконується умова $|z_1 - z_0|\,|z_2 - z_0| = R^2$. Точки z_0 і ∞ вважаємо симетричними.

Відображення $w = f(z)$ називається *конформним* якщо похідна $f'(z)$ існує і $f'(z) \neq 0$ у всіх точках $z \in \mathbb{C}$.

Лінійне відображення $w = az + b$ є конформним в кожній точці комплексної площини, його можна подати у вигляді суперпозиції трьох простих відображень:

а) $w_1 = |a|z$ – перетворення подібності (гомотетія з центром в точці $z = 0$);

б) $w_2 = e^{i\varphi}w_1$ – поворот на кут $\varphi = \arg a$;

в) $w = w_2 + b$ – паралельне перенесення на вектор $\vec{b}$.

Дробово-лінійне відображення $w = \frac{az+b}{cz+d}$ є конформним в кожній точці комплексної площини, крім точки $z = -\frac{d}{c}$ і його можна представити у наступній формі:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

Дробово-лінійне відображення можна подати у вигляді суперпозиції наступних трьох відображень:

1. $w_1 = cz + d$ – лінійне відображення;

2. $w_2 = \frac{1}{w_1}$;

3. $w = \left(b - \frac{ad}{c}\right) w_2 + \frac{a}{c}$ – лінійне відображення.

Існує єдине дробово-лінійне відображення, яке довільні три різні точки z_1, z_2, z_3 розширеної комплексної площини переводить у довільні задані три різні точки w_1, w_2, w_3 розширеної комплексної площини.

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \qquad (6.1)$$

Функція комплексної змінної вигляду

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad (6.2)$$

де $z \neq 0$ (бо це єдина точка, в якій функція не конформна), називається *функцією Жуковського*.

Функція Жуковського однолисто відображає зовнішність або внутрішність одиничного кола на всю комплексну площину з розрізом по відрізку $[-1; 1]$, межа цієї області (коло $|z| = 1$) відображається у відрізок $[-1; 1]$, який обходиться двічі.

При відображенні, що здійснюється степеневою функцією $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}, n > 1$, сектор $\left\{z: 0 < |z| < \infty, \alpha < \varphi = arg\, z < \alpha + \frac{2\pi}{n}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ переходить у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $z = 0$ і проходить під кутом $n\alpha$. Степенева функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини, крім точки $z = 0$.

При відображені, що здійснюється показниковою функцією, смуга $\{z: \alpha < Im\, z < \alpha + 2\pi, \alpha \in (-\pi; \pi]\}$ переходить у всю комплексну площину з розрізом по промені $\{w: \mathrm{Arg}\, w = \alpha\}$. Показникова функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини.

Функція $w = \sin z$ смугу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ відображає у всю розширену комплексну площину з розрізами по променях $(-\infty; -1]$ та $[1; \infty)$ дійсної осі. Функція $w = \sin z$ конформна в усіх точках комплексної площини, окрім точок $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, де похідна дорівнює 0.

Функція $w = \cos z$ смугу $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ відображає у всю розширену комплексну площину з розрізами по променях $(-\infty; -1]$ та $[1; \infty)$ дійсної осі. Функція $w = \cos z$ конформна в усіх точках комплексної площини, окрім точок $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, де похідна дорівнює 0.

Розв'язання типових задач

Завдання 6.1. Знайти образ півплощини $Re\, z > 0$ при відображенні $w = (1 - i)z + 2$.

Розв'язання. Зобразимо спочатку множину точок комплексної площини, що задовольняє нерівність $Re\, z > 0$ на рисунку 6.1.

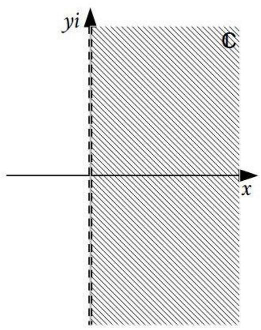


Рис. 6.1. Зображення множини $Re\, z > 0$

Відображення $w = (1 - i)z + 2$ є лінійним відображенням, яке в свою чергу є суперпозицією трьох відображень:

а) $w_1 = |1 - i|z$ – розтяг;

б) w_2 – поворот на кут $\varphi = \arg(1 - i)$ навколо початку координат;

в) $w = w_2 + 2$ – паралельне перенесення на 2 вгору.

Таким чином,

а) $|1 - i| = \sqrt{2}$. Розтяг правої півплощини у $\sqrt{2}$ рази не змінює її вигляду (див. рис. 6.2).

б) $\varphi = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$.

Поворот здійснюється у додатному напрямі, тобто проти руху годинникової стрілки. Але, оскільки кут повороту від'ємний, то і відкласти його треба у від'ємному напрямі – за рухом годинникової стрілки на кут $\frac{\pi}{4}$ (див. рис.6.3).

в) Паралельний перенос на вектор, що відповідає числу 2 – це зсув на 2 одиниці вправо (див. рис. 6.4).

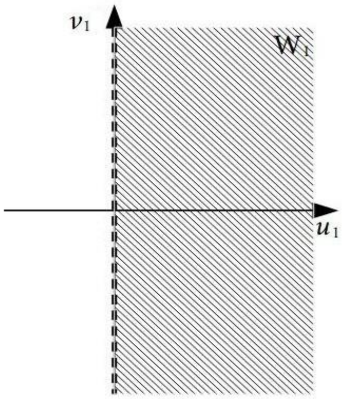


Рис. 6.2

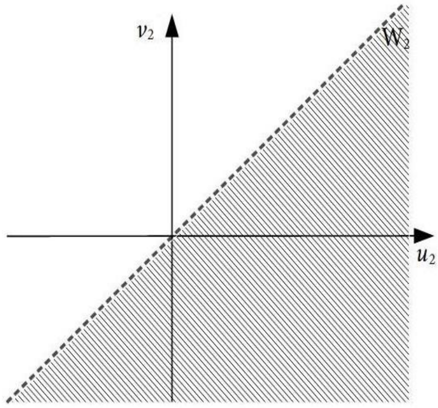


Рис. 6.3

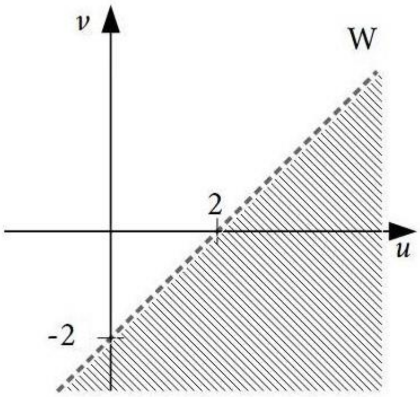


Рис. 6.4

Завдання 6.2. Знайти образ множини $|z + i| < 1$ при відображенні $w = 2iz + 1 - i$.

Розв'язання. Задана множина є внутрішньою частиною (без контура кола) круга з центром у точці $z = -i$ та радіусом 1 (див. рис. 6.5).

Відображення $w = 2iz + 1 - i -$ лінійне. Тому аналогічно до завдання 6.1, здійснимо суперпозицію трьох відображень.

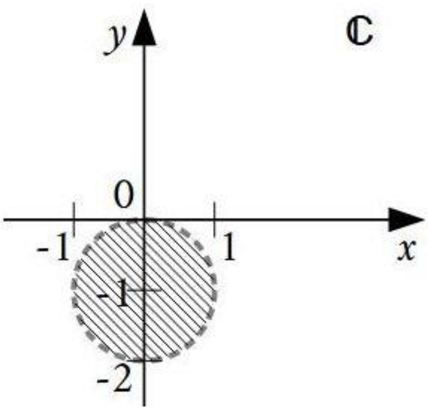


Рис. 6.5. Зображення множини точок $|z + i| < 1$

а) Розтяг у $|2i| = 2$ рази (див. рис. 6.6).

Оскільки розтяг здійснюється з центром у початку координат, а межа області проходить через цей початок, то і образ області при першому відображенні теж проходить через нього.

б) Поворот на кут $\varphi = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ у додатньому напрямку (див.рис. 6.7).

Цей етап зручно здійснювати, повертаючи на потрібний кут радіус-вектори окремих, характерних точок. У цьому прикладі доцільно знайти образ центра кола – точки $z =- 2i$. Вона відобразиться у точку 2, і разом з нею зміститься і коло.

в) Паралельний перенос на вектор, що відповідає комплексному числу $1 - i$, тобто на $\overline{(1;-1)}$ (див. рис. 6.8).

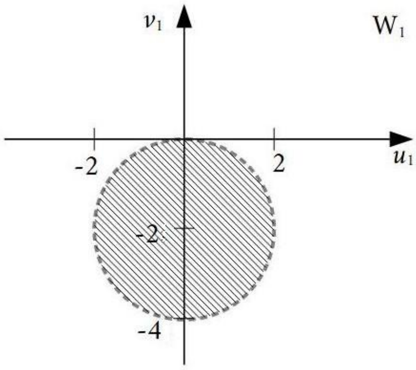


Рис. 6.6. Розтяг

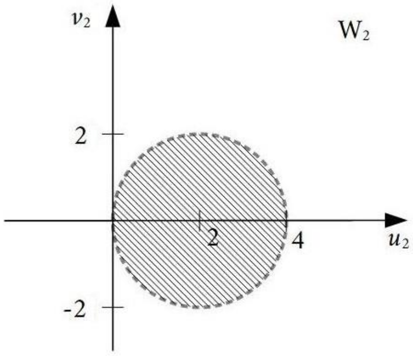


Рис. 6.7. Поворот

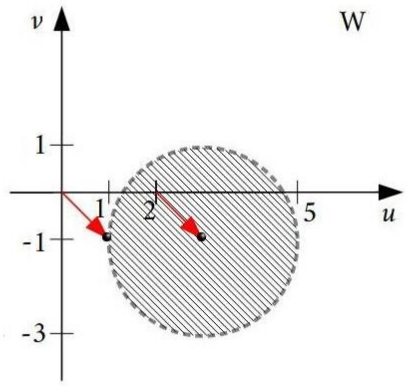


Рис. 6.8. Перенос

Завдання 6.3. Знайти дробово-лінійне відображення, яке переводить точки

а) $-1; i; 1 + i$ в $0; 2i; 1 - i$ відповідно;

б) $-1; \infty; i$ в $i; 1; 1 + i$ відповідно.

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі використаємо формулу (6.1).

а) Підставимо у формулу (6.1) значення

$z_1 = -1; z_2 = i; z_3 = 1 + i; \quad w_1 = 0; w_2 = 2i;\ w_3 = 1 - i.$

$$\frac{w-0}{w-2i} : \frac{1-i-0}{1-i-2i} = \frac{z+1}{z-i} : \frac{1+i+1}{1+i-i};$$

$$\frac{w}{w-2i}\cdot\frac{1-3i}{1-i}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{1}{2+i}.$$

Обчислимо значення часток:

$$\frac{1-3i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4-2i}{2}=2-i;$$

$$\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{5}.$$

Підставивши одержані значення у вираз, наведений вище, отримаємо:

$$\frac{w(2-i)}{w-2i}=\frac{(z+1)(2-i)}{5(z-i)}.$$

Залишається виразити з даної рівності значення функції w.

$$5w(2-i)(z-i)=(w-2i)(z+1)(2-i);$$

$$w\big(5(2-i)(z-i)-(z+1)(2-i)\big)=-2i(z+1)(2-i);$$

$$w(10z-10i-5iz-5-2z+iz-2+i)=-4iz-2z-4i-2;$$

$$w(z(12-7i)-3-12i)=(-4i-2)z-4i-2;$$

$$w=\frac{(-4i-2)z-4i-2}{z(12-7i)-3-12i};$$

$$w=\frac{(2+4i)z+2+4i}{z(7i-12)+3+12i}.$$

б) Підставляючи значення

$z_1=-1; z_2=\infty; z_3=i;\quad w_1= i; w_2=1; w_3=1+i$ у формулу (6.1) для відображення, як у попередній задачі, отримаємо формальні вирази, що містять доданком символ нескінченності. Таку різницю вважають рівною одиниці.

$$\frac{w-i}{w-1}:\frac{1+i-i}{1+i-1}=\frac{z+1}{z-\infty}:\frac{i+1}{i-\infty};$$

$$\frac{w-i}{w-1}\cdot i=\frac{z+1}{i+1};$$

$$i(w-i)(i+1)=(w-1)(z+1);$$

$$-w+wi+i+1-zw-w=-z-1;$$

$$w(-z-2+i)=-z-1-i-1;$$

$$w=\frac{-z-2-i}{-z-2+i};$$

$$w = \frac{z+2+i}{z+2-i}.$$

Завдання 6.4. Дано відображення $w = \frac{1}{z}$. Знайти образ множини D:

а) $D = \{z \in C: |z+i| \leq 1\}$; б) $D = \{z \in C: Re\, z + Im\, z > 1\}$;

в) $D = \{z \in C: Re\, z < Im\, z\}$.

Розв'язання. Доцільно насамперед виділити дійсну та уявну частини функції $w = \frac{1}{z}$.

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Отже,

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{6.2}$$

а) Множина $D = \{z \in C: |z+i| \leq 1\}$ – внутрішність кола з центром у точці, що відповідає комплексному числу $z =- i$ і з радіусом, рівним 1, а також саме коло (див. рис. 6.9).

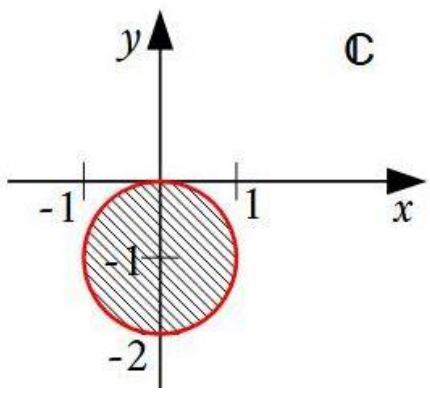


Рис. 6.9. Зображення множини $D = \{z \in C: |z+i| \leq 1\}$

Рівняння такого кола в декартових координатах

$$x^2 + (y+1)^2 = 1,$$

або, що те саме,

$$x^2 + y^2 = -2y.$$

Щоб знайти образ межі області при заданому відображенні, розділимо отриману рівність на $x^2 + y^2$:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}; \Longrightarrow 1 = -\frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Згідно формул (6.2), остання рівність запишеться у вигляді $2v = 1$, або ж $v = \frac{1}{2}$.

У новій декартовій системі координат це рівняння задає пряму, паралельну до осі u (див. рис. 6.10).

Залишається визначити, котра саме півплощина, з-поміж двох, обмежених знайденою прямою, є образом заданої множини. Для цього розглянемо в початковій множині якусь точку і подіємо на неї заданим відображенням. Наприклад, $z = -i$ відображається в точку $\frac{1}{-i} = i$. Одержаний образ належить верхній півплощині (див. рис. 6.11).

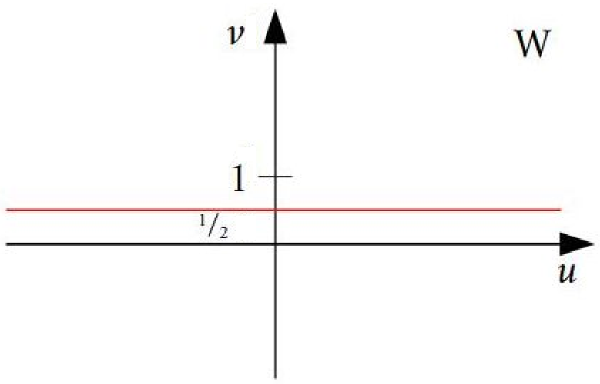


Рис. 6.10

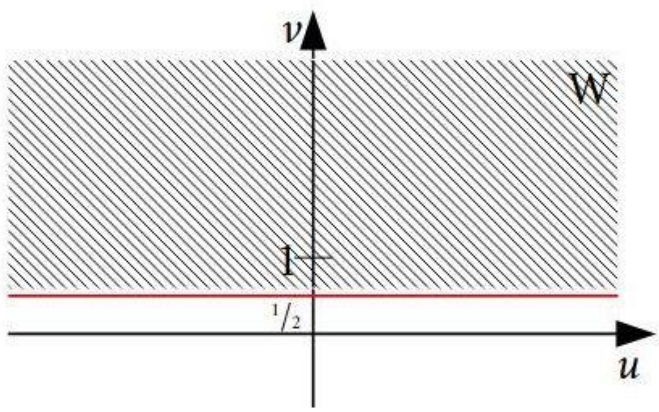


Рис. 6.11

Тому ця півплощина і є образом множини $D = \{z \in C: |z + i| \leq 1\}$ при заданому відображенні.

б) Лінія, що обмежує задану множину $D = \{z \in C: Re\, z + Im\, z > 1\}$, $-$ пряма $x + y = 1$ (див. рис. 6.12).

Аналогічно до попередньої задачі, поділимо рівняння межової лінії на $x^2 + y^2$:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Врахувавши формули (6.2), отримаємо:

$$u-v=u^2+v^2.$$

Це рівняння кола. Запишемо його в канонічній формі:

$$u^2-2\cdot\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}+v^2+2\cdot\frac{1}{2}v+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Отже, ми отримали рівняння кола з центром у точці, що відповідає комплексному числу $w=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, радіус якого $R=|w|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (див. рис. 6.13).

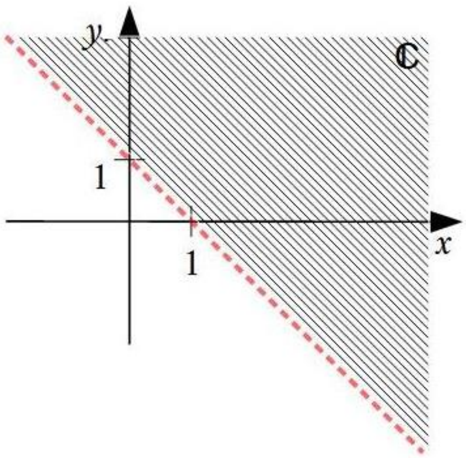


Рис. 6.12

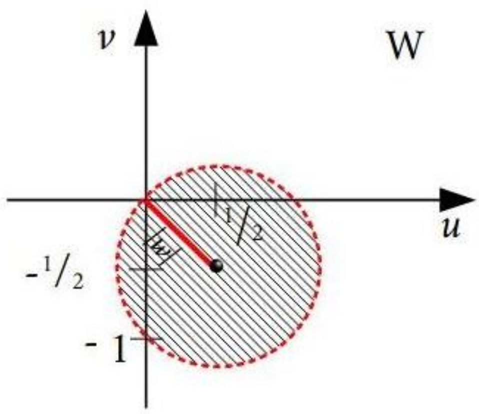


Рис. 6.13

При цьому точка $z=2$ належала прообразу, а її образ (точка $w=\frac{1}{2}$) належатиме образу.

Таким чином, образом даної множини $D=\{z\in C: Re\, z+Im\, z>1\}$ буде внутрішність даного кола.

в) Умова $Re\, z<Im\, z$, записана у вигляді $x<y$ визначає півплощину, межею якої є пряма $x=y$ (див. рис. 6.14).

Поділимо, аналогічно до попередніх задач, рівняння межової лінії $x = y$ на $x^2 + y^2$:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Згідно формул (6.2), отримаємо:

$$u = -v,$$

що теж є рівнянням прямої. Частина площини, котра буде образом заданої, може бути визначена з допомогою відображення конкретної точки, як у двох попередніх задачах (див. рис. 6.15).

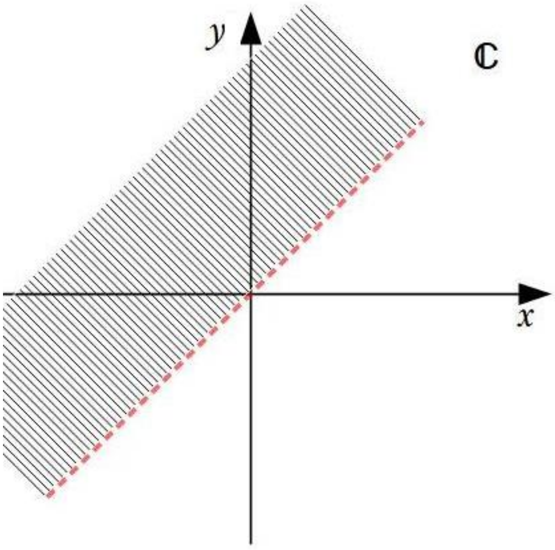


Рис. 6.14

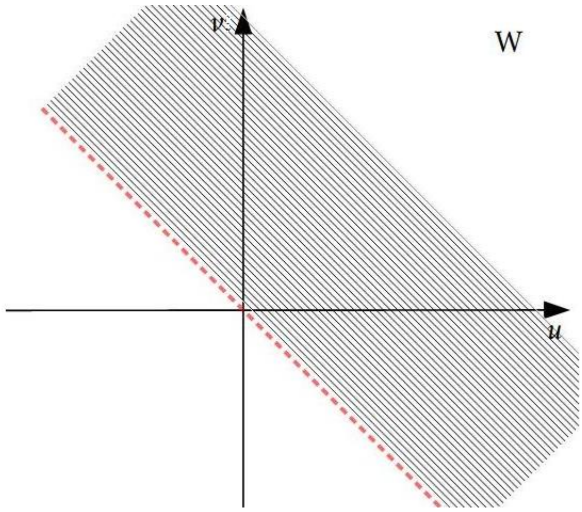


Рис. 6.15

Зауваження 6.1. *Можна для спрощення міркувань виконувати ділення на* $x^2 + y^2$ *безпосередньої умови, що визначає множину. Оскільки величини* x і y *– дійсні, то сума їх квадратів завжди додатна, і ділення на неї не змінюватиме знаку нерівності.*

Зауваження 6.2. (Кругова властивість) *При дослідженні відображення* $w = \frac{1}{z}$ *проявляється закономірність:*

- *Пряма, яка проходить через початок координат, відображається теж у пряму, яка проходить через початок координат;*

- *Пряма, що не проходить через початок координат, відображається у коло, яке проходить через початок координат;*
- *Коло, що проходить через початок координат, відображається у пряму, яка не проходить через початок координат;*
- *Коло, що не проходить через початок координат, відображається у коло, яке теж не проходить через початок координат.*

Завдання 6.5. Знайти образ множини $D = \{z \in C: |z| < 1,\ Im\, z > 0\}$ при відображенні $w = \frac{2z-i}{2+iz}$.

Розв'язання. Умова $|z| < 1$ визначає внутрішність кола з центром у початку координат і радіусом 1, а умова $Im\, z > 0$ – верхню півплощину (див. рис. 6.16).

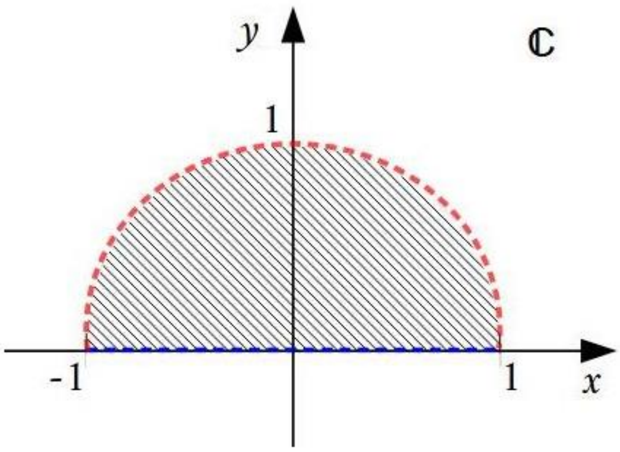


Рис. 6.16. Графічна ілюстрація множини $D = \{z \in C: |z| < 1,\ Im\, z > 0\}$

У декартових координатах рівняння ліній, що обмежують задану область: $x^2 + y^2 = 1$ і $y = 0$.

Перетворимо вигляд функції, що задає відображення, виділивши цілу частину:

$$w = \frac{2z - i}{2 + iz} = \frac{2}{i} \cdot \frac{z - \frac{i}{2}}{z + \frac{2}{i}} = -2i \cdot \frac{z - \frac{i}{2}}{z - 2i} = -2i \cdot \frac{z - 2i + 2i - \frac{i}{2}}{z - 2i} =$$

$$= -2i\left(1 + \frac{\frac{3i}{2}}{z-2i}\right) = -2i - \frac{2i \cdot \frac{3i}{2}}{z-2i} = \frac{3}{z-2i} - 2i.$$

Отже, маємо суперпозицію трьох відображень:

$$w_1 = z - 2i;\ w_2 = \frac{1}{w_1};\ w = 3w_2 - 2i.$$

Перше з них – лінійне, причому ні розтягу множини, ні її повороту не здійснюється, бо коефіцієнт при z має модуль, рівний одиниці і нульовий аргумент. Тож має місце тільки паралельний перенос на вектор, що відповідає комплексному числу $-2i$ (див. рис. 6.17).

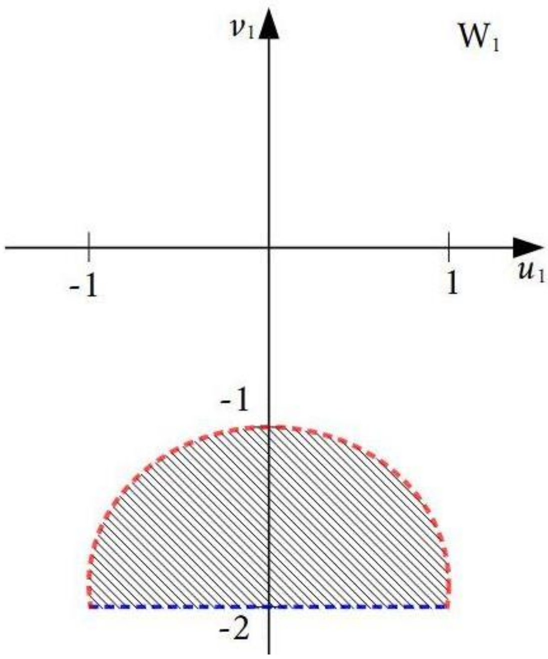


Рис. 6.17

Центр кола переходить у точку $(0, -2)$, і його рівняння набуває вигляду

$$u_1^2 + (v_1 + 2)^2 = 1,$$

або, що те саме,

$$u_1^2 + v_1^2 + 4v_1 + 3 = 0.$$

Рівняння горизонтального діаметра $v_1 = -2i$.

Подіємо на кожну з цих ліній відображенням $w_2 = \frac{1}{w_1}$, як у попередній задачі, ділячи рівняння лінії на $u_1^2 + v_1^2$.

Коло $u_1^2 + v_1^2 + 4v_1 + 3 = 0 /: (u_1^2 + v_1^2)$,

$$\frac{u_1^2+v_1^2}{u_1^2+v_1^2}+4\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2}+\frac{3}{u_1^2+v_1^2}=0;$$

$$1+4\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2}+\frac{3u_1^2}{(u_1^2+v_1^2)^2}+\frac{3v_1^2}{(u_1^2+v_1^2)^2}=0.$$

Згідно формул (6.2):

$$3u_2^2+3v_2^2-4v_2+1=0;$$

$$u_2^2+v_2^2-\frac{4}{3}v_2+\frac{1}{3}=0.$$

Це рівняння кола. У канонічній формі воно матиме вигляд

$$u_2^2+v_2^2-2\cdot\frac{2}{3}v_2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=0;$$

$$u_2^2+\left(v_2-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

Пряма $v_1=-2$:

$$\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2}=-\frac{2}{u_1^2+v_1^2};$$

$$\frac{v_1}{u_1^2+v_1^2}=-\frac{2u_1^2}{(u_1^2+v_1^2)^2}-\frac{2v_1^2}{(u_1^2+v_1^2)^2}.$$

Згідно формул (6.2):

$$-2u_2^2-2v_2^2+v_2=0;$$

$$u_2^2+v_2^2-\frac{1}{2}v_2=0.$$

Це теж рівняння кола. Його канонічна форма

$$u_2^2+v_2^2-2\cdot\frac{1}{4}v_2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=0;$$

$$u_2^2+\left(v_2-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

Тобто образ даної множини буде обмежений двома колами. Щоб визначити, котра саме з отриманих фігур буде шуканою множиною, скористаємося принципом відповідності точок (див. рис. 6.18):

$$-\frac{3}{2}i \in D_1, \quad -\frac{3}{2}i \xrightarrow{w_2} \frac{1}{-\frac{3}{2}i} = -\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3} \in D_2.$$

Залишається подіяти на отриману область третім, лінійним відображенням $w = 3w_2 - 2i$, яке можна розбити на два послідовні відображення:

$$w = w_3 - 2i, \qquad w_3 = 3w_2.$$

Це, в свою чергу, розтяг відносно початку координат у 3 рази (бо $|3| = 3$) і відсутність повороту (бо $\varphi = arg3 = 0$).

При розтягу центр першого кола перейде $\frac{2}{3} \xrightarrow{w_3} 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$, а його радіус стане рівним $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Центр другого кола перейде $\frac{1}{4} \xrightarrow{w_3} 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, а радіус буде $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (див. рис. 6.19).

Останнім перетворенням буде паралельний перенос $w = w_3 - 2i$ одержаної фігури на вектор, що відповідає комплексному числу $-2i$. Це зсув на 2 одиниці вниз (див. рис. 6.20).

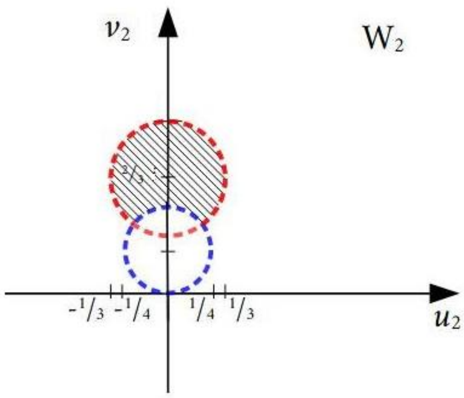


Рис. 6.18

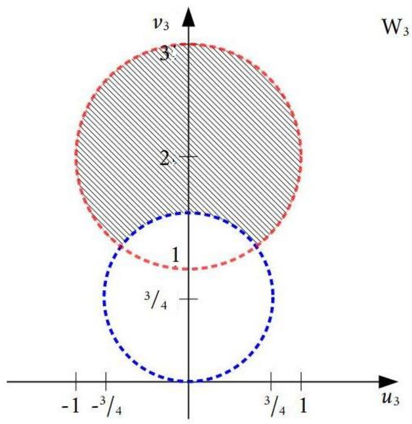


Рис. 6.19

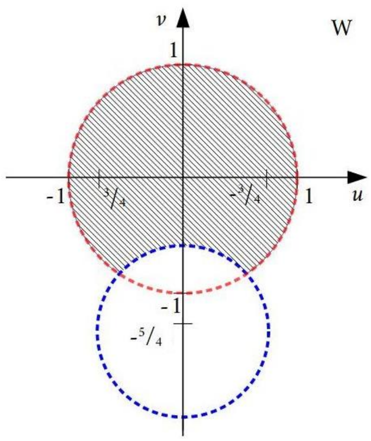


Рис. 6.20

Завдання 6.6. Знайти образ множини $\left\{z \in C: 1 < Re\, z < 3\,,\ 0 < Im\, z < \frac{\pi}{2}\right\}$ при відображенні $w = e^z$.

Розв'язання. Задана множина – прямокутник, обмежений прямими $x = 1,\ x = 3,\ y = 0,\ y = \frac{\pi}{2}$ (див. рис. 6.21).

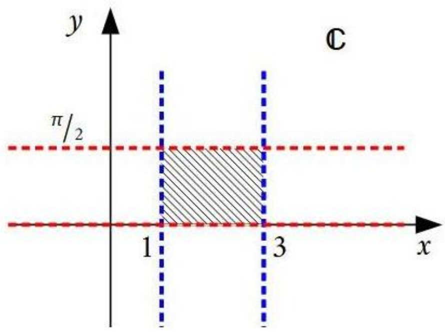


Рис. 6. 21. Зображення множини $\left\{z \in C: 1 < Re\, z < 3\,,\ 0 < Im\, z < \frac{\pi}{2}\right\}$

Врахуємо, що $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ і подіємо цим відображенням на кожну з ліній, що обмежують задану множину.

$$x = 1: \ \ w = e(\cos y + i \sin y),$$

тобто $\begin{cases} u(x,y) = e \cos y, \\ v(x,y) = e \sin y. \end{cases}$

Щоб виключити з даної системи «старі» змінні, піднесемо обидві частини рівностей до квадрату і додамо їх:

$$u^2 + v^2 = e^2 \cos^2 y + e^2 \sin^2 y\,;$$

$$u^2 + v^2 = e^2.$$

Це коло з центром у початку координат і радіусом e. Аналогічно з'ясовується, що образом прямої $x = 3$ буде коло з центром у початку координат і радіусом e^3.

Наступна лінія: $y = 0$: $w = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$. Тобто

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x, \\ v(x,y) = 0. \end{cases}$$

Це промінь – додатна частина осі абсцис.

Зрештою, $y = \frac{\pi}{2}$: $w = e^x\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = e^x i$. Тобто

$$\begin{cases} u(x,y) = 0, \\ v(x,y) = e^x i. \end{cases}$$

Це теж промінь – додатна частина осі ординат. Шуканий образ зображено нижче (див. рис. 6.22).

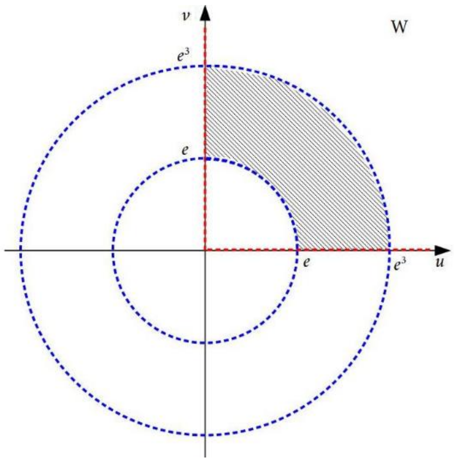


Рис. 6. 22

Завдання 6.7. Відобразити множину $D=\left\{z\in C{:}\,0<Im\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$ на комплексну площину з розрізами $(-\infty,\ -1],\ [1,\ +\infty)$.

Розв'язання. Відомо, що потрібна множина є образом при відображенні $w=\sin z$ смуги $\left\{z\in C{:}\,-\frac{\pi}{2}<Re\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

Тому треба побудувати відображення, яке б перевело задану множину $D=\left\{z\in C{:}\,0<Im\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$ у множину $\left\{z\in C{:}\,-\frac{\pi}{2}<Re\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

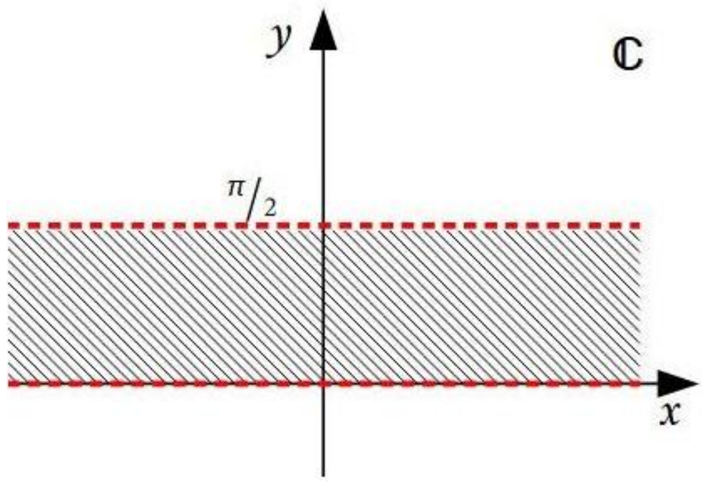


Рис. 6.23

З геометричних міркувань, цього можна досягти: розтягом у 2 рази; поворотом на кут, рівний $-\frac{\pi}{2}$; зсувом на $\frac{\pi}{2}$ вліво (відповідно див. рис. 6.24-6.26).

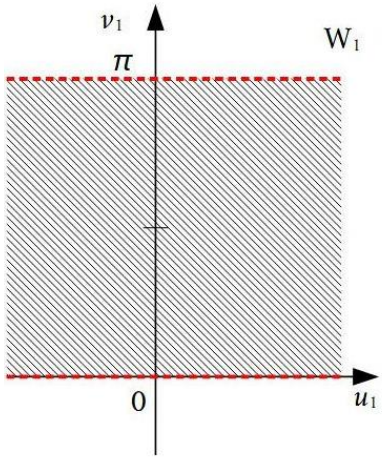


Рис. 6.24. Розтяг

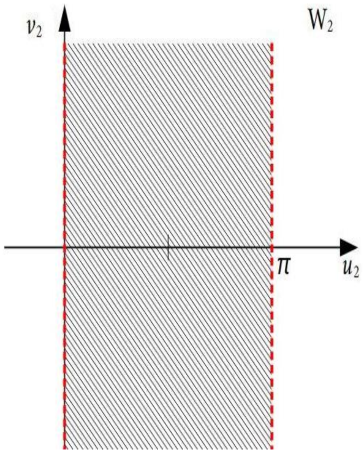


Рис. 6.25. Поворот

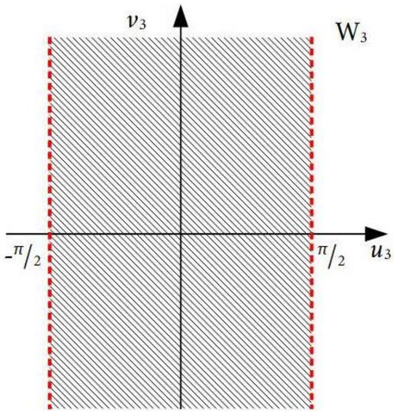


Рис. 6.26. Зсув

Усі ці перетворення забезпечуються лінійним відображенням $w = az + b$, де $|a| = 2$, $\arg a = -\frac{\pi}{2}$, $b = -\frac{\pi}{2}$.

Тобто $a = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2i$.

Таким чином, шуканим відображенням буде $w = \sin\left(-2iz - \frac{\pi}{2}\right)$ (див. рис. 6.27).

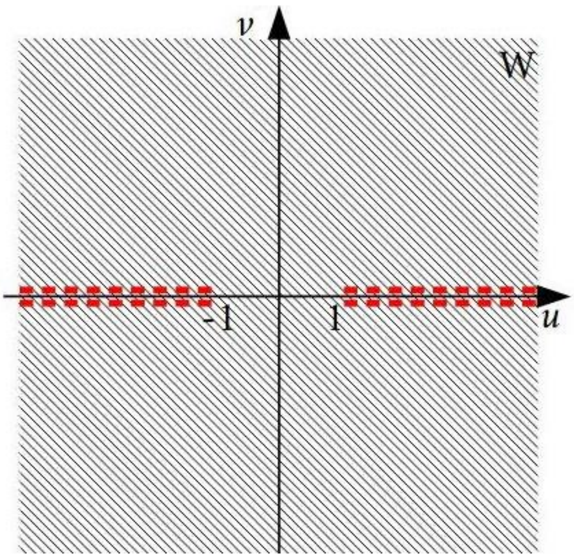


Рис. 6.27

Завдання 6.8. Знайти образ множини $\{z \in C: 1 < |z| < 2,\ Imz > 0\}$ при відображенні, що задається функцією Жуковського.

Розв’язання. Задана множина є верхньою половиною кільця, утвореного колами $|z| = 1$, $|z| = 2$ та віссю абсцис, не включаючи самих межових ліній (див. рис. 6.28).

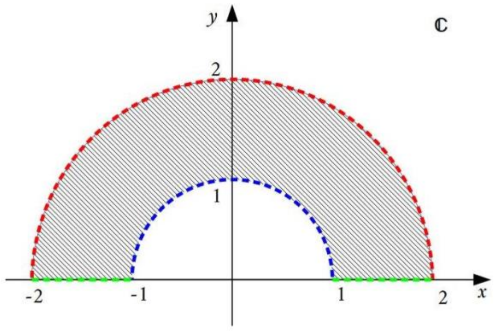


Рис. 6.28. Зображення множини $\{z \in C: 1 < |z| < 2,\ Imz > 0\}$

У параметричній формі рівняння кіл матимуть вигляд

$$z = e^{i\varphi},\ \ z = 2e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

Знайдемо образи кожного з них.

$z = e^{i\varphi}$:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(cos\varphi + isin\varphi + cos(-\varphi) + isin(-\varphi)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}(cos\varphi + isin\varphi + cos\varphi - isin\varphi) = cos\varphi.$$

Можна помітити, що значення w є дійсним, і, враховуючи, що $\varphi \in [0,\ \pi]$, робимо висновок, що $\begin{cases} u \in [-1; 1], \\ v = 0. \end{cases}$

Тобто образом кола $|z| = 1$ є відрізок дійсної осі в межах $[-1; 1]$.

$z = 2e^{i\varphi}$:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(2e^{i\varphi} + \frac{1}{2e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}\left(2e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2cos\varphi + 2isin\varphi + \frac{1}{2}cos(-\varphi) + \frac{1}{2}isin(-\varphi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2{,}5cos\varphi + 1{,}5isin\varphi) = 1{,}25cos\varphi + 0{,}75isin\varphi.$$

Виділивши дійсну та уявну частину даної функції, отримаємо:

$$\begin{cases} u = 1{,}25cos\varphi, \\ v = 0{,}75sin\varphi. \end{cases}$$

Для того, щоб виключити змінну φ, запишемо систему у формі

$$\begin{cases} \dfrac{u}{1{,}25} = cos\varphi, \\ \dfrac{v}{0{,}75} = sin\varphi. \end{cases}$$

Це означає, що

$$\left(\frac{u}{1{,}25}\right)^2 + \left(\frac{v}{0{,}75}\right)^2 = 1,$$

А це, як відомо, є рівнянням еліпса з півосями, рівними відповідно 1,25 і 0,75. Врахуємо також, що з умови $\varphi \in [0,\ \pi]$ слідує, що $v > 0$, тобто розглядається лише верхня половина еліпса.

Отже, образом кола $|z| = 2$ є еліпс з півосями 1,25 по дійсній осі і піввіссю 0,75 по уявній осі.

Зрештою, залишається знайти образ прямої $y = 0$, вірніше, двох відрізків на ній: $[-2, -1]$ і $[1,\ 2\ ]$.

$y = 0$:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right), \\ \quad v = 0. \end{cases}$$

При $x \in [1,\ 2\ ]$ $\ u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \in [1,\ 1{,}25\ ]$,

при $x \in [-2, -1\ ]$ $\ u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \in [-1{,}25, -1\ ]$.

Це теж відрізки на дійсній осі.

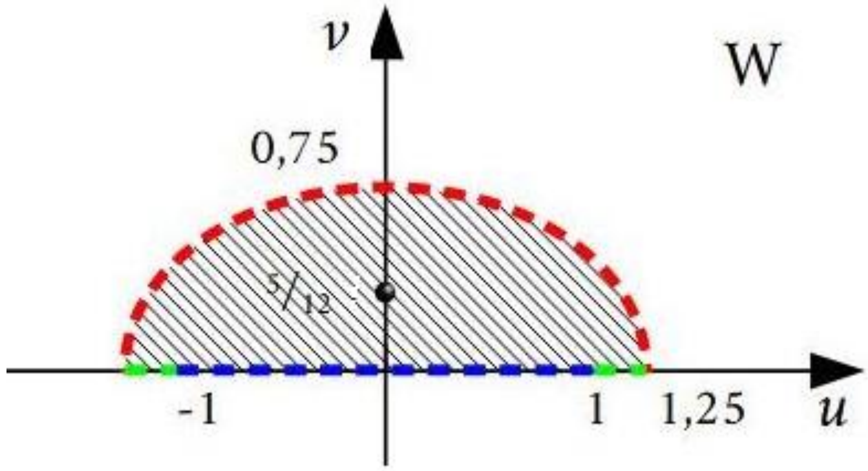


Рис. 6. 29

За принципом відповідності точок,

$$\frac{3i}{2}\overset{w}{\rightarrow}\frac{1}{2}\left(\frac{3i}{2}+\frac{2}{3i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3i}{2}-\frac{2i}{3}\right)=\frac{5}{12}i.$$

Отже, шуканим образом є внутрішня частина верхньої половини отриманого еліпса (див. рис.6.29).

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти дробово-лінійне відображення, що переводить задані три точки в інші три точки.

1.1. $(1, i, 3)$ в $(\infty,\ 2,\ i)$;
1.2. $(i, 2i, 1)$ в $(2i,\ i,\ \infty)$;
1.3. $(\infty, 1, -i)$ в $(i,\ 2, -i)$;
1.4. $(i, \infty, 1)$ в $(\infty,\ i,\ 1)$;
1.5. $(1, 2i, i)$ в $(i,\ 2i,\ 1)$;
1.6. $(0, i, 1)$ в $(1,\ 0,\ \infty)$;
1.7. $(2i, 0, -1)$ в $(\infty,\ i,\ 0)$;
1.8. $(1, 2, 1+i)$ в $(i, -i,\ 4)$;
1.9. $(i, 0, -i)$ в $(2i, -i,\ \infty)$;
1.10. $(1-i, i, -i)$ в $(-i,\ 0,\ 2)$;
1.11. $(0, -1, 1)$ в $(-1,\ i, -i)$;
1.12. $(2, 2i, 0)$ в $(i,\ 3,\ \infty)$;
1.13. $(i, 1-i, 2)$ в $(0,\ 1+i,\ 1)$;
1.14. $(1-i, 1+i, 0)$ в $(\infty,\ 0,\ 1)$;
1.15. $(2i, -i, i)$ в $(2,\ 3, -2)$;
1.16. $(-2, 1, 2)$ в $(i,\ 2i, -2i)$;
1.17. $(\infty, 0, i)$ в $(i,\ \infty,\ 2)$;
1.18. $(-1, -i, 0)$ в $(2,\ 1+i,\ 0)$;
1.19. $(0, i, -2)$ в $(-2,\ \infty,\ i)$;
1.20. $(\infty, 1+i, 0)$ в $(1,\ 2,\ i+1)$.

2. Знайти образ множини D при заданому лінійному відображенні $w = f(z)$.

2.1. $w=\frac{i}{2}z+2-i$; $D=\{z\in C: |z|<3,\ Im\, z<0\}$;
2.2. $w=(1+i)z+2i$; $D=\left\{z\in C: |z|\le 2,\ \frac{\pi}{2}<arg\, z<\frac{3\pi}{4}\right\}$;
2.3. $w=\left(i-\sqrt{3}\right)z-i$; $D=\left\{z\in C: 1<|z|<4,\ |\arg z|<\frac{\pi}{6}\right\}$;
2.4. $w=3iz+i-3$; $D=\{z\in C: 1\le Rez<2,\ |Im\, z|<2\}$;
2.5. $w=\left(2+\sqrt{12}i\right)z+1+i$; $D=\{z\in C: 2\le Rez\le 4, -1\le Imz\le\ 3\}$;

2.6. $w = \frac{2i}{3}z - 4$; $D = \{z \in C: 1 < |z| < 2,\ Im\, z > 0\}$;
2.7. $w = \frac{1+i}{2}z + 3i$; $D = \left\{z \in C: |arg\, z| < \frac{\pi}{4},\ Im\, z < 2\right\}$;
2.8. $w = -4iz + 2i - 3$; $D = \{z \in C: |Re\, z| < 2,\ |Im\, z| < 1\}$;
2.9. $w = -\frac{i}{3}z + 4i$; $D = \{z \in C: 3 < |z| < 6,\ Im\, z > 0\}$;
2.10. $w = (\sqrt{3} + i)z + 2 + i$; $D = \left\{z \in C: |z| < 4,\ \frac{\pi}{4} < arg\, z < \frac{\pi}{2}\right\}$;
2.11. $w = (1 - \sqrt{3}i)z + 5i$; $D = \left\{z \in C: \frac{\pi}{6} < arg\, z < \frac{\pi}{3},\ Re\, z + Im\, z < 3\right\}$;
2.12. $w = (\sqrt{12} - 2i)z - 1 - 3i$; $D = \{z \in C: |Rez| < 1,\ 1 < Im\, z < 2\}$;
2.13. $w = -3iz - i$; $D = \{z \in C: |Re\, z| < 1, -1 < Re\, z + Im\, z < 1\}$;
2.14. $w = (i - 1)z + 2i - 3$; $D = \left\{z \in C: |z| < 1,\ \pi < arg\, z < \frac{5\pi}{4}\right\}$;
2.15. $w = \frac{3i}{4}z + 4 - i$; $D = \{z \in C: |Rez| < 1,\ |z| < 4\}$;
2.16. $w = (2\sqrt{3} + 2i)z - 1 + i$; $D = \{z \in C: |Rez + Imz| < 2,\ |Im\, z| < 3\}$;
2.17. $w = (3i - 3)z + 2i$; $D = \left\{z \in C: |z| \leq 3, \frac{3\pi}{2} < argz < 2\pi\right\}$;
2.18. $w = \frac{1+i}{4}z - 4$; $D = \{z \in C: -2 < Re\, z < 0, -1 < Im\, z < 3\}$;
2.19. $w = (i - \sqrt{3})z + 2i - 4$; $D = \left\{z \in C: 3 < |z| < 4,\ \frac{3\pi}{2} < argz < \frac{5\pi}{4}\right\}$;
2.20. $w = \frac{i}{3}z + 1 - 5i$; $D = \{z \in C: 2 < Re\, z < 3,\ |Im\, z| < 3\}$.

3. Знайти образ множини D при заданому дробово-лінійному відображенні $w = f(z)$.
3.1. $w = \frac{i+z}{iz+2}$, $D = \{z \in C: |z| < 4, Rez > 0\}$;
3.2. $w = \frac{2z+3i}{z-i}$, $D = \{z \in C: |z| < 3, Rez < 0\}$;
3.3. $w = \frac{(i+1)z+1}{iz+1}$, $D = \{z \in C: -1 < Rez < 4\}$;
3.4. $w = \frac{3iz+2}{i+z}$, $D = \{z \in C: |z - 3| < 3, Rez < 3\}$;
3.5. $w = \frac{z-2i}{(1+i)z+1}$, $D = \{z \in C: |z| < 4,\ Imz - Re\, z > 0\}$;
3.6. $w = \frac{z}{(1-i)z+i}$, $D = \{z \in C: -2 < Imz < 3\}$;
3.7. $w = \frac{z-i}{2iz-1}$, $D = \{z \in C: |z + 2i| < 2, Imz > -2\}$;
3.8. $w = \frac{iz+1+i}{z+1-i}$, $D = \{z \in C: |z| < 1, Re\, z + Imz > 0\}$;
3.9. $w = \frac{z+5}{-iz-1-i}$, $D = \{z \in C: -4 < Rez < -2\}$;
3.10. $w = \frac{iz}{z+1+3i}$, $D = \{z \in C: |z - 3i| < 3, Imz < 3\}$;
3.11. $w = \frac{(1+i)z+1}{(1-i)z-1}$, $D = \{z \in C: |z + 5| < 5, Rez < 0\}$;
3.12. $w = \frac{i+z}{(i-1)z+1}$, $D = \{z \in C: -3 < Imz < -1\}$;
3.13. $w = \frac{2iz+3}{z-i}$, $D = \{z \in C: |z| < 2, Imz > 0\}$;

3.14. $w=\frac{(2+2i)z-i}{iz-i}$, $D=\{z\in C: |z|<1, Imz-Rez<0\}$;
3.15. $w=\frac{3iz+2}{z+i}$, $D=\{z\in C: |z|<4, Rez>1\}$;
3.16. $w=\frac{z-4i}{2iz+1}$, $D=\{z\in C: |z|<3, Imz+Rez>0\}$;
3.17. $w=\frac{1-2z}{iz+1+i}$, $D=\{z\in C: |z|<9, Imz<0\}$;
3.18. $w=\frac{z}{(1+i)z+i}$, $D=\{z\in C: 3<Imz<4\}$;
3.19. $w=\frac{z-i}{iz-i}$, $D=\{z\in C: -2<Rez<0\}$;
3.20. $w=\frac{iz-4}{(i-1)z-1}$, $D=\{z\in C: |z|<9, Imz>2\}$.

4. Знайти образ множини D при заданому відображенні $w=f(z)$.

4.1. $w=e^z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z>-2,\ \frac{\pi}{6}<Im\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$;
4.2. $w=\sin z$, $D=\left\{z\in C:\ Im\,z<-2,\ \frac{\pi}{2}<Re\,z<\frac{3\pi}{4}\right\}$;
4.3. $w=\cos z$, $D=\left\{z\in C:\ Im\,z<0,\ 0<Rez<\frac{\pi}{2}\right\}$;
4.4. $w=\operatorname{ch} z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z>0,\ 0<Imz<\frac{\pi}{3}\right\}$;
4.5. $w=\operatorname{sh} z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z>2,\ \frac{\pi}{2}<Imz<\frac{2\pi}{3}\right\}$;
4.6. $w=z^3$, $D=\left\{z\in C:\ |z|<2,\ 0<argz<\frac{\pi}{6}\right\}$;
4.7. $w=\ln z$, $D=\left\{z\in C:\ |z|<4,\ \frac{\pi}{6}<argz<\frac{5\pi}{6}\right\}$;
4.8. $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $D=\left\{z\in C: 1<|z|<2,\ 0<argz<\frac{\pi}{4}\right\}$;
4.9. $w=e^z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z<-2,\ \frac{\pi}{2}<Im\,z<\frac{3\pi}{4}\right\}$;
4.10. $w=\sin z$, $D=\left\{z\in C:\ Im\,z>0,\ \frac{\pi}{4}<Re\,z<\frac{\pi}{2}\right\}$;
4.11. $w=\cos z$, $D=\left\{z\in C:\ Im\,z>1, -\frac{\pi}{4}<Rez<\frac{\pi}{6}\right\}$;
4.12. $w=\operatorname{ch} z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z>2, -\frac{\pi}{6}<Imz<\frac{\pi}{6}\right\}$;
4.13. $w=\operatorname{sh} z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z>0, -\frac{\pi}{3}<Imz<\frac{\pi}{3}\right\}$;
4.14. $w=z^4$, $D=\left\{z\in C:\ |z|<1, -\frac{\pi}{8}<argz<\frac{\pi}{8}\right\}$;
4.15. $w=\ln z$, $D=\left\{z\in C:\ |z|<2,\ 0<argz<\frac{\pi}{4}\right\}$;
4.16. $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $D=\left\{z\in C:\ \frac{1}{2}<|z|<1, -\frac{\pi}{2}<argz<\frac{\pi}{2}\right\}$;
4.17. $w=e^z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z>0, -\frac{\pi}{2}<Im\,z<\frac{\pi}{4}\right\}$;
4.18. $w=\sin z$, $D=\left\{z\in C:\ Im\,z<1,\ 0<Re\,z<\frac{\pi}{6}\right\}$;
4.19. $w=\cos z$, $D=\left\{z\in C:\ Im\,z<3,\ \frac{\pi}{3}<Rez<\frac{\pi}{2}\right\}$;
4.20. $w=\operatorname{ch} z$, $D=\left\{z\in C:\ Re\,z>-1,\ \frac{\pi}{6}<Imz<\frac{\pi}{3}\right\}$.

5. Відобразити множину D на D_1, якщо

5.1. $D = \{z \in C: 0 < Re\, z < 4\}$, $D_1 = \{z \in C: Imz > 0\}$;
5.2. $D = \{z \in C: |z| < 2, Re\, z > 0\}$, $D_1 = \{z \in C: Rez < 0\}$;
5.3. $D = \{z \in C: 0 < Im\, z < 4\}$, $D_1 = \{z \in C: Imz < 0\}$;
5.4. $D = \{z \in C: |z| < 1, Imz\ < 0\}$, $D_1 = \{z \in C: Rez > 0\}$;
5.5. $D = \{z \in C: -1 < Im\, z < 1\}$, $D_1 = \{z \in C: Imz > 0\}$;
5.6. $D = \{z \in C: |z| > 1\}$, $D_1 = \{z \in C: Imz > 3\}$;
5.7. $D = \{z \in C: 3 < Re\, z < 5\}$, $D_1 = \{z \in C: Rez > 0\}$;
5.8. $D = \{z \in C: |z| < 2\}$, $D_1 = \{z \in C: Imz > 1\}$;
5.9. $D = \{z \in C: |z| < 3, Re\, z < 0\}$, $D_1 = \{z \in C: Rez > 6\}$;
5.10. $D = \{z \in C: |z| < 2, Re\, z > 0\}$, $D_1 = \{z \in C: Imz > -2\}$;
5.11. $D = \{z \in C: 3 < Im\, z < 6\}$, $D_1 = \{z \in C: Im\, z < -1\}$;
5.12. $D = \{z \in C: -5 < Re\, z < 0\}$, $D_1 = \{z \in C: Im\, z > -5\}$;
5.13. $D = \{z \in C: |z| < 4\}$, $D_1 = \{z \in C: Rez > 0\}$;
5.14. $D = \{z \in C: -4 < Re\, z < 4\}$, $D_1 = \{z \in C: Im\, z < 6\}$;
5.15. $D = \{z \in C: -5 < Im\, z < -1\}$, $D_1 = \{z \in C: Re\, z > -2\}$;
5.16. $D = \{z \in C: |z| < 4, Im\, z < 0\}$, $D_1 = \{z \in C: Re\, z < -1\}$;
5.17. $D = \{z \in C: |z| > 3\}$, $D_1 = \{z \in C: Imz < 3\}$;
5.18. $D = \{z \in C: |z| < 6\}$, $D_1 = \{z \in C: Re\, z > 4\}$;
5.19. $D = \{z \in C: |z| < 1, Im\, z > 2\}$, $D_1 = \{z \in C: Re\, z > 3\}$;
5.20. $D = \{z \in C: -2 < Im\, z < 0\}$, $D_1 = \{z \in C: Re\, z < 6\}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Білоколос Є.Д., Шека Д.Д. Збірник задач з комплексного аналізу: навчальний посібник для студентів природничих факультетів. К., 2004. 57 с.
2. Грищенко О.Ю., Нагнибіда Н.І., Настасієв П.П. Теорія функцій комплексної змінної: Розв’язування задач. К.: Вища школа, 1994. 375 с.
3. Комплексний аналіз: підручник / Гольдберг А.А., Шеремета М.М., СкасківО.Б., Заболоцький М.В. Львів: Афіша, 2008. 203 с.
4. Комплексний аналіз: метод. вказівки до виконання типової розрахункової роботи з комплексного аналізу / уклад.: В.В. Дрозд. К.: НТУУ «КПІ». 2016.
5. Комплексний аналіз: навчальний посібник / П.В. Слюсарчук, Т.В.Бояришева, М.С. Герич, О.О. Погоріляк, О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак. Ужгород: Шарк, 2020.174 с.
6. Комплексний аналіз: навчальний посібник / П.В. Слюсарчук, Т.В.Бояришева, М.С. Герич, О.О. Погоріляк, О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак, А.М. Тегза. Ужгород: УжНУ, 2022. 244 с.
7. Мартиненко М.А., Юрик І.І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. К.: Слово, 2008. 295 с.
8. Павлова Л.В., Редькіна О.І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. К.: Вища школа, 1980. 216 с.
9. Самойленко В.Г., Бородін В.А., Верьовкіна Г.В., Ловейкін А.В., Романенко І.Б. Комплексний аналіз. Приклади і задачі. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. 224 с.
10. Шека Д.Д. Комплексний аналіз (в прикладах і задачах): навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали». Київ: факультет радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2019. 130 с.

Навчальне видання

Т. В. Боярищева, М. С. Герич

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Частина 1

Навчальний посібник

Гарнітура Times New Roman
Формат 60х84/16.
Ум.друк.арк.4,88. Обл.вид.арк. 1,84.
Зам. № 44. Наклад 100 прим.

Оригінал-макет виготовлено
у редакційно-видавничому відділі ДВНЗ «УжНУ»
88000, м. Ужгород, вул. Заньковецької, 89.
E-mail: dep-editors@uzhnu.edu.ua

Видавництво УжНУ «Говерла».
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія Зт № 32 від 31 травня 2006 року