

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра «Теоретична і прикладна механіка»



А.В. ГРИШИН

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СПОРУД

Навчальний посібник для студентів
вищих технічних навчальних закладів
які навчаються за спеціальністю 191 «Архітектура та містобудування»

Одеса 2021

УДК 620.10(075.8)

Гришин А.В. Основи теорії споруд. – Одеса: ОНМУ, 2021. – 104 с.

Навчальний посібник з курсу «Основи теорії споруд» написано у відповідності з освітньо-професійною програмою вищої освіти, затвердженою Міністерством освіти і науки України 1.09.97р., навчальним планом для студентів наавчюючихся за напрямом підготовки 191 «Архітектура та містобудування» і матеріалами літературних джерел, наведених у списку посилань.

Розглянуто і схвалено на засіданнях кафедри теоретичної і прикладної механіки і вченої ради факультету воднотранспортних і шельфових споруд (ФВТіШС).

Рецензенти: **Сур'янінов М.Г.**, доктор технічних наук, професор,
зав. кафедрою будівельної
механіки Одеської державної
академії будівництва
архітектури

Оробей В.Ф., доктор технічних наук, професор,
зав. кафедрою динаміки, міцності машин
та опору матеріалів Одеського
національного політехнічного
університету.

Рекомендувала до друку вченою радою Одеського
національного морського університету.

© Одеський національний морський університет

ВСТУП

Основи теорії споруд – це розділ механіки, якій вивчає інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість елементів конструкцій та споруд, їх взаємодію між собою та іншими конструкціями та спорудами.

Розрахунки на міцність полягають у визначенні, чи буде конструкція протистояти зовнішнім впливам, чи зруйнується під дією цих навантажень або отримує неприпустимі для нормальної експлуатації деформації.

Метою розрахунків на жорсткість є визначення таких розмірів елементів конструкцій, при яких зміна розмірів і форми під дією зовнішніх навантажень не перевищує заданих величин, що визначаються з умов експлуатації.

Для того щоб споруда цілком відповідала вимогам міцності та жорсткості, а отже була надійна в експлуатації, треба надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вона виготовляється, визначити відповідні розміри залежно від навантаження та його характеру. Під час проведення розрахунків необхідно сполучити розглянуті вище характеристики з дешевиною, що є наслідком економії матеріалу.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ. РОЗТЯГ-СТИСК

1.1 Загальні відомості. Елементи статички

1.1.1 Проекція сили на вісь

Проекція сили на вісь - алгебраїчна величина, що являє собою відрізок між перпендикулярами, спущеними з початку та кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-», - якщо в бік від'ємного напрямку. Як видно з рис. 1, проекція сили на вісь чисельно дорівнює добутку цієї сили на косинус гострого кута між силою та віссю:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha; \quad F_y = F \cdot \cos (90^\circ - \alpha) = F \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

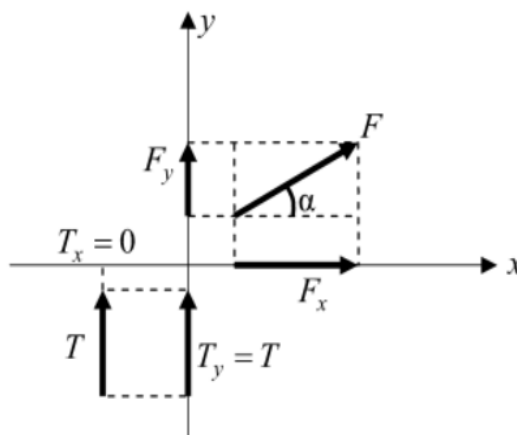


Рис. 1. Проекція сили на вісь в площині

У частому випадку, коли сила паралельна осі, її проекція на цю вісь дорівнює силі (на рис. 1 $T_y = T$). Якщо сила перпендикулярна до осі, її проекція на цю вісь дорівнює нулю (на рис. 1 $T_x = 0$).

Якщо сила знаходиться у просторі, її проекції визначаються так (Рис. 2):

$$F_x = 0a = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta,$$

$$F_y = 0b = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta,$$

$$F_z = 0c = F \sin \alpha.$$

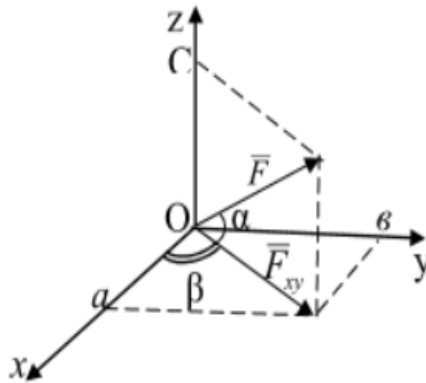


Рис. 2. Проекція сили на вісь в просторі

1.1.2 Алгебраїчний момент сили відносно точки

Під час розв'язання задач у площині S використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

Момент сили відносно точки чисельно дорівнює добутку цієї сили на плече:

$$M_0(\vec{F}) = -F \cdot h \quad (2)$$

Точку O . називають моментною (рис. 3) Плече сили h - довжина перпендикуляра, спущеного від моментної точки на лінію дії сили \vec{F} . Лінія дії сили - це пряма (DE на рис. 3), на якому розташована сила.

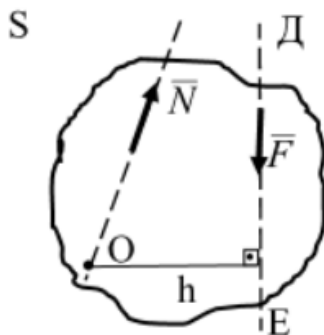


Рис. 3. Момент сили відносно точки

Знак моменту «+», якщо сила прагне обертати плече сили відносно точки O проти руху годинникової стрілки, і знак «-», якщо за рухом стрілки годинника:

Алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (у цьому випадку плече $h=0$):

$$M_0(\overline{N}) = 0.$$

1.1.3 Пара сил

Парою сил називається система двох сил у площині S , які рівні за величиною, протилежно спрямовані і не лежать на одній лінії дії.

Схематичне позначення моменту пари сил наведено на рис. 4.

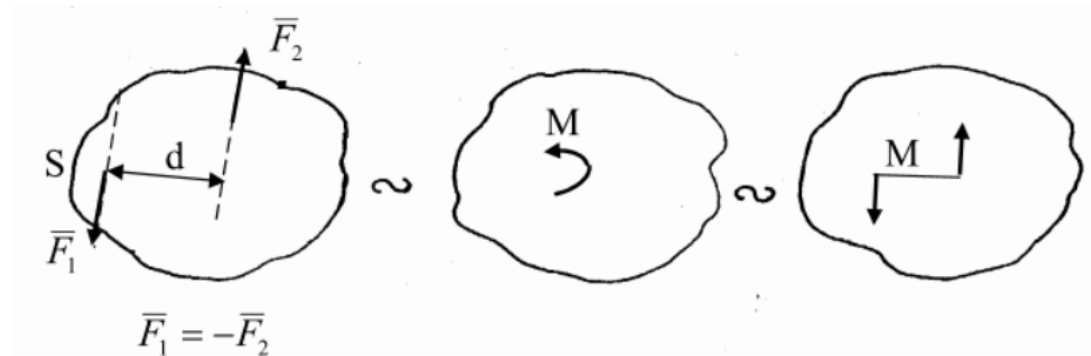


Рис. 4. Схематичне позначення моменту пари сил

Плече пари d - найкоротша відстань між лініями дії сил, що складають пару.

Модуль моменту пари не залежить від вибору точки і дорівнює добутку сили на плече пари: $M = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$. Сума проєкцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю, тобто її рівнодійна завжди відсутня. Тому пару часто зображають стрілкою, спрямованою у бік обертання пари та величиною моменту пари (рис. 4).

1.1.4 Розподілені сили

Розподілені сили (розподілене навантаження) - система паралельних сил, які діють на кожну точку об'єму, поверхні або лінії:

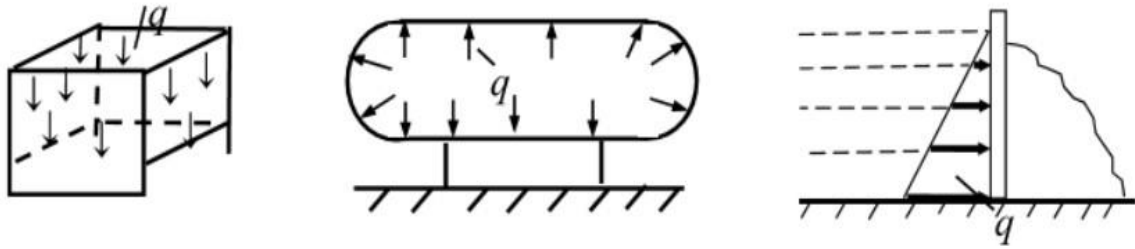
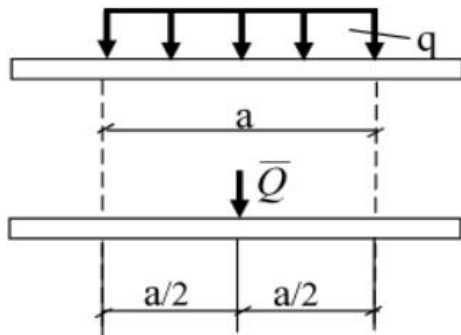


Рис. 5. Розподілені сили (розподілене навантаження) відповідно по об'єму, поверхні та лінії

Плоска система розподілених сил (сили розподілені уздовж лінії) характеризується її інтенсивністю q , тобто силою, яка припадає на одиницю довжини: $[q] = \frac{H}{M}$.

Для розв'язання задач рівноваги розподілені сили звичайно замінюють рівнодійною \bar{Q} .

Рівномірно розподілені сили: $q = const$.



Рівнодійна такої системи сил \bar{Q} дорівнює за модулем:

$$Q = q \cdot a$$

І прикладена посередині відрізка, на який діють розподілені сили.

Рис. 6. Рівнодійна рівномірно розподіленої сили

1.1.5 Умови рівноваги тіла

Складне переміщення тіла на площині з положення 1 у інше положення 2 можна здійснити трьома простими рухами: поступальними переміщеннями уздовж двох напрямків (наприклад уздовж осей x та y) та поворотом φ відносно будь-якої точки, наприклад відносно т. А, (рис. 7).

Можливість кожного такого простого руху називають *ступенем вільності*. Отже, тіло на площині має три ступеня вільності.

Для нерухомості тіла необхідно накласти на нього в'язі у напрямку кожного ступеня вільності, тобто три в'язі. Якщо замінити ці в'язі реакціями, умовами нерухомості будуть три умови рівноваги – умови відсутності переміщень у відповідних трьох напрямках:

$$\sum \bar{F}_{kx} = 0; \sum \bar{F}_{ky} = 0; \sum M_o(\bar{F}_k) = 0.$$

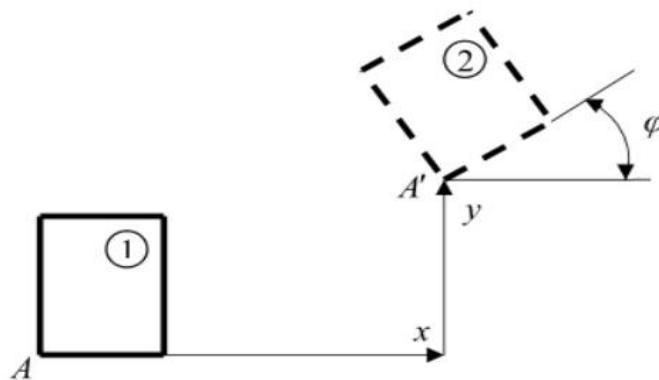


Рис. 7. Складне переміщення тіла на площині з положення 1 у інше положення 2

Далі суму проекцій сил на вісь x ($\sum \bar{F}_{kx}$) будемо скорочено позначати $\sum x$, суму проекцій на вісь y ($\sum \bar{F}_{ky}$) – $\sum y$, суму моментів сил відносно деякої точки A ($\sum M_A(\bar{F}_A)$) – $\sum M_A$.

Отже, для довільної системи сил на площині маємо три рівняння рівноваги:

$$\sum x = 0; \sum y = 0; \sum M_A = 0. \quad (3)$$

Для окремих випадків розташування сил кількість рівнянь рівноваги скорочується:

- для системи паралельних сил лінійно незалежними залишаються два рівняння;
- для системи збіжних сил – два рівняння;

- для системи сил, розташованих на одній прямій – одне рівняння. Зауважимо, що рівняння (3) одержані виходячи з переміщення тіла у двох поступальних переміщеннях та одному повороті. Поступальні переміщення тіла можна замінити обертанням навколо інших, ніж А, точок. Отже, кожне рівняння нулю суми проекцій сил на осі можна замінити рівнянням рівності нулю моментів сил. Необхідно при цьому мати на увазі, що три моментні точки не повинні лежати на одній прямій.

Теорема Варіньйона для плоскої системи сил: Якщо плоска система сил зводиться до рівнодійної, то її момент відносно будь-якої точки О площини дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно тієї самої точки:

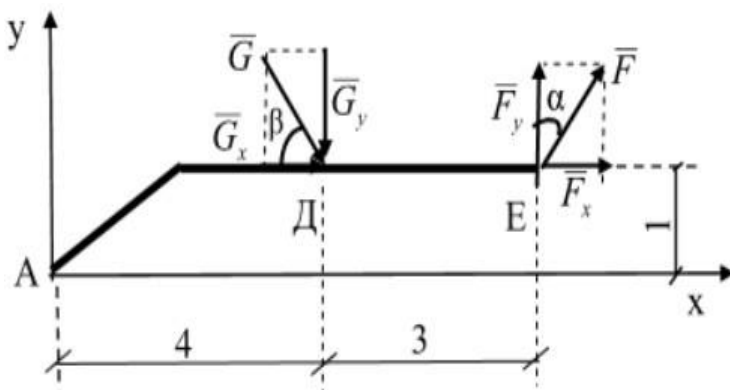
$$M_o(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n M_o(\bar{F}_i).$$

Цю теорему зручно використовувати для знаходження алгебраїчного моменту сили відносно точки, розкладаючи силу на складові, паралельні осям координат:

$$M_A(\bar{G}) = M_A(\bar{G}_x) + M_A(\bar{G}_y) = -G_x \cdot 1 - G_y \cdot 4;$$

$$M_A(\bar{F}) = M_A(\bar{F}_x) + M_A(\bar{F}_y) = -F_x \cdot 1 + F_y \cdot 7;$$

де, величини складових:



$\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{G}_x, \bar{G}_y$:

$$F_x = F \cdot \sin \alpha,$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha,$$

$$G_x = G \cdot \cos \beta,$$

$$G_y = G \cdot \sin \beta.$$

Рис. 8. До теореми Варіньйона

1.2 Види напружено-деформованого стану стержнів. Припущення

1.2.1 Види деформацій

Під дією навантаження пружне тіло, зокрема стержень, змінює свої розміри та форму – деформується, а його точки зазнають переміщень. Залежно від того, як до стержня прикладене навантаження, розрізняють прості та складні види його деформацій. До простих деформацій відносять: *розтяг* (рис. 9), коли сили діють вздовж осі (лінії, яка проходить через центри ваги перерізів) від стержня, *стиск* (рис. 10), коли сили діють вздовж осі до стержня; *чистий згин* (рис. 11) під дією пар сил (моментів), які лежать у одній площині з поздовжньою віссю стержня; *зсув* (рис. 12), що відбувається під дією сил, перпендикулярних до осі стержня; *кручення* (рис. 13) відбувається під дією пар сил, розташованих у площині поперечного перерізу стержня.

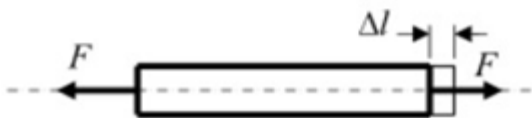


Рис. 9. Розтяг

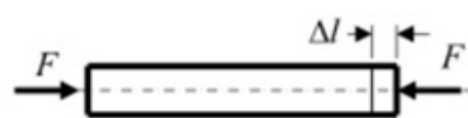


Рис. 10. Стиск

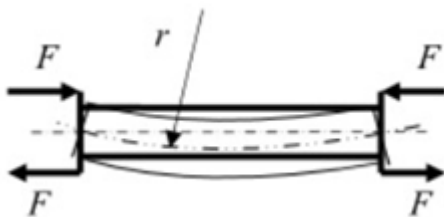


Рис. 11. Чистий згин

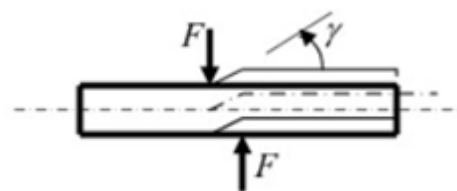


Рис. 12. Зсув

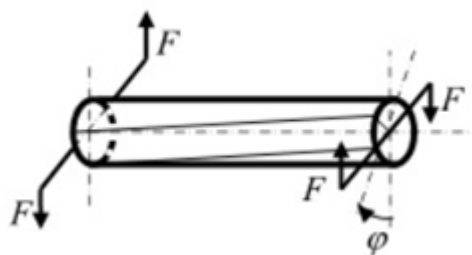


Рис. 13. Кручення

Перші дві деформації відбуваються під дією сил, протилежних за напрямком. Оскільки зміна напрямку сили пов'язана зі зміною її знаку, ці дві деформації об'єднують в одну – деформацію розтягу-стиску.

На рис. 9-10 l позначено відповідно *подовження* та *скорочення* довжини стержня при розтягу та стиску; на рис. 11 r - *радіус викривлення осі стержня* при його згині; на рис. 12 літерою γ позначено *кут зсуву* перерізу стержня і на рис. 13 φ - *кут закручення* стержня при крученні.

Якщо дія навантаження викликає деформації кількох простих видів, маємо складну деформацію. Зокрема, при дії сил, паралельних осі стержня, виникає стиск або розтяг зі згином. Таку деформацію називають *позацентровий стиск-розтяг*. При дії декількох сил, перпендикулярних до осі стержня виникають деформації згину та зсуву – *поперечний згин*. Існують й інші поєднання простих деформацій.

1.2.2 Припущення

Розглядаючи розрахунок споруд або їх частин, виходять з таких припущень щодо матеріалів та роботи споруд.

Матеріал вважається *пружним, суцільним, однорідним, ізотропним*. Пружність означає здатність матеріалу поновлювати свою форму та розміри після зняття навантаження. На підставі цього припущення зазвичай вважається, що переміщення точок споруди пропорційні величині прикладеного навантаження. Суцільність передбачає відсутність порожнин, зокрема не враховується атомарна побудова матеріалу. Однорідність полягає у тому, що властивості матеріалу однакові для усіх точок незалежно від місця розташування. Для ізотропних матеріалів їх властивості однакові в усіх напрямках.

Припущення *малізни деформацій* полягає в тому, що передбачаються переміщення, малі порівняно з розмірами перерізів стержнів, а деформації

(відносні переміщення) малі порівняно з одиницею. На підставі цього припущення розрахунок виконують за недеформованою схемою системи, тобто зміною геометрії системи в результаті її деформації при обчисленні зусиль нехтують.

Для пружних систем на підставі лінійної залежності між переміщеннями та деформаціями дійсний *принцип незалежності дії сил*, на підставі якого переміщення від декількох сил дорівнює сумі переміщень від кожної окремої з цих сил. У більш загальному випадку на тіло діють не лише навантаження, й інші впливи (зміна температури, осідання опор), для яких також має місце принцип незалежності. Тому цей принцип також називають *принципом суперпозиції*.

У практичних розрахунках використовується *принцип локальності дії самоврівноваженого навантаження – принцип Сен-Венана*. Згідно з ним характер прикладання навантаження швидко затухає при віддаленні від місця його розташування. Зокрема використання цього принципу дозволяє замінити розподілене на малій порівняно з розмірами тіла поверхні навантаження зосередженою у точці силою.

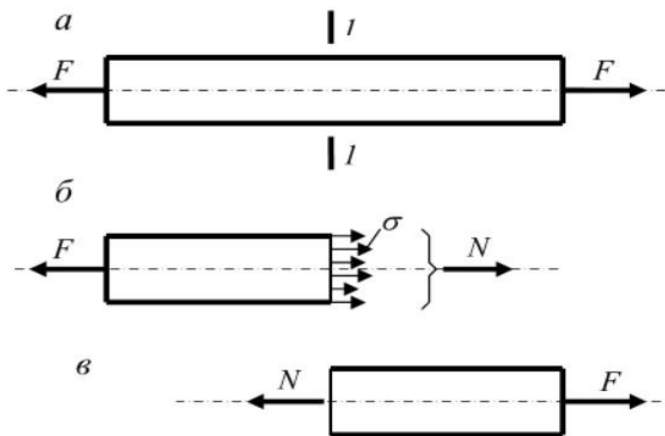
1.3 Розтяг-стиск

1.3.1 Внутрішні зусилля та напруження. Метод перерізів. Умова міцності

Розглянемо стержень, що зазнає розтягу (рис. 14, *а*). Стержень знаходиться у рівновазі: $\sum F_x = F - F = 0$. Проведемо переріз 1-1 і відкинемо праву частину (рис. 14, *б*). Оскільки стержень знаходиться у рівновазі, кожна його частина теж знаходиться у рівновазі, отже у точках перерізу повинні діяти внутрішні сили, паралельні осі стержня. Інтенсивність цих сил, що вимірюється у кН/м^2 , позначимо σ , а їх рівнодіючу – N . Остання діє вздовж осі стержня і

називається *поздовжньою силою*. Величину поздовжньої сили можна визначити з умови рівноваги: $N = F$.

На підставі принципу Сен-Венана при віддаленні від місця прикладання



сили F на відстань, співрозмірну з поперечними розмірами стержня, розподіл інтенсивності внутрішніх сил за перерізом можна вважати рівномірним.

Рис. 14. Стержень, що зазнає розтягу

Отже, $N = \sigma \cdot A$, звідки маємо:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (4)$$

Величину σ , тобто *внутрішню силу, що приходить на одиницю площі поперечного перерізу, називають напруженням*. У випадку розтягу напруження діє перпендикулярно до площі перерізу і його точніше називають *нормальним напруженням*.

Зазначимо, що якби замість правої ми відкинули ліву частину стержня (рис.14, в), отримали би таку саму поздовжню силу $N=F$. При визначенні поздовжньої сили через зовнішнє навантаження був застосований метод, що називається *методом перерізів*.

У загальному випадку метод перерізів застосовується для визначення внутрішніх зусиль у такій послідовності:

- у необхідному місці система розрізується на дві частини;
- одна з цих частин відкидається, а її дія на залишену замінюється внутрішніми зусиллями;

- складаються рівняння рівноваги залишеної частини під дією зовнішніх та внутрішніх сил;

- розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходяться шукані внутрішні зусилля.

Перевірку міцності розтягнутого стержня виконують за величиною напружень:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (5)$$

де, $[\sigma]$ - допустиме напруження для матеріалу, яке визначають за результатами випробувань.

Нерівність (5) можна використовувати для визначення необхідної площі перерізу стержня:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}, \quad (5,a)$$

та для визначення максимально допустимого навантаження для стержня:

$$N \leq [\sigma] \cdot A. \quad (5,b)$$

1.3.2 Епюри внутрішніх зусиль

Розглянемо стержень завантажений декількома силами вздовж його осі (рис. 15, а). Стержень на лівому кінці закріплений до основи, що забезпечує його нерухомість, отже, при відкиданні закріплення (рис. 15, б) у цьому місці повинна виникати сила, що врівноважує навантаження. Ця сила R називається *реактивною силою* або *реакцією*. Величину реакції можна визначити з умови рівноваги стержня:

$$\sum F_x = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - R = 0; \quad R = F_1 + F_2 - F_3 + F_4.$$

Надалі реакцію будемо показувати не відкидаючи закріплення, пам'ятаючи, що при наявності реакції стержень знаходиться у рівновазі, отже, це закріплення може бути відсутнє.

Для визначення зусилля у перерізі $A-A$ використаємо метод перерізів. Для цього, відкинувши ліву частину стержня, прикладемо внутрішнє зусилля N , вважаючи його розтягуючим (рис. 15, в). З умови рівноваги правої частини: $\sum F_x = F_1 + F_2 - F_3 - N = 0$, одержимо шукане зусилля:

$$N = F_1 + F_2 - F_3. \quad (6)$$

Аналізуючи (6), бачимо, що у нього входять тільки сили, розташовані праворуч від перерізу. При цьому сили F_1 та F_2 , що розтягують розглянуту частину стержня, увійшли додатними, а сила F_3 , що стискує – від’ємною.

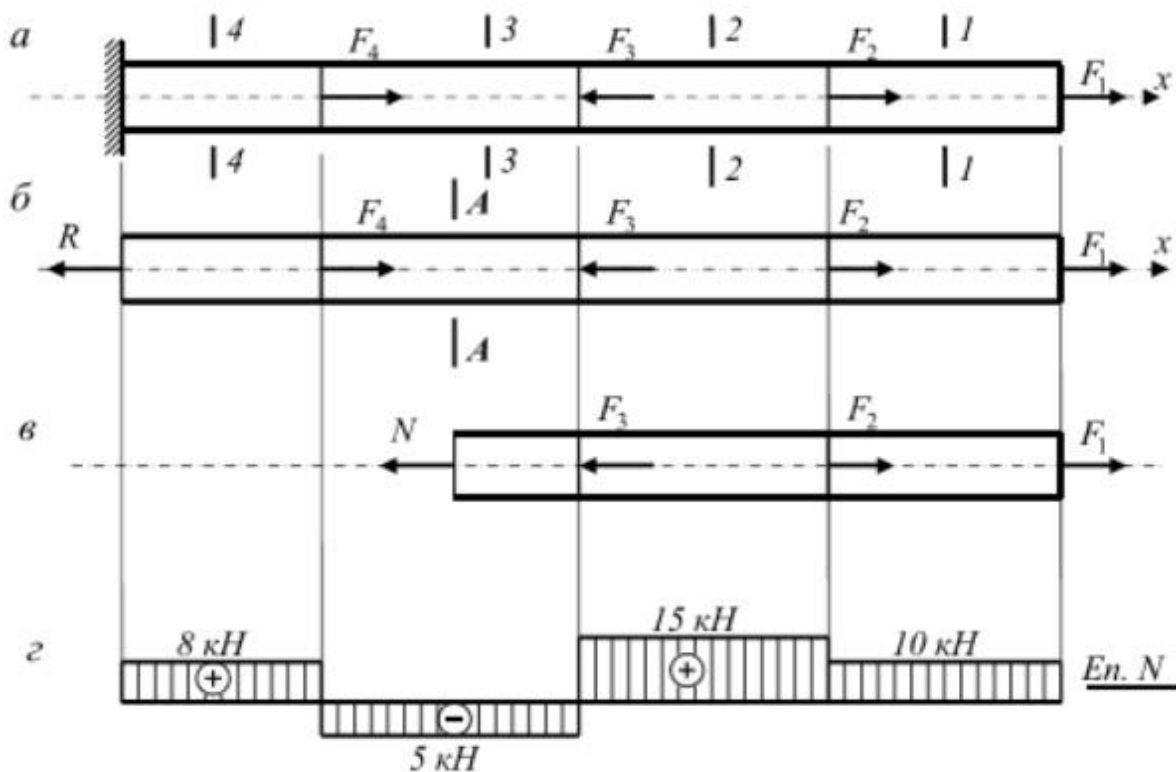


Рис. 15. Побудова епюри поздовжніх сил для стержня завантаженого декількома силами вздовж його осі

На підставі цього аналізу робимо такий висновок: *поздовжня сила у перерізі стержня дорівнює алгебраїчній сумі сил, розташованих праворуч або ліворуч від перерізу. Розтягуючі сили беруть зі знаком «плюс», стискуючі – зі знаком «мінус».*

Застосовуючи це правило, одержимо поздовжню силу у перерізі $A-A$ через сили, розташовані ліворуч від перерізу:

$$N = R - F_4 = (F_1 + F_2 - F_3 + F_4) - F_4 = F_1 + F_2 - F_3.$$

Як бачимо, одержаний вираз співпадає з одержаним раніше (6). Для подальших дій задаймося числовими значеннями навантажень: $F_1 = 10\text{кН}$; $F_2 = 5\text{кН}$; $F_3 = 20\text{кН}$; $F_4 = 13\text{кН}$. Проведемо довільний переріз $1-1$ на ділянці стержня між місцями прикладання першої та другої сил і визначимо поздовжню силу: $N_1 = F_1 = 10\text{кН}$. Нескладно побачити, що при переміщенні перерізу це значення зміниться лише тоді, коли переріз $1-1$ переміститься ліворуч від місця прикладення сили F_2 . Такому випадку відповідає переріз $2-2$, для якого маємо $N_2 = F_1 + F_2 = 10 + 5 = 15\text{кН}$. Аналогічно визначаємо поздовжні сили у перерізах $3-3$ і $4-4$: $N_3 = F_1 + F_2 - F_3 = 10 + 5 - 20 = -5\text{кН}$.

$$N_4 = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 10 + 5 - 20 + 13 = 8\text{кН}.$$

Побудуємо графік залежності поздовжньої сили від положення перерізу. Для цього перпендикулярно прямій, що відповідає осі стержня, у обраному масштабі відкладаємо значення поздовжньої сили (рис.15, з). Цей графік зміни поздовжньої сили вздовж осі стержня називають епюрою поздовжніх сил.

1.3.3 Деформації при розтягу-стиску. Закон Гука

Під час дії сил, що розтягують стержень, його довжина l збільшується до l_1 а поперечний розмір зменшується від b до b_1 (рис. 16).

Зміну довжини

$$\Delta l = l_1 - l \tag{7}$$

називають *подовженням* або *абсолютним подовженням*.

Подовження одиниці довжини стержня

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} \tag{8}$$

називають *відносним подовженням* або *поздовжньою деформацією*.

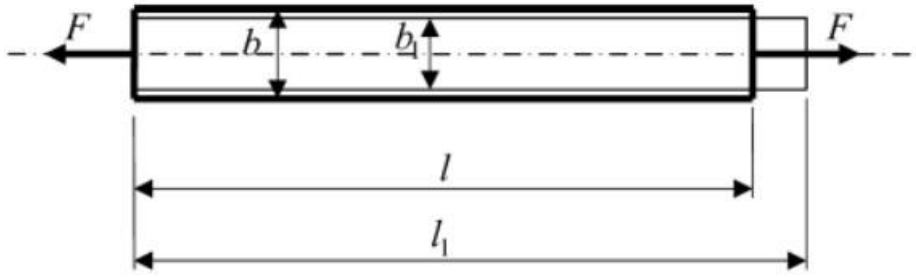


Рис. 16. Деформації стержня при розтягу

Аналогічно визначається *поперечна деформація*:

$$\varepsilon' = \frac{b_1 - b}{b} \quad (9)$$

Між поздовжньою деформацією та нормальним напруженням існує залежність:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (10)$$

що називається *законом Гука*. Отже, за законом Гука *нормальне напруження пропорційне відносному подовженню*.

Коефіцієнт пропорційності E у (10) характеризує пружні якості матеріалу і називається *модулем пружності* або *модулем Юнга*.

Підставляючи в (10) вирази для поздовжньої деформації (8) та напружень (4), одержимо подовження, виражене через поздовжню силу:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}. \quad (11)$$

Отже, подовження обернено-пропорційне добутку модуля пружності на площу перерізу стержня. Цю величину називають *жорсткістю при розтягу-стиску*.

Взяте зі зворотним знаком відношення поперечної та поздовжньої деформації

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \quad (12)$$

називають коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона.

1.3.4 Урахування власної ваги стержня

Розглянемо стержень, закріплений у верхньому кінці під дією власної ваги (рис. 17).

Напруження у довільному перерізі:

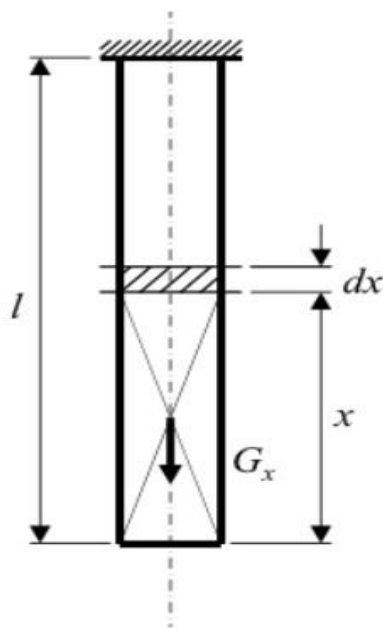
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \rho \cdot x . \quad (13)$$

Подовження елементу dx стержня від власної ваги становить $\Delta(dx) = \frac{N_x \cdot dx}{EA} = \frac{\rho \cdot A \cdot x \cdot dx}{EA}$, а для визначення подовження усього стержня інтегруємо цей вираз:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho \cdot A \cdot x \cdot dx}{EA} = \frac{\rho \cdot A \cdot l^2}{2EA} = \frac{G \cdot l}{2EA} . \quad (14)$$

Отже, подовження стержня від власної ваги удвічі менше від такої самої сили, прикладеної на кінці стержня.

Переріз на відстані x від вільного кінця стержня знаходиться під дією ваги нижньої частини:



$$N_x = G_x = \rho \cdot V_x = \rho \cdot A \cdot x , \quad (15)$$

Рис. 17. Стержень, закріплений у верхньому кінці під дією власної ваги

де: ρ - щільність матеріалу;

A - площа перерізу стержня, яка у даному випадку вважається постійною за довжиною.

1.3.5 Напруження на похилих площинках

Усі перерізи, які розглядалися раніше були розташовані перпендикулярно поздовжній осі стержня. Далі розглянемо випадок, коли переріз розташований під кутом α до нормального перерізу (рис. 18, *а*).

Якщо відкинути одну частину стержня, то на другу будуть діяти повні напруження p_α , паралельні осі стержня (рис. 18, *б*). Розкладемо повне напруження на складові (рис. 18, *в*), одна з яких - σ_α спрямована вздовж нормалі, а інша - τ_α лежить у площині перерізу. Напруження σ_α було названо *нормальним напруженням*, а напруження τ_α , що лежить у площині перерізу називається *дотичним напруженням*.

Площа похилого перерізу $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$, отже, величина повного напруження становить $p_\alpha = \frac{F}{A/\cos \alpha}$.

Отже,

$$p_\alpha = \sigma \cos \alpha, \quad (16)$$

де, $\sigma = F/A$ – напруження у нормальному перерізі стержня при $\alpha = 0$.

Нормальне та дотичне напруження тепер можна виразити через повне напруження і через напруження у нормальному перерізі:

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma \cos \alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (17)$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (18)$$

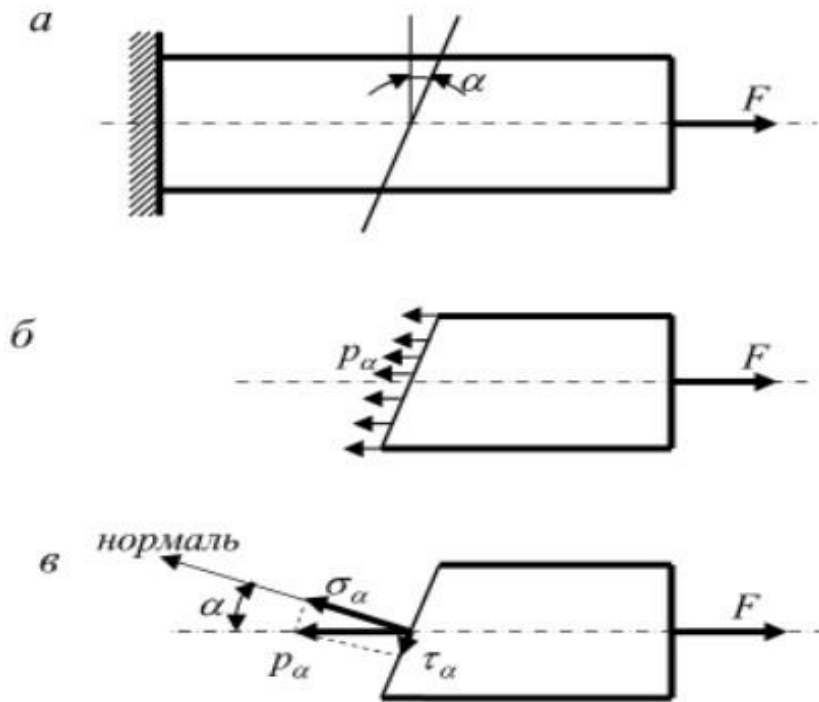


Рис. 18. Переріз стержня розташований під кутом α до нормального перерізу

Аналізуючи одержані залежності можна зробити висновок, що найбільші нормальні напруження виникають у нормальному перерізі при $\alpha = 0$ і дорівнюють σ . Найбільші дотичні напруження виникають при $\alpha = 45^\circ$ и становлять $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$. Відзначимо, що на площинках, паралельних осі стержня нормальні і дотичні напруження відсутні.

1.3.6 Механічні характеристики матеріалу

Для визначення механічних характеристик матеріалів проводять серії випробувань його стандартних зразків зокрема на розтяг (рис. 19). При зміні навантаження фіксують подовження розрахункової довжини випробувального зразка, доводячи його до руйнування.

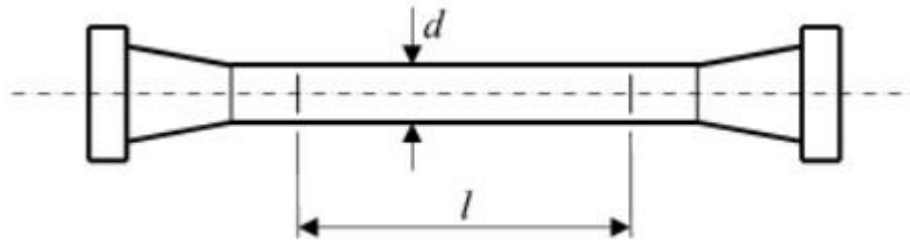


Рис. 19. Стандартний зразок для випробувань на розтяг

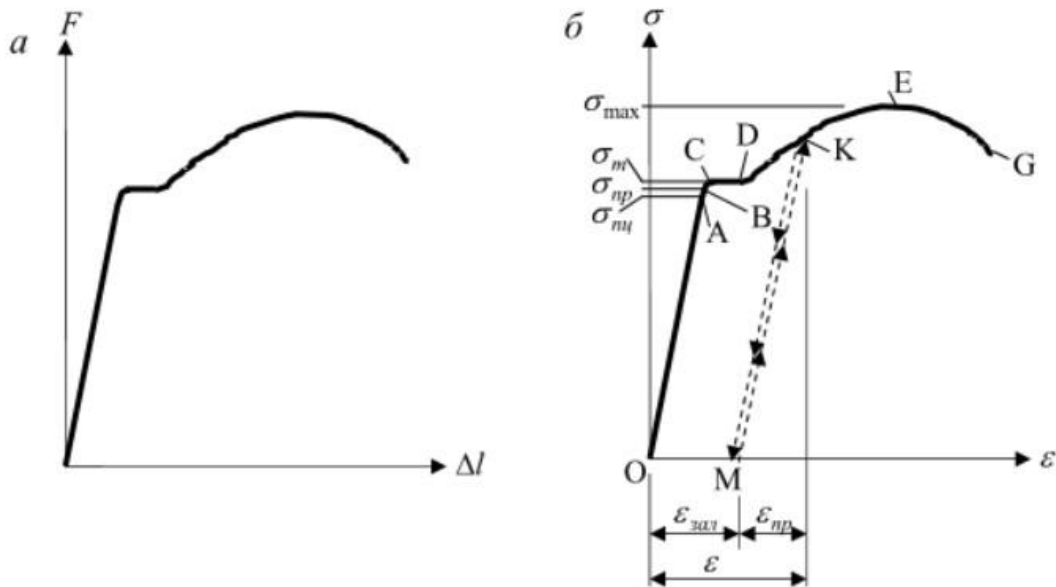


Рис. 20. Графік залежності між навантаженнями та подовженнями (а). Діаграма напружень (б)

У результаті випробувань одержують графік залежності між навантаженнями та подовженнями. На рис. 20,а наведено такий графік – діаграму розтягу для мало вуглецевої сталі.

Поділивши навантаження F на первісну площу перерізу стержня A , а подовження розрахункової частини l на її довжину l , одержимо діаграму напружень (рис. 20,б). На цій діаграмі лінійна ділянка AB відповідає дії закону Гука, а найбільше напруження $\sigma_{тц}$, до якого дійсний цей закон, називається *межею пропорційності*. Близьке до цього значення напруження на початку нелінійної ділянки у т. C $\sigma_{пр}$ називається *межею пружності*. За межею пружності на ділянці CD деформації зростають при постійному напруженні $\sigma_{т}$.

Це явище деформування при постійному напруженні називають текучістю, а значення σ_m - межею текучості. Далі напруження зростають від т. D до т. E. Напруження σ_{max} у т. E називають *межею міцності* або *тимчасовим напруженням*, оскільки після досягнення цієї величини у т. G зразок остаточно руйнується з наростанням деформацій.

При доведенні напружень до значень, менших σ_{np} , матеріал знаходиться у пружній стадії і при розвантаженні повертається до початкового стану у т. O. Якщо навантаження доведене до більших значень, наприклад до т. K, розвантаження йде за прямою KM, паралельною прямій OA. Водночас відрізок OM являє собою залишкову деформацію $\epsilon_{зал}$. Відзначимо, що вторинне завантаження зразка відбувається вздовж тієї самої прямої MK, тобто матеріал поводить як пружний до напружень, більших ніж σ_{np} . Це явище *підвищення пружних властивостей матеріалу при вторинному завантаженні називається наклепом* і використовується на практиці. Наявність залишкових деформацій при напруженнях, вищих за σ_{np} свідчить про пластичну стадію роботи матеріалу.

Відзначимо, що явище руйнування матеріалу при напруженнях, менших за межу міцності (т. G) пояснюється тим, що величина напружень при побудові цієї діаграми визначалась відносно первісної площі перерізу: $\sigma = \frac{F}{A}$. В дійсності після досягнення напружень, більших за межу текучості, деформації концентруються у досить малій за довжиною зоні зразка. У цій зоні відбувається звуження перерізу (рис. 21) – виникає так звана шийка, і напруження цьому перерізі зростають до самого руйнування.

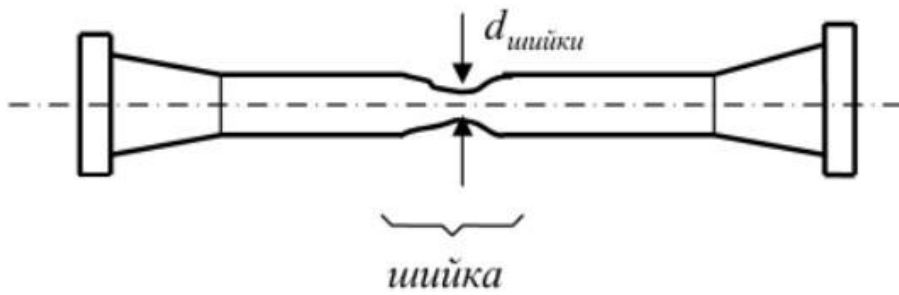


Рис. 21. Виникнення шийки

Дещо інакше виглядає діаграма розтягу крихкого матеріалу. Наприклад, для чавуна (рис. 22) вона не має лінійної частини. Отже, для крихких матеріалів відсутня пропорційна залежність між напруженням та деформацією. Межа міцності на розтяг у більшості крихких матеріалів мала порівняно з їхньою межею міцності на стиск. Більшість крихких матеріалів на діаграмі не мають суттєво вираженої площини текучості. Для них приймають умовну межу текучості $\sigma_{0,2}$, яка відповідає напруженню, при якому відносна остаточна деформація становить 0,2 %.

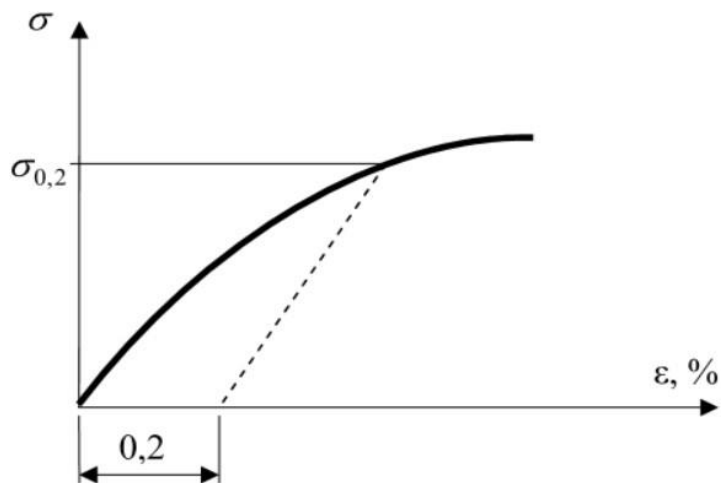


Рис. 22. Діаграма розтягу крихкого матеріалу (чавуна)

РОЗДІЛ 2. ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН

2.1 Геометричні характеристики перерізів

При розрахунках на згин у розрахунковій схемі стержень зображується, як правило, своєю віссю – лінією, на якій лежать центри ваги його перерізів. Усі дані про перерізи наводяться інтегрально – у вигляді геометричних характеристик: площ, моментів інерції та інших.

2.1.1 Загальні визначення

Розглянемо переріз довільної форми (рис.23) з загальною площею A .

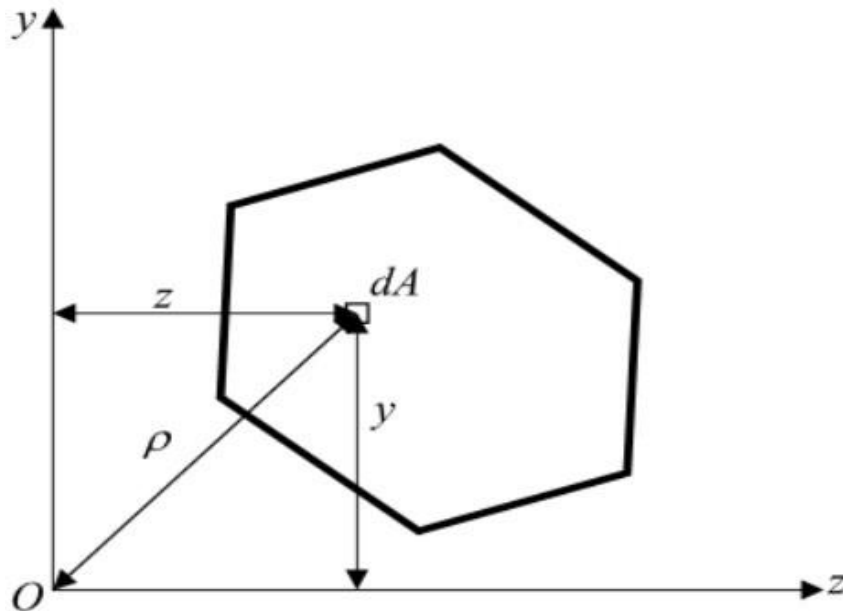


Рис. 23. Переріз довільної форми загальною площею A

Виділимо на ній елементарну площинку dA з координатами z, y . Введемо такі геометричні характеристики перерізу:

- *статичний момент* перерізу відносно осі z

$$S_z = \int_{(A)} y dA ; \quad (19,a)$$

- *статичний момент* перерізу відносно осі

$$S_y = \int_{(A)} z^2 dA ; \quad (19,b)$$

- момент інерції перерізу відносно осі

$$I_z = \int_{(A)} y^2 dA ; \quad (20,a)$$

- момент інерції перерізу відносно осі y

$$I_y = \int_{(A)} z^2 dA ; \quad (20,б)$$

- відцентровий момент інерції перерізу

$$I_{zy} = \int_{(A)} yz dA ; \quad (21)$$

- полярний момент інерції перерізу

$$I_\rho = \int_{(A)} \rho^2 dA . \quad (22)$$

Оскільки $\rho^2 = y^2 + z^2$, маємо:

$$I_\rho = \int_{(A)} (y^2 + z^2) dA = \int_{(A)} y^2 dA + \int_{(A)} z^2 dA = I_z + I_y . \quad (23)$$

2.1.2 Статичні моменти перерізів. Центр ваги

У загальному випадку перерізу статичні моменти обчислюють безпосередньо за (19,а), (19,б). Якщо відомі площа A та координати z_0, y_0 центру ваги перерізу, статичні моменти можна визначити так:

$$S_z = A \cdot y_0 ; \quad S_y = A \cdot z_0 . \quad (24)$$

Звідси можна зробити такі висновки:

1) статичний момент перерізу відносно осі, яка проходить через центр ваги (центральної осі) дорівнює нулю;

2) координати центру ваги у деяких обраних осях y, z можна визначити, якщо відомі статичні моменти перерізу відносно цих осей:

$$y_0 = \frac{S_z}{A} ; \quad z_0 = \frac{S_y}{A} ; \quad (25)$$

Якщо складний переріз можна розбити на прості частини, його статичний момент можна визначити як суму статичних моментів цих частин:

$$S_z = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + \dots;$$

$$S_y = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3 + \dots; \quad (26)$$

де, $A_1, A_2, A_3 \dots$ - площі простих частин, а $y_1, y_2, y_3 \dots$ – координати центрів ваги цих частин.

Визначення положення центру ваги покажемо на прикладі різнобічного кутового профілю 125x80x10 . Зобразимо профіль нехтуючи закругленнями (рис.24). Розміри на рисунку наведені в см.

Оберемо осі y, z що проходять через зовнішні сторони перерізу. Розіб'ємо фігуру на два простих прямокутника: перший - вертикальний має площу $A_1 = 8 \times 1 = 8 \text{ см}^2$ і такі координати центру ваги $z_1 = 0,5 \text{ см}$, $y_1 = 4 \text{ см}$, другий - горизонтальний має площу $A_2 = 11,5 \times 1 = 11,5 \text{ см}^2$ і координати центру ваги $z_2 = 6,75 \text{ см}$, $y_2 = 0,5 \text{ см}$.

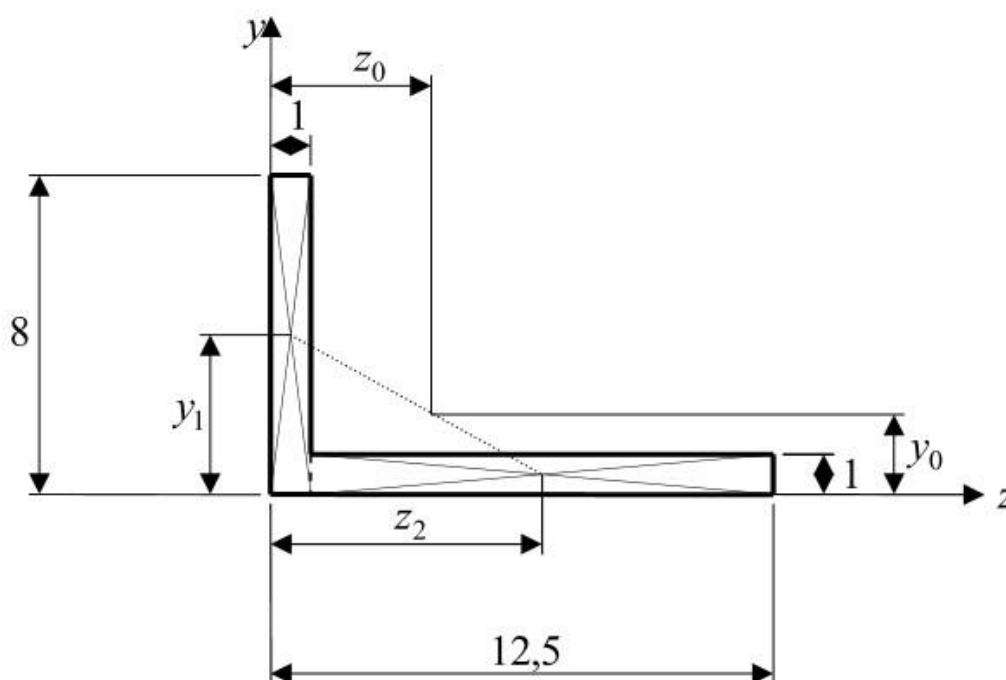


Рис. 24. Різнобічний кутовий профіль 125x80x10 зображений нехтуючи закругленнями

Загальна площа перерізу $A = A_1 + A_2 = 8 + 11,5 = 19,5 \text{ см}^2$.

Далі обчислюємо статичні моменти перерізу відносно осей y та z :

$$S_y = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 = 8 \times 0,5 + 11,5 \times 6,75 = 81,625 \text{см}^3 ;$$

$$S_z = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 8 \times 4 + 11,5 \times 0,5 = 37,75 \text{см}^3 .$$

Тепер за (25) маємо координати центру ваги перерізу:

$$y_0 = \frac{S_z}{A} = \frac{81,625}{19,5} = 4,18 \text{см}; \quad z_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{37,75}{19,5} = 1,94 \text{см} .$$

Зауважимо, що центр ваги перерізу повинен знаходитись на прямій, яка з'єднує центри ваги двох частин перерізу.

2.1.3 Моменти інерції простих перерізів

Визначення моментів інерції покажемо на прикладі прямокутного перерізу (рис.25,*a*).

Проведемо осі y, z , що проходять через центр ваги перерізу. Такі осі називають центральними осями перерізу. На відстані y від осі z виділимо елементарну полосу висотою dy . Площа полоси становить $dA = b \cdot dy$. За (19,*a*) запишемо момент інерції відносно осі z :

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3} (h^3/8 + h^3/8) = \frac{bh^3}{12} .$$

Аналогічно момент інерції перерізу відносно осі y становить: $I_y = \frac{hb^3}{12}$.

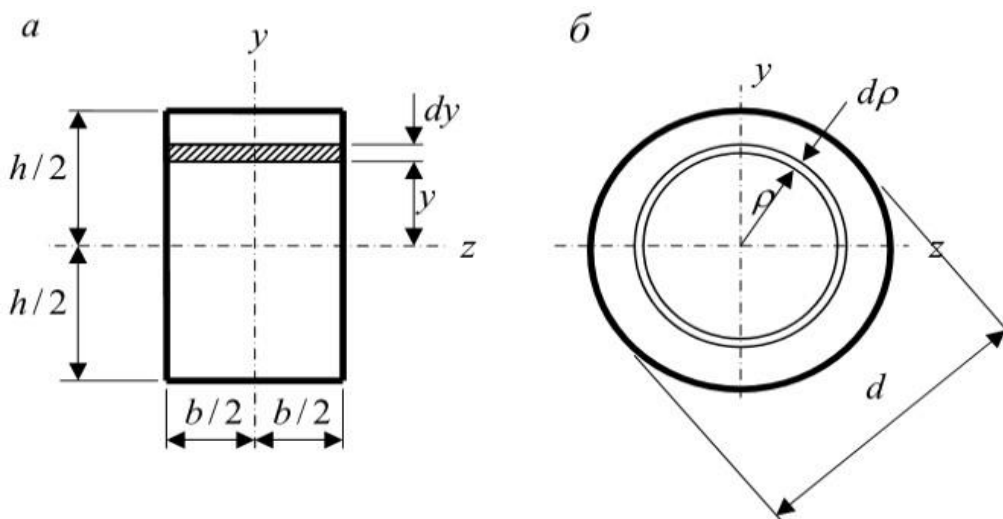


Рис. 25. Прямокутний переріз (*a*) і переріз у формі кола (*б*)

Запишемо відцентровий момент інерції перерізу.

$$I_{yz} = \int_{(A)} yz dA = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} yz dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} y \frac{z^2}{2} dy \Big|_{-b/2}^{b/2} = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot 0 dy = 0. \quad (27)$$

Очевидно, що подібна рівність буде виконуватися для осей симетрії будь-якого перерізу.

Далі розглянемо переріз у формі кола (рис. 25,б).

Виділимо на відстані ρ кільце товщиною $d\rho$. Площа цього кільця становить $dA = 2\pi \rho d\rho$. За (22) одержимо полярний момент інерції перерізу:

$$I_{\rho} = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

У відповідності до (20) $I_{\rho} = I_y + I_z = \frac{\pi d^4}{32}$.

Оскільки для круглого перерізу момент інерції відносно будь-якої центральної осі – величина постійна, тобто $I_y = I_z$, маємо:

$$I_z = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

2.1.4 Моменти інерції при паралельному переносі осей та при повороті осей. Моменти інерції складних перерізів

Моменти інерції відносно центральних осей називають центральними моментами інерції.

Розглянемо довільний переріз (рис. 26). Осі z, y є центральні осі інерції, а осі z_1, y_1 паралельні їм на відстанях відповідно a та b , отже,

$$z_1 = z + a, y_1 = y + b.$$

Запишемо момент інерції перерізу відносно осі z_1 :

$$I_{x_1} = \int_{(A)} y_1^2 dA = \int_{(A)} (y + a)^2 dA = \int_{(A)} y^2 dA + 2a \int_{(A)} y dA + a^2 \int_{(A)} dA .$$

Перший інтеграл у одержаному виразі являє собою центральний момент інерції відносно осі z , інтеграл у другому доданку – статичний момент перерізу відносно центральної осі – дорівнює нулю згідно (27), а останній інтеграл дає площу перерізу A .

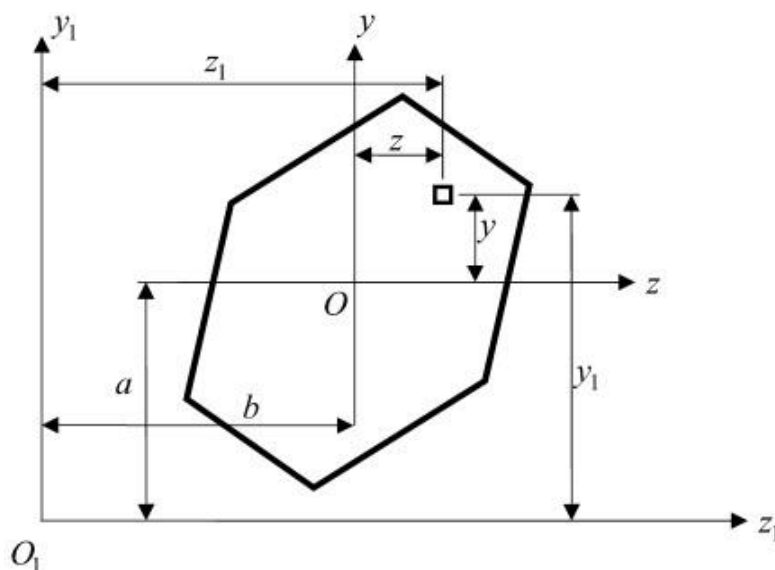


Рис. 26. Довільний переріз

Отже, маємо:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A . \quad (28,a)$$

Аналогічно:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A \quad (28,б)$$

Отже момент інерції відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної їй центральної осі плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між осями.

Далі запишемо відцентровий момент інерції перерізу:

$$I_{y_1 z_1} = \int_{(A)} y_1 z_1 dA = \int_{(A)} (y + a)(z + b) dA = \int_{(A)} yz dA + a \int_{(A)} z dA + b \int_{(A)} y dA + ab \int_{(A)} dA .$$

Аналізуючи інтеграли в одержаному виразі, можемо записати:

$$I_{y_1 z_1} = I_{y z} + abA . \quad (29)$$

Зауважимо, що у (29) величини a та b повинні братися з урахуванням знаків, тобто як координати центру ваги перерізу у нових осях.

Аналізуючи (20, a,b) та (28 a,b) можна зробити такі висновки:

- осьові моменти інерції є завжди додатні;
- центральний момент інерції є найменшим з моментів інерції відносно будь-якої осі, паралельної центральній.

При визначенні моментів інерції перерізів складної форми їх можна розбити на прості складові і потім з використанням (28, a,b), та (29) обчислити ці моменти інерції як суми моментів інерції складових.

Далі розглянемо випадок, коли необхідно визначити момент інерції перерізу відносно повернутих осей.

На рис. 27 осі y_1, z_1 повернуті відносно вихідних осей y, z проти годинникової стрілки на кут α .

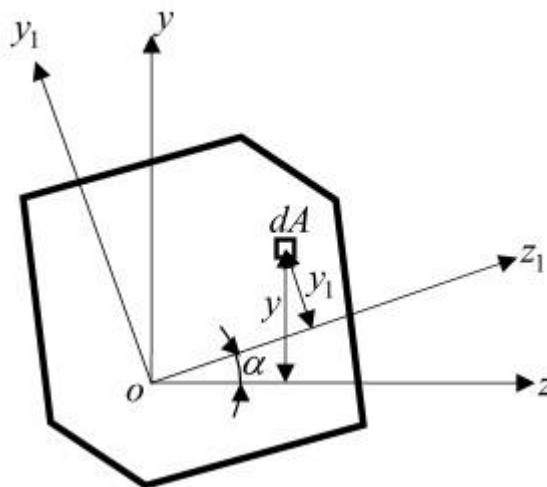


Рис. 27. Осі y_1, z_1 повернуті відносно вихідних осей y, z проти годинникової стрілки на кут α

Неважко записати: $y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha$; $z_1 = y \sin \alpha + z \cos \alpha$. Наведемо без перетворень остаточний вигляд для моментів інерції відносно повернутих осей:

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha ; \quad (30)$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha ; \quad (31)$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha ; \quad (32)$$

Шляхом простих перетворень неважко показати, що *сума осьових моментів інерції не змінюється при повороті осей*:

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z \quad (33)$$

2.1.5 Головні осі та головні моменти інерції

Як свідчать залежності (30), (31), (32), моменти інерції змінюються при повороті осей. Якщо осьові моменти інерції завжди додатні, то відцентровий момент інерції може бути як додатним, так і від'ємним, а отже, і нульовим. *Осі, відносно яких відцентровий момент інерції обертається на нуль, називають головними осями інерції. Моменти інерції відносно головних осей називають головними моментами інерції.*

Звичайно практичне значення мають головні центральні осі та відповідно головні центральні моменти інерції. Тому далі під головними осями та головними моментами інерції будемо вважати саме головні центральні осі та головні центральні моменти інерції перерізу.

Прирівнюючи нулю вираз для відцентрового моменту інерції (32), одержимо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} . \quad (34)$$

Звідси можна визначити кут, під яким головні осі повернуті відносно вихідних осей. Оскільки функція тангенса має періодичність π , два суміжних рішення (34) дають кути α , що відрізняються на 90° . Отже, головні осі будуть перпендикулярні одна одній.

Відзначимо такі властивості головних осей:

- вісь симетрії завжди є однією з головних осей перерізу;

- якщо переріз має більше, ніж дві осі симетрії, будь-які центральні осі є головними осями.

Головні осі мають властивості екстремальності: момент інерції відносно однієї з них є найбільшим, а відносно другої – найменшим з моментів інерції відносно будь-яких повернутих осей.

2.2 Згин

2.2.1 Балки. Опори та опорні реакції

Балкою звичайно називають горизонтальний стержень на опорах, що сприймає переважно вертикальне навантаження.

Розрізняють статично визначні балки, до яких відносяться балки на двох опорах або прості (рис. 28,а) та консольні (рис. 28,б) і статично невизначні – нерозрізні балки (рис. 29).

Пристрої, що прикріплюють споруду (у нашому випадку балку) до основи або до іншої споруди називають опорами.

Найбільш поширеними є: шарнірно рухома опора (рис.30, а); шарнірно нерухома опора (рис.30, б) та затискуюча нерухома опора або затиснення (рис.30, в).

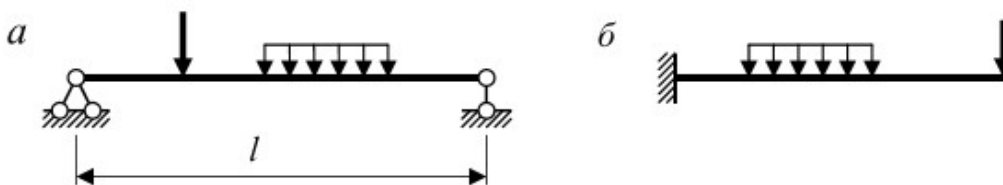


Рис. 28. Статично визначні балки на двох опорах або прості (а) та консольні (б)

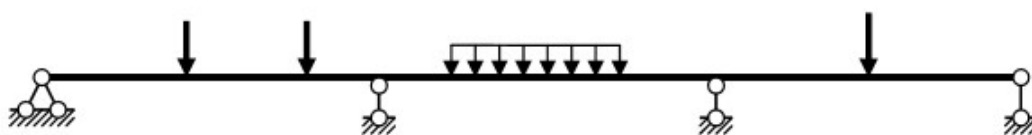


Рис. 29. Статично невизначна – нерозрізна балка

Шарнірно рухома опора усуває можливість переміщення перерізу вздовж опорного стержня, залишаючи необмеженими переміщення перпендикулярно до осі опорного стержня та поворот навколо центра шарніру. Відповідно у напрямку усунутого переміщення виникає реакція R (рис.30,*a*).

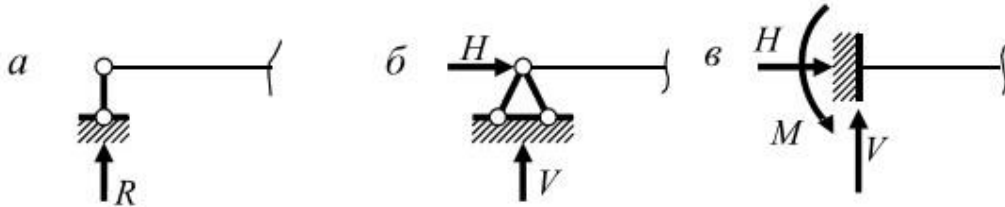


Рис. 30. Шарнірно рухома опора (*a*), шарнірно нерухома опора (*б*) та затискуюча нерухома опора або затиснення (*в*)

Шарнірно нерухома опора усуває будь-які лінійні переміщення перерізу, залишаючи лише можливість повороту його навколо центру шарніра. Зазвичай лінійне переміщення у довільному напрямку замінюють переміщеннями у двох взаємно перпендикулярних напрямках, частіше всього вздовж вертикалі та горизонталі. Відповідно у цих напрямках виникають вертикальна – V та горизонтальна – H реакції (рис. 30,*б*).

Затиснення усуває як лінійні, так і кутові переміщення перерізу. У напрямку цих усунутих переміщень виникають реакції V , H та реактивний момент M .

Зазначимо, що на практиці у розрахункових схемах споруд можна зустріти зображення опор, які відрізняються від наведених на рис. 29.

Визначення реакцій опор виконується з рівнянь рівноваги. Покажемо це на прикладі балки на двох опорах (рис. 31).

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot 2 - (q \cdot 6) \cdot 5 - M + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$\text{звідки } R_B = \frac{F \cdot 2 + q \cdot 30 + M}{6} = \frac{10 \cdot 2 + 4 \cdot 30 + 12}{6} = 25,33 \text{ kH}$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 4 + (q \cdot 6) \cdot 1 - M - R_A \cdot 6 = 0,$$

звідки
$$R_A = \frac{F \cdot 4 + q \cdot 6 - M}{6} = \frac{10 \cdot 4 + 4 \cdot 6 - 12}{6} = 8,67 \text{ kH} .$$

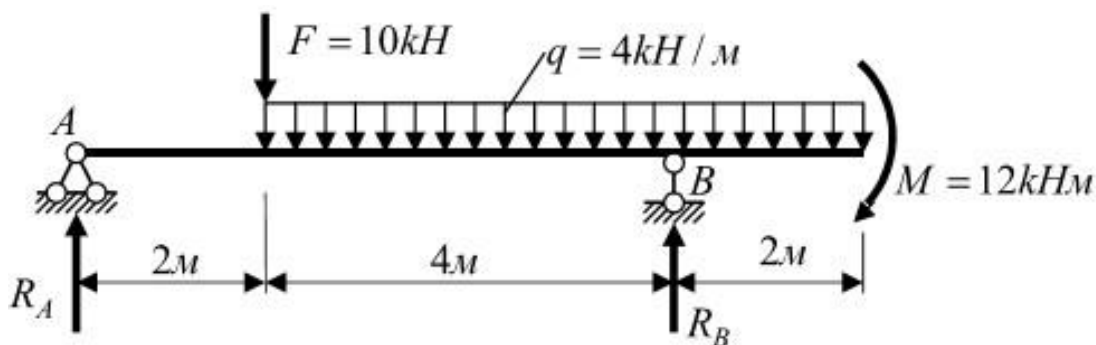


Рис. 31. Визначення реакцій опор показано на прикладі балки на двох опорах

Для визначення горизонтальної реакції використаємо умову рівності нулю суми проєкцій сил на горизонтальну вісь:

$$\sum F_x = 0; \quad H_A = 0 .$$

Як бачимо горизонтальна реакція дорівнює нулю. Очевидно вона завжди при наявності лише вертикального навантаження буде нульовою.

Для перевірки правильності обчислення реакцій можна використати умову рівності нулю суми проєкцій сил на вертикальну вісь:

$$\sum F_y = R_A + R_B - F - q \cdot 6 = 8,67 + 25,33 - 10 - 4 \cdot 6 = 24 - 24 = 0 .$$

Отже, реакції визначені вірно.

Далі покажемо визначення реакцій у затисненні консольної балки (рис. 32).

Рівняння рівноваги використаємо у такій послідовності:

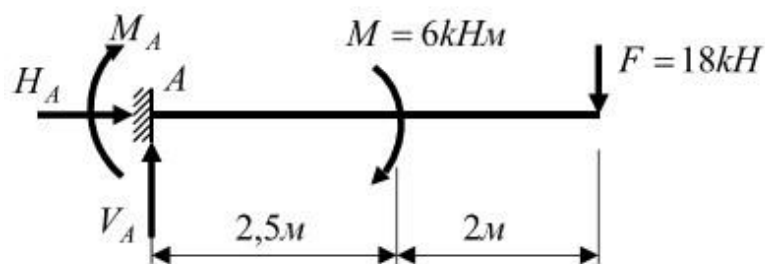


Рис. 32. Визначення реакцій у затисненні консольної балки

$$\sum F_y = 0; \quad V_A - F = 0, \text{ отсюда } V_A = F = 18 \text{ kH};$$

$$\sum F_x = 0; \quad H = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A - M - F \cdot 4,5 = 0,$$

звідки, $M_A = -M - F \cdot 4,5 = -6 - 18 \cdot 4,5 = -87 \text{ kHm}$.

Нагадаємо, що під дією навантаження та реакцій споруда знаходиться у рівновазі, отже опорні закріплення уявно вважаються відсутніми.

2.2.2 Внутрішні зусилля

Розглянемо стержень, який знаходиться у рівновазі під дією сил, перпендикулярних до його осі (рис.33,а).

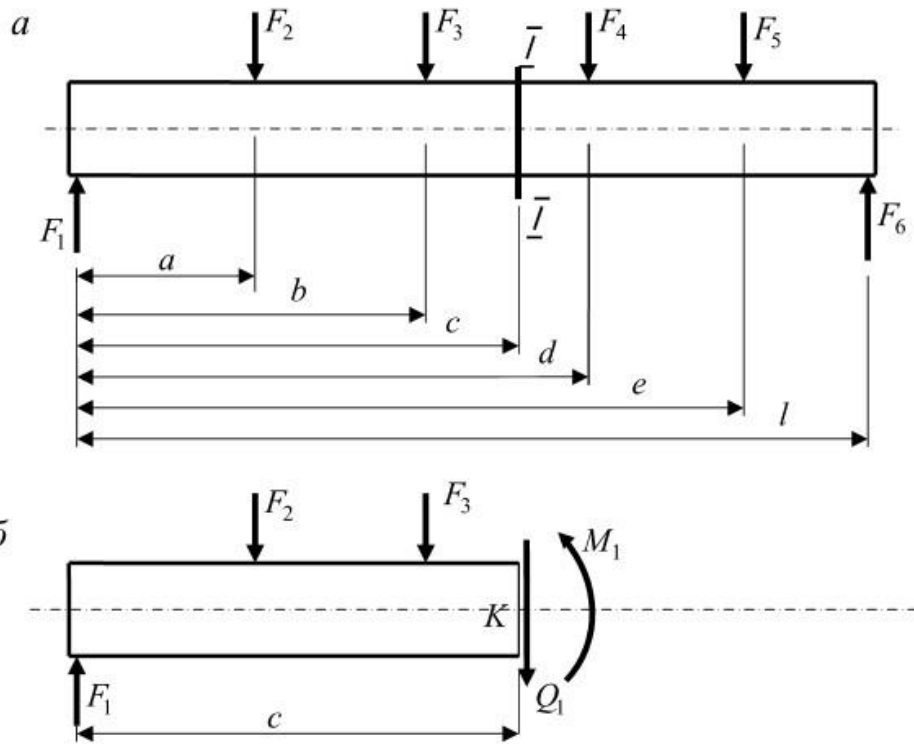


Рис. 33. Стержень, який знаходиться у рівновазі під дією сил, перпендикулярних до його осі (а). Залишена частина стержня після відкидання правої частини по перерізу I-I (б)

Напружений стан, у якому знаходиться стержень являє собою поперечний згин. Проведемо переріз I-I та відкинемо праву частину стержня. Залишена частина (рис. 33,б) повинна також знаходитися у рівновазі. Оскільки навантаження вертикальне, для цієї частини повинні виконуватися дві умови рівноваги: сума проєкцій на вертикальну вісь дорівнює нулю: $\sum F_y = 0$, та сума моментів сил відносно довільної точки, наприклад відносно т. К. дорівнює нулю: $\sum M_K = 0$. Виходячи з цього напруження, що виникають у перерізі, повинні давати рівнодіючу вертикальну силу та момент. Ця сила Q_1 , перпендикулярна до осі стержня називається *поперечною або перерізуючою силою*, а момент M_1 - *згинаючим моментом*.

Поперечну силу та згинаючий момент можна виразити через зовнішні сили:

$$\sum F_y = 0; \quad F_1 - F_2 - F_3 - Q_1 = 0,$$

$$\text{звідки} \quad Q_1 = F_1 - F_2 - F_3; \quad (35)$$

$$\sum M_K = 0; \quad -F_1 \cdot c + F_2 \cdot (c - a) + F_3 \cdot (c - b) + M_1 = 0,$$

$$\text{звідки} \quad M_1 = F_1 \cdot c - F_2 \cdot (c - a) - F_3 \cdot (c - b). \quad (36)$$

Поперечна сила та згинаючий момент є внутрішніми силами і при поєднанні двох частин стержня будуть відсутні. З цього випливає, що на праву частину повинні діяти такі самі за величиною зусилля. Отже, можна визначити ці зусилля і через зовнішні сили, розташовані праворуч від перерізу.

Аналізуючи вирази (35), (36), з урахуванням наведених вище міркувань можна дати такі правила визначення внутрішніх зусиль: *поперечна сила в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій лівих або правих сил на вісь, перпендикулярну до осі стержня, згинаючий момент в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів правих або лівих сил відносно центру ваги перерізу.*

Правила знаків для поперечної сили та згинаючого моменту наведені на рис. 34.

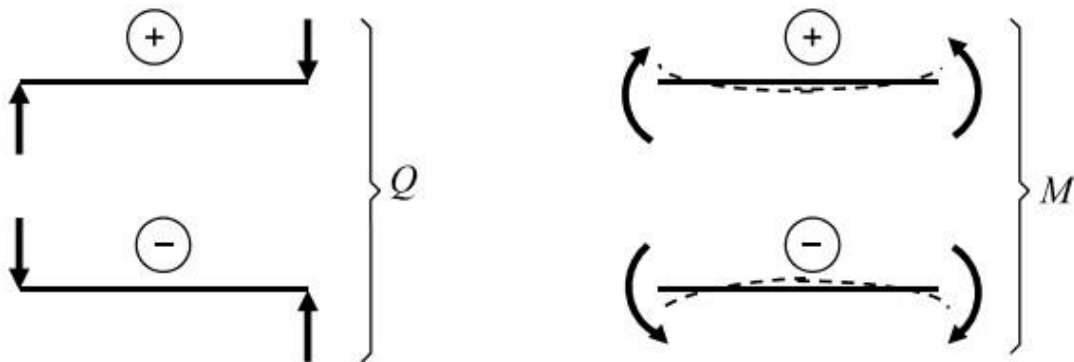


Рис. 34. Правила знаків для поперечної сили та згинаючого моменту

Для кращого запам'ятовування правила знаків для поперечних сил звернемо увагу на те, що додатні сили, розташовані праворуч та ліворуч від перерізу, утворюють пару сил з моментом, який обертає стержень за

годинниковою стрілкою. Відповідні від'ємні сили обертають стержень проти годинникової стрілки.

На рис. 34 для знаків згинаючих моментів штриховою лінією показано деформовану вісь стержня. Отже, якщо під дією моменту стержень вигинається опуклістю донизу, такий момент буде додатним, і навпаки.

2.2.3 Диференційні залежності при згині

Виріжемо елемент балки довжиною dx (рис. 35). На лівому кінці елемента діють поперечна сила Q та згинаючий момент M , на правому кінці зусилля змінюються і їх значення відповідно $Q + dQ$ и $M + dM$.

Розглянемо рівновагу виділеного елемента під дією внутрішніх зусиль та навантаження.

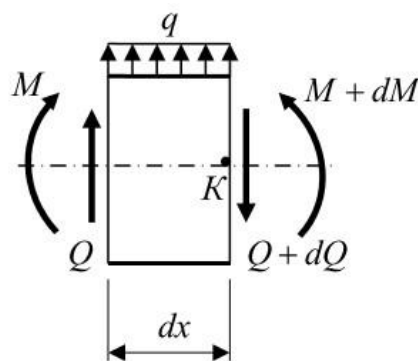


Рис. 35. Елемент балки довжиною dx

Проектуючи сили на вертикальну вісь, одержуємо: $Q + q \cdot dx - (Q + dQ) = 0$. Розкриваючи дужки та зводячи подібні, маємо: $dQ = q \cdot dx$. Це співвідношення запишемо інакше:

$$q = \frac{dQ}{dx}. \quad (37)$$

Отже, похідна поперечної сили за довжиною дає інтенсивність розподіленого навантаження.

Далі запишемо умову рівності нулю суми моментів відносно т. K – центру ваги перерізу на правому кінці елемента:

$$M + Q \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Розкриваючи дужки і зводячи подібні, одержимо:

$$Q \cdot dx + q \cdot \frac{(dx)^2}{2} - dM = 0.$$

Другий доданок у цьому виразі містить множник $(dx)^2$, тобто є величиною другого порядку мализни порівняно з іншими доданками, і ним можна знехтувати: $Q \cdot dx - dM = 0$. Одержане співвідношення подамо у такому вигляді:

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (38)$$

Отже, *похідна згинаючого моменту за довжиною є поперечною силою*. Одержані диференційні залежності використовуються як при визначенні максимальних значень згинаючого моменту, так і для перевірки та побудови епюр внутрішніх зусиль.

2.2.4 Епюри внутрішніх зусиль у балках

Покажемо побудування епюр поперечних сил та згинаючих моментів для деяких простих випадків.

Для балки на двох опорах (рис. 36) під дією рівномірно розподіленого навантаження на підставі симетрії реакції опор будуть однаковими. Тому визначимо їх з умови рівності нулю суми проекцій на вертикальну вісь:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A + R_B - ql = 0, \text{ т.е. } R_A = R_B = ql/2.$$

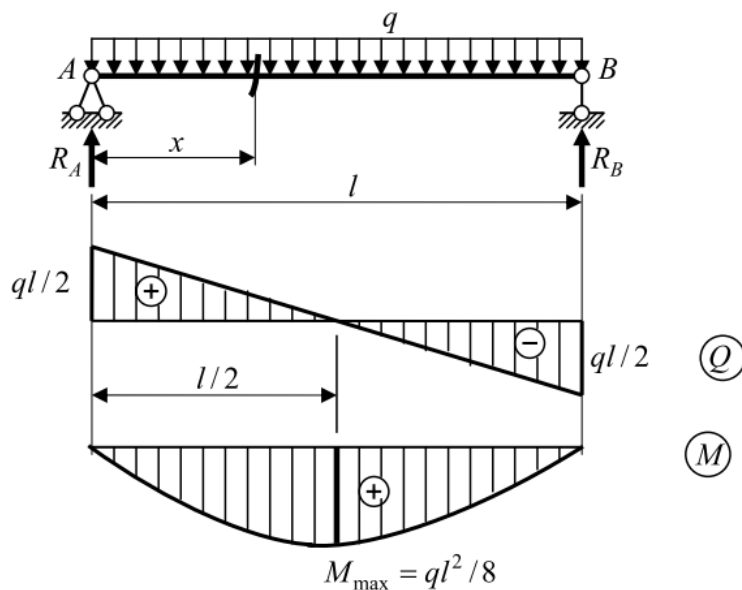


Рис. 36. Побудова епюр Q та M для балки на двох опорах

Оберемо довільний переріз балки, відстань до якого від опори А позначимо x . Розглядаючи частину балки, розташовану ліворуч від перерізу, запишемо вираз для поперечної сили:

$$Q = R_A - q \cdot x = \frac{ql}{2} - qx.$$

Як бачимо, поперечна сила змінюється за лінійним законом, при $x=0$ $Q = ql/2$, а при $x=l$ $Q = ql/2 - ql = -ql/2$. Провівши горизонтальну вісь підбалкою, відкладаємо відповідні значення поперечної сили на лівому кінці – при $x=0$ та на правому кінці при $x=l$ перпендикулярно цій осі. Додатні значення відкладаємо доверху, від’ємні – донизу. З’єднуючи одержані точки прямою лінією маємо шукану епюру Q (рис. 36).

Згинаючий момент у зазначеному довільному перерізі балки буде таким:

$$M = R_A \cdot x - (q \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

З одержаного виразу випливає, що згинаючий момент змінюється за нелінійним законом і його графіком є квадратна парабола. При $x=0$ $M=0$, при $x=l$ маємо так само $M=0$. Враховуючи симетрію балки можна визначити, що найбільшого значення момент досягає у середині прольоту при $x=l/2$, де

$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$. Відкладаємо у відповідних точках одержані значення і з'єднуємоїх кривою. Звертаємо увагу на те, що на епюрі моментів додатні значення відкладаються донизу, а від'ємні – доверху.

Зазначимо, що максимальне значення згинаючого моменту відповідає точці, у якій поперечна сила дорівнює нулю. Дійсно, максимум моменту досягається у точці, де його похідна, тобто поперечна сила, приймає нульове значення.

Далі розглянемо балку на двох опорах при дії зосередженої сили (рис. 37).

Для визначення вертикальних реакцій опор використовуємо умови рівності нулю сум моментів відносно опорних точок:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad -F \cdot a + R_B \cdot l = 0, \quad \text{звідки } R_B = F \frac{a}{l}; \\ \sum M_B = 0; \quad F \cdot b - R_A \cdot l = 0, \quad \text{звідки } R_A = F \frac{b}{l}; \end{aligned}$$

Неважко упевнитись, що сума проекцій сил на вертикальну вісь дійсно дорівнює нулю.

Розглянемо довільний переріз на відстані x_1 від опори A . Поперечна сила та згинаючий момент у цьому перерізі становлять:

$$Q_1 = R_A = \frac{Fb}{l}; \quad M_1 = R_A \cdot x_1 = F \frac{b}{l} x_1.$$

Як бачимо, поперечна сила не залежить від розташування перерізу поки відстань до перерізу не буде більше a . Згинаючий момент залежить від x_1 лінійно, отже для побудови епюри потрібно визначити його значення у двох перерізах: при $x_1 = 0 M_1 = 0$; при $x_1 = a M_1 = F \frac{ab}{l}$.

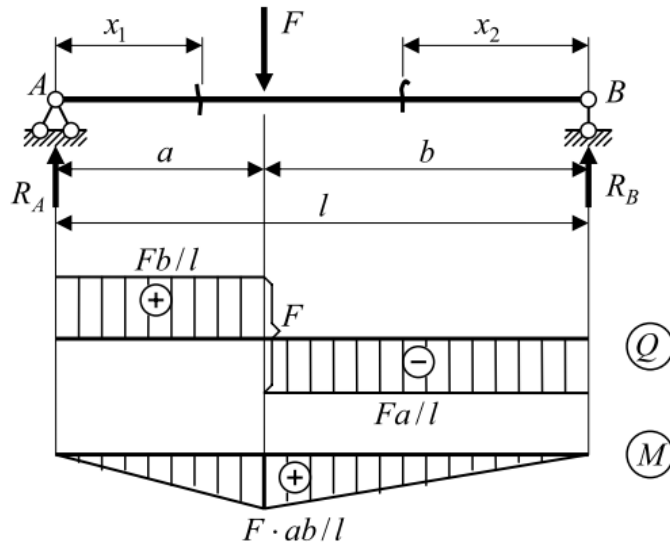


Рис. 37. Балка на двох опорах при дії зосередженої сили

Для перерізу, розташованого праворуч від зосередженої сили, вирази внутрішніх зусиль зміняться, оскільки ліворуч будуть розташовані уже дві сили: R_A та F . Зусилля у цьому перерізі зручно визначити через сили, розташовані праворуч від нього. Тоді відстань до цього перерізу зручно позначити x_2 і відраховувати її від правої опори.

Відповідно поперечна сила буде постійною: $Q_2 = -R_B = -F \frac{a}{l}$.

Згинаючий момент являє собою лінійну функцію:

$$M_2 = R_B \cdot x_2 = F \frac{a}{l} x_2; \quad \text{при } x_2 = 0 \quad M_2 = 0; \quad \text{при } x_2 = b \quad M_2 = F \frac{ab}{l}.$$

Епюри Q , M приведені на рис. 37

На епюрі Q під точкою прикладання зосередженої сили поперечна сила змінюється стрибкоподібно. Величина цієї зміни дорівнює величині сили і називається звичайно «стрибок».

Для балки на двох опорах під дією зосередженого моменту (рис. 38) побудування епюр покажемо без пояснень:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad -M + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = M/l; \\ \sum M_B = 0; \quad -M - R_A \cdot l = 0, \quad R_A = -M/l; \end{aligned}$$

$$Q_1 = R_A = -\frac{M}{l}; \quad M_1 = R_A \cdot x_1 = -\frac{M}{l} x_1; \quad \text{при } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a \quad M_1 = -M \frac{a}{l}.$$

$$Q_2 = R_B = \frac{M}{l}; \quad M_2 = R_B \cdot x_2 = \frac{M}{l} x_2; \quad \text{при } x_2 = 0 \quad M_2 = 0;$$

$$\text{при } x_2 = b \quad M_2 = M \frac{b}{l}.$$

Зауважимо, що у точці прикладання зосередженого моменту на епюрі M має місце стрибок величиною, яка дорівнює величині моменту.

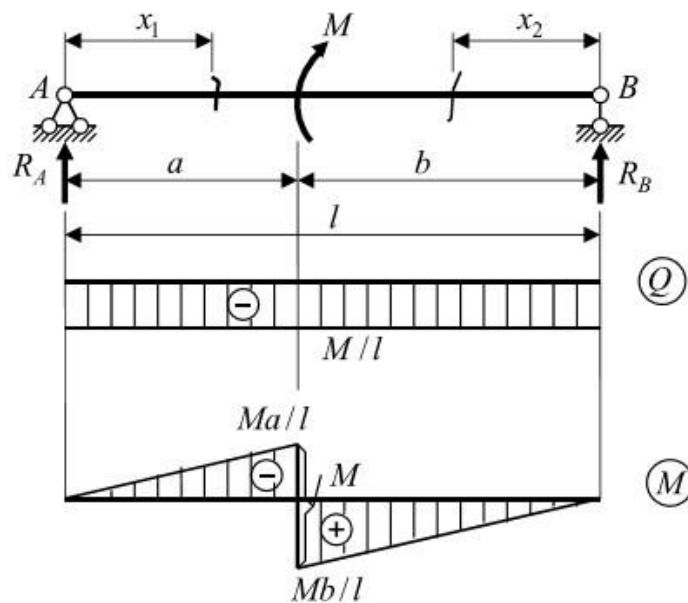


Рис. 38. Балка на двох опорах під дією зосередженого моменту

На підставі наведених прикладів можна зробити такі висновки:

- на ділянці, де відсутнє розподілене навантаження поперечна сила постійна, а згинаючі моменти змінюються за лінійним законом;

- на ділянці, де діє розподілене навантаження поперечна сила змінюється за лінійним законом, а епюра згинаючих моментів криволінійна і опуклістю спрямована у бік дії розподіленого навантаження;

- у точці прикладання зосередженої сили на епюрі поперечних сил має місце стрибок на величину цієї сили;

- у точці прикладання зосередженого моменту на епюрі згинаючих моментів має місце стрибок на величину цього моменту.

Порядок розрахунку балки можна запропонувати такий:

- визначити опорні реакції;

- розбити балку на ділянки так, щоб межами ділянок були точки прикладання зосереджених сил та зосереджених моментів, точки на кінцях розподіленого навантаження;

- по чергово обираючи ділянки, на кожній з них обрати довільний переріз; обрати сторону, за якою будуть визначатися внутрішні зусилля і призначити відстань до перерізу від фіксованої точки з обраної сторони; записати вирази внутрішніх зусиль для обраного довільного перерізу; залежно від характеру одержаної залежності обчислити зусилля в характерних точках ділянки;

- відклавши перпендикулярно осі балки обчислені зусилля, з'єднати одержані точки прямою або кривою лініями залежно від характеру залежності зусилля.

2.2.5 Напруження при згині. Умова міцності

Нормальні напруження у перерізах балки визначаються з використанням гіпотези Я. Бернуллі: *перерізи, плоскі і нормальні до осі стержня до деформації, залишаються плоскими і нормальними до осі після деформації.*

Розглянемо резиновий брусок, на боковій поверхні якого нанесемо вертикальні лінії, перпендикулярні до його поздовжньої осі $O-O_1$ (рис. 39, а). Завантажимо брусок на кінцях парами сил з моментом M , прикладеним у площині вертикальної осі симетрії перерізів (рис. 39, б). В результаті можна побачити, що відповідно до гіпотези Я. Бернуллі вертикальні лінії, а отже відповідні перерізи залишились прямими і нормальними до осі бруска, відстань між кінцями ліній на опуклому боці бруска збільшилась, а на увігнутій зменшилась.

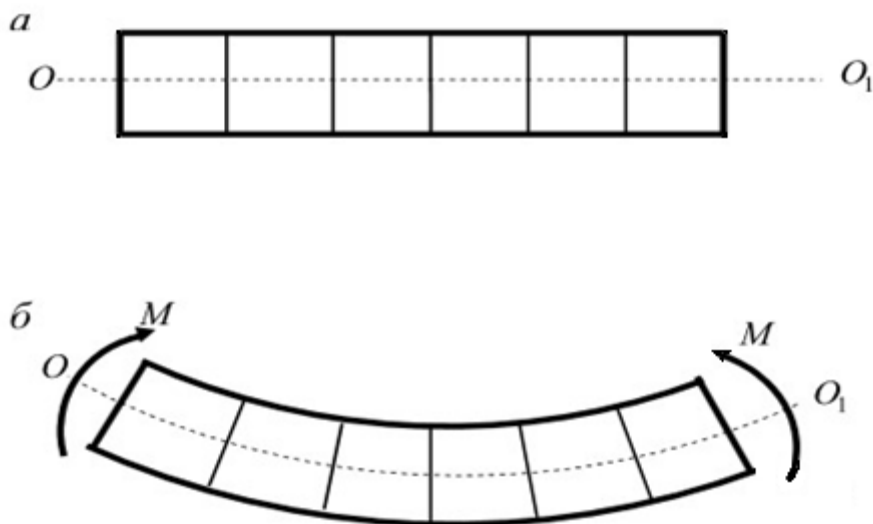


Рис. 39. Резиновий брусок, на боковій поверхні якого нанесені вертикальні лінії, перпендикулярні до його поздовжньої осі $O-O_1$ (а); брусок завантажений на кінцях парами сил з моментом M (б)

Таким чином волокна бруска з одного боку зазнають розтягу, а з іншого – стиску. Отже, існує деякий проміжний шар волокон, який не зазнає ані розтягу, ані стиску. Такий шар називається *нейтральним шаром*. Лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу стержня називають *нейтральною віссю*.

Розглянемо елемент балки, що зазнає чистого згину (рис. 40,а). Чистим згином називають такий стан балки, коли у її перерізах діють лише згинаючі моменти. Під дією моменту вісь балки викривляється так, що радіус кривини становить ρ . Сторони елемента повертаються та їх взаємний кут повороту становить $d\theta$. Довжина нейтрального шару елемента m n при згині не змінюється і складає dx . З урахуванням мализни елемента можна записати:

$$dx = \rho \cdot d\theta .$$

Довжина шару $m'n'$ на підставі гіпотези Я.Бернуллі пропорційна відстані y від нейтрального шару і становить

$$m'n' = (\rho + y) \cdot d\theta .$$

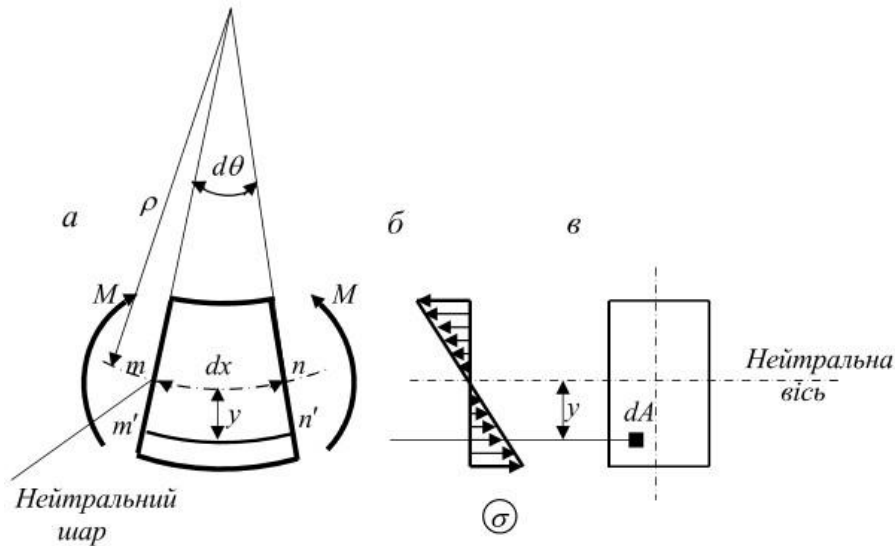


Рис. 40. Елемент балки, що зазнає чистого згину (а); епюра розподілу нормальних напружень за висотою перерізу балки (б); вважається, що переріз балки прямокутний (в)

Враховуючи, що довжина усіх шарів до деформації становила dx , визначимо відносну деформації шару на відстані y :

$$\varepsilon = \frac{m'n' - mn}{mn} = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$

Тепер на підставі закону Гука можна записати:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E y}{\rho},$$

Тобто нормальні напруження змінюються пропорційно відстані y від нейтральної осі балки. На підставі цього на рис. 40,б наведено епюру розподілу нормальних напружень за висотою перерізу балки.

Як було вже зазначено, рівнодіюча напружень при згині повинна давати згинаючий момент. Для спрощення будемо вважати, що переріз балки прямокутний (рис.40,в). На відстані y від нейтральної осі виділимо елементарну площинку величиною dA . На цій площинці діє елементарна сила

$$dF = \sigma \cdot dA = \frac{E y}{\rho} dA,$$

а її момент відносно нейтральної осі становить

$$dM = \sigma \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} y^2 dA. (39)$$

Сума проекцій усіх елементарних сил перерізу на вісь балки

$$\int_{(A)} dF = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} y \cdot dA = 0.$$

Звідси виходить, що $\int_{(A)} y dA = 0$. Цей інтеграл являє собою статичний момент перерізу відносно нейтральної осі. Рівність нулю статичного моменту свідчить про те, що *нейтральна вісь є центральною віссю перерізу*.

Інтегруючи вираз (39), одержимо:

$$M = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} y^2 dA.$$

Інтеграл у цьому виразі є моментом інерції перерізу відносно нейтральної осі перерізу, отже:

$$M = \frac{EI}{\rho},$$

звідки одержуємо кривину зігнутої осі балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (40)$$

З одержаної рівності випливає, що кривина осі балки при згині, а отже величини її деформації тим менше, чим більше EI . Цей добуток модуля пружності на момент інерції перерізу відносно нейтральної осі називають *жорсткістю перерізу при згині*.

Підставивши (40) у (38) після незначних перетворень одержимо:

$$\sigma = \frac{My}{I}. \quad (41)$$

Найбільші напруження виникають у точках перерізу найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I}. \quad (42)$$

Величину $\frac{I}{y_{max}}$ позначають W і називають *моментом опору перерізу*.

З урахуванням цього (42) набуває такого виду:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}. \quad (43)$$

Найбільші напруження за умовою міцності не повинні перевищувати допустимих напружень:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]. \quad (44)$$

Момент опору є геометричною характеристикою перерізу. Покажемо визначення моментів опору для деяких перерізів, у яких нейтральна вісь є віссю симетрії:

- для прямокутного перерізу $W = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}$;

- для колового перерізу $W = \frac{I}{d/2} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32}$.

Якщо у перерізу нейтральна вісь не є віссю симетрії, момент опору повинен обчислюватися двічі – для двох точок, найбільш віддалених від нейтральної осі. У цьому випадку для матеріалів, неоднаково працюючих на розтяг та стиск, необхідно перевіряти міцність для цих двох крайніх точок.

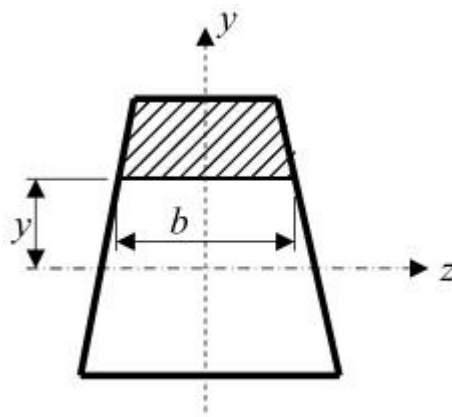


Рис. 41. Інші позначення

У загальному випадку поперечного згину у перерізах, крім згинаючого моменту, повинна виникати й поперечна сила. Поперечна сила є рівнодіючою дотичних напружень, які лежать у площині перерізу. Наведемо вираз для цих напружень без доказів:

$$\tau = \frac{QS}{bI}. \quad (45)$$

У цьому виразі Q - поперечна сила у перерізі, I - момент інерції перерізу відносно нейтральної осі. Інші позначення ілюструються рис. 41:

b - ширина перерізу на рівні визначення дотичних напружень;

S - статичний момент частини перерізу, що лежить вище або нижче рівня визначення дотичних напружень (на рис. 41 – це заштрихована або вільна від штрихів її частина), відносно нейтральної осі.

2.2.6 Визначення переміщень

З математики відомо, що кривину $\frac{1}{\rho}$ кривої $y(x)$ можна наближено виразити через другу похідну:

$$\frac{1}{\rho} = \pm y''.$$

У цьому співвідношенні можна залишити тільки знак «плюс», якщо вісь y спрямувати доверху, а вісь x - праворуч. Тепер, зважаючи на (47), одержимо:

$$y'' = \frac{M}{EI}. \quad (46)$$

Тут y є вертикальним переміщенням перерізу для балки, його називають *прогином*, а рівняння (46) називають *наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки*.

Рівняння (46) можна використати для визначення переміщень перерізів балки. Для цього необхідно двічі інтегрувати це рівняння.

При першому інтегруванні одержуємо першу похідну прогину, яка являє собою кут повороту перерізу θ :

$$EI y' = EI \theta = \int_{(l)} M dx + C.$$

Друге інтегрування приводить до рівняння прогинів:

$$EI y = \int_{(l)} dx \int_{(l)} M dx + Cx + D.$$

Під час інтегрування з'являються дві константи C, D , які належить визначити з граничних умов - умов закріплення балки. Якщо балка складається з декількох ділянок, на кожній з них будуть свої константи.

При кількості ділянок n необхідно визначати $2n$ констант. Для того, щоб уникнути цього, можна скористатись методом початкових параметрів. Ідея методу полягає у поданні згинаючих моментів так, що після цього результат інтегрування диференціального рівняння (46) можна записати у стандартній формі:

$$EI\theta = EI\theta_0 + \sum_{i=1}^m \frac{M_i(x-a_i)^1}{1!} + \sum_{j=1}^n \frac{F_j(x-b_j)^2}{2!} + \sum_{k=1}^p \frac{q_k(x-c_k)^3}{3!}, \quad (47)$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + \sum_{i=1}^m \frac{M_i(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{j=1}^n \frac{F_j(x-b_j)^3}{3!} + \sum_{k=1}^p \frac{q_k(x-c_k)^4}{4!}. \quad (48)$$

У цих виразах: y_0 и θ_0 - початкові параметри: відповідно прогин та кут повороту перерізу на початку координат; m - кількість зосереджених моментів балки; n - кількість зосереджених сил; p - кількість рівномірно розподілених навантажень; a_i - відстань від початку координат до точки прикладання моменту M_i ; b_j - відстань від початку координат до точки прикладання сили F_j ; c_k - відстань від початку координат до початку розподіленого навантаження.

При користуванні (47), (48) слід дотримуватись таких правил:

- початок координат розташовувати на лівому кінці балки;
- розподілене навантаження, яке не доходить до кінця балки, необхідно подовжити до кінця з введенням додаткового врівноважуючого навантаження;
- початкові параметри знаходять з граничних умов – умов закріплення балки.

Визначення переміщень методом початкових параметрів покажемо для балки на (рис.42, а).

Знайдемо реакції опор:

$$\sum M_A = 0; -q \cdot 6 \cdot 1 - M - F \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0;$$

$$R_B = \frac{5 \cdot 6 + 20 + 12 \cdot 6}{8} = 15,25 \text{ kH};$$

$$\sum M_B = 0; q \cdot 6 \cdot 7 - M + F \cdot 2 - R_A \cdot 8 = 0;$$

$$R_A = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 - 20 + 12 \cdot 2}{8} = 26,75 \text{ kH}.$$

Оскільки розподілене навантаження не доходить до кінця балки, подовжуємо його (штриховане навантаження на рис. 42,б) і додаємо таке саме за величиною і протилежне за напрямком навантаження $q_1 = q$ на ділянці подовження заданого навантаження.

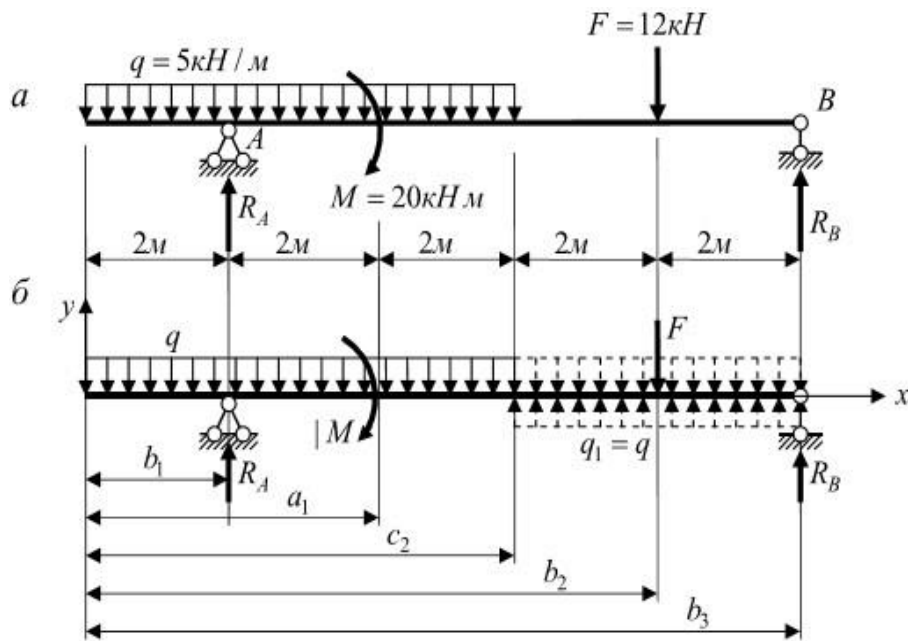


Рис. 42. Визначення переміщень для балки методом початкових параметрів

За формою (47), (48) складаємо рівняння методу початкових параметрів:

$$EI\theta = EI\theta_0 - M(x - 4) + \frac{R_A(x - 2)^2}{2} - \frac{F(x - 8)^2}{2} - \frac{q(x - 0)^3}{6} + \frac{q_1(x - 6)^3}{6}; \quad (49)$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x - \frac{M(x - 4)^2}{2} + \frac{R_A(x - 2)^3}{6} - \frac{F(x - 8)^3}{6} - \frac{q(x - 0)^4}{24} + \frac{q_1(x - 6)^4}{24}. \quad (50)$$

Звернемо увагу на те, що знаки перед складовими, в які входять зовнішні сили, відповідають знакам моментів від них для перерізу, розташованому на крайній правій ділянці балки.

З умов відсутності прогинів на опорах маємо:

$$1) \text{ при } x = 2 \quad y = 0; \quad EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 2 - \frac{q(2-0)^4}{24} = 0;$$

$$2) \text{ при } x = 10 \quad y = 0;$$

$$EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 10 - \frac{M(10-4)^2}{2} + \frac{R_A(10-2)^3}{6} - \frac{F(10-8)^3}{6} - \frac{q(10-0)^4}{24} + \frac{q_1(10-6)^4}{24} = 0.$$

Підставивши значення сил, приходимо до двох рівнянь відносно початкових параметрів:

$$EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 2 - 3,33 = 0;$$

$$EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 10 - 123,33 = 0.$$

Сумісне розв'язання цих рівнянь дає такі результати:

$$EIy_0 = -20,67; \quad EI\theta_0 = 12,$$

тобто прогин та кут повороту перерізу на початку координат становить: $y_0 = -\frac{20,67}{EI}; \theta_0 = \frac{12}{EI}$.

Після підстановки сил та початкових параметрів (49), (50) набувають такого вигляду:

$$EI\theta = 12 - 20(x-4) + 13,375(x-2)^2 - 6(x-8)^2 - 0,833(x-0)^3 + 0,833(x-6)^3;$$

$$EIy = -20,67 + 12x - 10(x-4)^2 + 4,458(x-2)^3 - 2(x-8)^3 - 0,208(x-0)^4 + 0,208(x-6)^4.$$

Нагадаємо, що при визначенні переміщення конкретного перерізу повинні враховуватись лише складові, що відповідають силам, розташованим ліворуч від нього. У зв'язку з цим у наведених рівняннях необхідно відкидати доданки, у яких при підстановці x в дужках одержують число, яке менше або дорівнює нулю. Наприклад, для перерізу розглянутої балки з координатою $x = 6$ м одержимо:

$$EI\theta = 12 - 20(6-4) + 13,375(6-2)^2 - 0,833(6-0)^3 = 6,07;$$

$$EIy = -20,67 + 12 \cdot 6 - 10(6-4)^2 + 4,458(6-2)^3 - 0,208(6-0)^4 = 27,07.$$

Задамо значення жорсткості перерізу $EI = 1000 \text{ кНм}^2$ та обчислимо переміщення заданого перерізу:

$$\theta = \frac{6,07}{1000} = 0,00607 \text{ рад}; \quad y = \frac{27,07}{1000} = 0,027 \text{ м} = 2,7 \text{ см}$$

2.2.7 Поняття про складні деформації

Розглянемо випадок, коли на консольний стержень у довільній точці крайнього перерізу діє довільно спрямована зосереджена сила (рис. 43).

Координати прикладання сили y_f та z_f , кут між лінією дії сили та осями x , y та z становить відповідно α , β , та γ .

Розкладемо силу на складові $F_x = F \cos \alpha$; $F_y = F \cos \beta$; $F_z = F \cos \gamma$ вздовж осей x , y , z . У перерізі площиною A , що знаходиться на відстані x від кінця стержня проведемо осі y_A , z_A . Визначимо внутрішні зусилля у цьому перерізі:

- згинаючий момент відносно осі $z_A M_{z_A} = F_x \cdot y_f + F_y \cdot x$;
- згинаючий момент відносно осі $y_A M_{y_A} = F_x \cdot z_f + F_z \cdot x$;
- поперечні сили $Q_y = F_y$ и $Q_z = F_z$;
- поздовжня сила $N = F_x$.

Зауважимо, що знаки згинаючих моментів прийняті так, щоб вони розтягували частину перерізу у додатній чверті.

Застосовуючи принцип незалежності дії сил можна записати нормальні напруження у точці перерізу з координатами y , z :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}. \quad (51)$$

Дотичні напруження у напрямку осей y та z можна визначити за формулою (45) через поперечні сили відповідно Q_y та Q_z .

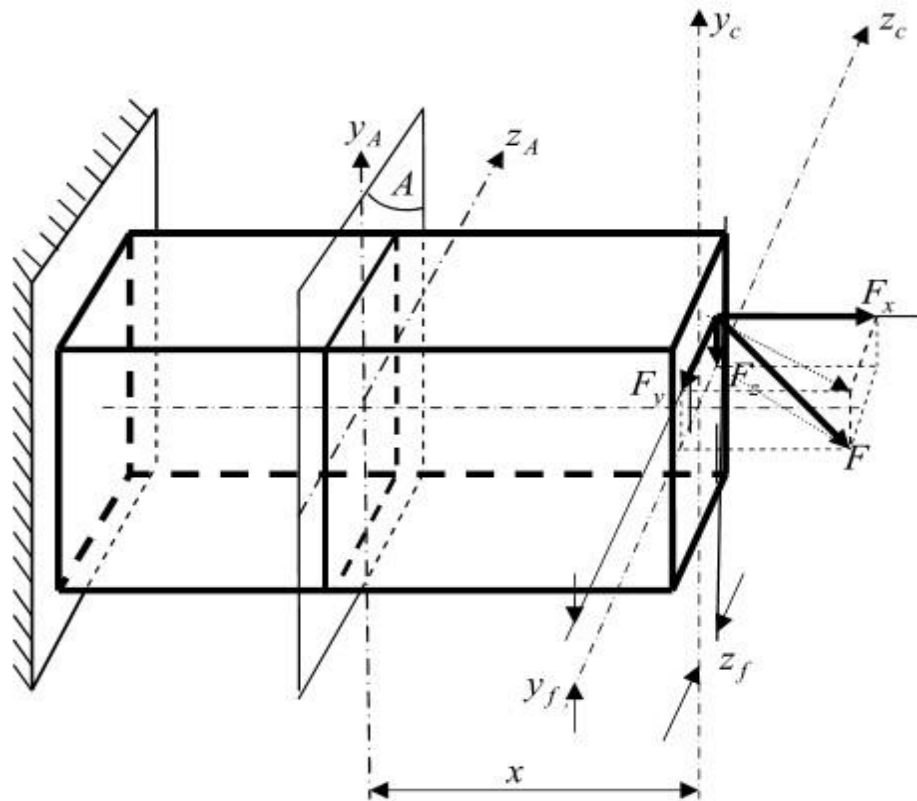


Рис. 43. На консольний стержень у довільній точці крайнього перерізу діє довільно спрямована зосереджена сила

Вираз (51) може бути спрощений для деяких окремих випадків прикладання сили. Так, якщо сила паралельна осі x , маємо *позацентровий розтяг* або *стиск*. Якщо сила діє у площині, перпендикулярній площині нормального перерізу і спрямована через його центр ваги під кутом до головних осей, маємо *косий згин*.

РОЗДІЛ 3 СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ СТЕРЖНЕВІ СИСТЕМИ

3.1 Кінематичний аналіз споруд

3.1.1 Основні визначення

Точки пружної системи під дією навантаження зміщуються. Якщо ці зміщення з'являються тільки за рахунок деформації елементів споруди, система є *геометрично незмінюваною*.

Нагадаємо, що у нашому курсі ми розглядаємо лише стержневі системи. Найпростішою незмінюваною стержневою системою є шарнірний трикутник (рис. 44,*а*). Дійсно, якщо стержні трикутника не деформуються, будь-які точки його не змінюють взаємного розташування. На відміну від цієї системи у шарнірному чотирикутнику (рис. 44,*б*) вже при нескінченно малому впливу, тобто без деформації, стержні змінюють своє розташування. Така система називається *геометрично змінюваною*.

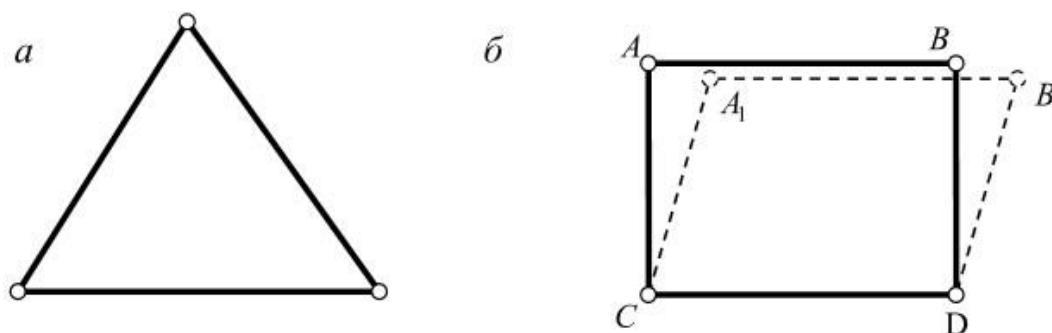


Рис. 44. Шарнірний трикутник (*а*);

Призначенням споруди є сприйняття навантажень або інших зовнішніх впливів і передача їх на основу або на іншу споруду. Зважаючи на це *споруда може бути тільки геометрично незмінюваною*.

Зазначимо, що геометрично незмінювана система, усі зусилля в якій можна визначити за допомогою рівнянь рівноваги, називається *статично визначуваною*.

3.1.2 Кінематичний аналіз

З визначення геометричної незмінюваності виходить, що за умови нескінченно великої жорсткості елементів споруди точки її не можуть мати можливості будь-яких переміщень. Для визначення можливості переміщень системи слугує поняття ступенів свободи. *Кількість ступенів свободи – це кількість незалежних переміщень, які можуть здійснювати точки системи.* Інакше її можна визначити як *мінімальну кількість геометричних параметрів, які необхідні для визначення положення системи.*

Споруду можна визначити як систему елементів, яка призначена для сприйняття навантаження і передачі його на основу або на іншу споруду. Кожен з цих елементів передбачається геометрично незмінюваним і називається *диском*. Найпростіший диск – це стержень, найпростіший диск як система стержнів – шарнірний трикутник (рис.44,*a*). Кожен диск у площині має три ступеня свободи. Дійсно він може мати два поступальних переміщення та одне кутове. Отже, якщо позначити кількість дисків у споруді D , кількість ступенів свободи цих дисків буде дорівнювати $3D$.

Диски у споруді з'єднуються між собою жорстко або з допомогою шарнірів. Кожне таке з'єднання накладає в'язі й обмежує можливість взаємних переміщень дисків. Жорсткі з'єднання не будемо розглядати, оскільки жорстко з'єднані диски завжди можна вважати одним більш великим диском.

При шарнірному приєднанні другого диску до першого (на рис. 45, *a* для спрощення показані стержні) другий може тільки обертатися відносно першого, отже втрачає два ступеня свободи. *Такий шарнір, що з'єднує два диски, називають простим шарніром.* Він накладає на систему дві в'язі.

Якщо шарнір з'єднує більш ніж два стержні (рис. 45, *б*), його називають *складним* або *кратним* тому, що таке з'єднання буде еквівалентне $C - 1$ простим шарнірам (тут C - кількість стержнів у з'єднанні).

Позначивши загальну кількість простих шарнірів у системі $Ш$, зазначимо, що кількість в'язей, накладених ними буде дорівнювати $2Ш$.

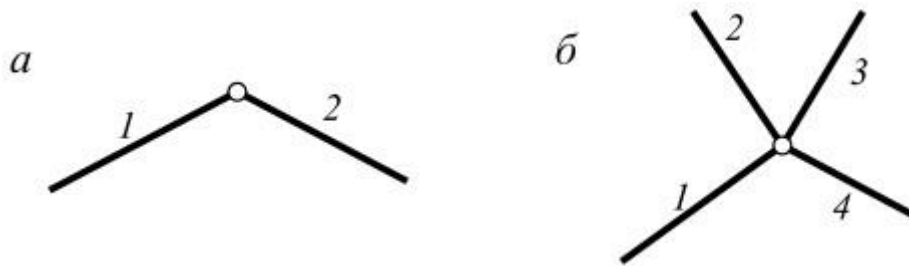


Рис. 45. Шарнірне приєднання другого диску до першого (*a* для спрощення показані стержні); складний або кратний шарнір (*б*)

Вільне переміщення дисків обмежують також опори, що прикріплюють споруду. Основні опори наведені на рис.30. Кількість в'язей, що накладає шарнірно рухома опора дорівнює 1, шарнірно нерухома – 2, затиснення – 3. Загальну кількість опорних в'язей позначимо C_0 .

Тепер можна визначити кількість ступенів свободи споруди так:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 . \quad)$$

Для ферм, що складаються зі стержнів, з'єднаних між собою шарнірами, більш зручно користуватися такою формулою:

$$W = 2U - C - C_0, \quad (53)$$

де U – кількість вузлів ферми, тобто точок з'єднання стержнів; C – кількість стержнів ферми; C_0 – кількість опорних в'язей.

Отже, якщо у припущенні абсолютної жорсткості елементів маємо:

$$W > 0, \quad (54)$$

система є геометрично змінюваною.

Зауважимо, що нерівність

$$W \leq 0, \quad (55)$$

яка доповнює (54) є необхідною, але недостатньою умовою незмінюваності споруди. Це пояснюється тим, що у (52), (53) обчислюється загальна кількість в'язей, без урахування їхнього розподілу між окремими з'єднаннями.

Якщо кількість ступенів свободи задовольняє умові (55), далі необхідно проаналізувати як в'язі розподіляються між окремими частинами споруди. Такий аналіз виконують умовною збіркою системи. Покажемо перевірку геометричної незмінюваності на прикладі ферми (рис.46, *a*).

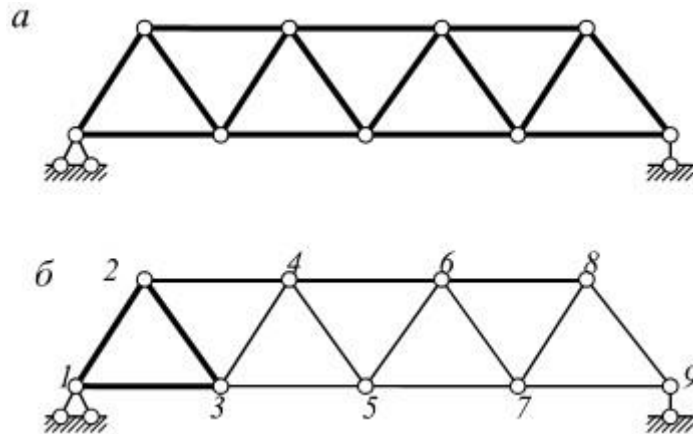


Рис. 46. Перевірка геометричної незмінюваності на прикладі ферми

Кількість стержнів ферми $C = 15$, кількість вузлів $U = 9$, опорних в'язей $C_0 = 3$. Кількість ступенів свободи за (53) становить $W = 2 \cdot 9 - 15 - 3 = 0$. Необхідна умова (55) незмінюваності виконана. Геометричний аналіз почнемо з трикутника 1-2-3, який є незмінюваним. До нього за допомогою двох стержнів 2-4 та 3-4 також нерухомо приєднано вузол 4, далі так само парами стержнів приєднуються вузли 5, 6, 7, 8 та 9. Отже, стержні ферми утворюють геометрично незмінювану систему – диск. Далі ферма-диск прикріплюється до основи з допомогою двох шарнірних опор: нерухомої та рухомої, тобто нерухомо. Остаточо робимо висновок, що ферма є геометрично незмінюваною.

3.1.3 Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності

Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності ґрунтується на тому, що зусилля у такій системі повинні бути скінченними і однозначними. Отже, якщо при розрахунку на довільне навантаження хоча би одне зусилля виявляється неоднозначним або нескінченно великим, система геометрично змінювана. Найпростішим навантаженням є нескінченно мале – нульове навантаження. Звідси *метод нульового навантаження*. Застосування цього методу покажемо на прикладі ферми (рис. 47, а).

Виріжемо трикутник 1-2-3 і розглянемо його рівновагу:

$$\sum F_x = 0; \quad -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = 0; \quad -N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha + N_3 - F = 0;$$

$$\sum M_O = 0; \quad N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot 0 + N_3 \cdot 0 + F \cdot r = 0.$$

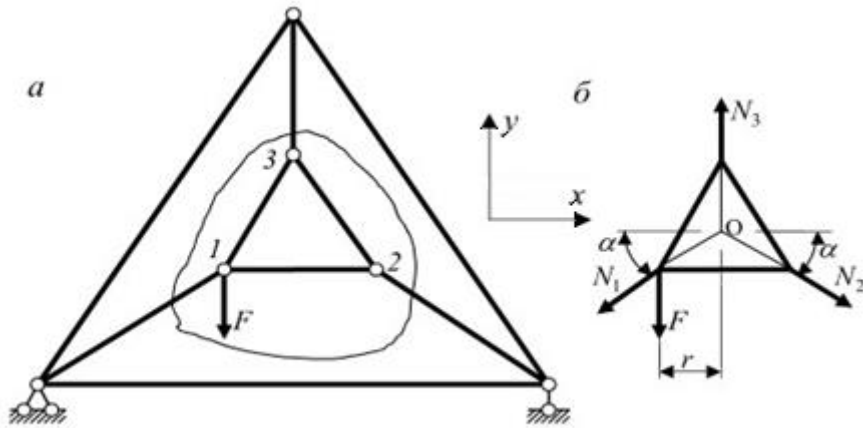


Рис. 47. Ферма (а); вирізаний трикутник 1-2-3 (б)

Визначник одержаної системи трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{vmatrix} -\cos \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ дорівнює нулю, отже розв'язок системи}$$

дає нескінченно великі значення зусиль N_1 , N_2 , N_3 . Це свідчить про геометричну змінюваність системи. Зазначимо, що при нульовому навантаженні ($F=0$) розв'язання буде давати невизначені зусилля виду $0/0$.

3.2 Статично визначувані рами

3.2.1 Основні поняття

Рамою називають стержневу систему, елементи (стержні) якої жорстко зв'язані між собою в усіх або в частині вузлів.

Рами в будівництві застосовуються дуже різноманітно, особливо в зв'язку з використанням залізобетонних конструкцій. Вони широко застосовуються в каркасах будівель, у підмурках обладнання, можуть утворювати окремі елементи конструкції: рамні стояки, безроскісні ферми й ін.

Рами можуть бути одно- та багатопверховими. Найбільш складними є рами промислових споруд.

Рами, у яких усі реакції та внутрішні зусилля можна визначити за допомогою одних лише рівнянь рівноваги, називають *статично визначуваними*.

Основними елементами рам (рис. 48) є стояки й ригелі. *Стояком* називають вертикальний або близький до вертикального стержень, наприклад, стержень *AC* (рис. 48, *а*). *Ригелем* називають горизонтальний чи близький до нього за нахилом стержень, наприклад, стержень *CD* (рис.48, *в*). Ригелі можуть бути прямолінійними, ламаного або криволінійного обрису (рис. 48, *а...г*). Відстань l між центрами опор називається прольотом, відстань h від центру опор до найбільш високої точки осі ригеля рами – висотою рами.

Рама, зображена на рис. 48, *б*, називається тришарнірною за кількістю опорних та проміжних шарнірів.

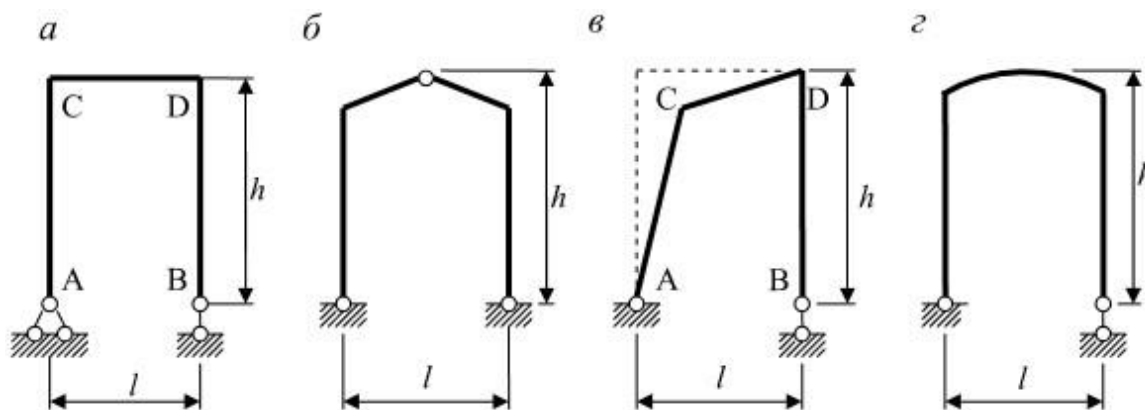


Рис. 48. Деякі види рам

На рис. 49 наведені консольні балки з ламаними осями, які розраховуються так само, як і рами.

При дії навантаження в опорних закріпленнях рами виникають опорні реакції, а в кожному поперечному перерізі рами – внутрішні зусилля. У

загальному випадку в перерізах стержнів рами діють: *згинаючий момент M , поперечна або перерізуюча сила Q та поздовжня сила N .*

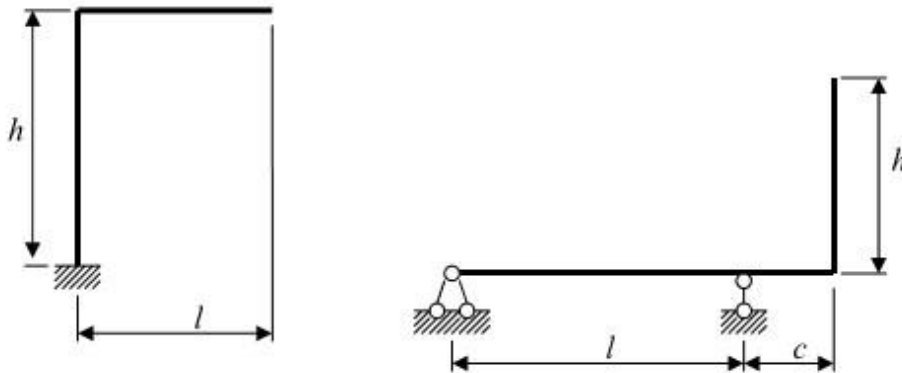


Рис. 49. Консольні балки з ламаними осями

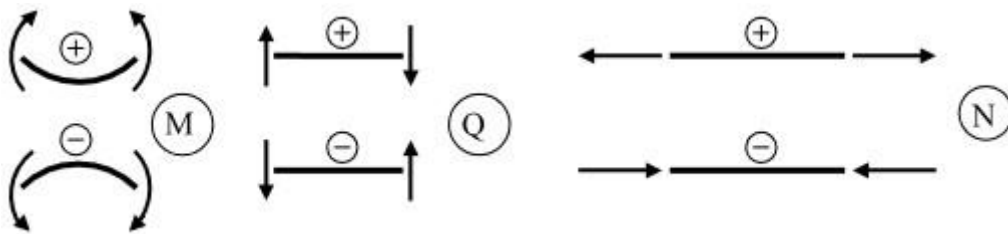


Рис. 50. Правила знаків для визначення внутрішніх зусиль

Правила визначення цих зусиль одержані в п.,п. 1.3.2. та 2.2.2 на підставі методу перерізів:

- *згинаючий момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, розташованих на одній із відсічених частин, відносно центру ваги перерізу;*
- *поперечна сила дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил, розташованих на одній із відсічених частин, на нормаль до осі стержня в перерізі;*
- *поздовжня сила дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил, розташованих на одній із відсічених частин, на дотичну до осі стержня в перерізі.*

Правила знаків для визначення цих внутрішніх зусиль наведені на рис.

50.

3.2.2 Розрахунок рами

Основною метою розрахунку рами є обчислення опорних реакцій і побудова епюр внутрішніх зусиль.

Розглянемо приклад розрахунку рами, що зображена на рис. 51,а. При визначенні опорних реакцій V_A , H_A , R_B бажано використовувати раціональні рівняння рівноваги, тобто такі, до кожного з яких входить лише одна із трьох реакцій.

Так, для визначення реакції R_B застосуємо спосіб моментної точки, якою є точка перетину ліній дії реакцій H_A та V_A , тобто т. А:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot \frac{1}{3} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0, R_B = \frac{3ql}{2}.$$

Для реакції H_A моментною точкою є точка перетину ліній дії реакцій V_A та R_B , тобто т. B' :

$$\sum M_{B'} = 0, H_A \cdot \frac{l}{3} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0, H_A = \frac{3ql}{2}.$$

Реакцію V_A зручно визначити способом проєкцій, оскільки інші дві реакції R_B та H_A паралельні одна одній:

$$\sum y = 0; V_A - q \cdot l = 0; V_A = q \cdot l.$$

Для перевірки візьмемо суму моментів сил відносно т. Д:

$$\sum M_D = 0; H_A \cdot h - V_A \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot \frac{l}{3} = \frac{3ql}{2} \cdot \frac{2l}{3} - q \cdot l \cdot l - \frac{ql^2}{2} - \frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0.$$

Якщо реакція отримана із знаком «мінус», це означає що її дійсний напрямок протилежний прийнятому.

Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль розіб'ємо раму на ділянки. Межами ділянок повинні бути: вузли рами, точки прикладання зосереджених сил та моментів, точки стрибкоподібної зміни інтенсивності розподіленого навантаження. У нашому прикладі таких ділянок три: AC , CD , DB .

Спочатку побудуємо *епюру згинаючих моментів*. Для цього, розглядаючи кожен ділянку, перш за все залежно від виду навантаження визначаємо обрис епюри: лінійний, якщо на ділянці відсутнє навантаження, і криволінійний при наявності на ділянці розподіленого навантаження (при рівномірному

навантаженні епюра моментів окреслена за квадратною параболою). Залежно від обрису призначаємо кількість перерізів, за якими можна побудувати епюру: два для лінійної ділянки і три для криволінійної.

Для визначення знаків моментів на вертикальних стержнях раму слід повертати так, щоб вони розташувались горизонтально. З цією метою обернемо будь-яку точку на рисунку рами і позначимо її «зірочкою» (рис. 51, а). Ця точка обирається довільно, бажано – між стояками та нижче всіх ригелів. Поворот рами будемо здійснювати так, щоб «зірочка» була розташована під розглядуваним стержнем.

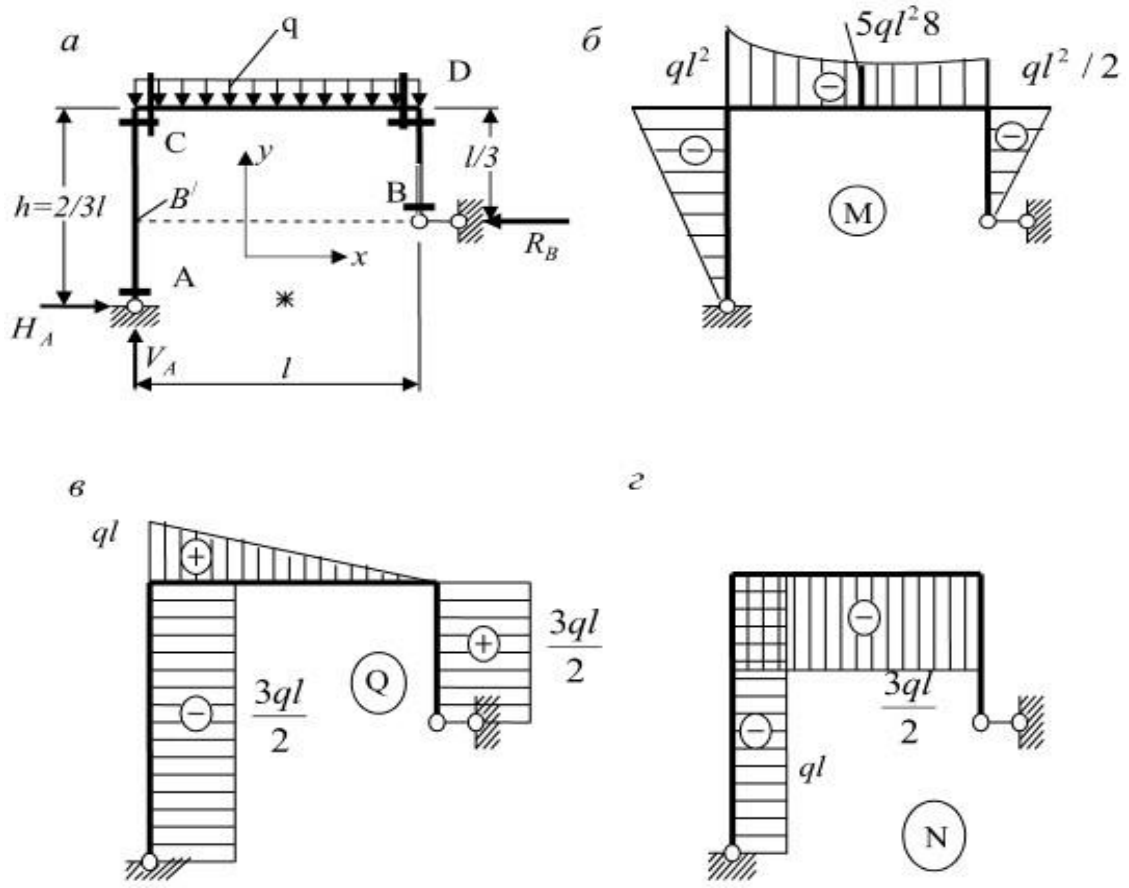


Рис. 51

Почнемо, наприклад, з ділянки AC. Розподілене навантаження на ній відсутнє, і епюра моментів повинна бути лінійною. Тому достатньо взяти два перерізи на кінцях ділянки.

Обернувши раму навколо «зірочки» за годинниковою стрілкою на 90° , маємо т. А розташованою на лівому кінці стержня і т. С – на правому.

Позначатимемо моменти у перерізах, розташованих нескінченно близько до лівого та правого кінців індексами відповідно «поч» та «кін».

Для визначення згинаючого моменту у перерізі на початку стержня обираємо частину рами, розташовану ліворуч від перерізу як таку, на якій діє менше сил, ніж на правій. Відповідно до рис. 50 моменти, що обертають ліву частину за годинниковою стрілкою будуть додатними, проти годинникової стрілки – від’ємними. Отже маємо:

$$M_{\text{поч}} = \sum_{\text{лів}} M = V_A \cdot 0 - H_A \cdot 0 = 0.$$

Зазначимо, що при визначенні згинаючого моменту за правими силами за рис. 53 додатними будуть моменти, що обертають раму проти годинникової стрілки. У цьому випадку обчислення моменту більш складне:

$$M_{\text{поч}} = \sum_{\text{прав}} M = -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot \frac{h}{2} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0.$$

При обчисленні згинаючого моменту у перерізі на кінці стержня також зручно розглянути ліву частину рами:

$$M_{\text{кін}} = \sum_{\text{лів}} M = -H_A \cdot h = -\frac{3ql}{2} \cdot \frac{2l}{3} = -ql^2.$$

Так само визначаємо згинаючі моменти на кінцях ділянки DB . Для визначення знаків моментів обертаємо раму на 90° проти годинникової стрілки. Згинаючі моменти у перерізах нескінченно близьких до лівого та правого кінців ділянки, відповідно до точки D та B будуть такі:

$$M_{\text{кін}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot 0 = 0; \quad M_{\text{поч}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot \frac{l}{3} = -\frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{ql^2}{2}.$$

На ділянці CD маємо розподілене навантаження, тому епюра M на ній буде криволінійною. Для побудови епюри одержимо згинаючі моменти на кінцях ділянки:

$$M_{\text{поч}} = \sum_{\text{лів}} M = -H_A \cdot h = -ql^2; \quad M_{\text{кін}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot \frac{l}{3} = -\frac{ql^2}{2}.$$

Додатково необхідно обчислити момент у середині ділянки. Його можна обчислити за загальним правилом як суму моментів лівих або правих сил:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = M_{cp} = \sum_{\text{лів}} M = V_A \cdot \frac{l}{2} - H_A \cdot h - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql \cdot l}{2} - \frac{3ql \cdot 2l}{2 \cdot 3} - \frac{ql^2}{8}$$

$$= -\frac{5ql^2}{8}.$$

Більш просто можна обчислити момент у середині будь-якої ділянки, на якій діє рівномірно розподілене навантаження (рис.36) на підставі принципу незалежності дії сил:

$$M_{cp} = \frac{M_{\text{поч}} + M_{\text{кін}}}{2} + \frac{ql^2}{8}. \quad (56)$$

Зазначимо, що у (56) згинаючі моменти на кінцях ділянки беруть з урахуванням їхніх знаків, а знак «плюс» перед другим доданком відповідає навантаженню, спрямованому донизу.

Отже, для цієї ділянки одержимо:

$$M_{cp} = \frac{-ql^2 - \frac{ql^2}{2}}{2} + \frac{ql^2}{8} = -\frac{5ql^2}{8}.$$

За одержаними значеннями на рис. 51,б побудовано епюру M . Нагадаємо, що додатні значення моментів відкладаються донизу. Отже за таких правил побудови епюра завжди повинна бути розташована з боку розтягнутих волокон.

Побудову епюри поперечних сил виконуємо аналогічно.

Ділянка AC – при відсутності навантаження поперечна сила незмінна, тому для довільно розташованого перерізу визначаємо:

$$Q = \sum_{\text{лів}} x = -H_A = -\frac{3ql}{2}.$$

Так само на ділянці DB :

$$Q = \sum_{\text{прав}} x = R_B = \frac{3ql}{2}.$$

На ділянці CD при наявності рівномірно розподіленого навантаження поперечна сила змінюється за лінійним законом. Отже маємо:

$$Q_{\text{поч}} = \sum_{\text{лів}} y = V_A = ql, \quad Q_{\text{кін}} = \sum_{\text{прав}} y = 0.$$

Відкладаючи на стержнях рами додатні значення Q доверху, а від'ємні – донизу, одержимо епюру поперечних сил (рис. 51,в).

Визначення поперечних сил, особливо для складних рам, можна виконати інакше – за епюрою згинаючих моментів, використовуючи

диференціальну залежність між поперечною силою та згинаючим моментом та значення балочної поперечної сили:

$$Q_{\text{поч}}^{\text{кін}} = \frac{M_{\text{кін}} + M_{\text{поч}}}{l} \pm \frac{ql}{2}. \quad (57)$$

Наприклад, на ділянці CD маємо:

$$Q_{\text{поч}}^{\text{кін}} = \frac{-\frac{ql^2}{2} + ql^2}{l} \pm \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2} \pm \frac{ql}{2} = \begin{cases} ql, \\ 0. \end{cases}$$

При визначенні *поздовжніх сил* слід зауважити, що поздовжня сила на ділянці (або й у межах усього стержня) не буде змінюватись, якщо навантаження діє перпендикулярно до осі стержня. Отже, у нашому прикладі:

$$N_{AC} = \sum_{\text{лів}} y = -V_A = -ql, \quad N_{DB} = \sum_{\text{прав}} y = 0, \quad N_{CD} = \sum_{\text{прав}} x = -R_B = -\frac{3ql}{2}.$$

Додатні поздовжні сили на епюрі N відкладаються на стержнях доверху, від'ємні - донизу (рис. 51, з).

Перевірка епюр на окремих стержнях виконується, як звичайно, за наявності екстремумів, стрибків, перегинів. Крім того, перевіряється рівновага вузлів - окремо під дією згинаючих моментів (рис. 52,а) і, окремо, під дією поперечних та поздовжніх сил (рис. 52,б). При цьому напрям дії згинаючих моментів визначається за розташуванням розтягнутих волокон - з боку розташування згинаючих моментів на епюрі M (штрихові лінії на рис. 52,а). Дія додатних за знаком поперечних сил відповідає повороту вузла за годинниковою стрілкою, від'ємних - проти годинникової стрілки. Додатні поздовжні сили діють у напрямку від вузла, що відповідає розтягненню стержнів.

По рис.52, а для вузла C маємо: $\sum M = ql^2 - ql^2 = 0$; для вузла D :

$$\sum M = \frac{ql^2}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

На рис.52, б для вузла C $\sum x = \frac{3ql}{2} - \frac{3ql}{2} = 0$; $\sum y = ql - ql = 0$ та для вузла

D :

$$\sum x = \frac{3ql}{2} - \frac{3ql}{2} = 0; \quad \sum y = 0.$$

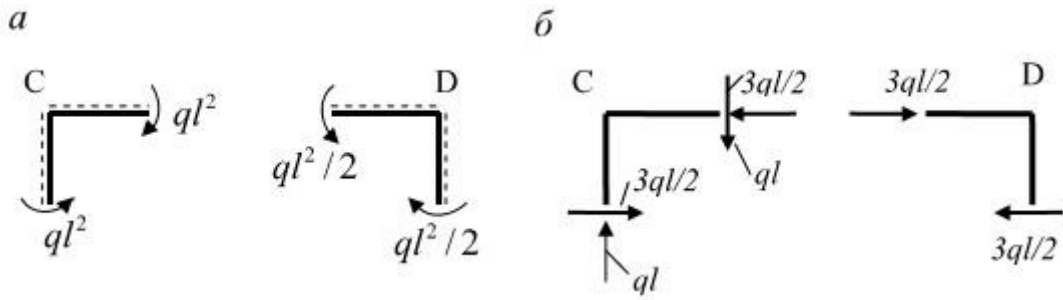


Рис. 52

Зазначимо, що для складних, особливо статично невизначуваних рам, умови рівноваги вузлів під дією поздовжніх та поперечних сил можна використовувати для визначення поздовжніх сил.

3.3 Статично визначувані ферми

3.3.1 Основні поняття. Класифікація ферм

Як відомо, при роботі стержня на згин нормальне напруження в поперечному перерізі змінюється за лінійним законом (рис. 53а). Найбільш напруженими при цьому будуть крайні волокна, а матеріал середньої частини не повністю використовується. Саме тому в балках намагаються більшу частину матеріалу зосередити в поясах, максимально зменшуючи розміри іншої частини перерізу (стінка). Так виник двотавровий переріз, найбільш пристосований для роботи на згин (рис. 53,б).

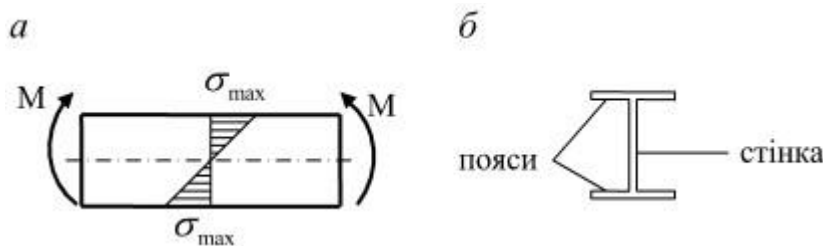


Рис. 53

При зростанні прольоту для сприйняття більших згинаючих моментів висоту перерізу доводиться збільшувати настільки, що витрати матеріалу на стінку балки стають переважаючими. У цьому випадку вигідно перейти від суцільного перерізу до наскрізного, або гратчастого, коли замість суцільної балки конструкцію виготовляють у вигляді системи прямолінійних стержнів

(рис. 54, а). Така система називається *фермою*. Стержні у вузлах ферми з'єднуються жорстко: зварюванням (рис. 54в), на заклепках або болтах. Але через велику гнучкість стержнів урахування жорсткості їх з'єднань несуттєво відбивається на роботі ферми. У зв'язку із цим у розрахунковій схемі ферми припускають, що в усіх вузлах знаходяться ідеальні шарніри (рис. 54,б).

У спорудах, елементами яких є ферми, звичайно передбачають передачу навантаження у вузли ферм, тому їх стержні працюють тільки на розтяг-стиск. Ця обставина і зумовлює більшу економічність ферм у порівнянні з балками за рахунок більш повного використання матеріалу при роботі стержня на розтяг-стиск. Дійсно, у перерізі розтягнутого стержня, на відміну від стержня, що згинається, нормальне напруження однакове в усіх точках, тому матеріал використовується повністю.

За розміщенням та характером роботи у фермі розрізняють *пояси* й *гратки*. Пояси складають стержні, які обмежують контур ферми зверху та знизу.

Гратки утворюються похилими елементами – *розкосами* та вертикальними – *стояками* та *підвісками* (рис. 54,б). Стояки працюють на стиск, а підвіски – на розтяг.

Частина ферми, розташовану в межах між суміжними вузлами вантажного поясу, називають *панеллю*. Відстань між цими вузлами називають довжиною панелі й позначають d .

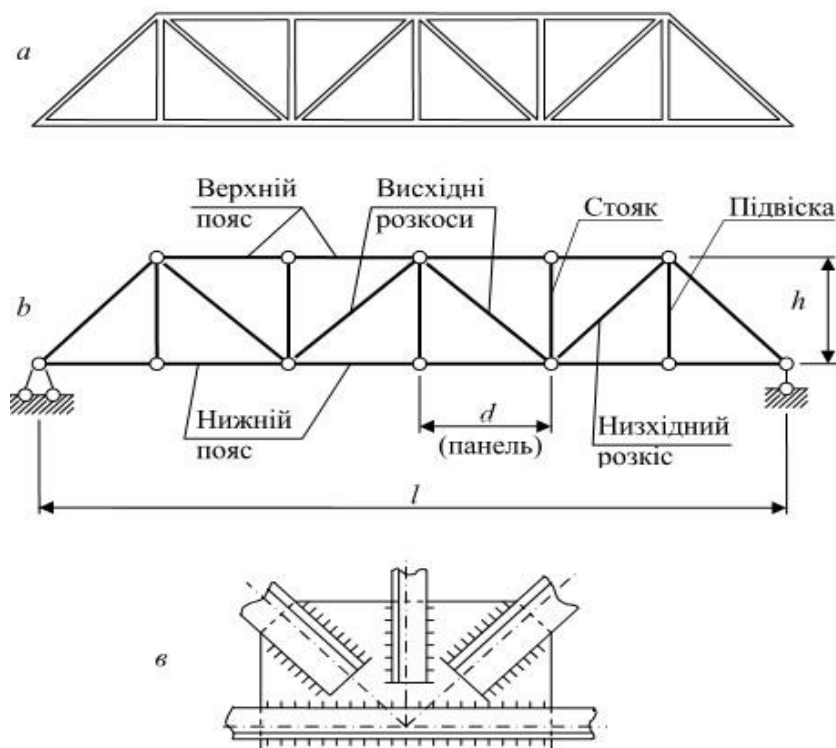


Рис. 54
68

Ферми класифікують за такими ознаками:

-за призначенням: *мостові* (ферми прогонових споруд мостів, мостових кранів), *кряжні* (ферми покриттів будов та споруд), *ферми каркасів* будов і споруд та ін., наприклад, ферми, що є частинами корпусу судна, літака, опори ліній електричних передач (ЛЕП).

-за напрямком реакцій при вертикальному навантаженні: *балочні* (рис. 55,а), *аркові* або *розпирні* (рис. 55,в); а також *консольні* (рис. 55,б);

-за обрисом поясів: ферми з *паралельними поясами* (рис. 54,б), із *трикутним* (рис. 56,а) та *полігональним* (рис. 56,б) обрисом;

-за системою ґраток: ферми з простими ґратками – *трикутними* (рис. 57,а), *розкісними* (рис. 57,б), *напіврозкісними* (рис. 57,в); ферми із складними ґратками – *двохрозкісними* (рис. 57, г), *багаторозкісними* та ін., ферми із складеними ґратками – *шпренгельні* (рис. 57,д) та інші ферми, в яких окремі стержні є ґратчастими, тобто *теж фермами*.

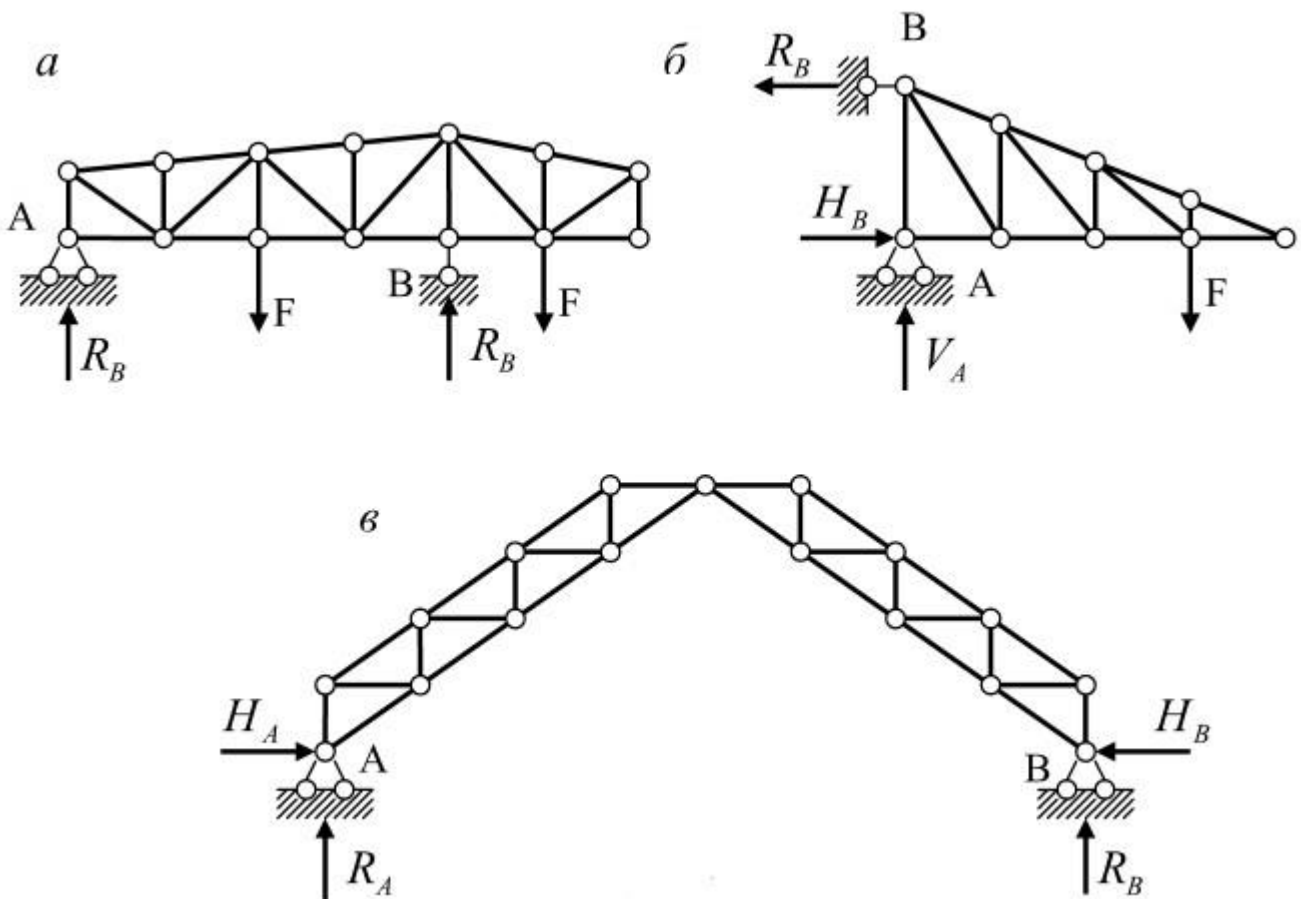


Рис. 55

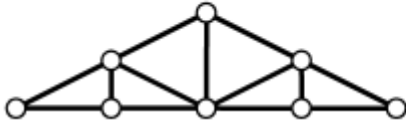
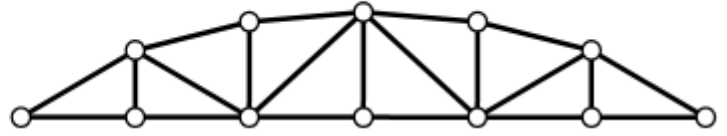
a*б*

Рис. 56

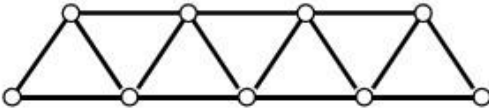
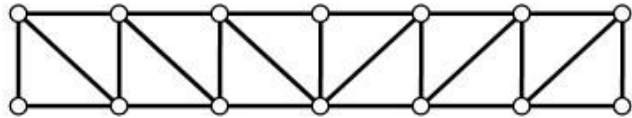
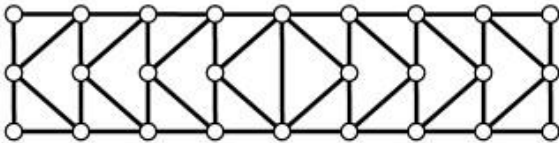
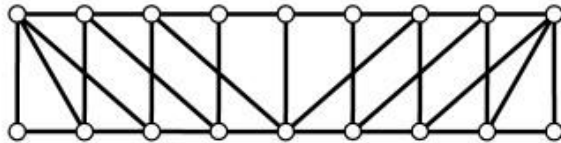
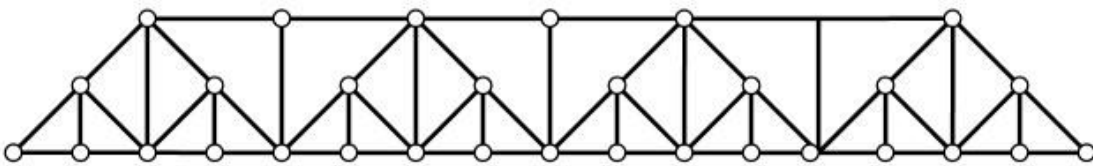
a*б**в**г**д*

Рис. 57

Розрахунок ферм перш за все полягає у визначенні зусиль у стержнях. Для цього найбільш часто застосовують *метод перерізів*.

Метод перерізів залежно від розміщення та конфігурації перерізу, а також від типу використаних рівнянь рівноваги здійснюється способами: *вирізання вузлів, моментної точки, проєкцій, двох перерізів, замкнутого перерізу*.

3.3.2 Спосіб вирізання вузлів

Спосіб вирізання вузлів застосовують для визначення зусиль у фермах, розрахункова схема яких може бути утворена послідовним приєднанням вузлів парами стержнів (рис.58,*a*). У цьому випадку розрахунок починають із двохстержневого вузла, наприклад, з вузла 1 (рис.58,*б*), з умов рівноваги якого

$\Sigma x=0$ та $\Sigma y=0$ знаходять зусилля N_{1-2} та N_{1-6} . Далі переходять до наступного вузла, в який входять два невідомих зусилля (вузол 2 на рис. 61, в). Обчисливши зусилля N_{2-3} , N_{2-6} з таких самих рівнянь рівноваги, продовжують розглядати наступні вузли в такій послідовності, щоб у кожному новому вузлу зустрічалось не більше двох невідомих зусиль (вузли 3, 4, 5). Після обчислення всіх зусиль залишаються невикористаними деякі умови рівноваги (одне у вузлу 5 і два у вузлу 6). Виконання цих умов рівноваги свідчить про правильність обчислення зусиль.

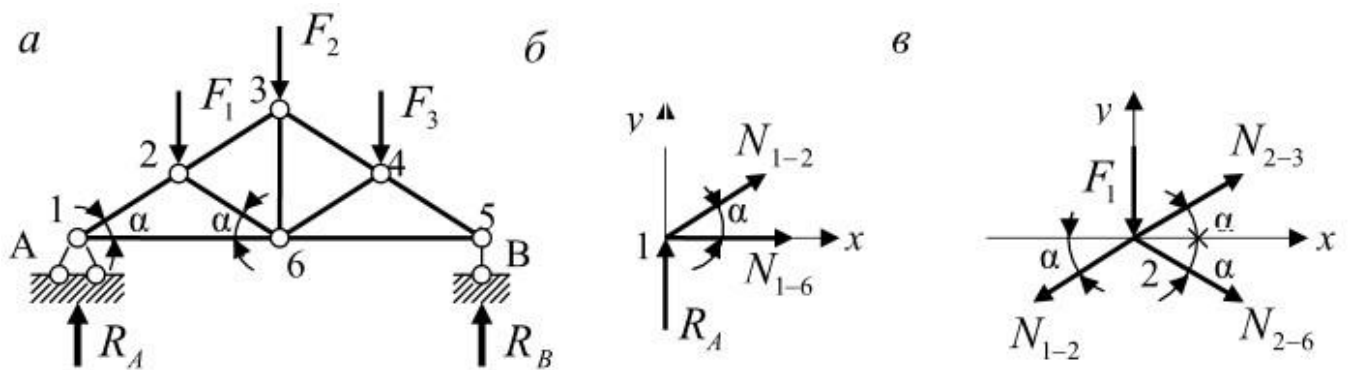


Рис. 58

У деяких випадках для обчислення зусиль непотрібний запис умов рівноваги. Ці особливі випадки розташування стержнів та навантаження у вузлах наведено на рис. 59 (в усіх випадках на рис. 59 кут α не дорівнює 0° або 180°).

Перевагою способу вирізання вузлів є одноманітність обчислення зусиль. До його вад відносять накопичення похибок розрахунку при переході від вузла до вузла та необхідність обчислення допоміжних зусиль при визначенні поодиноких зусиль.

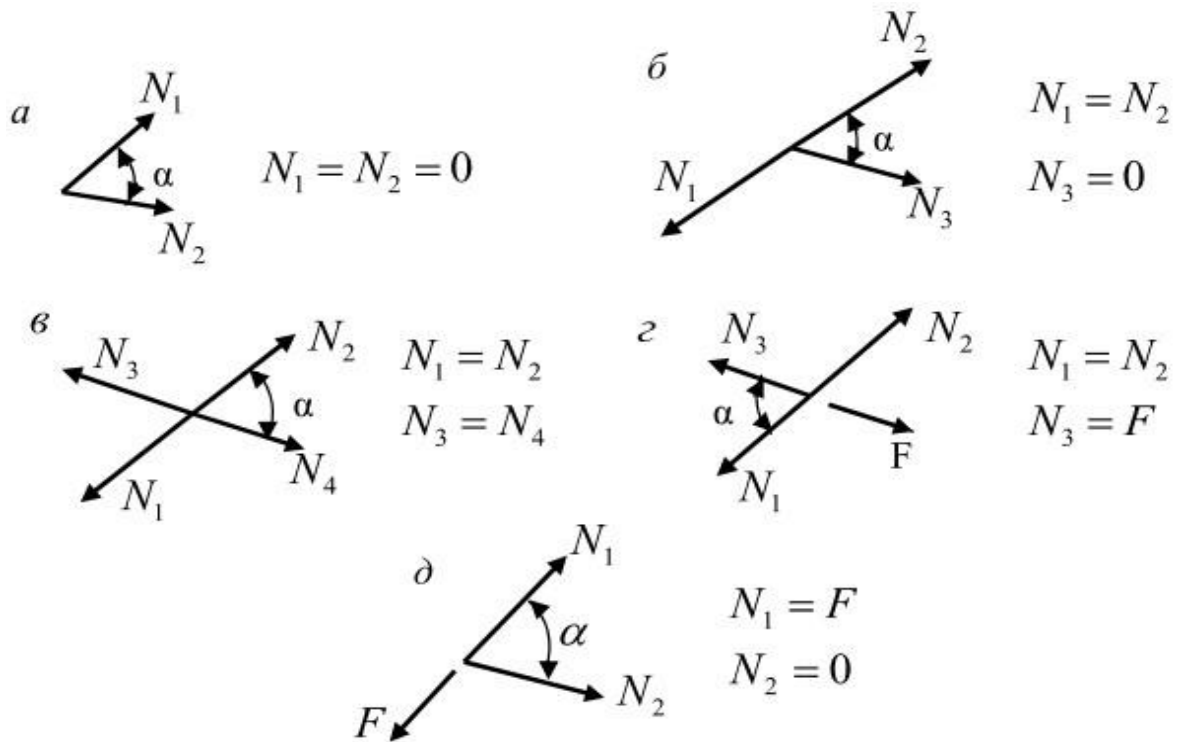


Рис. 59

Наведений вище спосіб вирізання вузлів у класичній формі добре пристосований для ручного розрахунку. Але він не є універсальним, тому що непридатний для розрахунку ферм із довільним розташуванням стержнів. У зв'язку із цим для розрахунків на комп'ютері спосіб вирізання вузлів застосовується в більш загальній формі, зі складанням повної системи рівнянь рівноваги усіх вузлів.

3.3.3 Розподіл зусиль у стержнях балочної ферми. Спосіб моментної точки та спосіб проєкцій.

При обчисленні поодиноких зусиль у стержнях ферми зручно користуватися *способом моментної точки й способом проєкцій*. Їх застосування розглянемо на прикладі балочної ферми із трикутними ґратками з підвісками (рис. 60, а). Опорні реакції знайдемо з умови симетрії:

$$R_A = R_B = \sum \frac{F}{2} = 3,5 \cdot F.$$

Поставимо мету визначити зусилля в стержнях четвертої зліва панелі. Для обчислення цих зусиль проведемо переріз I-I, що розтинає три стержні, і уявно відкинемо праву частину ферми.

При обчисленні зусилля N_1 звернемо увагу на те, що інші розрізані стержні (зусилля N_2 , N_3) перетинаються в точці m_1 . Тоді застосуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_{m1} = 0, R_A \cdot 3d - F(2d + d) - N_1 \cdot h = 0. (58)$$

Розв'язавши рівняння (58), знайдемо шукане зусилля:

$$N_1 = 7,5 \frac{d}{h}.$$

Проаналізуємо рівняння (58). Якщо розглядати балку (рис.60,б) однакового з фермою прогону, завантажену тим самим навантаженням, згинаючий момент у перерізі m_1 - *балочний згинаючий момент*

$$M_{m1}^o = R_A \cdot 3d - F(2d + d). (59)$$

Замінивши перші два доданки в рівнянні (58) співвідношенням (59), одержимо $M_{m1}^o - N_1 \cdot h = 0$, звідси

$$N_1 = \frac{M_{m1}^o}{h}. (60)$$

На підставі (60) можна зробити висновки, що, по-перше, нижній пояс ферми розтягнутий, а, по-друге, зусилля в елементах нижнього поясу зростають при віддаленні від опор до середини прогону ферми (наслідуючи закон зміни балочних моментів M^o).

Аналогічно застосуємо спосіб моментної точки для обчислення зусилля N_2 :

$$\sum M_{m2} = 0; R_A \cdot 4d - F(3d + 2d + d) + N \cdot h = 0. (61)$$

В останньому рівнянні перші дві доданки являють собою балочний момент у перерізі m_2 . Тоді вираз (61) набуває такого вигляду:

$$M_{m2}^o + N_2 \cdot h = 0,$$

Звідси

$$N_2 = -\frac{M_{m2}^o}{h}. (62)$$

Отже, верхній пояс стиснутий, а зусилля в ньому, як і в нижньому поясі, змінюються за законом балочних згинаючих моментів.

Для обчислення зусилля N_3 скористаємося способом проєкцій, бо інші розрізані стержні паралельні:

$$\sum y = 0, R_A - 3F - N_3 \cdot \sin \alpha = 0. (63)$$

Звідси маємо $N_3 = \frac{F}{(2\sin \alpha)}$.

Зовнішні сили, що, входять у рівняння (63), можна виразити через балочні поперечні сили. Дійсно, згідно з рис. 30, $Q_I^o = R_A - 3F$, і рівняння набуває вигляду: $Q_I^o - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$, звідки

$$N_3 = \frac{Q_I^o}{\sin \alpha}. \quad (64)$$

Якщо виконати таку саму послідовність обчислень для зусилля (перетин II-II), прийдемо до аналогічного виразу:

$$N_4 = -\frac{Q_{II}^o}{\sin \alpha}. \quad (65)$$

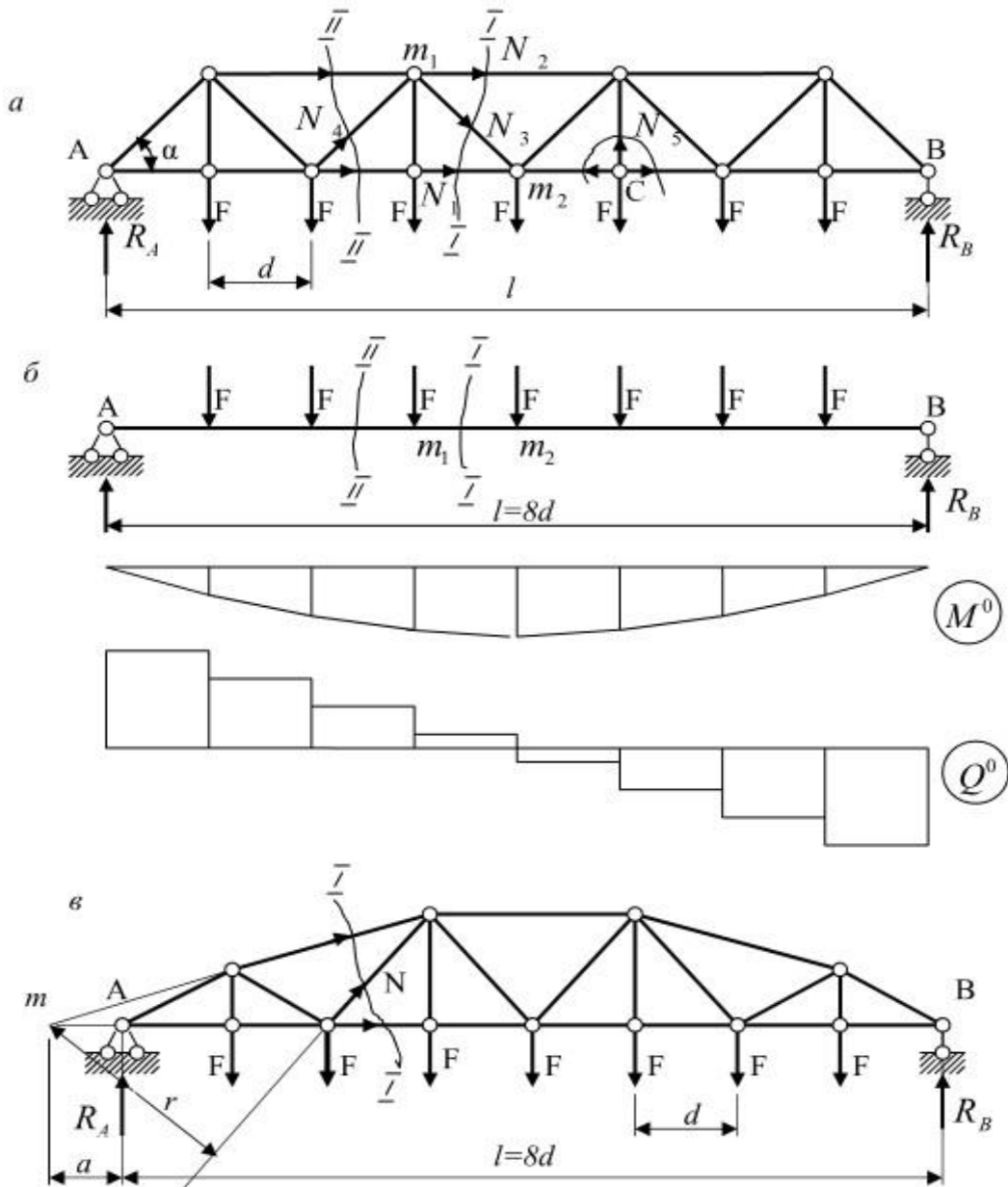


Рис. 60

На підставі виразів (63) і (65) робимо висновок, що зусилля в розкосах наслідують закон зміни балочних поперечних сил (зменшуються за абсолютною величиною від опор до середини прольоту ферми). При цьому висхідні розкоси (див. N_4) стиснуті, а низхідні (N_3) – розтягнуті.

Завершуючи аналіз розподілу зусиль у досліджуваній фермі, визначимо зусилля в підвісці N_5 . Неважко побачити, що вузол C , до якого входить підвіска, відповідає окремому випадку на рис. 59, з: $N_5 = F$.

Очевидно, що всі підвіски працюють в однакових умовах – вони розтягнуті силою, прикладеною у відповідному вузлі нижнього поясу.

Виконаний аналіз дозволяє провести аналогію між роботою ферми та роботою балки. Серед елементів ферми виділяються пояси, що сприймають балочні згинаючі моменти, і ґратки, що сприймають балочну поперечну силу. Тому іноді ферми називають наскрізними або ґратчастими стержнями на відміну від балок – суцільних стержнів.

Цю аналогію можна поширити й на інші ферми. Наприклад, для оцінки роботи поясів та розкосів ферми опори ЛЕП (рис. 61, а) під вітровим навантаженням можна, замінивши її стержнем (рис. 61, б), за епюрами M та Q одержати уявлення про роботу елементів ферми.

Прикладом використання балочної аналогії може бути застосування ферм із полігональним обрисом поясів (рис. 60, в). У цьому випадку збільшення висоти ферми до середини прогону дозволяє зробити розподіл зусиль в елементах поясів більш рівномірним.

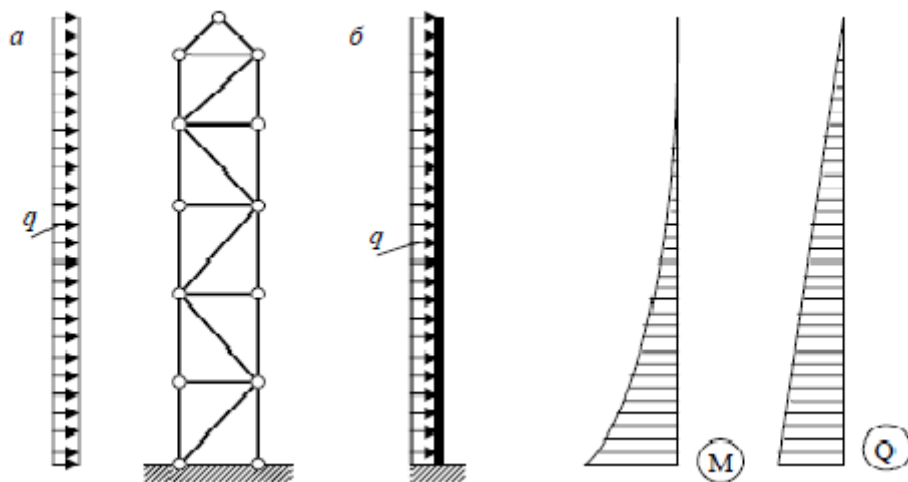


Рис. 61

Відзначимо, що для обчислення зусиль у розкосах такої ферми

способом проекцій скористатися неможливо. Наприклад, для визначення зусилля N у розкосі третьої панелі (рис. 60,а) проведено переріз I-I.

Розрізані при цьому стержні поясів непаралельні й при продовженні перетинаються в точці m . Тоді застосовуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_m = 0; R_A \cdot a - F(a + d) - F(a - 2d) + N \cdot r = 0,$$

$$N = - \frac{R_A \cdot a - F(2a + 3d)}{r} = - \frac{F(1,5a - 3d)}{r}.$$

Відносно застосування способів визначення зусиль відзначимо, що в тих випадках, коли переріз перетинає три стержні, для визначення зусиль у них завжди раціонально скористатися одним зі способів – моментної точки або проекцій. Якщо зусилля у двох перерізаних стержнях перетинаються при продовженні, ця точка перетину є моментною точкою для зусилля у третьому стержні (спосіб моментної точки). Якщо зусилля у двох стержнях паралельні одне одному, для визначення третього зусилля беруть суму проекцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль (спосіб проекцій).

3.4 Основні теореми для пружних систем.

Визначення переміщень

3.4.1 Принцип можливих переміщень для пружних систем

Розрахунок статично невизначних систем, а також усіх систем на жорсткість пов'язаний із необхідністю обчислення переміщень. Найбільш загальними методами визначення переміщень у пружних системах є енергетичні, засновані на дослідженні потенціальної енергії системи. Одним із методів, що застосовується для визначення переміщень у лінійно деформованих системах, є розглянутий у цьому розділі *метод Мора*.

Виведення формул для визначення переміщень за методом Мора можна зробити на основі принципу можливих переміщень. Цей принцип є універсальним законом механіки. Він, зокрема, використовується при доведенні основних енергетичних теорем для пружних систем.

Нагадаємо формулювання принципу можливих переміщень. *Якщо система знаходиться в рівновазі, то сума робіт усіх її зовнішніх і внутрішніх сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.*

Якщо роботу зовнішніх сил позначити W , а роботу внутрішніх сил - U , то принцип можливих переміщень можна виразити формулою

$$W + U = 0. \quad (66)$$

Можливим переміщенням є довільне нескінченно мале переміщення, якому не заважають накладені на систему в'язі. Можливі переміщення відраховуються від стану рівноваги системи. При цьому через їх малість передбачається, що умови рівноваги системи не порушуються, тобто *зусилля не змінюються*

Розглянемо спочатку визначення роботи зовнішніх і внутрішніх сил і деякі теореми для пружних систем.

3.4.2 Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення

Як відомо, робота обчислюється як добуток постійного за величиною силового фактора на переміщення в напрямку цього фактора. Наприклад, робота сили F дорівнює добутку цієї сили на шлях, пройдений у напрямку сили, робота моменту (пари сил) – добутку моменту на кут повороту в напрямку цього моменту та ін. Для загальності міркувань у будівельній механіці застосовують поняття узагальненої сили й узагальненого переміщення.

Узагальненою силою називають будь-яку силу або групу сил (пару сил, рівномірно розподілене навантаження, дві сили, що розтягують чи стискають стержень та інші комбінації навантаження).

Узагальненим переміщенням називають таке переміщення, на якому відповідна узагальнена сила виконує роботу, тобто це множник при узагальненій силі у виразі роботи.

Узагальнену силу позначають F із порядковим індексом, а узагальнене переміщення - із двома індексами: перший з яких указує точку й напрямок переміщення (звичайно цей індекс відповідає індексу узагальненої сили, що діє в напрямку даного переміщення); другий індекс указує причину, що викликала це переміщення (індекс сили, температурний вплив, зміщення опор та ін.).

При розв'язанні ряду задач замість дійсних навантажень вводять одиничні сили або моменти. Переміщення від цих навантажень позначають δ з тими самими індексами, що й переміщення від довільних за величиною навантажень.

Як і раніше, розглядатимемо тільки лінійно деформовані системи, тобто системи, для яких залежність між переміщеннями й навантаженнями має лінійний характер. Для таких систем справедливими є такі співвідношення:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot F_k; \quad (67)$$

$$\Delta_{if} = \delta_{i1} \cdot F_1 + \delta_{i2} \cdot F_2 + \delta_{i3} \cdot F_3 + \dots (68)$$

Роботу зовнішніх (внутрішніх) сил на можливих переміщеннях називають *можливою роботою* зовнішніх (внутрішніх) сил. Для лінійно деформованих систем при обчисленні робіт у виразі (68) замість нескінченно малих можливих переміщень можуть розглядатися малі скінченні переміщення. Зокрема, через довільність можливих переміщень ними можуть бути переміщення, викликані будь-якою силою чи групою сил.

Розглянемо деяку пружну систему (рис. 62), завантажену статично прикладеною силою F_i . Статичний характер завантаження передбачає повільне зростання значення сили від нуля так, що прискорення точок системи малі й силами інерції можна знехтувати.

У процесі завантаження система деформується, і точка прикладання сили F_i переміщується в напрямку сили на величину Δ_{ii} . Залежність між силою й переміщенням при статичному завантаженні на графіку виражається прямою лінією (рис.63). Робота, що виконується силою F_i , відповідає площі заштрихованої частини графіка

$$W_{ii} = \frac{1}{2} \cdot F_i \cdot \Delta_{ii} (69)$$

и називається *дійсною роботою сили F_i* .

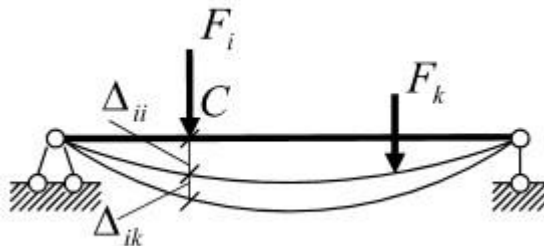


Рис. 62

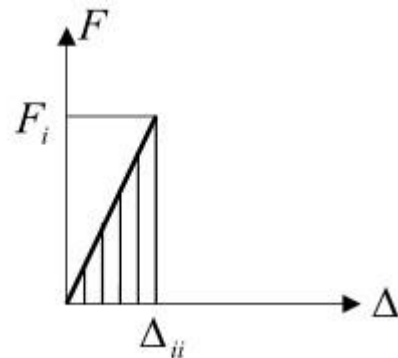


Рис. 63

Якщо тепер до системи прикласти додаткову силу F_k , то точка прикладання сили F_i одержить додаткове переміщення Δ_{ik} . Сила F_i при цьому залишається постійною й виконує роботу:

$$W_{ik} = F_i \cdot \Delta_{ik} (70)$$

Переміщення Δ_{ik} може розглядатися як можливе переміщення точки С. Тоді робота W_{ik} буде називатися *можливою роботою сили F_i* .

Порівнявши вирази (69) та (70) бачимо, що дійсна робота сили відрізняється від можливої роботи коефіцієнтом $1/2$.

3.4.3 Робота внутрішніх сил

Для визначення робіт внутрішніх сил розглянемо балку, наведену на рис. 62. У зв'язку з тим що система передбачається лінійно деформованою, для визначення в ній зусиль і переміщень можна скористатися принципом незалежності дії сил. Для цього розглянемо два стани балки (рис. 64): у першому діє сила F_i , а в другому – сила F_k . Виділимо в балці на відстані x від лівої опори елемент довжиною dx . У першому стані на гранях елемента діють внутрішні зусилля M_i та Q_i (рис. 65,а), у другому - M_k та Q_k (рис. 65, б). Ці зусилля в межах елемента можна вважати постійними.

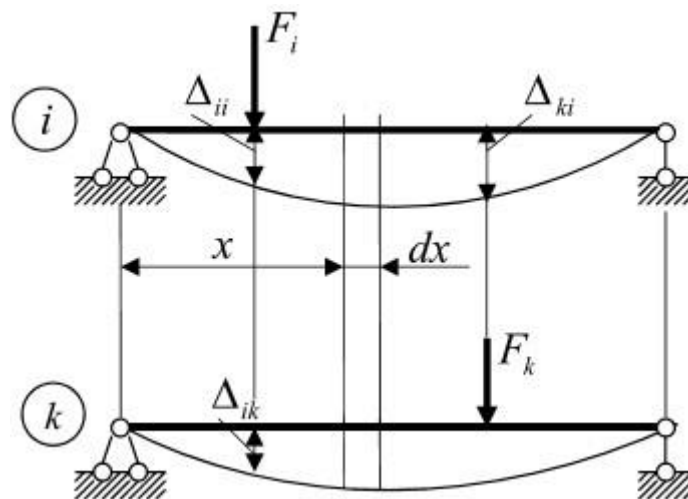


Рис. 64

Дія зусиль M_k у другому стані викликає викривлення осі елемента так, що кривина осі дорівнює χ_k , а кут між його гранями становить $\chi_k dx$ (рис. 65,в). Поперечні сили Q_k викликають зсув (рис. 65,г) так, що величина взаємного зміщення граней становить $\gamma_k dx$.

Тепер неважко записати можливу роботу внутрішніх сил елемента в першому стані на переміщеннях другого стану:

$$dU_{ik} = -M_i \cdot \chi_k dx - Q_i \cdot \gamma_k dx \quad (71)$$

Знак «мінус» пояснюється тим, що зусилля M_i і Q_i є зовнішніми по відношенню до елемента, а внутрішні зусилля спрямовані назустріч їм, тобто в

бік, зворотний переміщенням $\square_k dx$ и $\gamma_k dx$. Деформації \square_k та γ_k визначаються відомими з опору матеріалів формулами.

$$\square_k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_k}{EI}, \quad \gamma_k = \mu \frac{Q_k}{GA} \quad (72)$$

где $\mu = A \int_{(A)} \left(\frac{s_z}{I_z b}\right)^2 dA$ – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі й залежить від форми поперечного перерізу.

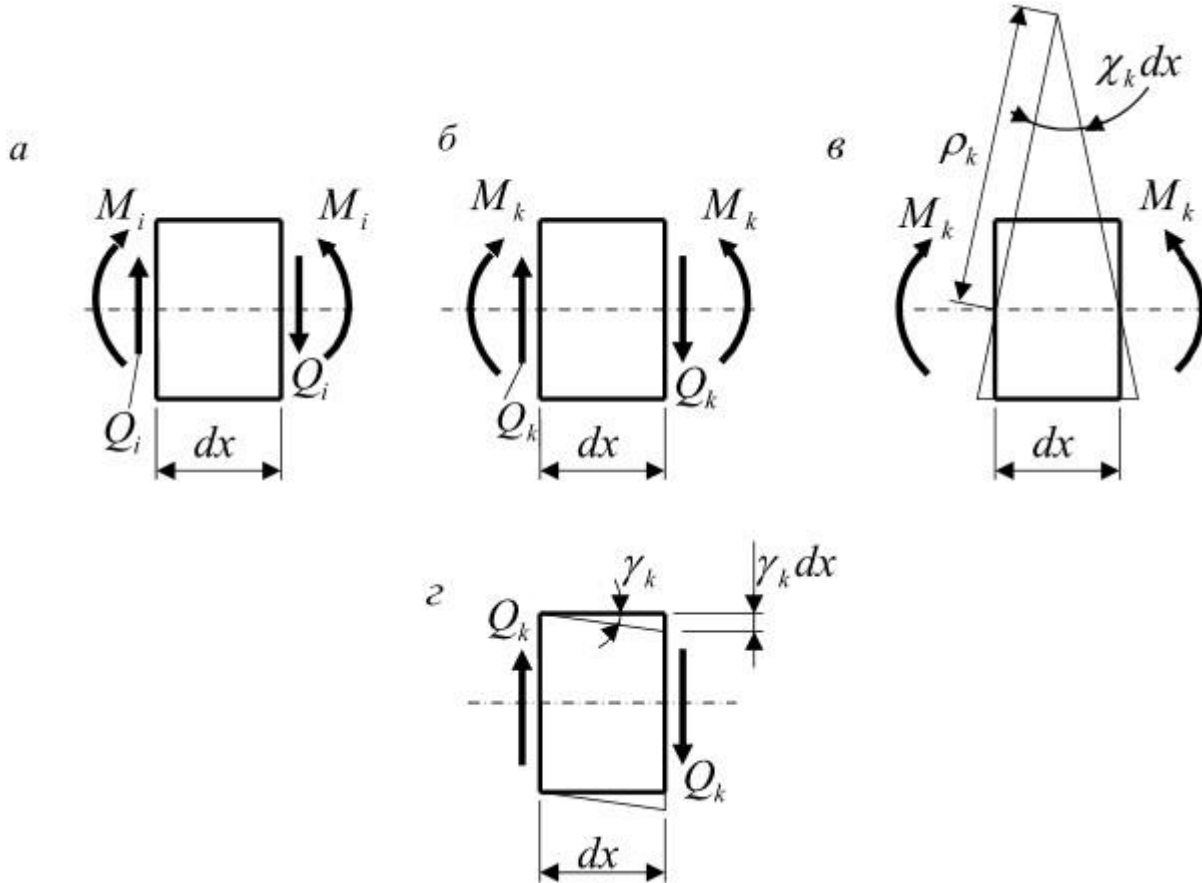


Рис. 65

Підставляючи вирази \square_k та γ_k в (71), інтегруємо обидві частини рівняння по всій довжині балки. Внаслідок одержимо можливу роботу U_{ik} :

$$U_{ik} = - \int_{(l)} \frac{M_i M_k}{EL} dx - \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{GA} dx . \quad (73)$$

У загальному випадку деформації плоскої системи у рівняння (73) додається робота поздовжніх сил N_i . При цьому слід урахувати, що осі системи можуть мати переломи й розгалуження, а функції внутрішніх зусиль – розриви. Тому, замінивши змінну x змінною s , що перебігає обрис осей системи, розіб'ємо інтеграл на суму інтегралів. Тоді остаточно можливу роботу внутрішніх сил запишемо так:

$$U_{ik} = - \sum_{(l)} \int \frac{M_i M_k}{EI} ds - \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_i Q_k}{GA} ds - \sum_{(l)} \int \frac{N_i N_k}{EA} ds. \quad (74)$$

По аналогії з (74) можна записати дійсну роботу внутрішніх сил першого стану U_{ii} , враховуючи, що деформації в цьому випадку визначаються зусиллями M_i , Q_i и N_i лінійно зростають зі збільшенням навантаження:

$$U_{ii} = -\frac{1}{2} \sum_{(l)} \int \frac{M_i^2 ds}{EI} - \frac{1}{2} \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_i^2 ds}{GA} - \frac{1}{2} \sum_{(l)} \int \frac{N_i^2 ds}{EA}. \quad (75)$$

У подальшому знак (l) в інтегралів, що означає інтегрування вздовж кожного відрізка системи, іноді відкидатимемо.

3.4.4 Теорема про взаємність

Розглянемо два стани пружної системи (рис. 64). Переміщення другого стану є можливим переміщенням цієї системи. Тоді на основі принципу можливих переміщень з урахуванням у загальному випадку поздовжніх сил одержуємо:

$$\begin{aligned} W_{ik} &= F_i \cdot \Delta_{ik} = -U_{ik} \\ &= \sum_{(l)} \int \frac{M_i M_k dx}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_i Q_k dx}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N_i N_k dx}{EA}. \end{aligned} \quad (76)$$

З іншого боку, переміщення першого стану також можуть розглядатися як можливі переміщення для сил другого стану. Тоді:

$$\begin{aligned} W_{ik} &= F_i \cdot \Delta_{ik} = -U_{ik} \\ &= \sum_{(l)} \int \frac{M_i M_k dx}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_i Q_k dx}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N_i N_k dx}{EA}. \end{aligned} \quad (77)$$

Праві частини виразів (76) та (77) відрізняються тільки порядком запису співмножників – внутрішніх зусиль, отже,

$$U_{ik} = U_{ki}, W_{ik} = W_{ki}. \quad (78)$$

Ці рівності відбивають **теорему про взаємність работ (терему Бетті)**, що може бути сформульована так: *робота зовнішніх (внутрішніх) сил i -го стану системи на переміщеннях (деформаціях) k -го стану дорівнює роботі зовнішніх*

(внутрішніх) сил k -го стану тієї самої системи на переміщеннях (деформаціях) i -го стану.

теореми про взаємність робіт впливає теорема про взаємність переміщень. Розглянемо випадок, коли пружна система завантажена одиничними силами - $F_i = 1$ и $F_k = 1$. Застосовуючи до цих двох станів системи теорему про взаємність робіт і стандартні позначення переміщень, одержимо рівність $F_i = \delta_{ik} = F_k \cdot \delta_{ki}$, звідки:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} . \quad (79)$$

Це рівняння виражає **теорему про взаємність переміщень (теорему Максвелла):** *переміщення точки прикладання i -ї сили за її напрямком, викликане дією k -ї одиничної сили, дорівнює переміщенню точки прикладання k -ї сили за її напрямком, викликаному дією i -ї одиничної сили.*

3.4.5 Обчислення переміщень за методом Мора

Нехай треба визначити переміщення Δ_i деякої точки споруди від дії заданого навантаження (рис. 66,а). Розглянемо два стани цієї споруди: перший – дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 66,а), другий – допоміжний або одиничний стан, у якому за напрямком шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 66,б).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{if} = 1 \cdot \Delta_i$ за теоремою Бетті дорівнює роботі W_{fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану. Беручи до уваги, що $W_{fi} = -U_{fi}$, одержуємо на підставі (74):

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M\bar{M}_l ds}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q\bar{Q}_l ds}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N\bar{N}_l ds}{EA} , \quad (80)$$

де M, Q, N – зусилля від заданого навантаження; $\bar{M}_l, \bar{Q}_l, \bar{N}_l$ – зусилля від одиничної сили у допоміжному стані.

Формулу (80) називають формулою Мора. За її допомогою можна визначити переміщення від навантаження в плоскій системі. Для цього:

- 1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;
- 2) за напрямком шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;

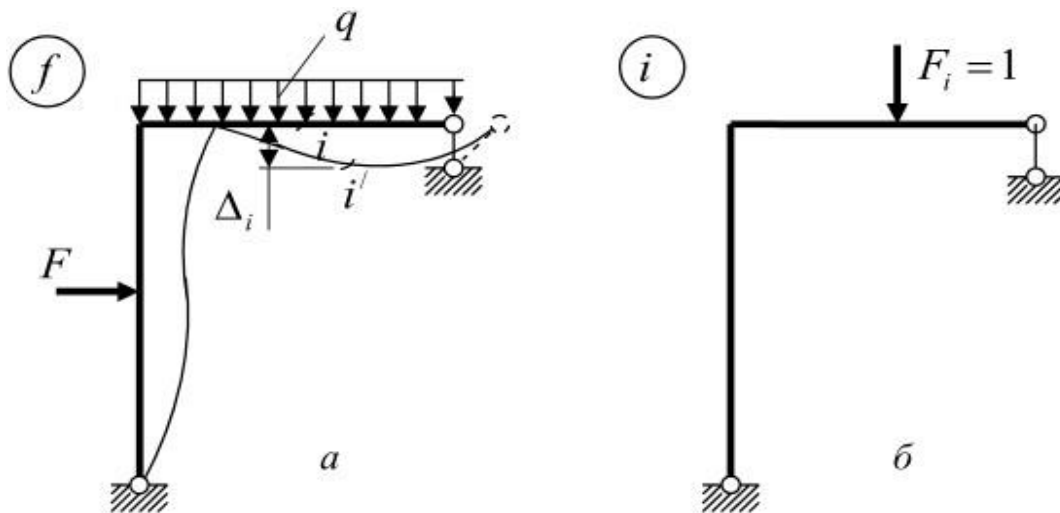


Рис. 66

3) знаходять зусилля $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$ від одиничної сили;

4) вирази зусиль підставляють у праву частину (80) та інтегруванням уздовж осей усіх елементів споруди визначають шукане переміщення.

Обчислення переміщень за допомогою формули (80) називають *методом Мора*.

В окремих випадках формула Мора набуває простішого вигляду. Так, *при розрахунку ферм*, у стержнях яких виникають лише поздовжні зусилля, перші два інтеграли дорівнюють нулю. Тоді, розбивши інтеграл, що залишився, на суму інтегралів для окремих стержнів, одержуємо:

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \int \left(\frac{N \overline{N}_i ds}{EA} \right)_k$$

Або, беручи до уваги постійність зусиль і жорсткостей у межах кожного стержня:

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \int \left(\frac{N \overline{N}_i l}{EA} \right)_k \quad (81)$$

Тут сума поширюється на всі ферми, n - число стержнів.

При *розрахунку систем із переважним згином – балок і рам* – вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем ураховують лише перший інтеграл виразу (80), тобто

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \overline{M}_i ds}{EI} \quad (82)$$

Якщо розбити систему на відрізки постійної жорсткості, маємо:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{EI} \int_{(l)} M \overline{M}_i ds \right)_j. \quad (83)$$

Інтеграл $\int_{(l)} M \overline{M}_i ds$ в (83) називають інтегралом Мора. У деяких випадках обчислення цього інтегралу можна спростити.

У загальному випадку на ділянці прямого стержня постійної жорсткості раціонально скористатися формулою Сімпсона для чисельного інтегрування. Відповідно до цієї формули визначений інтеграл від функції $\varphi(s)$ на відрізку $0 \leq s \leq l$ можна наближено знайти так:

$$\int_0^l \varphi(s) ds \approx \frac{1}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

Ця формула ґрунтується на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому у випадку, якщо функція $\varphi(s)$ дійсно квадратна парабола, вираз дає точний результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох епюр на відрізку прямого стержня постійної жорсткості (рис. 67), одержуємо

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \frac{1}{6} (M_{\text{лів}} \overline{M}_{\text{лів}} + 4M_{\text{сере}} \overline{M}_{\text{сере}} + M_{\text{пр}} \overline{M}_{\text{пр}}). \quad (84)$$

Тут індекси *лів*, *сере* та *пр* означають лівий, правий кінець та середину відрізка довжиною l .

Як свідчить аналіз, формула (84) є точною й у випадку, коли підінтегральна функція $M \overline{M}_i$ на відрізку від 0 до l є кубічною параболою, тобто містить вантажні моменти, окреслені за квадратною параболою (при $q = \text{const}$) та лінійно змінні одиничні моменти. Отже, формула Сімпсона дає точний результат для переважної більшості епюр, що зустрічається в практичних розрахунках.

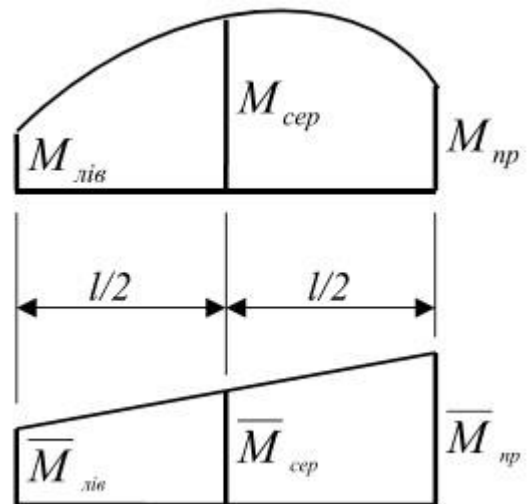


Рис. 67

В інших випадках застосування формули Сімпсона потребує розбивання епюр на відрізки досить малої довжини.

РОЗДІЛ 4 Статично невизначувані системи

4.1 Основні визначення . Ступінь статичної невизначуваності

Статично невизначуваними називають системи, зусилля в яких неможливо встановити за допомогою одних лише рівнянь рівноваги. Це пояснюється наявністю у статично невизначуваній системі зайвих в'язей, тобто в'язей понад мінімальну їх кількість, необхідну для геометричної незмінюваності системи. Так, в рамі, наведеній на рис. 68, *a* для забезпечення геометричної незмінюваності достатньо мати три опорні в'язі, наприклад, затиснення в точці *A*, отже, дві інші в'язі в точці *B* зайві.

Для забезпечення геометричної незмінюваності можна використати й інші опорні в'язі, наприклад, нерухому шарнірну опору в точці *B* та одну з в'язей в точці *A*. Тоді зайвими будуть дві інші опорні в точці *A*. Слід зазначити, що поняття "зайві в'язі" не треба розуміти буквально. Наявність цих в'язей робить систему більш жорсткою і в багатьох випадках дозволяє одержати більш раціональний розподіл зусиль.

Кількість зайвих в'язей n , що визначає *ступінь статичної невизначуваності системи*, можна виразити через кількість ступенів свободи системи

$$n = -W. \quad (85)$$

Так, для рами, показаної на рис. 68, *a* за формулою Чебишова

$$W = 3D - 2T - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -2 \text{ или } n = 2.$$

Для розглядуваної рами характерним є те, що після визначення опорних реакцій всі внутрішні зусилля можна знайти з рівнянь статички. Таку систему називають *зовнішньо статично невизначуваною*. На відміну від неї в рамі на рис. 68, *b* три опорні реакції можна визначити з рівнянь рівноваги. Але при визначенні зусиль, наприклад, в перерізі I-I, доводиться розрізати замкнутий контур ще водному місці (рис. 68, *в*). Отже, маємо статично невизначувану задачу, оскільки шість зусиль (рис. 68, *в*) не можна знайти з трьох умов рівноваги. Така система називається *внутрішньо статично невизначуваною*. У більшості випадків статично невизначувані системи містять як зовнішні, так і внутрішні зайві в'язі.

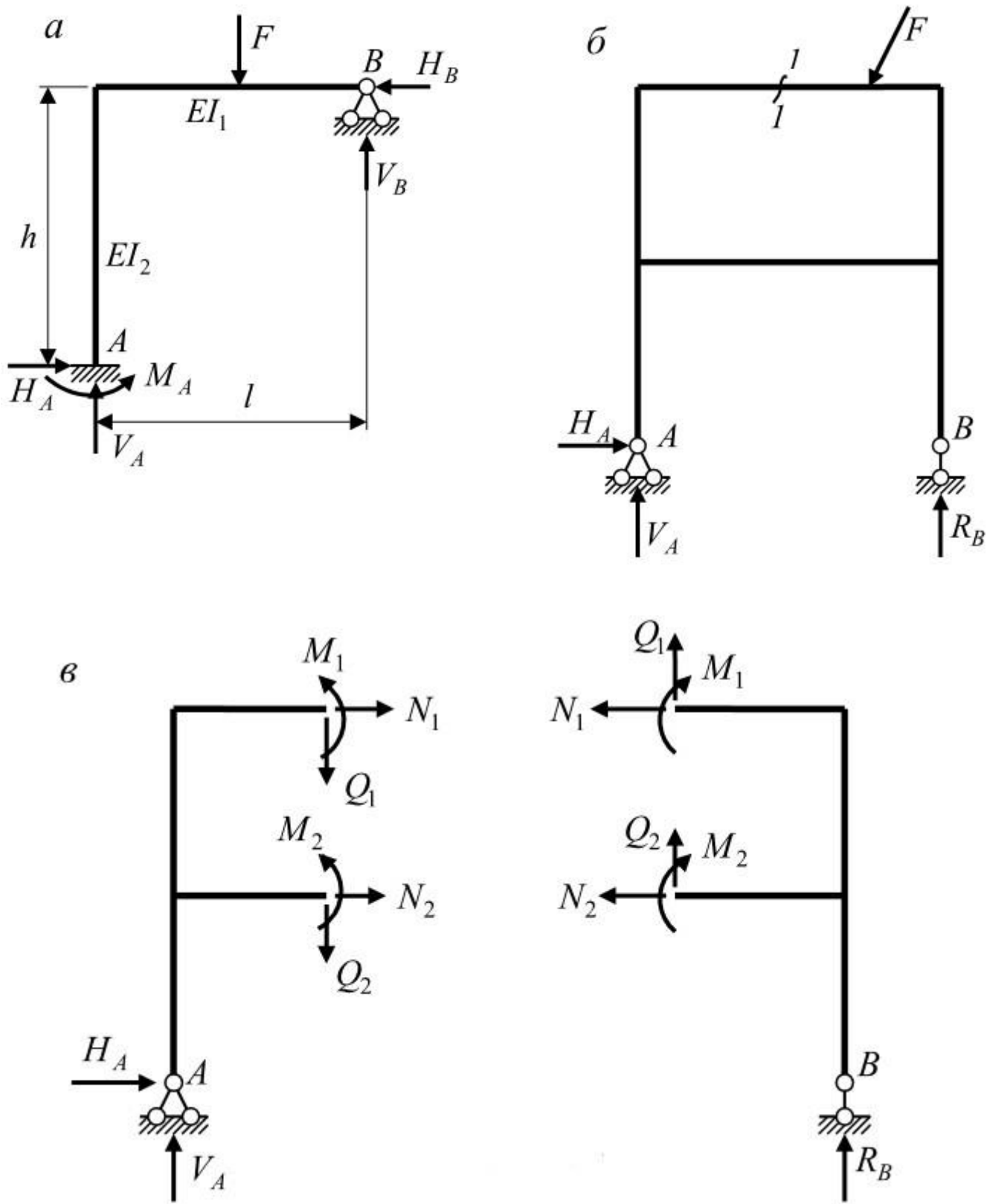


Рис. 68

Як видно з розглянутого прикладу (рис. 68,б), замкнутий контур без шарнірів містить три зайві в'язі (за кількістю недостатніх умов рівноваги). Формула Чебишова не дозволяє виявити такі зайві в'язі рам, тому для

визначення ступеня статичної невизначуваності рам звичайно застосовують формулу:

$$n = 3K - Ш + C_0 - 3, \quad (86)$$

де $Ш$ і C_0 означають, як і у формулі Чебишова, відповідно число простих шарнірів і кількість опорних в'язей, а K - кількість замкнутих контурів, що утворюються стержнями рами.

Для ферм, через відсутність жорстких з'єднань стержнів, співвідношення (53) завжди справедливе, тому, беручи до уваги вираз (86), здобуваємо формулу:

$$n = C + C_0 - 2Y. \quad (87)$$

Як зазначалося вище, для визначення зусиль у статично невизначуваній системі одних рівнянь статички недостатньо. Додаткові рівняння складають на основі дослідження переміщень перерізів системи.

Отже, сукупність рівнянь для розрахунку статично невизначуваної системи містить ряд невідомих зусиль і переміщень. У лінійно деформованих системах між зусиллями і переміщеннями існує однозначна лінійна відповідність, тому всі сили легко виразити через переміщення, і навпаки. Залежно від того, які величини (сили, переміщення або частина сил і частина переміщень) приймаються за основні невідомі, виділяють три основних методи розрахунку статично невизначуваних систем: метод сил, метод переміщень, змішаний метод. У цьому курсі будемо розглядати лише метод сил.

4.2 Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил

Метод сил є універсальним методом розрахунку статично невизначуваних систем. Його суть і основні етапи розрахунку покажемо на прикладі рами, що наведена на рис. 68,а. Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності.

Замкнуті контури й шарніри в заданій рамі відсутні, тому за формулою (86):

$$n = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 - 3 = 2.$$

Слід зазначити, що система заздалегідь передбачається геометрично незмінною, інакше необхідно додатково виконати її геометричний аналіз.

Отже, розглядувана рама є двічі статично невизначуваною, тобто має дві зайві в'язі, для визначення зусиль в яких необхідно скласти додаткові рівняння

– рівняння сумісності деформацій. Ці рівняння одержують, аналізуючи так звану основну систему.

Основною системою методу сил називають таку геометрично незмінювану й статично визначувану систему, яку одержують із заданої статично невизначної системи усуненням зайвих в'язей і заміною їх зусиллями. Ці зусилля у зайвих в'язях називають *зайвими невідомими* або *невідомими методу сил* і позначають X_1, X_2, \dots, X_n . Власне кажучи, ці сили діяли і в заданій системі, тепер же відносно до основної системи сили X_1, X_2, \dots, X_n стали зовнішніми активними силами, тобто перейшли в склад навантаження.

Як уже відзначалося, зайвими можуть бути різні в'язі, тому вибір основної системи неможливо зробити однозначно. Наприклад, для рами, що розглядається, на рис. 69,а-в наведено різні варіанти основної системи. Всі ці основні системи одержані усуненням опорних в'язей. Пізніше розглянемо й інші варіанти основної системи, що добуваються усуненням внутрішніх в'язей.

З усіх можливих варіантів необхідно вибрати одну основну систему. При цьому раціонально взяти таку, в якій зусилля визначаються якомога простіше. З цих міркувань виберемо для розрахунку основну систему, зображену на рис. 69,а.

У подальшому розрахунок заданої рами заміняємо розрахунком основної системи. Для того, щоб така заміна була еквівалентною, необхідно і достатньо, щоб в основній системі переміщення вздовж відкинутих в'язей (інакше, в напрямку зайвих невідомих) були відсутні.

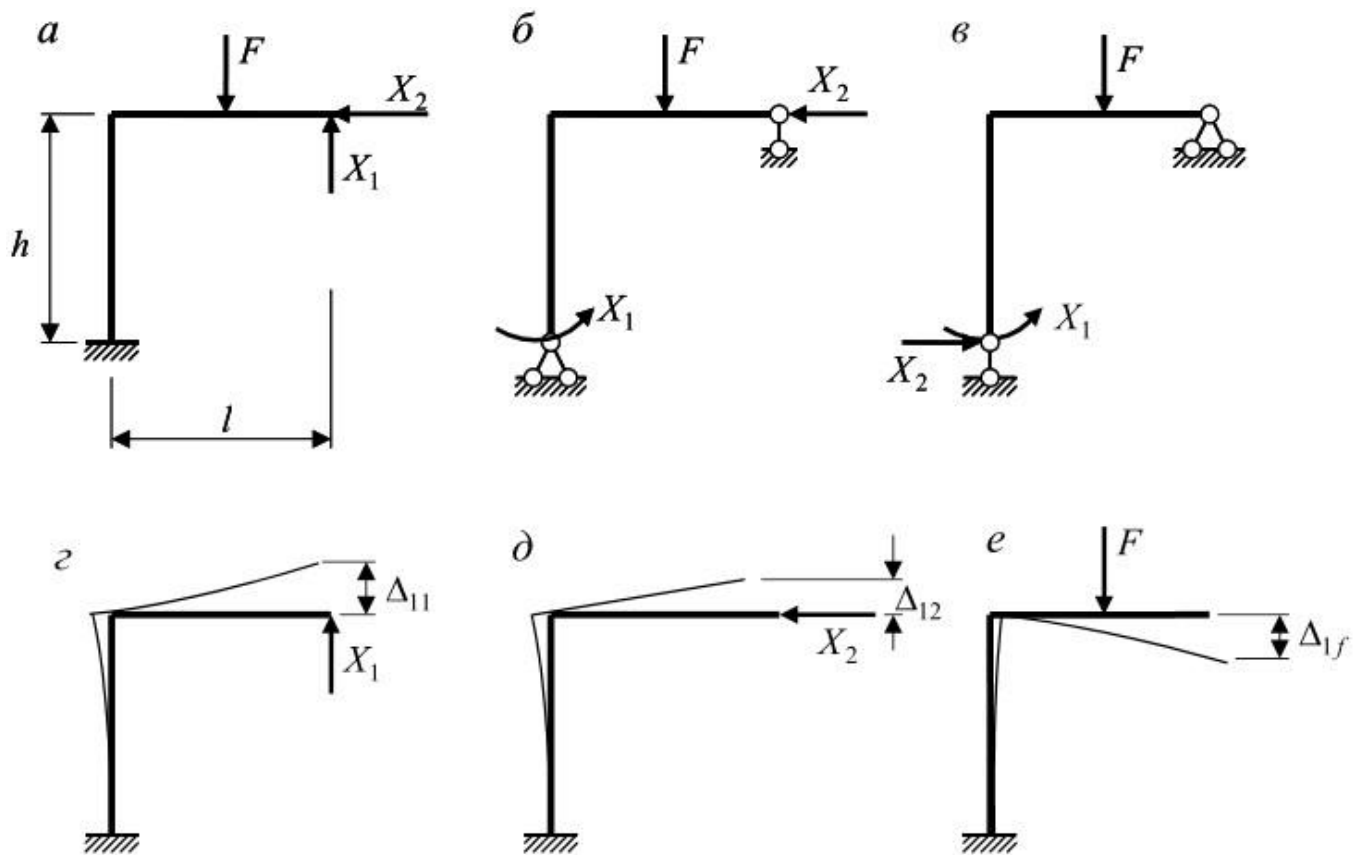


Рис. 69

Для визначення цих переміщень розкладемо все навантаження в основній системі на окремо діючі зайві невідомі й задане навантаження (рис. 69, *z-e*). Тоді переміщення у напрямку зайвого невідомого X_1 дорівнюватиме сумі переміщень: Δ_{11} – від сили X_1 (рис. 69,*z*), Δ_{12} – від сили X_2 (рис. 69,*д*), Δ_{1f} – від заданого навантаження (рис. 69,*e*). За умовою еквівалентності основної і заданої систем це переміщення повинно бути нульовим:

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1f} = 0. \quad (88)$$

Аналогічно для переміщення в напрямку X_2 запишемо таке рівняння:

$$\Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2f} = 0. \quad (88,a)$$

Для того, щоб виразити рівняння (88), (88,*a*) у явному вигляді через зайві невідомі, запишемо кожне з переміщень Δ_{ik} як добуток одиничного переміщення δ_{ik} (в тому ж напрямку, тільки від $X_k = 1$) на величину відповідного невідомого X_k :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \delta_{11} \cdot X_1, & \Delta_{12} &= \delta_{12} \cdot X_2, \\ \Delta_{21} &= \delta_{21} \cdot X_1, & \Delta_{22} &= \delta_{22} \cdot X_2. \end{aligned}$$

Тепер рівняння (88), (88,*a*) набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} = 0. \end{cases} \quad (89)$$

Ці рівняння відображають умови сумісності деформацій і називаються *канонічними рівняннями методу сил*.

Отже, для визначення двох невідомих сил X_1 та X_2 ми дістали два рівняння (89).

Одиничні (δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22}) і вантажні (Δ_{1f} , Δ_{2f}) переміщення можна знайти за допомогою методу Мора. Оскільки рама є системою з переважним згином, то у формулі Мора достатньо врахувати тільки згинаючі моменти. Тому спочатку побудуємо в основній системі епюри згинаючих моментів від кожного зайвого невідомого і від заданого навантаження (рис. 70,а), тобто від тих впливів, від яких необхідно знайти переміщення.

Застосовуючи формулу Сімпсона, обчислюємо:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M_1 M_1} ds = \frac{1}{EI_1} \frac{l}{6} \left(l \cdot l + 4 \frac{l}{2} \frac{l}{2} + 0 \cdot 0 \right) + \frac{1}{EI_2} \frac{h}{6} (l \cdot l + 4l \cdot l + l \cdot l) \\ &= \frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2 h}{EI_2}; \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M_1 M_2} ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h}{6} \left(l \cdot h + 4l \frac{h}{2} + l \cdot 0 \right) = \frac{h^2 l}{2EI_2};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M_2 M_2} ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h}{6} \left(h \cdot h + 4 \frac{h}{2} \frac{h}{2} + 0 \cdot 0 \right) = \frac{h^3}{3EI_2};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1f} &= \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M_1} M_f ds \\ &= -\frac{1}{EI_1} \frac{l}{2 \cdot 6} \left(l \frac{Fl}{2} + 4 \frac{3l}{4} \frac{Fl}{4} + \frac{l}{2} \cdot 0 \right) - \frac{1}{EI_2} \frac{h}{6} \left(l \frac{Fl}{2} + 4l \frac{Fl}{2} + l \frac{Fl}{2} \right) \\ &= -\frac{5Fl^3}{48EI_1} - \frac{Fl^2 h}{2EI_2}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{2f} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M_2} M_f ds = -\frac{1}{EI_2} \frac{h}{6} \left(h \frac{Fl}{2} + 4 \frac{h}{2} \frac{Fl}{2} + 0 \cdot \frac{Fl}{2} \right) = -\frac{Flh^2}{4EI_2}.$$

Зазначимо, що переміщення δ_{21} не обчислювалося, бо за теоремою про взаємність переміщень $\delta_{21} = \delta_{12}$.

Після підстановки переміщень у канонічні рівняння маємо таку систему:

$$\begin{cases} \left(\frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2h}{EI_2} \right) X_1 + \frac{h^2l}{2EI_2} X_2 - \frac{5Fl^3}{48EI_1} - \frac{Fl^2h}{2EI_2} = 0; \\ \frac{h^2l}{2EI_2} X_1 + \frac{h^3}{3EI_2} X_2 - \frac{Flh^2}{4EI_2} = 0. \end{cases}$$

Перетворимо її, помноживши кожне рівняння на EI_1 :

$$\begin{cases} \left(\frac{l^3}{3} + l^2h \frac{EI_1}{EI_2} \right) X_1 + \frac{h^2l \cdot EI_1}{2EI_2} X_2 - \frac{5Fl^3}{48} - \frac{Fl^2h}{2} \frac{EI_1}{EI_2} = 0; \\ \frac{h^2l \cdot EI_1}{2EI_2} X_1 + \frac{h^3EI_1}{3EI_2} X_2 - \frac{Flh^2EI_1}{4EI_2} = 0. \end{cases}$$

Як бачимо, у рівняннях замість абсолютних значень жорсткості елементів присутні лише їх відношення. Звідси випливає, що зусилля у статично невизначуваній системі не залежать від абсолютних значень жорсткостей її елементів, а залежать тільки від відношень цих жорсткостей.

Прийmemo в нашому прикладі $\frac{EI_1}{EI_2} = 1$ і $h = l$. Після підстановки цих співвідношень і нескладних перетворень приходимо до такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_2 - \frac{29F}{48} = 0 \\ \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 - \frac{F}{4} = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему будь-яким відомим способом, знаходимо значення зайвих невідомих:

$$X_1 = \frac{11}{28}F; \quad X_2 = \frac{9}{56}F.$$

Переходячи до визначення остаточних зусиль у заданій рамі, зазначимо, що оскільки при одержаних зусиллях X_1 і X_2 канонічні рівняння задовольняються, основна система дійсно еквівалентна заданій. Розглядаючи основну систему (рис. 69,а) з відомими значеннями сил X_1 та X_2 , легко визначити внутрішні зусилля і побудувати епюри M , Q і N (рис. 70,б).

На основі розглянутого прикладу можна дати таку послідовність розрахунку статично невизначуваних систем методом сил:

1. Знайти ступінь статичної невизначуваності.
2. Вибрати основну систему.

3. Записати канонічні рівняння.
4. Визначити одиничні й вантажні зусилля в основній системі.
5. Визначити коефіцієнти й вільні члени канонічних рівнянь.
6. Розв'язати систему рівнянь і визначити зайві невідомі.
7. Визначити остаточні зусилля у заданій системі.

Розглянемо докладніше етапи розрахунку статично невизначуваної системи методом сил.

Вибір основної системи. Як відзначалося вище, основна система вибирається відкиданням зайвих в'язей. Раніше було показано, що зайвими можуть бути як зовнішні, так і внутрішні в'язі системи. Тому розглянемо можливі способи їх усунення.

1. *Відкидання опорних в'язей* здійснюється повним усуненням деяких опор або заміною їх опорами з меншою кількістю в'язей. Реакції, що діють в напрямку відкинутих в'язей, будуть зайвими невідомими. Відкидаючи ті чи інші в'язі в рамі (рис. 69, а), одержали різні варіанти її основної системи (рис. 69,а-в).

2. *Постановка шарнірів у проміжних перерізах стержнів* дозволяє вкожному такому випадку усунути ті в'язі, що відповідають згинаючим моментам. Ці моменти й будуть зайвими невідомими. Для рами, зображеної на рис. 71,а, при виборі основної системи треба поставити три шарніри (ступінь статичної невизначуваності $n=3$). Розміщення цих шарнірів може бути довільним, але повинно задовольняти вимогам геометричної незмінності основної системи (рис. 71,б).

3. *Розрізання стержня* усуває три в'язі, що відповідають внутрішнім зусиллям M , Q і N . Приклад такого розрізання для рами (рис. 71,а) наведено на рис. 71, в. В окремих випадках розрізання стержня по шарніру звільняє дві в'язі (рис. 71,г), а розрізання прямолінійного стержня з шарнірними кінцями – одну в'язь (рис. 71,д).

Серед в'язей статично невизначуваної системи розрізняють *абсолютно необхідні* й *умовно необхідні в'язі*. До абсолютно необхідних належать в'язі, при усуненні яких система стає геометрично змінюваною. Прикладом такої в'язі може бути вертикальний опорний стержень у рамі, зображеній на рис. 72,а. Дійсно, усунувши його, одержимо миттєво змінювану систему (рис. 72,б).

Для абсолютно необхідних в'язей характерною є статична визначуваність зусиль в них. Так, у наведеному прикладі (рис. 72,а) реакція V_B у вертикальному опорному стержні може бути знайдена з умови рівноваги $\sum M_A = 0$.

Виходячи із сказаного, при виборі основної системи абсолютно необхідні в'язі відкидати не можна.

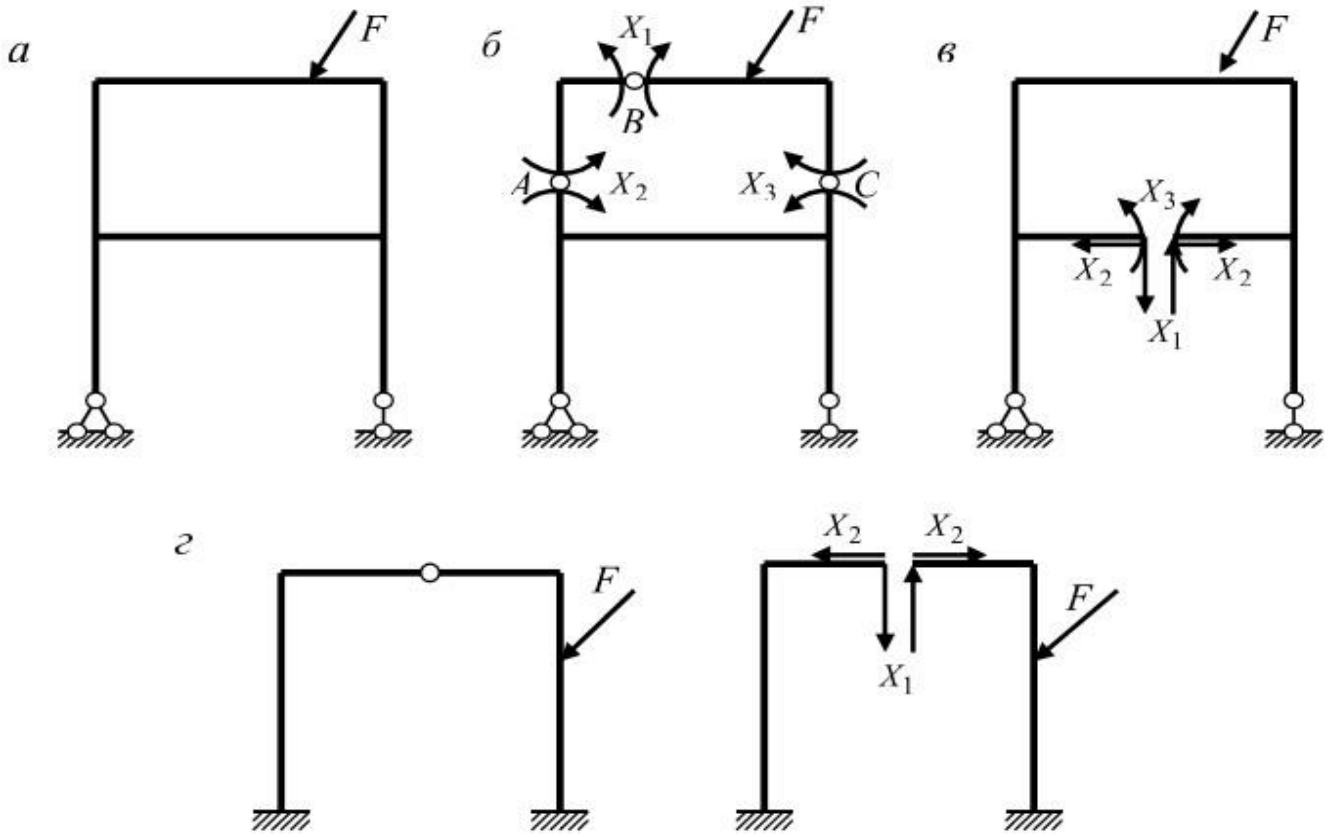


Рис. 71

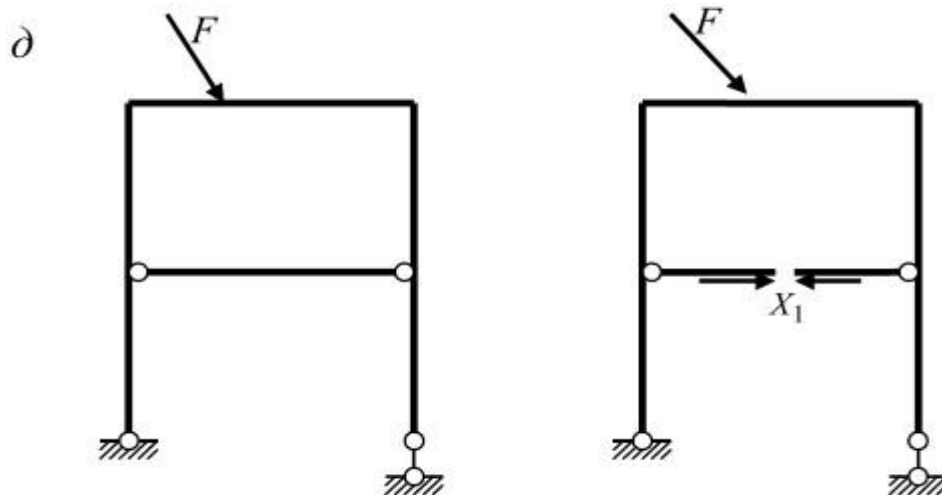


Рис.71

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\overline{M}_l \overline{M}_k ds}{EI} + \sum \int \frac{\overline{N}_l \overline{N}_k ds}{EA} + \sum \int \mu \frac{\overline{Q}_l \overline{Q}_k ds}{GA}, \quad (91)$$

де $\overline{M}_l, \overline{N}_l, \overline{Q}_l$ и $\overline{M}_k, \overline{N}_k, \overline{Q}_k$ – зусилля в основній системі відповідно від зайвих невідомих $\overline{X}_l = 1$ и $\overline{X}_k = 1$.

Зазвичай для систем з переважним згином (балки, рами), зберігаємо у формулі (91) тільки перший доданок:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\overline{M}_l \overline{M}_k ds}{EI} \quad (92)$$

або

$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_l \overline{M}_k ds \quad (92, a)$$

де \overline{M}_l и \overline{M}_k – згинаючі моменти в основній системі відповідно від зайвих невідомих $\overline{X}_l = 1$ и $\overline{X}_k = 1$.

Одиничні переміщення, розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів канонічних рівнянь, називають головними переміщеннями, решту – побічними. Як випливає з (92, a), головні переміщення завжди додатні. Дійсно, при $k=i$

$$\delta_{ii} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_l^2 ds > 0.$$

Усі побічні переміщення задовольняють умові взаємності $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Аналогічно знаходять вільні члени канонічних рівнянь – вантажні переміщення. За формулою Мора для систем з переважним згином

$$\Delta_{if} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_l M_f ds, \quad (93)$$

де M_f – згинаючі моменти в основній системі від дії заданного навантаження.

Як завжди при обчисленні переміщень за формулами (92, a) і (93), можна користуватися формулою Сімпсона.

Побудова епюр внутрішніх зусиль. Оскільки при знайдених значеннях зайвих невідомих умови сумісності деформацій задовольняються, то з розрахунку основної системи на дію заданого навантаження та обчислених значень зайвих невідомих можна здобути всі шукані зусилля заданої системи.

У випадку складних рам для побудови епюри згинаючих моментів зручно скористатися принципом незалежності дії сил. Тоді для згинаючих моментів одержимо:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n + M_f,$$

Або, беручи до уваги, що $M_1 = \overline{M}_1 X_1$, $M_2 = \overline{M}_2 X_2$, ..., $M_n = \overline{M}_n X_n$,

Приходимо до такого виразу:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_f = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i X_i + M_f. \quad (94)$$

Аналогічно можна визначити поперечні й поздовжні сили:

$$Q = \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + \dots + \overline{Q}_n X_n + Q_f = \sum_{i=1}^n \overline{Q}_i X_i + Q_f; \quad (95)$$

$$N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \dots + \overline{N}_n X_n + N_f = \sum_{i=1}^n \overline{N}_i X_i + N_f.$$

Зазвичай при побудові епюр M , Q , N в складних рамах діють у такій послідовності. Спочатку будують епюри згинаючих моментів $\overline{M}_i X_i$, а потім підсумовуванням за формулою (94) знаходять остаточну епюру M . Далі визначають поперечні сили через згинаючі моменти за (95):

$$Q_{\text{поч}}^{\text{кін}} = \frac{M_{\text{поч}} + M_{\text{кін}}}{l} \pm \frac{ql}{2}$$

і будують епюру Q . Нарешті, для визначення поздовжніх сил розглядають рівновагу вузлів рами під дією заданих вузлових навантажень, а також поперечних та поздовжніх сил (див п. 3.2.2).

4.3 Розрахунок статично невизначуваних балок

Статично невизначні балки – це, як правило, багатопрогонові балки без проміжних шарнірів (рис. 73, а). На відміну від ряду однопрогонових балок (рис. 73,б) їх називають нерозрізними.

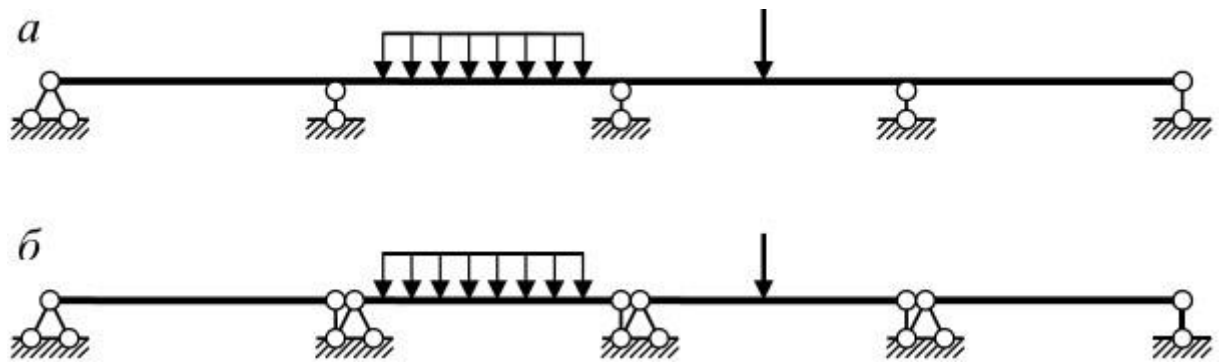


Рис. 73

Розрахунок нерозрізної балки можна виконати методом сил. Послідовність розрахунку покажемо на прикладі балки постійної жорсткості, наведеної на рис. 74, а.

Ступінь статичної невизначуваності обчислюємо за (86), враховуючи, що контури та шарніри відсутні ($K=0, Ш=0$), опорних в'язей шість ($C_0=6$).

Отже, маємо: $n = 3 \cdot 0 - 0 + 6 - 3 = 3$, тобто балка тричі статично невизначувана.

Обираючи основну систему поставимо три шарніри: два на проміжних опорах балки та один у затисненні, тим самим перетворивши останнє на шарнірно нерухому опору (рис. 74,б). Зайвими невідомими у такому разі будуть реактивний момент X_1 у затисненні та згинаючі моменти X_2 , X_3 на проміжних опорах.

Канонічні рівняння будуть такі:

$$\begin{cases} \delta_{11}X + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1f} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2f} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3f} = 0. \end{cases}$$

Побудування епюр згинаючих моментів в основній системі досить просто, зважаючи на те, що основна система являє собою систему не пов'язаних між собою однопрогонових балок. Епюра M_f від заданого навантаження (рис. 74,в) наведена на рис. 74,г, епюри $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ від дії кожного з одиничних зайвих невідомих $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ наведені на рис. 74, д.

Обчислення коефіцієнтів та вільних членів канонічних рівнянь виконуємо перемноженням епюр за формулою Сімсона. Враховуючи постійну жорсткість балки, одержимо:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_1 M_1} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0) = \frac{2}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_1 M_2} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_1 M_3} dx = 0;$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_2 M_2} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1) = \frac{4}{EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_2 M_3} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_3 M_3} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1) = \frac{4}{EI};$$

$$\Delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_1 M_f} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (0 \cdot 1 + 4 \cdot 18 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0) = \frac{36}{EI};$$

$$\Delta_{2f} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_2 M_f} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 18 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1) = \frac{36}{EI};$$

$$\Delta_{3f} = \frac{1}{EI} \int_{(l)} \overline{M_3 M_f} dx = \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (0 \cdot 1 + 4 \cdot 12 \cdot 0,75 + 24 \cdot 0,5) + \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (24 \cdot 0,5 + 4 \cdot 12 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0) = \frac{36}{EI};$$

Підставивши обчислені переміщення у канонічні рівняння, одержимо:

$$\begin{cases} \frac{2}{EI} X_1 + \frac{1}{EI} X_2 + \frac{36}{EI} = 0 \\ \frac{1}{EI} X_1 + \frac{4}{EI} X_2 + \frac{1}{EI} X_3 + \frac{36}{EI} = 0. \\ \frac{1}{EI} X_2 + \frac{4}{EI} X_3 + \frac{36}{EI} = 0 \end{cases}$$

Після розв'язання одержаної системи рівнянь маємо:

$$X_1 = -\frac{16,72}{EI}; \quad X_2 = -\frac{2,77}{EI}; \quad X_3 = -\frac{8,31}{EI}.$$

Епюри внутрішніх зусиль для заданої балки побудуємо розглядаючи кожен прольот як балку на двох опорах. Наприклад, для крайнього ліворуч прогону (рис. 75) одержимо:

$$\sum M_A = -X_1 + X_2 - q \cdot 6 \cdot 3 + R_D \cdot 6 = 0, \quad R_D = 9,69 \text{кН};$$
$$\sum M_B = -X_1 + X_2 + q \cdot 6 \cdot 3 - R_A \cdot 6 = 0, \quad R_A = 14,31 \text{кН};$$

У межах балки розташована одна ділянка. Згинаючі моменти на початку та кінці ділянки дорівнюють опорним моментам:

$$M_{\text{поч}} = X_1 = -16,62 \text{кНм}; \quad M_{\text{кін}} = X_2 = -2,77 \text{кНм}.$$

Згинальний момент у середині ділянки обчислюємо по (56):

$$M_{\text{сер}} = \frac{-16,62 - 2,77}{2} + \frac{4 \cdot 6^2}{8} = 8,3 \text{кНм}.$$

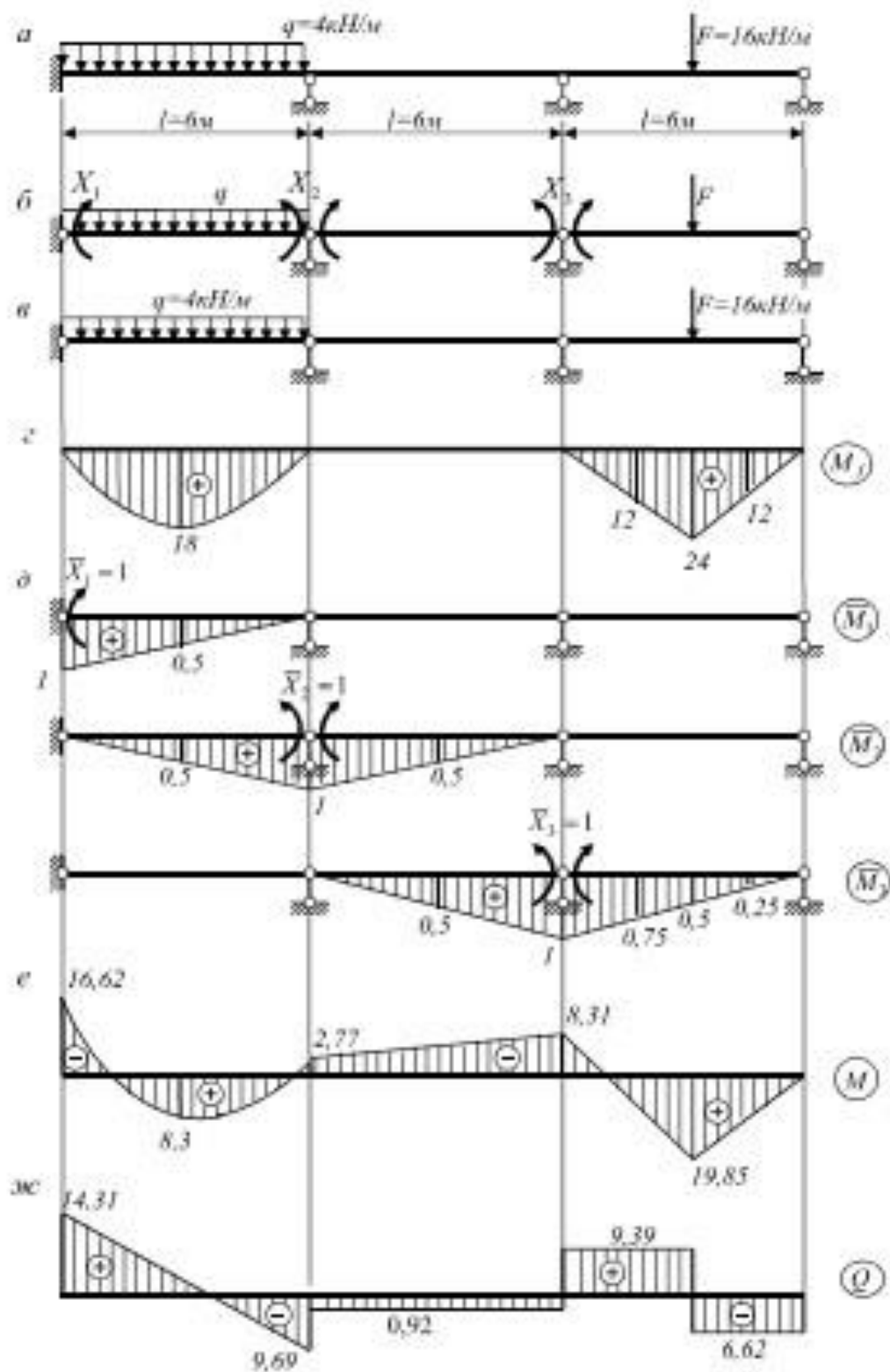


Рис. 74

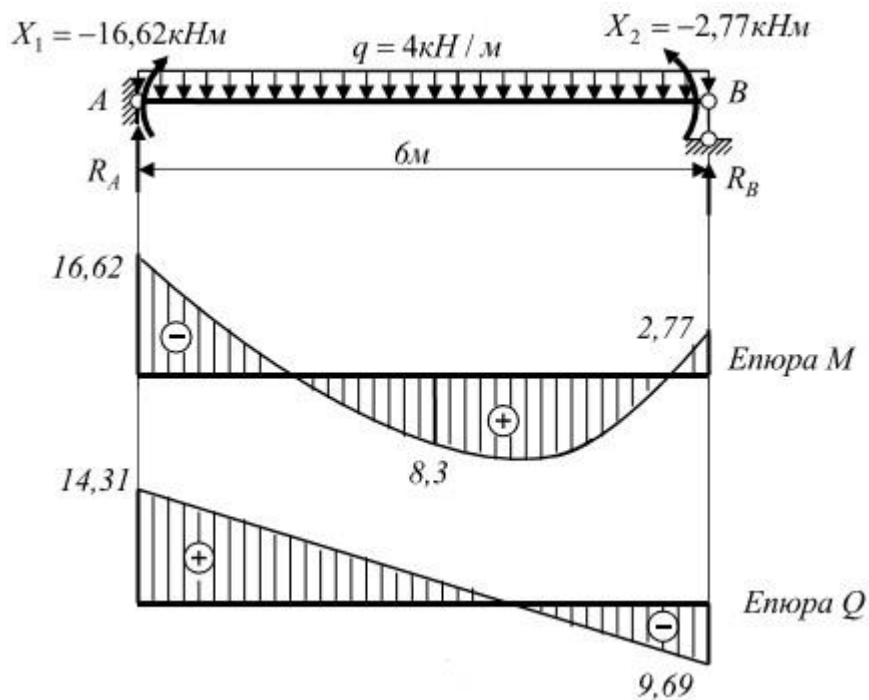


Рис. 75

Поперечні сили визначимо за (82):

$$Q_{\frac{\text{поч}}{\text{кін}}} = \frac{-2,77 + 16,62}{6} \pm \frac{4 \cdot 6}{2} = \begin{cases} 14,31 \\ -9,69 \end{cases} \text{ кН.}$$

Аналогічно обчислюються зусилля у інших прогонах. Повні еюри згинаючих моментів та поперечних сил наведені на рис. 74, е, ж.

Література

1. **Дарков А.В.** Сопротивление материалов. /А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: «Высшая школа», 1975. – 654 с.
2. **Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності.** /В.Г. Піскунов, Ю.М. Феодоренко, В.Ю. Шевченко та ін. – К.: Вища школа, 1994. – 423 с.
3. **Сопротивление материалов.** /Под общ.ред.Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1979. – 696 с.
4. **Чихладзе Е.Д.** Опір матеріалів: Навч. посібник/Е.Д. Чихладзе. – Х. :УкрДАЗТ, 2002. – 362 с.
5. **Баженов В.А.** Будівельна механіка. Комп'ютерні технології/В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов; за заг. ред. д.т.н., проф. В.А. Баженова. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
6. **Шутенко Л.М.** Механіка споруд: навч. посібник/Л.М. Шутенко, В.П. Пустовойтов, М.А. Засядько; Харк. держ. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХДАМГ, 2001. – 234 с.
7. **Чихладзе Э.Д.** Строительная механика: Учебник для студентов высших учебных заведений/Э.Д. Чихладзе. – Х. : УкрГАЗТ, 2004. – 30 с.

ЗМІСТ

Стор.

ВСТУП/.....	3
РОЗДІЛ 1 Загальні відомості. Розтяг-стиск	4
1.1 Загальні відомості. Елементи статички.....	4
1.1.1. Проекція сили на вісь.....	4
1.1.2. Алгебраїчний момент сили відносно точки.....	5
1.1.3. Пара сил.....	6
1.1.4. Розподілені сили.....	6
1.1.5. Умови рівноваги тіла.....	7
1.2 Види напружено-деформованого стану стержнів. Припущення.....	10
1.2.1 Види деформацій.....	10
1.2.2 Припущення.....	11
1.3 Розтяг-стиск.....	12
1.3.1 Внутрішні зусилля та напруження. Метод перерізів.....	12
1.3.2 Епюри внутрішніх зусиль.....	14
1.3.3 Деформації при розтягу-стиску. Закон Гука.....	16
1.3.4 Урахування власної ваги стержня.....	18
1.3.5 Напруження на похилих площинках.....	19
1.3.6 Механічні характеристики матеріалу.....	20
РОЗДІЛ 2 Поперечний згин	24
2.1 Геометричні характеристики перерізів.....	24
2.1.1 Загальні визначення.....	24
2.1.2 Статичні моменти перерізів. Центр ваги.....	25
2.1.3 Моменти інерції простих перерізів.....	27
2.1.4 Моменти інерції при паралельному переносі осей та при повороті осей. Моменти інерції складних перерізів.....	28
2.1.5 Головні осі та головні моменти інерції.....	31
2.2 Згин.....	32
2.2.1 Балки. Опори та опорні реакції.....	32
2.2.2 Внутрішні зусилля.....	35
2.2.3 Диференційні залежності при згині.....	38
2.2.4 Епюри внутрішніх зусиль у балках.....	39
2.2.5 Напруження при згині. Умова міцності.....	44
2.2.6 Визначення переміщень.....	49
2.2.7 Поняття про складні деформації.....	53

РОЗДІЛ 3 Статично визначувані стержневі системи.....	55
3.1 Кінематичний аналіз споруд.....	55
3.1.1 Основні визначення.....	55
3.1.2 Кінематичний аналіз.....	56
3.1.3 Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності.....	58
3.2 Статично визначувані рами.....	59
3.2.1 Основні поняття.....	59
3.2.2 Розрахунок рами.....	61
3.3 Статично визначувані ферми.....	67
3.3.1 Основні поняття. Класифікація ферм.....	67
3.3.2 Спосіб вирізання вузлів.....	70
3.3.3 Розподіл зусиль у стержнях балочної ферми. Спосіб моментної точки та спосіб проєкцій.....	72
3.4 Основні теореми для пружних систем. Визначення переміщень.....	76
3.4.1 Принцип можливих переміщень для пружних систем.....	76
3.4.2 Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення.....	77
3.4.3 Робота внутрішніх сил.....	79
3.4.4 Теореми про взаємність.....	81
3.4.5 Обчислення переміщень за методом Мора.....	82
РОЗДІЛ 4 Статично невизначувані системи.....	85
4.1 Основні визначення. Ступінь статичної невизначуваності.....	85
4.2 Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил.....	87
4.3 Розрахунок статично невизначуваних балок.....	96
Література.....	102
Зміст.....	103