МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно

Вища математика

Підручник

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для здобувачів
ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти: *Головач І. В.*, д-р техн. наук, проф., проф. Національного університету біоресурсів і природокористування
Томащук О. П., канд. пед. наук, доц., доц. Національного авіаційного університету

Відповідальний редактор *Волков А. В.,* канд. фіз.-мат. наук, доц. КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 3 жовтня 2022 р.)

Навчальне видання

Дудкін Микола Євгенович, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Дюженкова Ольга Юріївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Степахно Ірина Василівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Вища математика

Вища математика: підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с.

Підручник охоплює всі основні розділи вищої математики: елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної, диференціальні рівняння, диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних, ряди. Кожен параграф містить стисло викладений теоретичний матеріал, необхідний для розв’язування типових вправ, велику кількість прикладів і завдання для самостійної роботи. Підручник призначений для студентів інженерних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського, зокрема, для студентів спеціальностей 101 «Екологія», 161 «Хімічні технології та інженерія». Може бути використаний на практичних заняттях, для виконання домашніх і розрахункових робіт, а також для самостійного вивчення вищої математики.

ЗМІСТ

Вступ

Метою вивчення вищої математики є формування у студентів вміння логічно мислити, аналізувати і складати найпростіші моделі реальних процесів, використовувати математичні методи в інженерних розрахунках та при розв'язуванні прикладних задач.

Підручник призначений для студентів інженерних спеціальностей і має на меті допомогти їм опанувати курс вищої математики, передбачений програмою. Викладений матеріал охоплює основні розділи вищої математики, а саме:

I. Елементи лінійної та векторної алгебри.

II. Елементи аналітичної геометрії.

III. Вступ до математичного аналізу.

IV. Диференціальне числення функції однієї змінної.

V. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

VI. Інтегральне числення функції однієї змінної.

VII. Диференціальні рівняння.

VIII. Кратні та криволінійні інтеграли.

IX. Ряди.

Усі розділи підручника розбито на параграфи, кожен з яких містить теоретичний матеріал, необхідний для засвоєння основних математичних понять та алгоритмів. У кожному параграфі наведено велику кількість розв'язаних прикладів різного рівня складності, а також завдання для самостійної роботи. Після кожного розділу є список контрольних запитань, що дає можливість структурувати пройдений матеріал та контролювати рівень його засвоєння.

Підручник зручно використовувати для опрацювання теоретичного матеріалу, для розв'язання задач на практичних заняттях і виконання домашніх робіт, а також для самостійного вивчення вищої математики, зокрема студентами заочної та дистанційної форм навчання. Наприкінці підручника наведено список рекомендованої літератури, що дає можливість читачам ознайомитись з іншими джерелами та глибше засвоїти матеріал.

Підручник складено на основі тривалого досвіду викладання вищої математики студентам інженерних спеціальностей і містить важливі методичні рекомендації для кращого засвоєння матеріалу.

Розділ I. Елементи лінійної та векторної алгебри

§ 1. Матриці. Дії над матрицями

Матрицею розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця елементів певної природи, складена із m рядків та n стовпців. Матриці позначають великими латинськими буквами *A, B, C*, … Елемент матриці *A*, який стоїть на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця, позначають через $a_{i\,j}$. Матрицю розмірності $m \times n$ позначають через $A_{m\times n}$ і записують у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для зручності матрицю можна записати в компактному вигляді

$$A = (a_{i\,j}), \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Квадратною матрицею n*-го порядку* називається матриця, яка містить n рядків і n стовпців. Зокрема, матриця другого порядку має вигляд $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а матриця першого порядку (a_{11}) містить тільки один елемент.

Діагональ квадратної матриці, яка складається з елементів a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}, називається *головною діагоналлю*, а інша діагональ (елементи a_{1n}, $a_{2,\,n-1}, \ldots,\ a_{n1}$) називається *побічною*.

Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі елементи, розміщені під головною діагоналлю (над головною діагоналлю), дорівнюють нулю. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, крім елементів головної діагоналі.

Діагональна матриця E називається *одиничною*, якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, тобто $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$.

Якщо всі елементи матриці *O* дорівнюють нулю, то вона називається *нульовою*.

Дві матриці однакової розмірності $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називаються *рівними*, якщо відповідні елементи цих матриць рівні між собою: $a_{ij} = b_{ij}$.

Дії над матрицями

Якщо в матриці A (розмірності $m\times n$) рядки і стовпці поміняти місцями, то дістанемо матрицю A^T (розмірності $n\times m$), яка називається *транспонованою* до матриці A.

Сумою матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакової розмірності $m\times n$ називається така матриця $A+B$, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів цих матриць, тобто $a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ *на число* λ називається матриця $\lambda A=(\lambda a_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює відповідному елементу матриці A, помноженому на число λ.

Різницею матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакової розмірності $m\times n$ називається така матриця $A-B$, кожен елемент якої дорівнює різниці відповідних елементів цих матриць, тобто $a_{ij}-b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Розглянемо матриці $A=(a_{ij})$ (розмірності $m\times n$) і $B=(b_{ij})$ (розмірності $n\times p$).

Добутком матриць A і B називається така матриця $AB=C=(c_{ij})$ (розмірності $m\times p$), кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці A на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ b_{3j}\\ \dots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\dots+a_{in}b_{nj},$$

де $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,p}$.

Результатом множення є матриця $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$.

Зауваження. Перемножити можна тільки ті матриці, для яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Якщо існує добуток матриць AB, то добуток матриць BA може не існувати. Квадратні матриці A і B одного порядку завжди можна перемножити, але в загальному випадку $AB\neq BA$.

Степенем n квадратної матриці A називають таку матрицю A^n ($n\in N$), яку отримують при множенні матриці самої на себе n разів, тобто $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n}$. Вважають, що $A^o=E$.

Матричним многочленом від квадратної матриці A називають вираз $P(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 E$.

Основні властивості дій над матрицями

$A+O=O+A=A$, $\quad A+B=B+A$, $\quad A+(B+C)=(A+B)+C$,

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\quad (\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$,

$E\cdot A = A\cdot E = A$, $\quad \alpha(AB) = (\alpha A)B$, $\quad AB \neq BA$,

$(A+B)C=AC+BC$, $\quad C(A+B)=CA+CB$,

$(A^T)^T = A$, $\quad (A+B)^T=A^T+B^T$, $\quad (AB)^T=B^TA^T$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти матрицю $C = 2A - 3B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки задані матриці однакової розмірності, то

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 0\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\cdot 3 & 2\cdot 3 & 5\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & -7\cdot 3 & 4\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ обчислити матрицю $A^T + B^T$.

Розв'язання. Транспонувавши матриці A і B, дістанемо

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Для заданих матриць обчислити добутки AB і BA (якщо це можливо)

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) Кількість стовпців матриці A дорівнює 3 і кількість рядків матриці B дорівнює 3. Тому добуток $C = A \cdot B$ можна знайти, причому $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2}$, тобто матриця C матиме розмірність 2×2.

Помноживши елементи першого рядка матриці A на відповідні елементи першого стовпця матриці B і додавши одержані добутки, знайдемо елемент c_{11} матриці C

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = -3.$$

Аналогічно знайдемо інші елементи матриці C

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -3,$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = -1,$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) = -2.$$

Отже, $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добуток матриць BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 & 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Оскільки задано матриці однакової розмірності, то можна визначити як добуток AB, так і BA. Отже,

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+(-5)\cdot(-1) & 3\cdot 4+(-5)\cdot 2\\ 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot 4+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -1 & 8\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+4\cdot 1 & 1\cdot(-5)+4\cdot 2\\ -1\cdot 3+2\cdot 1 & -1\cdot(-5)+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 9\end{pmatrix}.$$

в) Оскільки матриці $A_{2\times 2}$ і $B_{3\times 2}$, то кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B, тому добуток AB не існує. Але можна знайти добуток BA:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-2) & -3+4\\ 3+(-4) & -9+8\\ 5+(-6) & -15+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Для матриць $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ знайти $A+C,\ 2A-B^T,\ A\cdot B,\ B\cdot A,\ A^2$.

Розв'язання. Матриці A і C можна додавати, оскільки вони мають однакову розмірність 3×2. Додавши відповідні елементи матриць, дістанемо

$$A+C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 8 & 3\\ 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця B має розмірність 2×3, то транспонована матриця B^T матиме розмірність 3×2, тому

$$2A-B^T=2\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}10 & 2\\ 6 & -2\\ 4 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 4 & -1\\ 1 & -12\end{pmatrix}.$$

Матриці A і B можна перемножити, оскільки A має розмірність 3×2, а B – розмірність 2×3. Тоді добуток матриць AB має розмірність 3×3, а добуток BA – розмірність 2×2. Отже, за означенням добутку матриць

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot 1+1\cdot 0 & 5\cdot 2+1\cdot(-1) & 5\cdot 3+1\cdot 4\\ 3\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & 3\cdot 3+(-1)\cdot 4\\ 2\cdot 1+(-4)\cdot 0 & 2\cdot 2+(-4)\cdot(-1) & 2\cdot 3+(-4)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 19\\ 3 & 7 & 5\\ 2 & 8 & -10\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot3+3\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot(-4)\\ 0\cdot5+(-1)\cdot3+4\cdot2 & 0\cdot1+(-1)\cdot(-1)+4\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -13\\ 5 & -15\end{pmatrix}.$$

Матрицю A^2 обчислити неможливо, оскільки матриця A не є квадратною.

Приклад 5. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо матричне рівняння $A\cdot B+2X=C$, звідки знайдемо невідому матрицю $X=\frac{1}{2}(C-A\cdot B)$. Спочатку обчислимо добуток матриць

$$AB=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot(-3)\\ 1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot(-3)\\ -3\cdot2 & -3\cdot0 & -3\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -3\\ -6 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -3\\ -6 & 0 & 9\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2-2 & 3-0 & 5-(-3)\\ 0-2 & 1-0 & -4-(-3)\\ 3-(-6) & 2-0 & 0-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3/2 & 4\\ -1 & 1/2 & -1/2\\ 9/2 & 1 & -9/2\end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки задано квадратну матрицю, то можна знайти її степінь $A^3=A\cdot A\cdot A$. Маємо

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & -20\\ 10 & -23\end{pmatrix}.$$

Отже, $A^3=\begin{pmatrix}-23 & -20\\ 10 & -23\end{pmatrix}$.

Приклад 7. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Значення матричного многочлена $f(A)$ визначається рівністю $f(A) = -2A^2 + 5A - 3E$. Знайдемо матрицю A^2 і значення $f(A)$, маємо

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = -2 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Отже, значення матричного многочлена $f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ знайти $A + B,\ A - 3B,\ A^T + B^T + E.$

2. Виконати вказані дії для матриць (якщо це можливо)

а) $A - B,\ 3A + 2B,\ A^T - B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $2A + B,\ A - 3B,\ A^T + 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A - B, A + 2C^T, A^T + B^T - C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A + B, A^T - B,\ A + 2B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Визначити $A + B,\ 2A - B,\ A + 3C - 2E,\ A^T + 5B - C^T$, якщо

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 6\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 5 & -4\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 6 & 9 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 2 & 0 & 3\\ -4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 4 & 6\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ 4 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

4. Знайти добутки AB і BA для матриць (якщо це можливо)

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & 6 & -8\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 4\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 6 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -4\\ 2\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\ -2 & 5 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 4\\ 4 & 1 & -6\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$; з) $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & 2\\ 6 & -3 & -1\end{pmatrix}$;

к) $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0 & 6\\ 3 & -1 & 5 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$; л) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 5\\ -2 & 3 & 4 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

5. Знайти добутки $(AB)C$ і $(BA)C$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 0 & -1 & 2\\ -3 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\\ -1 & -4\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

6. Знайти значення матричного многочлена $P(A)$, якщо

а) $P(x)=2x^2+3x-2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; б) $P(x)=3x^2-x+5$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

§ 2. Визначники

Розглянемо матрицю другого порядку $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Визначником (матриці) другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2.1)$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10$.

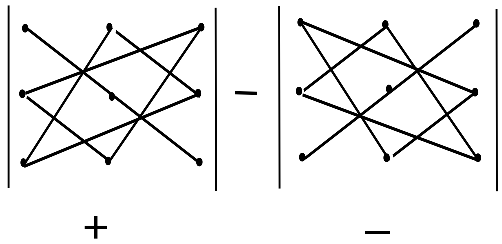
Аналогічно розглядаємо визначник для матриці третього порядку.

Визначником (матриці) третього порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \qquad (2.2)$$

Обчислення визначника третього порядку здійснюють за правилом трикутників (правилом зірочки). Для запам'ятовування наведемо таку схему



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» це добутки елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, розміщених на *головній діагоналі* визначника, та добутки елементів a_{21}, a_{32}, a_{13} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, які є добутками елементів a_{31}, a_{13}, a_{22}, розміщених на побічній діагоналі визначника, та елементів у вершинах трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі, тобто a_{11}, a_{23}, a_{32} і a_{12}, a_{21}, a_{33}.

Зауважимо, що визначником першого порядку є число $|a_{11}| = a_{11}$.

Найчастіше визначники позначають через Δ. Якщо визначник розглядають для матриці A, тоді його записують $|A|$ або $\det A$. Зазначимо, що *визначник можна обчислити тільки для квадратної матриці.*

Якщо у визначнику поміняти місцями рядки і стовпці (транспонувати його), то дістанемо *транспонований визначник* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Мінором M_{ij} *елемента* a_{ij} називають визначник, який дістають із даного визначника викреслюванням *i*-го рядка та *j*-го стовпця. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} *елемента* a_{ij} називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивості визначників

Властивість 1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З цієї властивості випливає, що будь-яке твердження, справедливе для рядків визначника, виконується і для його стовпців, і навпаки.

Властивість 2. Якщо один із рядків (стовпців) визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці) визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Властивість 4. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на стале число *C*, то й визначник помножиться на це число. Отже, спільний множник елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

Властивість 5. Якщо визначник має два однакових або пропорційних рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

Властивість 6. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка (стовпця) будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а всі інші елементи не змінюються.

Властивість 7. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), попередньо помножені не деяке число.

При цьому рядок (стовпець), елементи якого додаються до іншого рядка (стовпця), називається основним і залишається незмінним. А результат додавання записують у той рядок (стовпець), до якого додають.

Властивість 8 (розклад визначника за елементами рядка або стовпця). Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Зокрема, для визначника третього порядку виконується рівність

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \text{ де } i, j = 1,2,3.$$

Зазначимо, що сума добутків елементів рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка (стовпця) цього визначника дорівнює нулю.

При обчисленні визначників зручно використовувати таку властивість.

Властивість 9 (обчислення визначника трикутного вигляду). Якщо всі елементи визначника, розміщені нижче або вище головної діагоналі, дорівнюють нулю, то визначник дорівнює добутку діагональних елементів

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}.$$

Очевидно, що визначник одиничної матриці $|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

У випадку, коли квадратні матриці A і B одного порядку, причому $|A| \neq 0, |B| \neq 0$, то визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Поняття визначника n-го порядку

Зазначимо, що кожній квадратній матриці n-го порядку відповідає її визначник (число).

Усі наведені властивості мають місце і для визначників вищих порядків. Оскільки поняття визначника n-го порядку досить складне, то розглянемо його, скориставшись властивістю про розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Визначником n-го порядку називається число Δ, яке дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (2.3)$$

Із формули (2.3) випливає, що за наявності у визначнику нульових елементів відповідні алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно. Тому для спрощення обчислень у визначнику можна утворити якомога більше нулів так, щоб у вибраному рядку або стовпці всі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. Тоді, розклавши визначник за елементами цього рядка або стовпця, зведемо задачу обчислення визначника n-го порядку до обчислення визначника $(n–1)$-го порядку.

Зазначимо, що нулі краще утворювати в тому рядку (стовпці), де вже є нулі. Якщо нулів немає, то краще вибирати той рядок (стовпець), де є одиниця. У випадку, коли утворюють нулі в стовпці, то виконують перетворення над рядками, а якщо утворюють нулі в рядку, то працюють зі стовпцями.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. За означенням маємо: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot5-(-3)\cdot2=5+6=11.$

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\sin^2\alpha$.

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. Скориставшись правилом трикутників, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}=1\cdot3\cdot6+(-1)\cdot(-2)\cdot4+(-3)\cdot5\cdot2-$$

$$-2\cdot3\cdot4-(-2)\cdot5\cdot1-(-1)\cdot(-3)\cdot6=18+8-30-24+10-18=-36.$$

Приклад 4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. За означенням визначника (правилом трикутників) маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5 + (-2)\cdot2\cdot3 + (-1)\cdot2\cdot1 - 1\cdot3\cdot3 - 2\cdot2\cdot2 - (-2)\cdot(-1)\cdot5 =$$

$$= 30 - 12 - 2 - 9 - 8 - 10 = -11.$$

Приклад 5. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{12} визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку запишемо мінор елемента a_{12} даного визначника, для цього викреслимо із цього визначника перший рядок і другий стовпець. Дістанемо мінор $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Тоді алгебраїчне доповнення цього елемента $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1.$

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 18 & 3 \\ 10 & 15 & 5 \end{vmatrix}$, скориставшись його властивостями.

Розв'язання. Винесемо спільний множник елементів кожного із рядків, після чого винесемо спільний множник елементів першого і другого стовпців за знак визначника, скориставшись властивістю 4. Дістанемо

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 18 & 3 \\ 10 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30\cdot2\cdot3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30\cdot6\cdot(4+1+1-2-2-1) = 180\,.$$

Приклад 7. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язання. Скориставшись властивістю про розклад визначника, маємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 24 - 2(-6-18) + 5(-8-3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

Приклад 8. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, попередньо спростивши і розклавши за елементами рядка чи стовпця.

Розв'язання. Оскільки в першому рядку на першому місці стоїть 1, то візьмемо цей рядок за основний і утворимо нулі в першому стовпці. Для цього перший рядок помножимо на (–2) і додамо його до другого рядка, а потім перший рядок додамо до третього рядка. В результаті дістанемо визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Отриманий визначник розкладемо за елементами першого стовпця

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ (-2)\cdot 1 + 2 & (-2)\cdot 3 + 8 & (-2)\cdot 2 + 1 \\ 1 + (-1) & 3 + 1 & 2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 8 - (-12) = 20.$$

Приклад 9. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник четвертого порядку, розклавши його за елементами рядка або стовпця. Спочатку розкладемо визначник за елементами третього рядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 13 + 1 \cdot 3 = 55.$$

А тепер розкладемо визначник за елементами третього стовпця

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 8 - 3 \cdot (-1 - 12) = 55.$$

Приклад 10. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки в другому стовпці є два нулі, то розкладемо визначник за елементами цього стовпця, тобто

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} =$$

$$= 0 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + (-6) \cdot A_{42} = 3A_{22} - 6A_{42}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{22} і A_{42}, дістанемо

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 + 0 - 12 - 27 - 0 = -39,$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} M_{42} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -5 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 9 - 60 - 0 - 60 + 4 = -125.$$

Отже, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-39) - 6 \cdot (-125) = 633.$

Приклад 11. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Маємо визначник четвертого порядку. Можна помітити, що перший і третій рядки містять три однакових елементи, тому утворимо максимальну кількість нулів у третьому рядку. Для цього помножимо перший рядок на (–1) і додамо до третього рядка, а потім застосуємо властивість 8, розклавши визначник за елементами третього рядка. Одержаний визначник третього порядку обчислимо за означенням (правилом трикутників), дістанемо

$$\Delta = \begin{array}{r} (-1)\cdot \\ \downarrow + \\ \mapsto \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -(16 - 0 - 45 + 30 - 0 - 36) = 35.$$

Приклад 12. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, розклавши за елементами першого стовпця.

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами першого стовпця, утворивши в ньому максимальну кількість нулів. Для цього проведемо такі перетворення: елементи першого рядка помножимо на (–3) і додамо до відповідних елементів другого рядка; елементи першого рядка помножимо на (–4) і додамо до відповідних елементів третього рядка; елементи першого рядка додамо до відповідних елементів четвертого рядка. Одержаний визначник розкладемо за елементами першого стовпця, маємо

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{bmatrix} I \cdot (-3) + II \\ I \cdot (-4) + III \\ I + IV \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -10 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки в одержаному визначнику є одиниця на перетині третього рядка і третього стовпця, то третій стовпець візьмемо за основний і утворимо нулі в третьому рядку. Для цього елементи третього стовпця помножимо на 5 і додамо до елементів першого стовпця, потім елементи третього стовпця помножимо на (–3) і додамо до елементів другого стовпця. Одержаний визначник розкладемо за елементами третього рядка, дістанемо

$$\begin{vmatrix} 11 & -10 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{bmatrix} III \cdot 5 + I \\ III \cdot (-3) + II \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & -16 & 2 \\ 27 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 21 & -16 \\ 27 & -16 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-16) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -48 \cdot (7 - 9) = 96.$$

Приклад 13. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник, розклавши його за елементами рядка або стовпця. Виберемо перший рядок і подамо визначник у вигляді суми добутків елементів цього рядка на їх алгебраїчні доповнення

$$\Delta = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Потрібно обчислити три визначники третього порядку, оскільки третій доданок дорівнює нулю (відповідний визначник обчислювати не треба). Зрозуміло, що чим більше нулів є в рядку (стовпці), за елементами якого розкладають визначник, тим менше визначників потрібно обчислювати. Якщо нулі утворюють в стовпці, то виконують перетворення над елементами рядка, а якщо нулі утворюють в рядку, то над елементами стовпця.

Утворимо в одному із рядків або стовпців визначника якомога більше нулів, наприклад в третьому стовпці, в якому вже є нуль. Виберемо елемент –1, який стоїть в третьому рядку і розглянемо цей рядок як основний.

У новому визначнику елементи третього рядка перепишемо без змін. Помножимо елементи третього рядка на 2 і додамо до відповідних елементів другого рядка, а потім додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

Після цих перетворень розкладемо визначник за елементами третього стовпця, дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 10 & 7 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, обчислення визначника четвертого порядку звелось до обчислення визначника третього порядку, який можна знайти за означенням або знову утворити нулі.

На перетині першого рядка і другого стовпця стоїть елемент –1, тому утворимо нулі в першому рядку, а другий стовпець візьмемо за основний. Помножимо елементи цього стовпця на 5 і додамо до елементів першого стовпця, після чого помножимо елементи другого стовпця на 3 і додамо до елементів третього стовпця. Розкладемо визначник за елементами першого рядка, після чого винесемо спільний множник із першого стовпця, а потім – із першого рядка. Дістанемо

$$\Delta=-\begin{vmatrix}5&-1&3\\10&7&3\\8&5&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&-1&0\\45&7&24\\33&5&19\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}45&24\\33&19\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}15&24\\11&19\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot3\begin{vmatrix}5&8\\11&19\end{vmatrix}=-9(5\cdot19-8\cdot11)=-9\cdot7=-63.$$

Приклад 14. Обчислити визначник, попередньо його спростивши

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&1&1\\-5&-3&0&-6\\-3&0&4&3\\6&1&-1&2\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Застосовуючи властивості визначників, утворимо якомога більше нулів у третьому стовпці, оскільки там уже є нуль. Для цього помножимо елементи першого рядка на (–4) і додамо до відповідних елементів третього рядка, а потім елементи першого рядка додамо до елементів четвертого рядка. Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&1&1\\-5&-3&0&-6\\-3&0&4&3\\6&1&-1&2\end{vmatrix}\to\begin{bmatrix}I\cdot(-4)+III\\I+IV\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&1&1\\-5&-3&0&-6\\-7&-12&0&-1\\7&4&0&3\end{vmatrix}.$$

Розкладемо останній визначник за елементами третього стовпця

$$\Delta=a_{13}A_{13}=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-5&-3&-6\\-7&-12&-1\\7&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-3&-6\\-7&-12&-1\\7&4&3\end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник третього порядку обчислимо, утворивши нулі в третьому стовпці. Для цього елементи другого рядка помножимо на (–6) і додамо до відповідних елементів першого, а елементи другого рядка помножимо на 3 і додамо до відповідних елементів третього. Після цього розкладемо визначник за елементами третього стовпця, дістанемо

$$\Delta=\begin{vmatrix}-5&-3&-6\\-7&-12&-1\\7&4&3\end{vmatrix}\to\begin{bmatrix}II\cdot(-6)+I\\ \\II\cdot3+III\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}37&69&0\\-7&-12&-1\\-14&-32&0\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}37&69\\-14&-32\end{vmatrix}=37\cdot(-32)-69\cdot(-14)=-218.$$

Приклад 15. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$, звівши його до трикутного вигляду.

Розв’язання. Зведемо визначник до трикутного вигляду, тобто утворимо нулі під головною діагоналлю. Для цього зробимо такі перетворення. Додамо перший рядок до другого і четвертого, після чого додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього і четвертого рядків. Потім третій рядок помножимо на (–1) і додамо до четвертого рядка. Оскільки під головною діагоналлю визначника утворились всі нулі, то за теоремою маємо

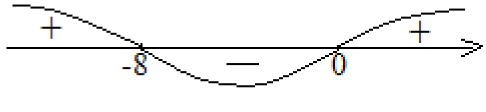
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 15\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 15\cdot(-1)\cdot 2\cdot 1\cdot 3 = -90\cdot$$

Приклад 16. Розв’язати нерівність $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} < -2$.

Розв’язання. Обчисливши визначник, дістанемо нерівність

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} < -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 0 - 2 + 2x - 0 < -2, \quad x^2 + 8x < 0.$$



Розв’язавши нерівність $x(x+8) < 0$ методом інтервалів, дістанемо розв’язок даної нерівності $x \in (-8;0)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначники другого порядку

а) $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначники третього порядку

а) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити визначники, користуючись їх властивостями

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} x & 2x & -3x \\ x & -2x & 3x \\ x & x & 2x \end{vmatrix}$.

4. Знайти алгебраїчні доповнення для вказаних елементів визначників

а) для елемента a_{12} визначника $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$;

б) для елемента a_{21} визначника $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;

в) для елемента a_{32} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix}$;

г) для елемента a_{23} визначника $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & -3 & 8 & 4 \\ -4 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити визначники третього порядку, розклавши за елементами деякого рядка або стовпця

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 15 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 8 & 10 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & 9 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

6. Обчислити визначники четвертого порядку, розклавши за елементами деякого рядка або стовпця (утворивши перед цим якомога більше нулів)

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Розв'язати рівняння

а) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} a-2 & a^2-9 \\ 1 & a-3 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 3x \\ -\cos 2x & \sin 3x \end{vmatrix} = 0$.

8. Розв'язати нерівності

а) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 4 \\ x & -2 \end{vmatrix} < 0$; б) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} > 0$; в) $\begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 4 & 2 & 0 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} < 0$.

§ 3. Обернена матриця. Ранг матриці

Розглянемо квадратну матрицю A і позначимо її визначник через $|A|$. Якщо визначник матриці $|A| \neq 0$, то вона називається *невиродженою*. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Всяка невироджена квадратна матриця ($|A| \neq 0$) має обернену. Наведемо *алгоритм знаходження оберненої матриці* методом алгебраїчних доповнень.

1. Обчислити визначник даної матриці. Якщо $|A| \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку – оберненої матриці не існує.

2. Знайти алгебраїчні доповнення до всіх елементів даної матриці та скласти транспоновану матрицю $\tilde{A}^T = (A_{ij})^T$ з алгебраїчних доповнень.

3. Визначити обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Виконати перевірку правильності обчислень, тобто перевірити виконання умови $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Зауважимо, що існують інші способи знаходження оберненої матриці.

Обернену матрицю використовують при розв’язанні матричних рівнянь.

Матричні рівняння

Розглянемо основні види матричних рівнянь, для *розв’язання* яких потрібно знайти невідому матрицю X.

1) Рівняння $A \cdot X = B$. Помноживши рівняння зліва на обернену матрицю A^{-1}, дістанемо $(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B, \quad EX = A^{-1} \cdot B$, звідки $X = A^{-1} \cdot B$.

2) Рівняння $X \cdot A = B$. Помноживши рівняння справа на обернену матрицю A^{-1}, дістанемо $X(A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}, \quad XE = B \cdot A^{-1}$, звідки $X = B \cdot A^{-1}$.

3) Рівняння $A \cdot X \cdot B = C$. Помноживши рівняння зліва на обернену матрицю A^{-1}, а справа – на обернену матрицю B^{-1}, дістанемо $(A^{-1} \cdot A)X(B \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}, \quad EXE = A^{-1}CB^{-1}$, звідки $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Ранг матриці

Розглянемо матрицю розмірності $m \times n$.

Мінором k-го порядку називається визначник M_k, утворений із елементів матриці завдяки вибору будь-яких k рядків і k стовпців. Порядок мінору не перевищує найменшого з чисел m або n, тобто $k \le \min(m,n)$. Очевидно, що мінор першого порядку – це будь-який елемент матриці.

Розглянемо кілька мінорів другого і третього порядку для матриці $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, зокрема, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. Розглянуті мінори другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого, другого рядків і першого, другого стовпців; другого, четвертого рядків і третього, четвертого стовпців. Мінор третього порядку утворюється з елементів, розміщених на перетині другого, третього, четвертого рядків і першого, третього, четвертого стовпців. Зауважимо, що мінор четвертого порядку для даної матриці єдиний – це її визначник.

Рангом матриці A називають найбільший порядок її мінору, відмінного від нуля, і позначають $\text{rang}(A)$ або $\text{r}(A)$. Ранг будь-якої ненульової матриці $A_{m\times n}$ знаходиться у межах $1 \le \text{r}(A) \le \min(m,n)$, оскільки матриця містить хоча б один елемент, відмінний від нуля.

Для визначення рангу матриці застосовують *метод обвідних мінорів. Обвідний мінор* (k+1)-го порядку повністю містить у собі мінор k-го порядку. При обчисленні рангу матриці переходять від мінору меншого порядку, відмінного від нуля, до мінору більшого порядку. Якщо мінор $M_k \ne 0$, а всі обвідні мінори (k+1)-го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. Якщо серед цих мінорів знайдеться $M_{k+1} \ne 0$, то для нього розглядають обвідні мінори (k+2)-го порядку тощо.

Якщо матриця A має ранг r , то *базисним мінором* називають будь-який мінор r-го порядку M_r, який не дорівнює нулю.

На практиці для визначення рангу матриці застосовують найчастіше *метод елементарних перетворень*.

Елементарними перетвореннями матриці називають:

1) перестановку місцями двох рядків (стовпців) матриці;

2) множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число, відмінне від нуля;

4) транспонування матриці (заміна місцями рядків і стовпців);

5) відкидання нульового рядка (стовпця).

Твердження. При проведенні елементарних перетворень над рядками (стовпцями) матриці її ранг не змінюється.

Матриці, які мають однакові ранги, називаються *еквівалентними*. В результаті елементарних перетворень матриці A дістають еквівалентну матрицю B і позначають A~B.

За допомогою метода елементарних перетворень задану матрицю зводять до еквівалентної матриці трикутного (ступінчастого) вигляду, яка має той самий ранг. Для цього утворюємо нулі під головною діагоналлю.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, і перевірити, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$.

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то обернена матриця A^{-1} існує. Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці

$$A_{11} = 3, \qquad A_{12} = -1, \qquad A_{21} = -2, \qquad A_{22} = -1.$$

Тоді обернена матриця буде мати вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Приклад 2. Розв'язати матричне рівняння $AX = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розв'язок даного рівняння знайдемо за формулою $X = A^{-1}B$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Для цього обчислимо визначник і визначимо алгебраїчні доповнення елементів. Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $A_{11} = 3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 3$, то $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Тоді

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукана матриця $X = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник заданої матриці

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5.$$

Оскільки визначник $|A|\neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Запишемо транспоновану матрицю з алгебраїчних доповнень

$$\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}^{T}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку

$$A^{-1}A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Використовуючи метод елементарних перетворень, знайдемо ранг матриці. Спочатку поміняємо місцями перший і другий рядки. А потім, помноживши одержаний перший рядок на (-2) і на (-1), додамо його до другого і третього рядків відповідно. Після чого другий рядок помножимо на (-2) і додамо до третього. В останній матриці відкидаємо рядок, всі елементи якого нулі. Дістанемо

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2)\cdot(-1)\\ \swarrow + \swarrow\\ \swarrow\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & -6 & -2 & -8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-2)\\ \swarrow\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & 4\end{pmatrix}=B.$$

В результаті елементарних перетворень над матрицею A дістали еквівалентну матрицю B, для якої існує мінор другого порядку, відмінний від нуля. Зокрема, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3\neq 0$. Отже, ранг даної матриці $r(A)=r(B)=2$.

Приклад 5. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці, які не змінюють її рангу. Поміняємо місцями перший і четвертий рядки, щоб елемент $a_{11}=1$, а потім утворимо нулі в першому і другому стовпцях. Дістанемо

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} I\leftrightarrow IV \end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} I+II\\ I\cdot 3+III\\ I\cdot(-2)+IV\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 6 & -6 & -6\\ 0 & 7 & -7 & -7\\ 0 & -3 & 3 & 3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} II\cdot 1/6\\ II\cdot 1/7\\ III\cdot(-1/3)\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} II\cdot(-1)+III\\ II\cdot(-1)+IV\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Отримали еквівалентну матрицю, для якої існує мінор другого порядку, що не дорівнює нулю $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, тому ранг матриці $r(A)=2$.

Приклад 6. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 3 & -4\\ -1 & 7 & -11 & 23\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Виберемо за основний перший рядок матриці і за допомогою елементарних перетворень утворимо нулі в першому стовпці, а потім – у другому стовпці. Відкинувши нульовий рядок, дістанемо

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&1&2&-1\\1&-1&3&-4\\-1&7&-11&23\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}I\cdot(-2)+II\\I\cdot(-1)+III\\I+IV\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-3&4&-7\\0&-3&4&-7\\0&9&-12&26\end{pmatrix}\sim$$

$$\to\begin{bmatrix}II\cdot(-1)+III\\II\cdot 3+IV\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-3&4&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-3&4&7\\0&0&0&5\end{pmatrix}.$$

У результаті елементарних перетворень дістали еквівалентну матрицю ступінчастого виду, для якої існує мінор третього порядку, відмінний від нуля. Якщо взяти перший, другий і третій стовпці, дістанемо

$$M_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&7\\0&0&5\end{vmatrix}=1\cdot(-3)\cdot 5=-15\neq 0.$$

Отже, ранг даної матриці $r(A)=3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти обернену матрицю для матриці A і зробити перевірку

а) $A=\begin{pmatrix}5&4\\-3&2\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}3&8\\2&5\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-3&4&3\\2&0&1\end{pmatrix}$, г) $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-4&5&0\\-2&1&-3\end{pmatrix}$,

д) $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\0&-2&1\\5&2&3\end{pmatrix}$, е) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&2&5\\0&1&-2\end{pmatrix}$, ж) $A=\begin{pmatrix}5&-2&4\\1&6&3\\2&-3&2\end{pmatrix}$.

2. Знайти, при яких значеннях a матриця $A=\begin{pmatrix}a&2&1\\3&2&-1\\0&a&1\end{pmatrix}$ має обернену.

3. Розв’язати матричне рівняння $AX=B$, якщо

а) $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\-1&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&5&1\\1&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&4\\1&1&2\\-1&5&7\end{pmatrix}$.

4. Розв’язати рівняння $XA=B$ при $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\0&5&2\\6&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&5&6\\4&3&-2\end{pmatrix}$.

5. Розв’язати матричне рівняння $AXB=C$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-3&1&4\\0&5&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&2&5\\4&-1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1&3\\4&-2&0\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

6 Знайти ранг матриці

а) $\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&4&-6&8\\-3&-6&9&-12\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\4&3&7&11\\5&1&6&11\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}5&3&0&1&1\\2&-1&2&-1&0\\1&5&4&3&1\end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&1&1\\2&3&-1\end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix}1&1&-3&2\\1&-2&0&-1\\0&1&1&3\\2&-3&2&0\end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&3\\1&0&1&-3&2\\2&-2&0&-3&5\\4&-2&2&-9&9\end{pmatrix}$.

§ 4. Методи розв’язування систем лінійних рівнянь

В загальному випадку система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{4.1}$$

де a_{ij} – коефіцієнти, b_i – вільні члени системи $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, m – кількість рівнянь, n – кількість змінних. Розв’язком системи рівнянь (4.1) є впорядкована сукупність n чисел $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, підстановка яких замість змінних $x_1,x_2,...,x_n$ перетворює кожне рівняння системи в тотожність.

Система лінійних рівнянь називається *сумісною,* якщо вона має розв’язок. В іншому випадку вона – *несумісна*. Якщо сумісна система рівнянь має єдиний розв’язок, то вона – *визначена*, якщо має безліч розв’язків – невизначена.

Для системи рівнянь (4.1) можна скласти матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}\quad \text{і}\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{c|c}a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}&b_1\\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n}&b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn}&b_m\end{array}\right),$$

які називаються *основною* і *розширеною* матрицями системи.

Теорема Кронекера – Капеллі. Для того щоб система рівнянь (4.1) була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг основної матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A}$.

За теоремою Кронекера – Капеллі система має розв’язок тоді й тільки тоді, коли $r(A)=r(\overline{A})=r$. Якщо $r=n$, то система має єдиний розв’язок (визначена), а якщо $r<n$, то система має безліч розв’язків (невизначена). Якщо ж $r(A)\neq r(\overline{A})$, то система є несумісною.

Якщо система (4.1) містить однакову кількість рівнянь і невідомих $(m=n)$, то для її розв’язання можна використовувати *метод Крамера* або *метод оберненої матриці*.

Метод Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Для розв’язання такої системи можна застосувати *метод Крамера*. Розглянемо *визначник системи*, який складається із її коефіцієнтів

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замінивши в ньому стовпцем вільних членів послідовно перший, другий, …, останній стовпці, дістанемо визначники

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \ldots\ , \ \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta\neq 0$, то розв’язок системи (4.2) можна знайти за *формулами Крамера*

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{4.3}$$

де Δ_k – визначник, одержаний із Δ заміною його k-го стовпця $(k=\overline{1,n})$ стовпцем вільних членів системи.

Метод оберненої матриці (матричний метод)

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими (4.2) і запишемо її в матричному вигляді $AX=B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи знайдемо у вигляді матриці X, для чого розв'яжемо матричне рівняння $AX = B$, помноживши його зліва на матрицю A^{-1}.

Оскільки $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad EX = A^{-1}B$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{4.4}$$

Таким чином, для розв'язання системи матричним методом спочатку потрібно знайти обернену A^{-1} до матриці A системи (якщо це можливо), а потім помножити знайдену матрицю A^{-1} на матрицю B. Отже, розв'язок системи (4.2) знаходимо за формулою

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що метод оберненої матриці можна використовувати тільки тоді, коли квадратна матриця A – невироджена, тобто $|A| \neq 0$.

Метод Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь

Для розв'язання системи (4.1) або дослідження її на сумісність використовують *метод Гауса*, який полягає у поступовому виключенні невідомих. За допомогою елементарних перетворень над рядками розширеної матриці системи дістають таку матрицю трикутного (або ступінчастого) виду, яка відповідає рівносильній системі (4.2), що має ту саму множину розв'язків.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2r+1}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r+1\,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Якщо в системі (4.5) хоча б одне з чисел $b_{r+1}^{(r-1)},...,b_m^{(r-1)}$ відмінне від нуля, то система рівнянь (4.1) є несумісною. Якщо ж $b_{r+1}^{(r-1)}=...=b_m^{(r-1)}=0$, то система – сумісна, при цьому можливі два випадки.

1) Якщо $r=n$ (система визначена), то матриця системи (4.5) є трикутною, тобто кількість рівнянь дорівнює кількості змінних. З останнього рівняння знаходять змінну x_n, яку підставляють у попереднє рівняння, звідки знаходять змінну x_{n-1}, і т.д. Нарешті, з першого рівняння знаходять змінну x_1.

2) Якщо $r<n$ (система невизначена), то матриця системи (4.5) є ступінчастою, тобто кількість рівнянь менше кількості змінних. Тоді змінні $x_1,x_2,...,x_r$, які називаються *базисними*, треба виразити через змінні $x_{r+1},x_{r+2},...,x_n$, які називаються *вільними*. Виразивши базисні змінні через вільні змінні за тією самою схемою, що й у першому випадку, знаходять *загальний розв'язок системи*.

Метод Гауса є універсальним, оскільки за допомогою цього метода можна або знайти розв'язок системи, або встановити, що вона несумісна. Зазначимо, що при використанні метода Гауса набагато зручніше здійснювати перетворення над рядками розширеної матриці системи, ніж над її рівняннями.

Однорідні системи рівнянь

Розглянемо систему лінійних рівнянь, всі вільні члени якої дорівнюють нулю, тобто $b_i=0, i=\overline{1,m}$. Таку систему називають *однорідною.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0, \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Однорідна система (4.6) завжди сумісна, оскільки вона має хоча б один розв'язок $x_1=x_2=...=x_n=0$, який називається *тривіальним (нульовим)*. Отже, однорідна система може мати один розв'язок (нульовий) або безліч розв'язків.

Твердження 1. Однорідна система лінійних рівнянь (4.6) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи $r(A)$ менший кількості невідомих n. Якщо $r(A)=n$, то система (4.6) має єдиний нульовий розв'язок.

Розглянемо однорідну систему, яка має однакову кількість рівнянь і невідомих ($m=n$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (4.7)$$

Твердження 2. Для того, щоб однорідна система рівнянь (4.7) мала ненульовий розв’язок (безліч розв’язків), необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю.

Якщо однорідна система невизначена, то її загальний розв’язок можна знайти, користуючись методом Гауса або методом Крамера.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Розв’язати систему $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12 \end{cases}$ методом Крамера.

Розв’язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 5 + 5\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 1 -$$

$$-1\cdot(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot 3 - 5\cdot 1\cdot 5 = -15 - 5 - 1 + 1 - 3 - 25 = -48 \neq 0.$$

Замінивши перший, другий і третій стовпці відповідно стовпцем вільних членів, обчислимо визначники $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$, дістанемо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 10 + 12 - 12 + 2 - 50 = -48,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 150 - 60 + 2 - 10 - 36 + 50 = 96,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 36 + 10 + 10 - 2 + 30 + 60 = 144.$$

За формулами Крамера маємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-48}{-48} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{96}{-48} = -2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{144}{-48} = -3.$$

Отже, шуканий розв’язок системи $(1;-2;-3)$.

Приклад 2. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

Розв’язання. Розв’яжемо систему методом Крамера. Обчислимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -30 - 10 + 3 - 4 + 9 + 25 = -7 \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, знайдемо його.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 30 - 4 + 3 - 4 - 9 + 10 = 26,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -30 + 10 - 9 - 4 - 9 - 75 = -117,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 15 - 2 - 6 - 6 + 5 = -30.$$

Тоді за формулами Крамера маємо розв'язок

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{26}{7}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{117}{7}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{30}{7}.$$

Приклад 3. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

Скориставшись формулами Крамера, дістанемо

$$x_1 = \frac{81}{27} = 3; \quad x_2 = -\frac{108}{27} = -4; \quad x_3 = -\frac{27}{27} = -1, \quad x_4 = \frac{27}{27} = 1.$$

Отже, розв'язок системи $(3; -4; -1; 1)$.

Приклад 4. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$ методом оберненої матриці.

Розв'язання. Запишемо систему в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

тобто $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Визначимо матрицю X із рівності $X = A^{-1}B$, для цього знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Обчислимо визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 8 - 6 - 12 + 5 - 8 = -3.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Запишемо транспоновану матрицю з алгебраїчних доповнень

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -13 & -2 & 7 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -13 & -2 & 7 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок системи із рівності $X = A^{-1}B$, маємо

$$X = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -13 & -2 & 7 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 1\cdot 3 - 1\cdot 7 \\ -13\cdot 4 - 2\cdot 3 + 7\cdot 7 \\ -6\cdot 4 + 0\cdot 3 + 3\cdot 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язок системи $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1$.

Приклад 5. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у матричній формі $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця A квадратна (система має однакову кількість рівнянь і невідомих), то розв'яжемо матричне рівняння $AX = B$, звідки $X = A^{-1}B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}, обчисливши спочатку визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 90 + 3 - 24 - 10 + 18 = -87.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то матриця A має обернену. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A, дістанемо

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -24,\ A_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7,\ A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -19,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 7,\ A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

Тоді обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись рівністю $X = A^{-1}B$, дістанемо

$$X = -\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix} 3\cdot 17-24\cdot(-3)-21\cdot 10 \\ -7\cdot 17-2\cdot(-3)+20\cdot 10 \\ -19\cdot 17+7\cdot(-3)+17\cdot 10 \end{pmatrix}=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix} -87 \\ 87 \\ -174 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2$ – шуканий розв'язок системи.

Приклад 6. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x_1-x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+4x_3=1 \\ x_1-3x_2-6x_3=3 \end{cases}$ методом Гауса.

Розв'язання. Застосуємо метод Гауса до розширеної матриці системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до трикутного виду.

Спочатку поміняємо місцями перший і третій рядки для того, щоб на першому місці була одиниця. Перший рядок вибираємо за основний, тому помноживши його на (–2), додаємо до другого рядка, а помноживши на (–5), додаємо до третього. Утворивши нулі у першому стовпці (виключивши невідому x_1 із другого і третього рівняння), перейдемо до другого рядка. Помноживши другий рядок на (–2), додамо до третього рядка, після чого третій рядок поділимо на (–1). Дістанемо

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 3 \end{array}\right)\left[I\leftrightarrow III\right]\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{bmatrix} I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-5)+III \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -5 \\ 0 & 14 & 31 & -11 \end{array}\right)\left[II\cdot(-2)+III\right]\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає системі $\begin{cases} x_1-3x_2-6x_3=3, \\ \quad 7x_2+16x_3=-5, \\ \qquad\quad x_3=1, \end{cases}$ яка має єдиний розв'язок. З третього рівняння маємо $x_3=1$. Підставляючи це значення в друге рівняння, дістаємо $x_2=-3$, після чого з першого рівняння знаходимо $x_1=0$. Отже, шуканий розв'язок системи: $(0;-3;1)$.

Приклад 7. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2+x_3=-6, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2-x_3=4. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю заданої системи

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & | & -6 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб спростити обчислення, утворимо на першому місці у першому рядку елемент 1. Для цього третій рядок помножимо на (–2) і додамо до першого рядка

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & | & -6 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \left[III \cdot (-2) + I \right] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -14 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

Проведемо елементарні перетворення над рядками матриці, щоб звести її до трикутного виду, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -14 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I \cdot (-2) + II \\ I \cdot (-3) + III \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -14 \\ 0 & 7 & -5 & | & 29 \\ 0 & 8 & -10 & | & 46 \end{pmatrix} \left[III \cdot (-1) + II \right] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -14 \\ 0 & -1 & 5 & | & -17 \\ 0 & 8 & -10 & | & 46 \end{pmatrix} \left[II \cdot 8 + III \right] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & -14 \\ 0 & -1 & 5 & | & -17 \\ 0 & 0 & 30 & | & -90 \end{pmatrix}.$$

Запишемо і розв’яжемо систему рівнянь, яка відповідає останній матриці

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -14, \\ \quad -x_2 + 5x_3 = -17, \\ \qquad 30x_3 = -90, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -14; \\ \quad -x_2 + 5 \cdot (-3) = -17, \\ \qquad x_3 = -3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -14, \\ \quad x_2 = 2, \\ \qquad x_3 = -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Отримали розв’язок системи (–1; 2;–3).

Приклад 8. Розв’язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12. \end{cases}$$

Розв’язання. Розширена матриця даної системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \end{array}\right).$$

За допомогою елементарних перетворень зведемо її до трикутного вигляду. Маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -10 & 11 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ \qquad -2x_3 + 3x_4 = 5, \\ \qquad\qquad 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Звідси послідовно знаходимо $x_4 = 3,\ x_3 = 2,\ x_2 = -1,\ x_1 = 1.$

Отже, шуканий розв’язок системи (1;–1; 2; 3).

Приклад 9. Дослідити систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$ на сумісність і знайти її розв’язок, якщо це можливо.

Розв’язання. Оскільки система містить менше рівнянь, ніж невідомих, то вона або сумісна і невизначена, або несумісна. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень над рядками зведемо її до ступінчастого виду. Дістанемо

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -6 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає системі рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ \quad -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

За теоремою Кронекера – Капеллі система рівнянь сумісна і невизначена, оскільки ранг системи $r = r(A) = r(\overline{A}) = 2$, а кількість змінних $n = 5$, тобто $r < n$. Отже, дана система має безліч розв'язків, знайдемо її загальний розв'язок.

Оскільки визначник, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2: $M_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, то розглядаємо ці змінні як базисні. Виразимо базисні змінні x_1, x_2 через вільні змінні x_3, x_4, x_5. З другого рівняння знаходимо $x_2 = -1 + 2x_3 + 2x_4$ і підставляємо цей вираз у перше рівняння, звідки визначаємо $x_1 = 1 - (-1 + 2x_3 + 2x_4) + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 - x_4 - x_5$.

Отже, загальний розв'язок заданої системи має вигляд $\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 - x_5, \\ x_2 = -1 + 2x_3 + 2x_4, \end{cases}$ де x_3, x_4, x_5 – довільні дійсні числа.

Приклад 10. Дослідити систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$ на сумісність і знайти її розв'язок, якщо це можливо.

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень над рядками зведемо її до ступінчастого виду. Спочатку перший рядок помножимо на (–2) і додамо до другого, помножимо на (–1) і додамо до третього, на (–5) і додамо до четвертого рядка. Утворивши нулі в першому стовпці, візьмемо другий рядок за основний. Помножимо його на (–2) і додамо до третього рядка, а потім на (–3) і додамо до четвертого рядка. Маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає такій системі рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ \quad x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

Оскільки ця система рівнянь має безліч розв’язків ($r < n$, див. випадок 2 у дослідженні методом Гауса), то знайдемо її загальний розв’язок. Оскільки визначник, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, відмінний від нуля, то ці змінні розглядаємо як базисні. Виразимо базисні змінні x_1, x_2 через вільні змінні x_3, x_4. З другого рівняння знаходимо $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$ і підставляємо цей вираз у перше рівняння, звідки визначаємо $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$. Отже, загальний розв’язок заданої системи має вигляд

$x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $\quad x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, $\quad x_3, x_4$ – довільні дійсні числа.

Приклад 11. Дослідити на сумісність систему $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Розв’язання. Проведемо перетворення над розширеною матрицею системи і дістанемо еквівалентну матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Оскільки для матриці A всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, а $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг $r(A) = 2$. Але для розширеної матриці існує мінор третього порядку $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, тому ранг $r(\bar{A}) = 3$.

Оскільки $r(A) \neq r(\bar{A})$, то за теоремою Кронекера – Капеллі система не має розв’язків (несумісна).

Приклад 12. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Розв’язання. Запишемо розширену матрицю системи і проведемо елементарні перетворення над її рядками, дістанемо

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останньої матриці випливає, що $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 5 = n$, тому задана система сумісна і невизначена. Знайдемо загальний розв’язок системи.

Оскільки визначник, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2: $M_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, то розглядаємо ці змінні як базисні. Виразимо базисні змінні x_1, x_2 через вільні змінні x_3, x_4, x_5.

В результаті перетворень дістали матрицю, яка відповідає системі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ \quad -4x_2 + 7x_3 + 7x_4 \quad = 1. \end{cases}$$

З другого рівняння знайдемо $x_2 = \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}$ і підставимо цей вираз у перше рівняння, звідки маємо

$$x_1 = -\left(\frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}\right) + 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 + \frac{5}{4}.$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 + \frac{5}{4}, \\ x_2 = \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}, \\ x_3,\ x_4,\ x_5 \in R. \end{cases}$$

Для того, щоб із загального знайти частинний розв'язок, потрібно надати вільним змінним x_3, x_4, x_5 деяких числових значень. Зокрема, при x_3=0, x_4=0, x_5=0, маємо розв'язок $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0\right)$.

Приклад 13. Розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 \quad + \quad 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо основну матрицю системи і знайдемо ранг матриці методом елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -10 & 8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $M_r = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг матриці $r = 2 < 4 = n$, тому система має безліч розв'язків. Останній матриці відповідає система, яка має ті самі розв'язки, що й задана. Оскільки визначник M_r, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, відмінний від нуля, то ці змінні вважаємо базисними. Тоді змінні x_3, x_4 є вільними. Виразимо базисні змінні через вільні, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ \quad -5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 - 2x_4, \\ \quad -5x_2 = -4x_3 + 3x_4. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи можна знайти методом Крамера, дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 - 2x_4 & 2 \\ -4x_3 + 3x_4 & -5 \end{vmatrix} = 3x_3 + 4x_4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 - 2x_4 \\ 0 & -4x_3 + 3x_4 \end{vmatrix} = -4x_3 + 3x_4.$$

Тоді загальний розв'язок системи має вигляд

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4, \quad x_3, x_4 \in R.$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}.$$

Розв'язання. Складемо основну матрицю даної однорідної системи і знайдемо ранг матриці методом елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $M_r = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг матриці $r = 2 < 5 = n$, тому система має безліч розв'язків. Останній матриці відповідає система, яка має ті самі розв'язки, що й задана. Оскільки визначник M_r, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, відмінний від нуля, то ці змінні вважаємо базисними. Тоді змінні x_3, x_4, x_5 є вільними. Виразимо базисні змінні через вільні, для чого перенесемо доданки з вільними змінними в праву частину системи, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5x_3 - 9x_4 + x_5, \\ \quad -8x_2 = -7x_3 + 25x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Із другого рівняння виразимо змінну x_2, дістанемо

$$x_2=\frac{7}{8}x_3-\frac{25}{8}x_4+\frac{1}{2}x_5.$$

Підставивши цей вираз у перше рівняння, знайдемо x_1

$$x_1=-3\left(\frac{7}{8}x_3-\frac{25}{8}x_4+\frac{1}{2}x_5\right)+5x_3-9x_4+x_5=\frac{19}{8}x_3+\frac{3}{8}x_4-\frac{1}{2}x_5.$$

Тоді загальний розв'язок системи має вигляд

$$x_1=\frac{19}{8}x_3+\frac{3}{8}x_4-\frac{1}{2}x_5\,,\quad x_2=\frac{7}{8}x_3-\frac{25}{8}x_4+\frac{1}{2}x_5\,,\quad x_3,x_4,x_5\in R\,.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера

а) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0,\\ x_1-x_2-3x_3=13,\\ 3x_1-2x_2+4x_3=-15;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3=1,\\ x_1+x_2+2x_3=-3,\\ 3x_1+4x_2+x_3=7;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x+2y+z=1,\\ 3x+y+2z=-2,\\ 4x-y-z=7;\end{cases}$ г) $\begin{cases}5x-3y+6z=6,\\ 2x-y-3z=8,\\ -9y+z=-10.\end{cases}$

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці

а) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3,\\ 2x_1+x_2+x_3=11,\\ x_1+x_2+2x_3=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_1-x_2-4x_3=-2,\\ 6x_1+2x_2+x_3=9,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5x+y+z=3,\\ 3x-5y=9,\\ x+y+z=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x+4y+z=4,\\ -x-2y=-4,\\ 4x-y-3z=1.\end{cases}$

3. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гауса

а) $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=-2,\\ 4x_1-11x_2-x_3=3,\\ 2x_1-3x_2+3x_3=-3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_1-4x_2-x_3=1,\\ x_1-2x_2+3x_3=5,\\ 2x_1-3x_2-x_3=-3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}-2x+3y=11,\\ -3x+y+z=9,\\ 2x-3y+2z=9;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x+y+z=-7,\\ 2x-y-3z=5,\\ x-3y-z=1.\end{cases}$

4. Визначити, при яких значеннях параметрів a і b система

$$\begin{cases}3x-2y+z=b,\\ 2x+y+az=-1,\\ 5x-8y+9z=3\end{cases}$$

має один розв’язок;   має безліч розв’язків; не має жодного розв’язку.

5. Дослідити на сумісність системи рівнянь і знайти їх розв’язки у випадку сумісності

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + x_2 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 5, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 16x_5 = -1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 9; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

6. Розв’язати однорідні системи рівнянь

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

§ 5. Вектори та операції над ними. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Розрізняють векторні і скалярні величини. Скалярну величину можна охарактеризувати одним числом, а векторна величина визначається числом і напрямом. Прикладами скалярних величин є температура, маса, час, довжина, площа, об'єм, а прикладами векторних величин є сила, швидкість, прискорення.

Вектором називається напрямлений відрізок, який характеризується довжиною і напрямом. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначають $\vec{AB}$ або $\vec{a}$. Довжина вектора позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним. Вектор, початок якого співпадає з його кінцем, називають нульовим вектором і позначають $\vec{0}$.

Вектори, що лежать на паралельних прямих (на одній прямій), називаються *колінеарними*. Якщо вектори мають один і той самий напрям, то називаються *співнапрямленими*, а якщо вони мають протилежні напрями, – *протилежно-напрямленими*. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони співнапрямлені і мають однакові довжини. Якщо вектори протилежно-напрямлені і мають однакові довжини, то вони – *протилежні*. *Ортом* вектора $\vec{a}$ називають одиничний вектор $\vec{a}_0$, співнапрямлений з вектором $\vec{a}$.

Вектори, які паралельні одній площині (лежать в одній площині), називаються *компланарними*.

Лінійні операції над векторами

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який можна знайти за правилом трикутника або правилом паралелограма.

Правило трикутника: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з'єднано послідовно (початок $\bar{b}$ знаходиться в кінці $\bar{a}$), то їх сумою є вектор, що з'єднує початок першого з кінцем другого (див. рис. 5.1).

Правило паралелограма: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок, то їх сумою є вектор, що співпадає з діагоналлю паралелограма, яка виходить із спільного початку цих векторів (див. рис. 5.2).

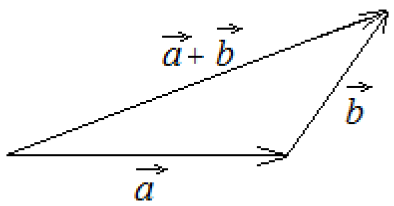


Рис. 5.1

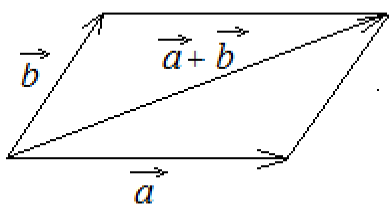


Рис. 5.2

Для знаходження суми n векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ треба від довільної точки відкласти $\vec{a}_1$, потім від його кінця відкласти $\vec{a}_2$, …, від кінця $\vec{a}_{n-1}$ відкласти $\vec{a}_n$. Тоді сумою з'єднаних послідовно векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ є вектор, який з'єднує початок першого $\vec{a}_1$ з кінцем останнього $\vec{a}_n$. Наприклад, вектор $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$ (див. рис. 5.3).

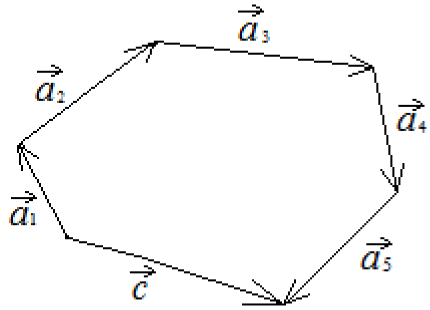


Рис. 5.3

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a} - \vec{b}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ складає вектор $\vec{a}$. Щоб знайти різницю векторів $\bar{a} - \bar{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\bar{b}$ до кінця $\bar{a}$ (див. рис. 5.4).

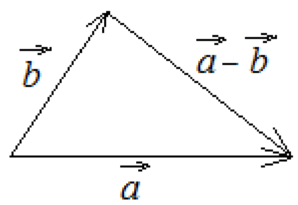


Рис. 5.4

На двох векторах завжди можна побудувати трикутник або паралелограм. Якщо паралелограм побудовано на двох векторах, які мають спільний початок, то їх сума співпадає з однією діагоналлю (виходить із спільного початку), а різниця – з іншою діагоналлю (з'єднує кінці цих векторів).

Добутком ненульового *вектора* $\vec{a}$ *на число* k називається вектор $k\vec{a}$, довжина якого $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$, а напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$, і протилежний до вектора $\vec{a}$, якщо $k < 0$. При $k = 0$ маємо $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, то існує таке число λ, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ має місце рівність $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$, де $\vec{a}_0$ – орт вектора $\vec{a}$.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називається довжина відрізка A_1B_1 (A_1, B_1 – проекції точок A, B на дану вісь), взята зі знаком $+$, коли напрям вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ співпадає з напрямом осі l, і зі знаком $-$, якщо ці напрями протилежні. Наприклад, $пр_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, $пр_l\overrightarrow{CD} = -\left|\overrightarrow{C_1D_1}\right|$ (див. рис. 5.5).

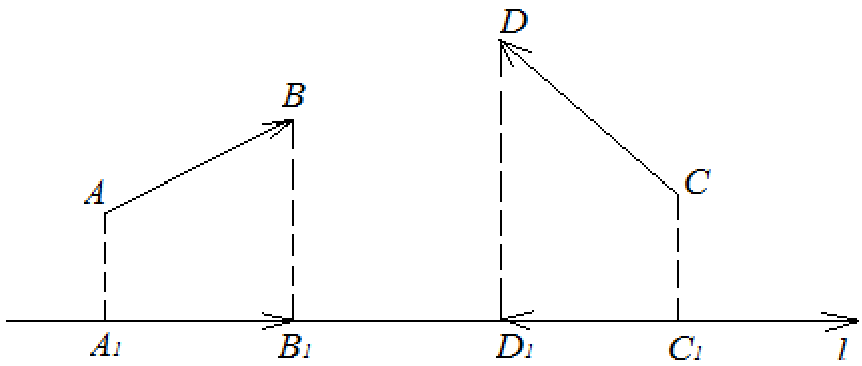


Рис. 5.5

Очевидно, що проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута φ між вектором та віссю, тобто $пр_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Розглянемо основні властивості проекції вектора на вісь:

1) $пр_l(\vec{a}+\vec{b}) = пр_l\vec{a} + пр_l\vec{b}$, 2) $пр_l(k\cdot\vec{a}) = k\cdot пр_l\vec{a}$.

Аналогічно розглядають *проекцію вектора на вектор*.

Кутом між векторами називають найменший кут, на який треба повернути один вектор до суміщення з іншим.

Лінійна залежність векторів

Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо виконується рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$, в якій хоча б одне з чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ відмінне від нуля. Якщо вказана рівність виконується тільки тоді, коли всі числа $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то система векторів є *лінійно незалежною*. У лінійно залежній системі векторів завжди існує вектор $\vec{a}_k$, який лінійно виражається через інші вектори системи.

Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були *колінеарними*, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$, де α, β – числа, які одночасно не перетворюються в нуль. Отже, два колінеарні вектори є лінійно залежними.

Будь-які два неколінеарні вектори є лінійно незалежними і утворюють *базис* двовимірного векторного простору (на площині). Тоді довільний вектор $\vec{c}$ цього простору можна розкласти за векторами $\vec{a}, \vec{b}$, тобто $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Для того, щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ були *компланарними*, необхідно і достатньо, щоб мала місце рівність: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, де числа α, β, γ

одночасно не перетворюються в нуль. Будь-які три компланарних вектори є лінійно залежними. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарні (лінійно незалежні), то вони утворюють *базис* тривимірного векторного простору. Тоді довільний вектор $\vec{d}$ цього простору можна розкласти за векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тобто

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} .$$

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \text{ де } \varphi - \text{кут між } \vec{a} \text{ і } \vec{b} .$$

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називається *скалярним квадратом* вектора $\vec{a}$ і позначається символом $\vec{a}^2$. Очевидно, що $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тобто скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

Розглянемо *основні властивості* скалярного добутку.

Алгебраїчні властивості.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативність);
2. $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (асоціативність);
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивність).

Геометричні властивості.

4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (умова перпендикулярності векторів);
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$;
6. $\vec{a}\vec{b} = \pm|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ – колінеарні.

Розглянемо *геометричні застосування скалярного добутку*.

З означення скалярного квадрата можна знайти *довжину вектора*

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} .$$

Оскільки за означенням скалярного добутку маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a} ,$$

то *проекцію вектора* на вектор визначають за однією з формул

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}, \qquad np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} .$$

Кут між векторами можна знайти з рівності

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Розглянемо *фізичний зміст скалярного добутку*.

Якщо матеріальна точка під дією сили $\vec{F}$ переміщується із точки M в точку N, то *робота по переміщенню* точки вздовж вектора $\overline{MN}$ *під дією сили* $\vec{F}$ дорівнює скалярному добутку: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$.

Дії над векторами в координатній формі

Координатами вектора $\vec{a}$ в прямокутній системі на площині називаються проекції a_x, a_y вектора $\vec{a}$ на осі координат Ox, Oy, тоді $\vec{a} = \left(a_x; a_y\right)$. Аналогічно записуємо координати вектора $\vec{a}$ у просторі: $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$. Якщо $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осей Ox, Oy, Oz, то вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Якщо вектор $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно кути α, β, γ, то косинуси цих кутів називають *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$ і позначають $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Тоді мають місце рівності

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Зазначимо, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, і вектор $\vec{a}_0 = \left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right)$ є ортом вектора $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$. Аналогічно розглядають напрямні косинуси $\cos\alpha,\ \cos\beta$ вектора $\vec{a} = \left(a_x; a_y\right)$, заданого на площині.

Розглянемо дії над векторами $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right)$, які задано своїми координатами у просторі. Тоді

1) *лінійні операції* над векторами визначаються так

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\right), \qquad \lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right);$$

2) *скалярний добуток* визначається за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

3) *довжина вектора* $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ обчислюється за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2};$$

4) *кут* φ *між векторами* можна знайти з рівності

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}\sqrt{b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} + b_z^{\ 2}}}.$$

Крім того, *умовою перпендикулярності векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

а *умовою колінеарності* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є пропорційність їх координат

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Зауважимо, що наведені вище формули є аналогічними для векторів, заданих своїми координатами на площині.

Якщо відомі координати початку вектора $A(x_1; y_1; z_1)$ і координати його кінця $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор має координати

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\right).$$

Тоді довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнює

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Радіус-вектором точки M називається вектор $\overrightarrow{OM}$, який з’єднує початок координат з точкою M.

Векторний добуток та його властивості

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними, тобто $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$;

3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють *праву трійку*, тобто з кінця вектора $\vec{c}$ видно, що поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на менший кут здійснюється проти годинникової стрілки.

Зазначимо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють *ліву трійку,* якщо поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснюється за годинниковою стрілкою.

Векторний добуток $\vec{a}$ на $\vec{b}$ позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Геометричну ілюстрацію векторного добутку подано на рис. 5.6.

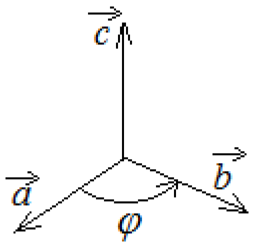


Рис. 5.6

Розглянемо основні властивості векторного добутку.

Алгебраїчні властивості.

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикомутативність);

2. $(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$ (асоціативність);

3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (дистрибутивність).

Геометричні властивості.

1. *Умова колінеарності векторів*: вектори $\vec{a},\vec{b}$ є колінеарними тоді й тільки тоді, коли $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, тобто $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2. *Геометричний зміст векторного добутку*. Довжина векторного добутку $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $$S_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Векторний добуток застосовують для обчислення площі паралелограма або трикутника (див. рис. 5.7, 5.8). Очевидно, що площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, визначається за формулою $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

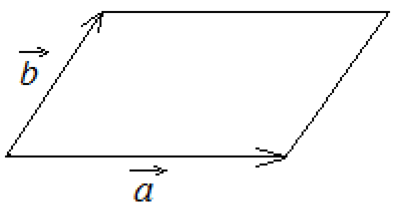


Рис. 5.7

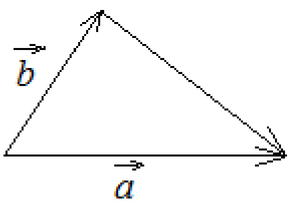


Рис. 5.8

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано своїми координатами $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, тобто $\bar{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Знайдемо векторні добутки базисних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Із колінеарності векторів випливає, що $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$. Оскільки вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ є ортами координатних осей Ox,Oy,Oz, то за означенням векторного добутку маємо
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Тоді за властивостями векторного добутку маємо

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}\,.$$

Отже, координати векторного добутку можна знайти так:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right).$$

Мішаний добуток та його застосування

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, тобто $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Якщо вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – некомпланарні, то на них можна побудувати паралелепіпед (див. рис. 5.9). Знайдемо об'єм цього паралелепіпеда.

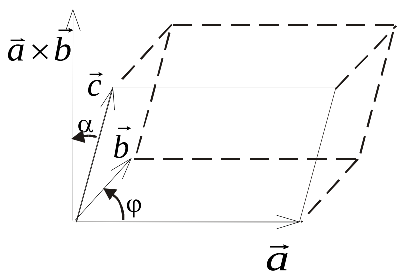


Рис. 5.9

Площа його основи (паралелограма) дорівнює довжині векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi\,.$$

Оскільки для правої трійки векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ висота паралелепіпеда дорівнює $H=\left|\vec{c}\right|\cos\alpha$, а для лівої трійки $H=-\left|\vec{c}\right|\cos\alpha$, то його об'єм

$$V=S\cdot H=\pm\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\alpha=\pm\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\,.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів $V=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$ (геометричний зміст мішаного добутку).

Розглянемо основні *властивості мішаного добутку*.

Алгебраїчні властивості.

1. Якщо переставити місцями знаки векторного і скалярного множення, то мішаний добуток не зміниться

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Ця властивість дозволяє записувати мішаний добуток у вигляді $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Надалі будемо позначати $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Мішаний добуток змінює свій знак при перестановці двох сусідніх векторів-співмножників

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c},\quad \vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b},\quad \vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{b}\vec{c}\vec{a},\quad \vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

3. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці векторів

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Геометричні властивості.

4. *Умова компланарності векторів:* вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ є компланарними тоді й тільки тоді, коли $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

5. *Орієнтація векторів*: якщо мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то – ліву трійку.

Якщо вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ задано своїми координатами $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$, то враховуючи властивості скалярного і векторного добутків, маємо

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=$$

$$=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Отже, мішаний добуток векторів можна обчислити як визначник, складений із координат цих векторів

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток векторів застосовують для встановлення їх компланарності та для визначення орієнтації трійки цих векторів (права чи ліва). За допомогою мішаного добутку векторів обчислюють об'єми паралелепіпеда та тетраедра (трикутної піраміди), побудованих на цих векторах. Зокрема, об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, визначають за формулою

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

Якщо вектори $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$ задано своїми координатами, то умова їх компланарності має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис (є некомпланарними) тоді й тільки тоді, коли їх мішаний добуток не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді будь-який вектор $\vec{d}$ тривимірного простору можна розкласти за цим базисом $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Нехай вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ співпадають з діагоналями паралелограма *ABCD*. Записати вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Побудуємо паралелограм (див рис. 5.10).

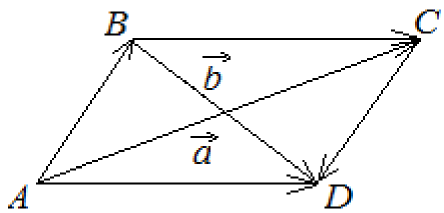


Рис. 5.10

Очевидно, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Додавши ці рівності, дістанемо $\overrightarrow{BC}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. Тоді $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}=-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. Крім того,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Знайти довжину вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}, \left|\vec{b}\right| = 1$.

Розв'язання. Оскільки $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}}$, то знайдемо скалярний квадрат вектора

$$\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi + 4\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 4 \cdot 1^2 = 2 + 1 + 4 = 7.$$

Отже, довжина вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ дорівнює $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{7}$.

Приклад 3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2, \left|\vec{b}\right| = 1$.

Розв'язання. Запишемо вектори, які визначають діагоналі паралелограма

$$\vec{d}_1 = \vec{p} + \vec{q} = (2\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{a} + 3\vec{b}) = 3\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\vec{d}_2 = \vec{p} - \vec{q} = (2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} - 4\vec{b} .$$

Скориставшись властивостями скалярного добутку, дістанемо

$$\vec{d}_1^{\,2} = (3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi + 4\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= 9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 4 \cdot 1 = 36 + 12 + 4 = 52, \quad \left|\vec{d}_1\right| = \sqrt{\vec{d}_1^{\,2}} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

$$\vec{d}_2^{\,2} = (\vec{a} - 4\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 8\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 8|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi + 16\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= 4 - 8 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 16 = 4 - 8 + 16 = 12, \quad \left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{\vec{d}_2^{\,2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} .$$

Отже, довжини діагоналей паралелограма $d_1 = 2\sqrt{13}, d_2 = 2\sqrt{3}$.

Приклад 4. Знайти напрямні косинуси і кути, які утворює вектор $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ з осями координат.

Розв'язання. Оскільки вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ має координати $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = (1; 0; -1)$, то його довжина $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Тоді його напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат такі кути

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \qquad \beta = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}; \qquad \gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Приклад 5. Для векторів $\vec{a} = (2;-1;3)$ і $\vec{b} = (1;3;-2)$ знайти суму $\vec{a} + \vec{b}$, різницю $\vec{a} - \vec{b}$, вектор $2\vec{a} - \vec{b}$ та його довжину, скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$, кут $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, проекцію $np_{\bar{b}}\vec{a}$.

Розв'язання. Користуючись операціями додавання, віднімання множення вектора на число для векторів у координатній формі, маємо

$$\vec{a} + \vec{b} = (2;-1;3) + (1;3;-2) = (3;2;1), \qquad \vec{a} - \vec{b} = (2;-1;3) - (1;3;-2) = (1;-4;5),$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (4;-2;6) - (1;3;-2) = (3;-5;8), \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 8^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

За означенням скалярного добутку маємо

$$\vec{a}\vec{b} = (2;-1;3)\cdot(1;3;-2) = 2\cdot 1 - 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) = -7.$$

Тоді кут $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}\cdot\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{-7}{14} = -\frac{1}{2},$$

звідки $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює

$$np_{\bar{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Приклад 6. Знайти кут $\angle BAC$ у трикутнику, заданому вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;2;1), C(2;1;2)$.

Розв'язання. Знайдемо кут $\angle BAC$ як кут між векторами $\overrightarrow{AB} = (1;1;0)$ і $\overrightarrow{AC} = (1;0;1)$, на яких побудовано трикутник. Застосувавши скалярний добуток векторів, маємо

$$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\cdot\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, кут $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$.

Приклад 7. Дано трикутник з вершинами $A(1;0), B(-1;1), C(3;4)$. Довести, що кут при вершині A в трикутнику ABC – прямий, та визначити інші кути цього трикутника.

Розв'язання. Для доведення того, що кут $\angle BAC$ – прямий, достатньо показати перпендикулярність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AB}=(-2;1), \overrightarrow{AC}=(2;4)$. Оскільки скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\cdot 2+1\cdot 4=0$, то вони є перпендикулярними, а значить, кут $\angle BAC$ – прямий.

Для визначення інших кутів трикутника розглянемо вектори $\overrightarrow{BA}=(2;-1), \overrightarrow{BC}=(4;3), \overrightarrow{CA}=(-2;-4), \overrightarrow{CB}=(-4;-3)$, тоді

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{2\cdot 4+(-1)\cdot 3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\angle ACB=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}=\frac{20}{10\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отже, $\angle ABC=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\angle ACB=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Приклад 8. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(5;2;7)$ і $\vec{b}=(1;2;4)$.

Розв'язання. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює довжині векторного добутку цих векторів. Знайдемо векторний добуток заданих векторів

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-6\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Тоді площа паралелограма дорівнює

$$S=|\vec{c}|=\sqrt{6^2+14^2+8^2}=2\sqrt{74}.$$

Приклад 9. Знайти площу трикутника з вершинами $A(2;2;2)$, $B(1;3;3), C(3;4;2)$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1), \overrightarrow{AC}=(1;2;0)$. За означенням векторного добутку площа трикутника, побудованого на цих векторах, обчислюється за формулою

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Обчислимо векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

Отже,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Приклад 10. Показати, що вектори $\vec{a}$=(1;–2;3), $\vec{b}$=(3;–1;2), $\vec{c}$=(–2;1;–3) некомпланарні. Знайти орієнтацію трійки векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ та об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання. Розглянемо мішаний добуток цих векторів. Оскільки

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=3+9+8-6-2-18=-6\neq 0,$$

то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – не компланарні. Оскільки $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то ці вектори утворюють ліву трійку.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах

$$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=6.$$

Приклад 11. У просторі задано чотири точки A (1, 1, 1), B (4, 4, 4), C(3,5,5), D (2, 4, 7). Знайти об'єм тетраедра $ABCD$.

Розв'язання. Оскільки об'єм тетраедра $ABCD$ дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, то для його визначення обчислимо мішаний добуток цих векторів. Оскільки

$\overrightarrow{AB}$=(3;3;3), $\overrightarrow{AC}$=(2;4;4), $\overrightarrow{AD}$=(1;3;6), то

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=3.$$

Приклад 12. Задано координати вершин трикутної піраміди $ABCD$: $A(2;2;2)$, $B(1;3;3), C(3;4;2), D(5;8;-4)$. Знайти: 1) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 2) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) площу грані ABC; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання. Для заданих точок A,B,C розглянемо відповідні вектори $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;0)$.

1) Кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ визначаємо за допомогою скалярного добутку цих векторів, тобто

$$\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-1\cdot1+1\cdot2+1\cdot0}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}},$$

$$\angle A=\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

2) Записавши вектор $\overrightarrow{AD}=(3;6;-6)$, знайдемо проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$

$$np_{\overline{AB}}\,\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{-1\cdot3+1\cdot6+1\cdot(-6)}{\sqrt{3}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

3) Площу грані ABC знайдемо як площу трикутника з вершинами $A(2;2;2)$, $B(1;3;3), C(3;4;2)$. За допомогою векторного добутку маємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Обчисливши векторний добуток $\vec{AB}\times\vec{AC}$, дістанемо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

Таким чином, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2;\ 1;-3)$, тоді

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

4) Об’єм трикутної піраміди $ABCD$, побудованої на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, обчислимо за допомогою мішаного добутку цих векторів. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;0)$, $\overrightarrow{AD}=(3;6;-6)$, то

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 6 & -6\end{vmatrix}=12+6-6+6=18.$$

Тоді об’єм піраміди

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot18=3.$$

Приклад 13. Показати, що вектори $\vec{a}=(5;4;3)$, $\vec{b}=(-3;-1;2)$, $\vec{c}=(-3;1;3)$ утворюють базис тривимірного векторного простору та розкласти вектор $\vec{d}=(12;9;10)$ за цим базисом.

Розв’язання. Спочатку покажемо, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є лінійно незалежними, для цього складемо визначник із координат цих векторів. Так як визначник при транспонуванні не змінюється, то для зручності координати векторів запишемо по стовпцях. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -15-9-24-(9-36+10) = -31 \neq 0\,,$$

то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тривимірного векторного простору.

Вектор $\vec{d}$ також належить цьому простору, тому його можна розкласти за цим базисом, тобто $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Запишемо розклад вектора у координатній формі

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

звідки дістаємо систему рівнянь $\begin{cases} 5\alpha - 3\beta - 3\gamma = 12, \\ 4\alpha - \beta + \gamma = 9, \\ 3\alpha + 2\beta + 3\gamma = 10, \end{cases}$, яку розв'яжемо методом Крамера. Оскільки визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -31 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Обчисливши визначники Δ_1, Δ_2 і Δ_3, дістанемо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -3 & -3 \\ 9 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -93,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 12 & -3 \\ 4 & 9 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -62,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 12 \\ 4 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 31,$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-93}{-31} = 3, \qquad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-62}{-31} = 2, \qquad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{31}{-31} = -1.$$

Отже, $\vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, де $(3;2;-1)$ – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Завдання для самостійної роботи

1. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE і CF. Показати, що $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

2. Задано правильний шестикутник $ABCDEF$, в якому $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ всі вектори, що збігаються з іншими сторонами та діагоналями шестикутника.

3. На векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c},\ \overrightarrow{AA_1}=\vec{d}$ побудовано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через задані вектори виразити вектори, що співпадають з ребрами, діагоналями та діагоналями граней цього паралелепіпеда.

4. Знаючи, що $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}, \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, знайти скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, скалярний добуток $(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$ та довжину вектора $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$.

5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\dfrac{2\pi}{3}$, причому $|\vec{a}|=3, \left|\vec{b}\right|=4$. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, скалярні квадрати $\vec{a}^2$ і $\vec{b}^2$, скалярний добуток $(3\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$ та довжини векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|, \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

6. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=1,\ |\vec{n}|=2,\ \angle(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

7. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}|=2\sqrt{2}, |\vec{q}|=3, \angle\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

8. Задано вектори $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j},\ \vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}$. Знайти скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}$ та проекцію вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

9. Для векторів $\vec{a}=(1;7), \vec{b}=(-3;4)$ визначити $5\vec{a}-\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}$, напрямні косинуси та орт вектора $\vec{b}$, скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}-\vec{b}$ і проекцію вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$.

10. Для векторів $\vec{a}=(6;-8), \vec{b}=(2;1)$ визначити довжину вектора $\vec{a}$, орт вектора $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$ та довжину вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$.

11. Знайти довжини, напрямні косинуси, орти векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ та кут між ними, якщо $A(-2;1),\ B(5;2), C(1;-3)$.

12. У трикутнику ABC задано вершини $A(3;2),\ B(5;-2)$ і $C(1;0)$. Знайти внутрішні кути цього трикутника та довжину медіани AM.

13. Задано трикутник з вершинами $A(1;-1),\ B(6;4)$ і $C(2;6)$. Знайти центр маси (точку перетину медіан) цього трикутника.

14. У трикутнику з вершинами $A(3;-1;5),\ B(4;2;-5), C(-4;0;3)$ обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A. Знайти центр маси трикутника.

15. У трикутнику з вершинами $A(-2;0),\ B(6;6), C(1;-4)$ проведено бісектрису AK. Знайти її довжину.

16. Дано дві вершини $A(1;-2;-4)$, $B(-2;2;1)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину діагоналей $O(3;-2;6)$. Знайти дві інші вершини паралелограма та обчислити довжини його діагоналей.

17. Дано точки $A(1;3)$, $B(4;7)$, $C(2;8)$ і $D(-1;4)$. Показати, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. Знайти кут між діагоналями.

18. Для векторів $\vec{a}=(3;-4;1), \vec{b}=(-1;2;6)$ визначити довжину вектора $\vec{a}$, напрямні косинуси вектора $\vec{b}$, скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$, довжину вектора $3\vec{a}-4\vec{b}$, проекцію вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ і векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$.

19. Для векторів $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ визначити скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}-5\vec{b}$, проекцію вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$ і векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$.

20. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$.

21. Знайти координати вектора $\overrightarrow{MN}$, його довжину та напрямні косинуси, якщо $M(-5;9;2)$, $N(5;4;12)$. Знайти скалярний та векторний добутки векторів $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$.

22. Задано точки $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$ і $D(3;2;-4)$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ та знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$.

23. Знайти внутрішні кути трикутника з вершинами $A(5;2;-4)$, $B(9;-8;-3)$ і $C(16;-6;-11)$.

24. Показати, що чотирикутник з вершинами $A(5;2;6)$, $B(6;4;4)$, $C(4;3;2)$ і $D(3;1;4)$ є квадратом. Знайти довжину його діагоналі та обчислити площу.

25. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(2;3;5)$, $B(4;1;8)$, $C(6;3;-1)$.

26. Показати, що вектори $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(2;-1;5)$, $\vec{c}=(3;1;2)$ компланарні.

27. Перевірити, чи лежать точки $A(1;2;-3)$, $B(2;4;-1)$, $C(3;2;5)$ і $D(-1;3;2)$ в одній площині. Якщо точки не лежать в одній площині, то знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

28. Показати, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис тривимірного векторного простору та розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо

а) $\vec{a}=(1;2;-1)$, $\vec{b}=(3;6;1)$, $\vec{c}=(3;9;3)$, $\vec{d}=(2;7;0)$;

б) $\vec{a}=(2;1;3)$, $\vec{b}=(2;-3;1)$, $\vec{c}=(1;2;1)$, $\vec{d}=(0;11;3)$.

29. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ і $D(4;1;3)$.

30. Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ і $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини *D*.

Контрольні запитання

1. Дайте означення матриці та опишіть дії над матрицями.
2. Сформулюйте означення визначників другого і третього порядку.
3. Наведіть властивості визначників.
4. Що таке мінор та алгебраїчне доповнення елемента матриці?
5. Як розкласти визначник за елементами якогось рядка або стовпця?
6. Як обчислюють визначники n-го порядку при $n>3$?
7. Дайте означення оберненої матриці та опишіть умови її існування.
8. Наведіть алгоритм відшукання оберненої матриці.
9. Сформулюйте поняття рангу матриці та опишіть методи його обчислення.
10. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, визначеною?
11. Наведіть формули Крамера для розв’язання системи лінійних рівнянь.
12. Як застосовується метод оберненої матриці для розв’язання системи лінійних рівнянь?
13. Опишіть суть методу Гауса для розв’язання системи лінійних рівнянь.
14. Як дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність?
15. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.
16. Як знайти розв’язок однорідної системи лінійних рівнянь?
17. Опишіть поняття вектора, його довжини, орта, напрямних косинусів.
18. Дайте означення колінеарності та компланарності векторів.
19. Які лінійні операції можна виконувати над векторами?
20. Як виконуються дії над векторами, заданими своїми координатами?
21. Як розкласти вектор за базисом?
22. Наведіть поняття скалярного добутку векторів та його властивості.
23. Опишіть застосування скалярного добутку.
24. Яка трійка векторів називається правою?
25. Сформулюйте поняття векторного добутку векторів і його властивості.
26. Як застосовується векторний добуток?
27. Сформулюйте поняття мішаного добутку векторів та його властивості.
28. Опишіть застосування мішаного добутку.

Розділ ІІ. Елементи аналітичної геометрії

§ 6. Системи координат.
Прямокутна система координат на площині та у просторі

Прямокутна декартова система координат. Основні задачі

Введення системи координат дає можливість чисельно описати положення точки на площині (у просторі), побудувати геометричні об'єкти та вивчити їх властивості. Однією з основних є прямокутна система координат.

Дві взаємно перпендикулярні осі Ox і Oy, які мають спільний початок – точку O і однакову масштабну одиницю, задають *прямокутну декартову систему координат* (*ПДСК*) *на площині*. Нехай M – довільна точка площини, а точки A і B є проекціями точки M на осі Ox і Oy відповідно. Тоді величини $x = OA$ і $y = OB$ називають *прямокутними координатами* точки $M(x;y)$, причому x – абсциса, а y – ордината точки M (див. рис. 6.1).

Аналогічно розглядають *прямокутну декартову систему координат* (ПДСК) *у просторі*, яку задають три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy і Oz, що мають спільний початок – точку O і однакову масштабну одиницю. Довільна точка простору M має три координати x, y і z, які дорівнюють величинам $x = OP$, $y = OQ$, $z = OR$, де P, Q і R є проекціями точки M на осі Ox , Oy і Oz відповідно (див. рис. 6.2). При цьому x – абсциса, y – ордината, z – апліката точки $M(x;y;z)$.

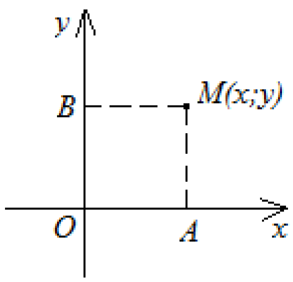


Рис. 6.1

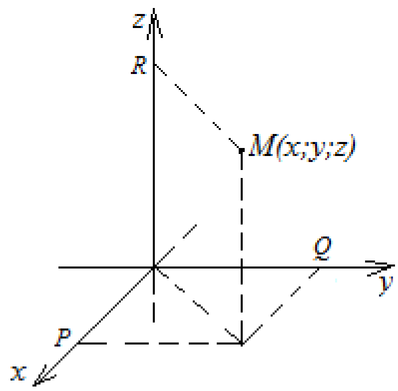


Рис. 6.2

Розглянемо *основні задачі* прямокутної системи координат.

1. *Визначення координат точки за її положенням* на площині або в просторі.

2. *Визначення положення точки, якщо задано її координати* в *ПДСК*.

3. *Відстань між двома точками* $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ площини обчислюється за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ . \qquad (6.1)$$

Аналогічно обчислюють відстань між двома точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ простору

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \qquad (6.2)$$

4. *Поділ відрізка у заданому відношенні*.

Нехай точка M поділяє відрізок M_1M_2, який з'єднує точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, у *заданому відношенні* $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$. Тоді координати точки $M(x;y)$ визначають за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (6.3)$$

Зокрема, при $\lambda=1$ дістаємо формули для обчислення координат *середини відрізка* M_1M_2

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Аналогічно визначають у просторі координати точки $M(x;y;z)$, що поділяє відрізок M_1M_2 в заданому відношенні λ. Якщо $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ . \qquad (6.4)$$

Координати середини відрізка M_1M_2 обчислюють за формулами

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

5. *Площа трикутника* $M_1M_2M_3$, вершини якого задано координатами $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2), M_3(x_3;y_3)$, визначається за формулою

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix},$$

де значення визначника береться по модулю.

Зауважимо, що наведену формулу можна використовувати для обчислення площі тільки тоді, коли трикутник задано на площині.

Полярна система координат

Розглянемо *полярну систему координат*, яка задається деякою точкою O, що називається *полюсом*, променем $O\rho$, який називається *полярною віссю*, а також масштабними одиницями для вимірювання довжин відрізків і кутів. Нехай M – довільна точка площини. *Полярними координатами* точки $M(\rho;\varphi)$ називаються числа ρ (*полярний радіус*) і φ (*полярний кут*), де $\rho = OM$ – відстань від полюса до точки M, а φ – кут, на який треба повернути полярну вісь, щоб її напрям співпав з напрямом вектора $\overrightarrow{OM}$ (поворот здійснюють проти годинникової стрілки). Очевидно, що $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. (див. рис. 6.3).

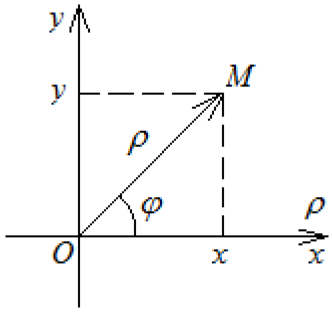


Рис. 6.3

Якщо полюс співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь співнапрямлена з віссю Ox, то полярні координати ρ і φ точки M пов'язані з її декартовими координатами x і y за допомогою формул

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{6.5}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{6.6}$$

Наприклад, знайдемо полярні координати точки $A(1;1)$. За формулами (6.6): $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $tg\varphi = 1$, звідки $\varphi = \frac{\pi}{4}$ або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$. Оскільки точка $A(1;1)$ лежить у першій чверті, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Отже, в полярних координатах $A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Перетворення прямокутної системи координат

Перехід від однієї системи координат до іншої називається перетворенням системи координат. Розглянемо два випадки перетворення прямокутної системи координат: паралельне перенесення і поворот осей координат.

1. Паралельне перенесення системи координат – це таке перетворення системи координат, при якому змінюється положення початку системи координат, а напрям осей і масштаб залишаються незмінними (див. рис. 6.4).

Нехай точка O' (початок нової системи координат) має координати $(x_0; y_0)$ у початковій системі координат, тобто $O'(x_0; y_0)$. Якщо точка M у початковій системі координат Oxy має координати $(x; y)$, а в новій системі координат $O'x'y'$ – координати $(x';y')$, то зв'язок між початковими та новими координатами точки M (див. рис. 6.4) визначається формулами

$$x = x' + x_0, \; y = y' + y_0. \tag{6.7}$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно x' і y', знайдемо формули, за допомогою яких нові координати точки M виражаються через її початкові координати

$$x' = x - x_0, \; y' = y - y_0. \tag{6.8}$$

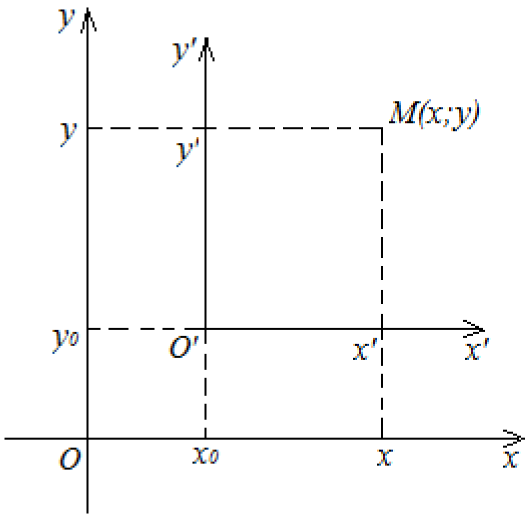


Рис. 6.4

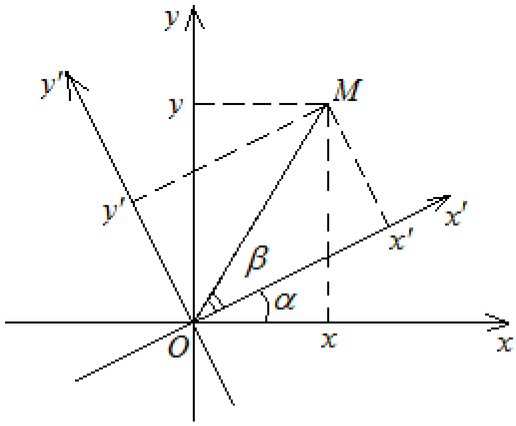


Рис. 6.5

2. Поворот системи координат – це таке перетворення системи координат, при якому осі координат повертаються на деякий кут відносно початку координат, а початок координат і масштаб залишаються незмінними (див. рис. 6.5).

Повернемо початкову систему координат Oxy відносно точки O на кут α і дістанемо нову систему $Ox'y'$. Розглянемо дві полярні системи координат з полюсом у точці O і полярними осями Ox і Ox'. Тоді згідно з рис. 6.5 маємо

$$x = \rho\cos(\alpha+\beta), \; y = \rho\sin(\alpha+\beta), \quad x' = \rho\cos\beta, \; y' = \rho\sin\beta. \tag{6.9}$$

Скориставшись тригонометричними формулами для $\cos(\alpha+\beta)$ і $\sin(\alpha+\beta)$, із формули (6.9) дістанемо

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \tag{6.10}$$

Розв'язавши рівняння (6.10) відносно x', y', знайдемо формули, за якими нові координати $(x';y')$ точки виражаються через початкові координати $(x;y)$

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{6.11}$$

Формули (6.10) і (6.11) встановлюють зв'язок між початковими і новими координатами точки M при повороті координатних осей на кут α.

Перетворення прямокутної системи координат використовують при зведенні загальних рівнянь кривих другого порядку до канонічного виду, що полегшує дослідження та побудову цих ліній.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано точки $A(7;2;-3)$, $B(-5;0;4)$. Відрізок AB ділиться точкою M у відношенні $\lambda = AM : MB = 1:5$. Знайти координати точки M.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M за формулами поділу відрізка в заданому відношенні $\lambda = \dfrac{1}{5}$, маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{1}{5}(-5)}{1+\frac{1}{5}} = \frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)} = 5, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}} = \frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{5}\cdot 4}{1+\frac{1}{5}} = \frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)} = -\frac{11}{6}.$$

Отже, точка M має координати $M\left(5;\ \frac{5}{3}; -\frac{11}{6}\right)$.

Приклад 2. У паралелограмі $ABCD$ задано три вершини $A(-3;4;1)$, $B(-5;3;2)$, $C(-1;2;-3)$. Знайти четверту вершину D.

Розв'язання. Діагоналі паралелограма AC і BD перетинаються в точці $K(x;y;z)$, яка ділить їх навпіл. Знайдемо координати точки K, маємо

$$x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3-1}{2} = -2, \quad y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad z = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Оскільки точка $K(-2;3;-1)$ є серединою діагоналей паралелограма, то

$$x = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-5 + x_D}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad x_D = 1,$$

$$y = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3 + y_D}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad y_D = 3,$$

$$z = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2 + z_D}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad z_D = -4.$$

Отже, четверта вершина паралелограма $D(1;3;-4)$.

Зазначимо, що цю задачу можна було розв'язати іншим способом, а саме за допомогою векторів. Нехай $D(x_D; y_D; z_D)$, тоді з умови випливає, що $\overrightarrow{BC} = (4; -1; -5)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D + 3; y_D - 4; z_D - 1)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ рівні, то їх координати рівні $x_D + 3 = 4,\quad y_D - 4 = -1,\quad z_D - 1 = -5$, звідки дістаємо $x_D = 1, y_D = 3, z_D = -4$, тобто $D(1; 3; -4)$.

Приклад 3. У трикутнику з вершинами $A(-2; 4; 0)$, $B(6; 12; -4)$ і $C(0; 10; 6)$ знайти довжину медіани *CM* і центр мас трикутника.

<u>Розв'язання</u>. Знайдемо координати точки *M* як середини відрізка *AB*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+12}{2} = 8;$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{0-4}{2} = -2; \qquad M(2; 8; -2).$$

Тоді довжина медіани *CM* дорівнює відстані від точки *C* до точки *M*:

$$CM = \sqrt{(2-0)^2 + (8-10)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Знайдемо центр мас трикутника – точку *O* перетину його медіан. Відомо, що точка *O* ділить медіану *CM* у відношенні $2:1$, починаючи від вершини *C*, тобто $\lambda = CO : OM = 2$. Оскільки $C(0; 10; 6)$ і $M(2; 8; -2)$, то

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{0 + 2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}; \qquad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{10 + 2\cdot 8}{3} = \frac{26}{3};$$

$$z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{6 + 2\cdot(-2)}{3} = \frac{2}{3}; \qquad O\left(\frac{4}{3}; \frac{26}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Приклад 4. Дано трикутник *A* (4; 1), *B* (7;5), *C* (–4; 7). Знайти точку M_1 перетину бісектриси його внутрішнього кута при вершині *A* зі стороною *BC*. Обчислити площу трикутника $M_1M_2M_3$, де M_2 і M_3 – середини сторін *AB* і *AC* відповідно.

Розв'язання. У трикутнику *ABC* проведемо бісектрису AM_1 (див. рис. 6.6).

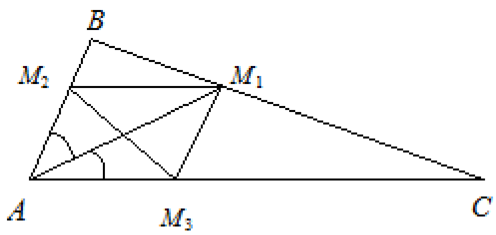


Рис. 6.6

Відомо, що бісектриса в трикутнику ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам кута, тобто

$$\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{AB}{AC}.$$

Скориставшись формулою відстані між точками, знайдемо довжини відрізків AB і AC та їх відношення

$$AB=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}=5, \quad AC=\sqrt{(-4-4)^2+(7-1)^2}=10,$$

$$\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\lambda.$$

Скориставшись формулами поділу відрізка у заданому відношенні, знайдемо координати точки $M_1\ (x_1;\, y_1)$

$$x_1=\frac{7+\frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}, \quad y_1=\frac{5+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}}=\frac{17}{3}, \quad M_1\left(\frac{10}{3};\frac{17}{3}\right).$$

Визначимо координати точок $M_2\ (x_2;\, y_2)$ і $M_3\ (x_3;\, y_3)$, які є серединами сторін AB і AC, дістанемо

$$x_2=\frac{4+7}{2}=\frac{11}{2}, \quad y_2=\frac{1+5}{2}=3, \quad M_2\left(\frac{11}{2};\,3\right),$$

$$x_3=\frac{4-4}{2}=0, \quad y_3=\frac{1+7}{2}=4, \quad M_3(0;4).$$

Площу трикутника $M_1M_2M_3$ можна обчислити за формулою

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix},$$

де значення визначника береться по модулю. Маємо

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{11}{2}-\frac{10}{3} & 0-\frac{10}{3} \\ 3-\frac{17}{3} & 4-\frac{17}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left|-\frac{5}{3}\right|\cdot\begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -16 & 1 \end{vmatrix}=\frac{225}{36}.$$

Приклад 5. Знайти полярні координати точки $A(-2;2)$, заданій в прямокутній системі координат.

Розв'язання. Скориставшись формулами (6.6) переходу від прямокутних до полярних координат маємо $\rho=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $tg\varphi=-\frac{2}{2}=-1.$

Оскільки точка $A(-2,2)$ лежить у другій чверті, то кут $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Отже, в полярних координатах точка $A\left(2\sqrt{2};\, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Приклад 6. Визначити відстань між точками $M\left(4;\dfrac{\pi}{6}\right)$ і $N\left(3;\dfrac{\pi}{2}\right)$, заданими в полярній системі координат.

Розв'язання. Розглянемо трикутник OMN, дві вершини M і N якого задані, а третя співпадає з полюсом O. За теоремою косинусів можна знайти довжину сторони MN, а саме

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos\angle MON .$$

Оскільки за означенням полярних координат

$$OM = 4,\ ON = 3,\ \angle MON = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

то шукана відстань

$$MN = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{16+9-12} = \sqrt{13} .$$

Зауважимо, що спочатку можна знайти прямокутні декартові координати точок M і N, а потім обчислити відстань між ними. Скориставшись формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, дістанемо

$$x_M = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad y_M = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad M\left(2\sqrt{3};2\right),$$

$$x_N = 3\cos\frac{\pi}{2} = 3\cdot 0 = 0, \quad y_N = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3\cdot 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad N\left(0;3\right) .$$

Тоді $MN = \sqrt{(0-2\sqrt{3})^2 + (3-2)^2} = \sqrt{13}$.

Завдання для самостійної роботи

1. У трикутнику з вершинами A(1;–3), B(3;–5) і C(–5;7) знайти середини його сторін і довжину медіани AM.

2. Визначити довжини медіан трикутника, знаючи координати його вершин A(3;–2), B(5;2) і C(–1;4).

3. Відрізок AB поділено на три рівні частини. Визначити координати точок поділу відрізка, якщо A(2;1) і B(–4;3).

4. Знайти площу квадрата, якщо його суміжні вершини А(2;–1) і В(–1;3).

5. Задано трикутник з вершинами $A(1;-1)$, $B(6;4)$ і $C(2;6)$. Знайти центр мас (точку перетину медіан) цього трикутника.

6. Знайти точку перетину медіан трикутника, знаючи координати його вершин $A(1;4)$, $B(-5;0)$ і $C(2;-1)$. Визначити довжину медіани CK.

7. Дано вершини трикутника $A(7;2)$, $B(1;9)$, $C(-8;-11)$. Знайти відстань від точки перетину медіан до вершини A.

8. У трикутнику ABC відомо дві вершини $A(3;0)$ і $B(-5;7)$ і точка перетину його медіан $M(1;14)$. Знайти координати третьої вершини C трикутника.

9. У трикутнику з вершинами $A(-2;0)$, $B(6;6)$, $C(1;-4)$ проведено бісектрису AK. Знайти її довжину.

10. Дано трикутник з вершинами $A(4;1)$, $B(7;5)$ і $C(-4;7)$. Знайти точку перетину бісектриси внутрішнього кута A з протилежною стороною BC.

11. Дано трикутник з вершинами $A(3;-5)$, $B(-3;3)$ і $C(-1;-2)$. Визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

12. У паралелограмі $ABCD$ задано вершини $A(11;4)$, $B(-1;1)$, $C(5;7)$. Знайти координати вершини D та довжину діагоналі BD.

13. Дано три вершини $A(3;-7)$, $B(5;-7)$ і $C(-2;5)$ паралелограма $ABCD$. Знайти довжини діагоналей цього паралелограма.

14. Дано точки $A(1;-2)$ і $B(2;4)$, які є вершинами паралелограма $ABCD$. Знайти дві інші вершини паралелограма, якщо його діагоналі перетинаються в точці $M(3;1)$.

15. Визначити координати кінців відрізка AB, розділеного на три рівних частини точками $M(3;1;3)$ і $K(6;-1;1)$.

16. Довести, що трикутник з вершинами $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$, $C(-3;2;1)$ рівнобедрений.

17. У трикутнику з вершинами $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$ обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A. Знайти центр маси трикутника.

18. Дано дві вершини $A(1;-2;-4)$, $B(-2;2;1)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину діагоналей $O(3;-2;6)$. Знайти дві інші вершини паралелограма та обчислити довжини його діагоналей.

19. Знайти полярні координати точок $A(-2;0)$, $B(\sqrt{3};1)$, $C(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

20. Знайти прямокутні декартові координати точок, заданих у полярній системі координат $K\left(3;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M(1;0)$, $N\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

21. В полярній системі координат дано дві точки $A\left(8,\frac{11\pi}{12}\right), B\left(5,-\frac{3\pi}{4}\right)$ – вершини паралелограма $ABCD$, точка перетину діагоналей якого співпадає з полюсом. Визначити дві інші вершини цього паралелограма та відстань між ними.

22. В полярній системі координат задано трикутник OAB, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають координати $A\left(5,\frac{\pi}{6}\right), B\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$. Обчислити площу цього трикутника та довжину сторони AB.

§ 7. Рівняння лінії на площині. Пряма на площині

Лінія на площині задається як деяке геометричне місце точок, тобто множина точок, які мають певну (притаманну тільки їм) властивість. *Рівнянням лінії на площині* називається рівняння відносно змінних x і y, якому задовольняють координати довільної точки даної лінії і тільки вони.

В загальному вигляді рівняння лінії на площині в прямокутних декартових координатах має вигляд $F(x;y)=0$.

Для того, щоб скласти рівняння лінії як деякого геометричного місця точок (ГМТ) площини, необхідно:

а) розглянути біжучу точку лінії $M(x;y)$ з координатами x,y;

б) записати загальну властивість точок даної лінії у вигляді аналітичного виразу, який пов’язує змінні x,y з відомими параметрами;

в) спростити вираз і вивести рівняння лінії відносно змінних x,y.

Пряма на площині

Всяке рівняння першого степеня відносно x,y визначає на площині деяку пряму, і навпаки, кожну пряму можна задати таким рівнянням.

Розглянемо основні види рівнянь прямої, які використовують при розв’язуванні задач.

1) $Ax+By+C=0$ – *загальне рівняння прямої,* в якому A,B,C – сталі коефіцієнти, причому $A^2+B^2\neq 0$. У цьому рівнянні числа A,B є координатами вектора $\vec{n}=(A;B)$, перпендикулярного до даної прямої;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A;B)$ (вектор $\vec{n}$ називається *вектором нормалі*);

3) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 і має *кутовий коефіцієнт* k ($k = tg\alpha$, де α – кут між прямою і віссю Ox, $\alpha \neq \pi/2$);

4) $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка відтинає на осі Oy відрізок b;

5) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$;

6) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ – *канонічне рівняння прямої*, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до вектора $\vec{u} = (l; m)$ (вектор $\vec{u}$ називається *напрямним* для даної прямої);

7) $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$ – *параметричне рівняння прямої*, яка проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{u} = (l; m)$, причому $t \in R$;

8) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – *рівняння прямої у відрізках*, в якому a, b – величини відрізків, які відтинає пряма на осях Ox і Oy відповідно;

9) $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ – *нормальне рівняння прямої*, в якому p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану пряму, а φ – кут, утворений цим перпендикуляром з додатним напрямком осі Ox.

Виведемо, наприклад, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка відтинає на осі Oy відрізок b. Нехай пряма L утворює кут α з віссю Ox, причому $\alpha \neq \pi/2$, тоді її кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$.

За умовою точка $B(0, b)$ лежить на прямій L, а $M(x; y)$ – довільна точка цієї прямої. Проведемо прямі BN і NM, паралельні координатним осям. Із прямокутного трикутника BNM маємо $\dfrac{NM}{BN} = tg\alpha$ (див рис. 7.1).

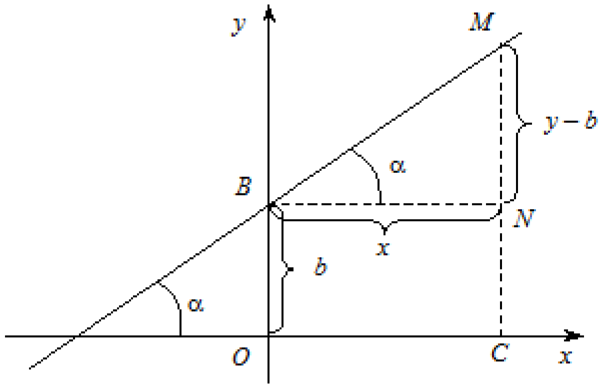


Рис. 7.1

Оскільки $NM = y - b$, $BN = x$, то $\dfrac{y-b}{x} = k$, звідки дістаємо шукане рівняння прямої $y = kx + b$.

Якщо пряма паралельна осі Ox, тобто $k = 0$, тоді рівняння має вигляд $y = b$. Якщо пряма паралельна осі Oy, то її не можна задати рівнянням $y = kx + b$, вона визначається рівнянням $x - x_0 = 0$ або $x = x_0$.

Кут між прямими

Нехай прямі L_1 і L_2 задано рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = tg\ \alpha_2$. Позначимо через φ – кут між заданими прямими $0 \le \varphi < \pi$ (див. рис. 7.2).

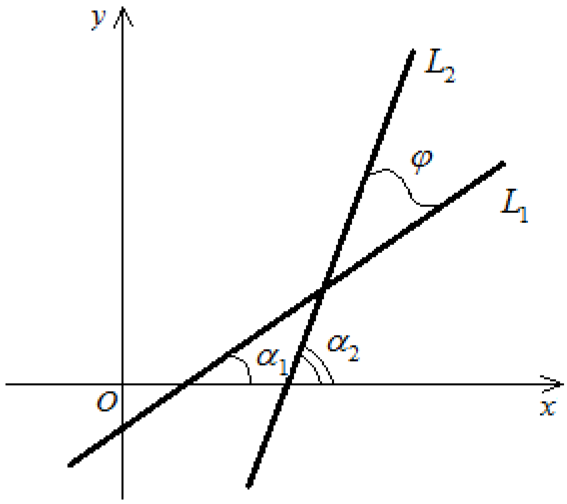


Рис. 7.2

Оскільки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, то за тригонометричними формулами дістаємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Отже, кут між прямими з відомими кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 визначається за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \qquad (7.1)$$

де значення $tg\varphi$ беруть додатним, оскільки кут між прямими гострий.

Якщо прямі L_1 і L_2 задано загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то кут між прямими можна знайти як кут між їх векторами нормалі $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$, тобто

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (7.2)$$

З формул (7.1) і (7.2) випливають умови паралельності та перпендикулярності двох прямих а) *умова паралельності*: $k_1 = k_2$ або $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$,

б) *умова перпендикулярності:* $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7.3}$$

Взаємне розміщення двох прямих

Нехай прямі L_1 і L_2 задано загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то координати точки $K(x; y)$ перетину цих прямих знаходять із системи їх рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо система має єдиний розв'язок, то прямі перетинаються у точці K. У випадку, коли система має безліч розв'язків (сумісна невизначена), тобто виконується умова $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_2}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямі збігаються. Якщо ж система несумісна, тобто $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_2}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямі паралельні.

Отже, дві прямі на площині або перетинаються в одній точці, або збігаються, або паралельні.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок $A(-2;4)$ і $B(6;8)$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка даної множини, тоді $AM = BM$ за умовою. Знайдемо відстані між точками

$$AM = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}, \quad BM = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Таким чином, рівняння даного геометричного місця точок має вигляд

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Для спрощення рівняння піднесемо до квадрату обидві його частини та розкриємо дужки, дістанемо

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64,$$

звідки знаходимо рівняння прямої $2x+y-10=0$.

Дійсно, геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних точок A і B, є пряма, яка перпендикулярна до відрізку AB і проходить через його середину.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3)$ паралельно до вектора $\bar{l}=(2;-2)$.

Розв'язання. Використовуючи канонічне рівняння прямої, маємо

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}.$$

Зведемо рівняння до загального вигляду

$$-2(x-2)=2(y+3), \qquad -x+2=y+3, \qquad x+y+1=0.$$

Отже, шукане рівняння прямої $x+y+1=0$.

Приклад 3. Обчислити кутовий коефіцієнт прямої $l: 3x+2y+6=0$ і знайти рівняння паралельної прямої l_1, яка проходить через точку $M_0(1;-4)$.

Розв'язання. Виразимо з рівняння $3x+2y+6=0$ змінну y, дістанемо $y=-\frac{3}{2}x-3$, звідки $k=-\frac{3}{2}$. Паралельна пряма l_1 має той самий кутовий коефіцієнт $k_1=k$. Запишемо її рівняння у вигляді $y-y_0=k(x-x_0)$. Тоді рівняння шуканої прямої має вигляд

$$y+4=-\frac{3}{2}(x-1), \qquad 2y+8+3x-3=0, \qquad 3x+2y+5=0.$$

Зазначимо, що рівняння прямої l_1 можна знайти інакше. Оскільки пряма l_1 паралельна l, то її рівняння має вигляд $3x+2y+C=0$, де невідомий коефіцієнт C можна знайти, підставивши в рівняння координати точки $M_0(1;-4)$. Дістанемо $3\cdot 1+2\cdot(-4)+C=0$, звідки $C=5$, тоді l_1: $3x+2y+5=0$.

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(-1;-4)$ і утворює з віссю Ox кут $\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання. Щоб скласти шукане рівняння прямої, треба знайти параметри k і b. Знайдемо кутовий коефіцієнт $k=tg\frac{3\pi}{4}=-1$.

Для визначення b підставимо в рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$ координати даної точки і значення k. Дістанемо $-4=-1\cdot(-1)+b$, звідки $b=-5$. Шукане рівняння має вигляд $y=-x-5$.

Приклад 5. Трикутник задано вершинами: $A(2;5)$, $B(-6;-4)$ і $C(6;-3)$. Записати рівняння медіани BD.

Розв'язання. Знайдемо координати точки D – середини сторони AC

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4, \quad y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5-3}{2} = 1, \quad D(4;1).$$

Оскільки $B(-6;-4)$, то рівняння медіани BD має вигляд

$$\frac{x-4}{-6-4} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad \frac{x-4}{-10} = \frac{y-1}{-5}, \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{1},$$

$$x - 4 = 2y - 2, \qquad x - 2y - 2 = 0.$$

Приклад 6. У трикутнику ABC з вершинами $A(1;-2), B(6;-4), C(2;3)$ знайти рівняння висоти AK.

Розв'язання. Оскільки висота AK перпендикулярна до сторони BC, то вектор $\overrightarrow{BC}$ можна вважати її вектором нормалі. Тоді для висоти AK можна записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;-2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-4;7)$.

Оскільки рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n} = (A;B)$, має вигляд $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$, то рівняння висоти AK має вигляд

$$-4(x-1) + 7(y+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 7y - 18 = 0.$$

Приклад 7. У трикутнику ABC з вершинами $A(4;3), B(16;-6), C(20;16)$ знайти рівняння сторін AB, BC, кут при вершині B, рівняння висоти CD та її довжину.

Розв'язання. Визначимо рівняння сторони AB як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(4;3), B(16;-6)$

$$\frac{x-4}{16-4} = \frac{y-3}{-6-3}, \quad \frac{x-4}{12} = \frac{y-3}{-9}, \quad \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{-3},$$

звідки маємо

$$-3x + 12 = 4y - 12, \quad 3x + 4y - 24 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно y, знайдемо кутовий коефіцієнт прямої

$$y = -\frac{3}{4}x + 6, \qquad \Rightarrow \qquad k_{AB} = -\frac{3}{4}.$$

Знайдемо тепер рівняння прямої BC, що проходить через дві точки $B(16;-6), C(20;16)$

$$\frac{x-16}{20-16} = \frac{y+6}{16+6}, \quad \frac{x-16}{4} = \frac{y+6}{22}, \quad \frac{x-16}{2} = \frac{y+6}{11},$$

звідки дістаємо

$$11x - 2y - 188 = 0 \, (BC), \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11}{2}x - 94, \quad \Rightarrow \quad k_{BC} = \frac{11}{2}.$$

Для знаходження величини кута $\angle B$ застосуємо формулу (7.1). Оскільки кут $\angle B$ утворено прямими AB і BC, для яких задано кутові коефіцієнти $k_{AB} = -\frac{3}{4}$ і $k_{BC} = \frac{11}{2}$, то

$$tg\angle B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{11}{2}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{11}{2}} = \frac{-25}{4 - 16{,}5} = 2 .$$

Отже, $\angle B = arctg2 = 63^o 26' \approx 1{,}11$ рад.

Зауважимо, що кут $\angle B$ можна знайти як кут між векторами нормалі сторін AB і BC.

Оскільки висота CD перпендикулярна до сторони AB, то кутовий коефіцієнт прямої CD знаходимо з умови перпендикулярності прямих $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}}$. Враховуючи, що $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, то $k_{CD} = \frac{4}{3}$.

Визначимо рівняння прямої CD, що проходить через точку $C(20;16)$ і має кутовий коефіцієнт $k_{CD} = \frac{4}{3}$. Тоді

$$y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20), \qquad \Rightarrow \qquad 4x - 3y - 32 = 0 \, (CD).$$

Для знаходження довжини висоти CD обчислимо координати точки D як точки перетину прямих AB і CD, розв’язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0, \\ 4x - 3y - 32 = 0, \end{cases} \qquad \text{звідки} \qquad x = 8, y = 0, \quad \Rightarrow \quad D(8;0).$$

За формулою відстані між двома точками знаходимо довжину CD

$$CD = \sqrt{(20-8)^2 + (16-0)^2} = 20.$$

Зауважимо, що довжину CD можна знайти простіше, а саме як відстань від точки С до прямої AB за формулою (7.3).

Приклад 8. Знайти площу трикутника, обмеженого прямою $3x - 4y + 12 = 0$ та осями координат.

Розв’язання. Для зручності обчислення площі трикутника запишемо рівняння прямої у відрізках на осях, дістанемо

$$3x - 4y + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y = -12 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = 1.$$

Отже, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ – рівняння заданої прямої у відрізках на осях, в якому $a = -4$, $b = 3$. Розглянемо точки $(-4;0)$, $(0;3)$ і проведемо пряму (див. рис. 7.3).

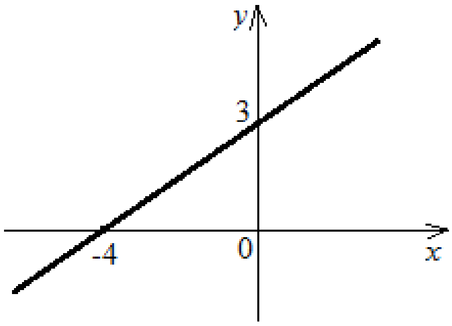


Рис. 7.3

Тоді шукана площа трикутника $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6$.

Приклад 9. Знайти гострий кут між прямими

а) $y = 5x - 1$ і $y = 2x + 7$; б) $3x - 2y - 12 = 0$ і $2x + 3y + 6 = 0$.

Розв'язання. а) Оскільки кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють $k_1 = 5$ і $k_2 = 2$, то кут між прямими знаходимо за формулою

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{2-5}{1+2\cdot 5}\right| = \frac{3}{11} \approx 0,27.$$

Тоді кут між прямими $\varphi \approx arctg 0,27 \approx 0,265$ (рад).

б) Кут між прямими знаходимо як кут між векторами, тому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{3\cdot 2 - 2\cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0.$$

Отже, кут $\varphi = \pi/2$, тобто прямі перпендикулярні.

Приклад 10. Знайти відстань від точки $M(-2;4)$ до прямої $4x - 3y - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для обчислення відстані від точки до прямої, дістанемо

$$d = \frac{|4\cdot(-2) - 3\cdot 4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Приклад 11. Знайти відстань між двома прямими $3x + 2y - 6 = 0$ і $3x + 2y + 20 = 0$.

Розв'язання. Дані прямі є паралельними. Знайдемо відстань між прямими як відстань від довільної точки A першої прямої до другої. Нехай $y = 0$, тоді рівняння першої прямої має вигляд $3x - 6 = 0$, звідки $x = 2$. Отже, відстань від точки $A(2;0)$ до прямої $3x + 2y + 20 = 0$ дорівнює

$$d = \frac{|3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 20|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

Приклад 12. Знайти вершини трикутника, сторони якого задано рівняннями $3x - 4y + 11 = 0$, $4x - y - 7 = 0$, $y = -3x$.

Розв'язання. Щоб знайти координати вершин трикутника, треба розв'язати три системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x-4y+11=0 \\ 4x-y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 4x-y-7=0 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x-4y+11=0 \\ y=-3x \end{cases}.$$

З першої системи рівнянь знаходимо координати вершини A

$$\begin{cases} 3x-4(4x-7)+11=0 \\ y=4x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-16x+28+11=0 \\ y=4x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13x=-39 \\ y=4x-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4\cdot 3-7=5 \end{cases} \Rightarrow \quad A(3;5).$$

З другої системи рівнянь знаходимо координати вершини B

$$\begin{cases} 4x+3x-7=0 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x=7 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow \quad B(1;-3).$$

Розв'язавши третю систему, дістанемо

$$\begin{cases} 3x-4(-3x)+11=0 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x=-11 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{15} \\ y=\dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \quad C\left(-\frac{11}{15};\frac{11}{5}\right).$$

Отже, вершинами трикутника є точки $A(3;5)$, $B(1;-3)$ і $C\left(-\dfrac{11}{15};\dfrac{11}{5}\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Записати рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких від точок $A(-3;0)$, $B(3;0)$ дорівнює 50.

2. Записати рівняння геометричного місця точок, сума відстаней яких від точок $A(-2;0)$, $B(2;0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

3. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться вдвічі далі від точки $A(4;0)$, ніж від точки $B(1;0)$.

4. Скласти рівняння геометричного місця точок, які відстоять від точки $A(3;0)$ вдвічі ближче, ніж від прямої $x=12$.

5. Дано дві точки $M(5;2)$ і $N(3;-1)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{MN}$.

6. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(5;2)$, $B(3;-1)$. Визначити її напрямний вектор і вектор нормалі, кутовий коефіцієнт та відрізки, які відтинає пряма на осях.

7. Через точку $A(1;3)$ провести пряму: а) паралельну, б) перпендикулярну до прямої BC, якщо В$(2;4)$, $C(5;-1)$.

8. Визначити кут між прямими $3x-y-3=0$, $2x+y-7=0$ та знайти їх точку перетину.

9. Показати, що прямі $4x-3y+2=0$, $8x-6y-13=0$ паралельні, та знайти відстань між ними.

10. Скласти рівняння сторін трикутника з вершинами $A(1;-2)$, $B(-2;1)$, $C(4;-3)$.

11. У трикутнику з вершинами $A(2;2)$, $B(-2;-1)$, $C(-5;3)$ проведено медіани *AK* і *CM*. Скласти рівняння цих медіан та знайти кут між ними.

12. У трикутнику з вершинами $A(2;-5)$, $B(1;-3)$, $C(4;1)$ скласти загальне рівняння висоти *AK*, канонічне рівняння медіани *BM* та знайти довжину висоти *AK*.

13. Дано вершини трикутника $A(1;-2)$, $B(5;4)$ і $C(-2;0)$. Скласти рівняння медіани *CM*, висоти *BN* і бісектриси *AK*.

14. Дано вершини трикутника $A(-12;-2)$, $B(4;10)$ і $C(-6;-10)$. Написати рівняння бісектриси внутрішнього кута *A* і знайти її довжину.

15. Написати рівняння висот трикутника, вершини якого знаходяться у точках $A(2;5)$, $B(-4;3)$ і $C(6;-2)$.

16. Обчислити площу трикутника, обмеженого прямою *MN* та осями координат, якщо $M(-3;-4)$, $N(6;2)$.

17. Знайти проекцію точки $M(-6;4)$ на пряму $x-5y+3=0$.

18. Знайти точку, симетричну точці $M(-2;-2)$ відносно прямої $x+y-3=0$.

19. У паралелограмі *ABCD* задано вершини $A(-3;-1)$, $B(2;2)$ і точку перетину його діагоналей $P(3;0)$. Скласти рівняння сторін паралелограма.

20. У паралелограмі *ABCD* задано рівняння двох його сторін $x-4y+1=0$, $3x+y-2=0$ і точка перетину діагоналей $P(1;-3)$. Знайти рівняння двох інших сторін паралелограма.

21. У квадраті задано вершину $A(2;-5)$ та рівняння однієї з його сторін $x-2y-7=0$. Знайти площу квадрата.

22. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$.

23. Дано пряму $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(2;1)$ під кутом 45^0 до даної прямої.

24. Скласти нормальне рівняння для кожної з прямих

а) $4x-3y-10=0$; б) $12x-5y+13=0$; в) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

§ 8. Криві другого порядку

Загальне рівняння кривих другого порядку

Лінія називається *лінією (кривою) другого порядку*, якщо вона визначається рівнянням другого степеня відносно змінних x, y, тобто рівнянням виду

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (8.1)$$

де A, B, C, D, E, F – довільні дійсні числа, причому хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля. Залежно від коефіцієнтів рівняння (8.1) визначає лінію еліптичного типу ($AC - B^2 > 0$), лінію гіперболічного типу ($AC - B^2 < 0$), лінію параболічного типу ($AC - B^2 = 0$).

За допомогою повороту системи координат загальне рівняння кривих другого порядку (8.1) можна завжди звести до вигляду

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (8.2)$$

де коефіцієнт $B = 0$. Тому надалі будемо розглядати рівняння кривих другого порядку у вигляді (8.2).

До ліній другого порядку належать *коло, еліпс, гіпербола і парабола.*

Колом називають множину точок площини, для кожної з яких відстань до даної точки (центра) дорівнює сталому числу (радіусу кола). Канонічне рівняння кола радіуса R з центром в точці $C(x_0; y_0)$ має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Еліпс та його характеристики

Еліпсом називають множину точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох фіксованих точок (фокусів) є сталою величиною, більшою за відстань між фокусами. Сталу суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів позначають через $2a$, відстань між фокусами позначають $2c$. З означення випливає, що $a > c.$

Нехай систему координат вибрано так, що фокуси еліпса розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, тобто $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ (див. рис. 8.1). Тоді канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де } b^2 = a^2 - c^2. \qquad (8.3)$$

Якщо фокуси еліпса лежать на осі абсцис, то відрізок $a = OA_1 = OA_2$ називають великою піввіссю, а відрізок $b = OB_1 = OB_2$ – малою піввіссю, тобто в рівнянні $a > b$. У цьому випадку еліпс розтягнутий вздовж осі Ox.

Ексцентриситетом еліпса називають відношення відстані між фокусами $2c$ до великої осі $2a$, тобто $\varepsilon = \frac{c}{a}, \varepsilon < 1$. *Директрисами еліпса* називаються прямі, рівняння яких $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. *Фокальні радіуси точки* M (відстані від точки M до фокусів) визначаються за формулами $r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$

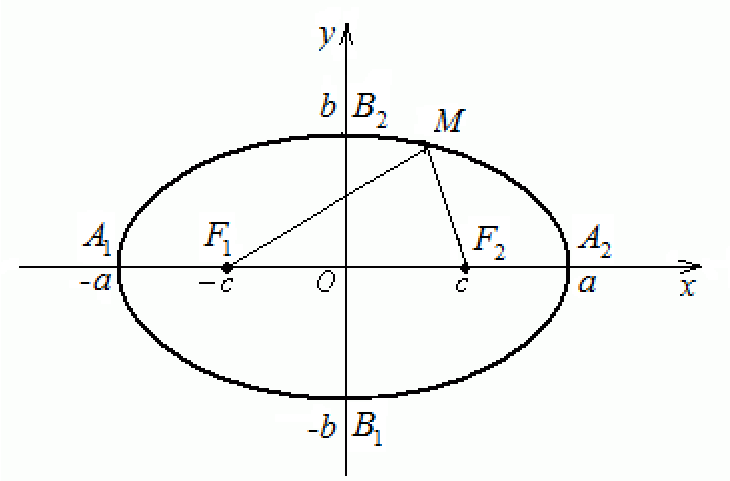


Рис. 8.1

Якщо в рівнянні еліпса (8.8) $a < b$, то еліпс розтягнутий вздовж осі Oy. У цьому випадку фокуси еліпса лежать на осі Oy, причому a є малою піввісю, а b – великою піввіссю, $a^2 = b^2 - c^2, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad x = \pm \frac{b}{\varepsilon}.$

Гіпербола та її характеристики

Гіперболою називають множину точок площини, для кожної з яких різниця відстаней до двох фіксованих точок (фокусів) є сталою величиною, меншою за відстань між фокусами. Вказана різниця береться за абсолютним значенням і позначається через $2a$, відстань між фокусами позначають через $2c$. За означенням $a < c$.

Якщо систему координат вибрано так, що фокуси гіперболи розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, тобто $F_1(-c;0), F_2(c;0)$, то канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = c^2 - a^2. \tag{8.4}$$

Тоді $a = OA_1 = OA_2$ називається дійсною, $b = OB_1 = OB_2$ – уявною піввіссю (див. рис. 8.2).

Ексцентриситетом гіперболи називають відношення відстані між фокусами $2c$ до дійсної осі $2a$, тобто $\varepsilon = \frac{c}{a}, \varepsilon > 1$. *Асимптотами гіперболи* називаються прямі $y = \pm \frac{b}{a} x$. *Фокальні радіуси точки* M (відстані від точки M

до фокусів) визначаються за формулами $r_1 = |\varepsilon x + a|, \quad r_2 = |\varepsilon x - a|$. *Директрисами гіперболи* називаються прямі, рівняння яких $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

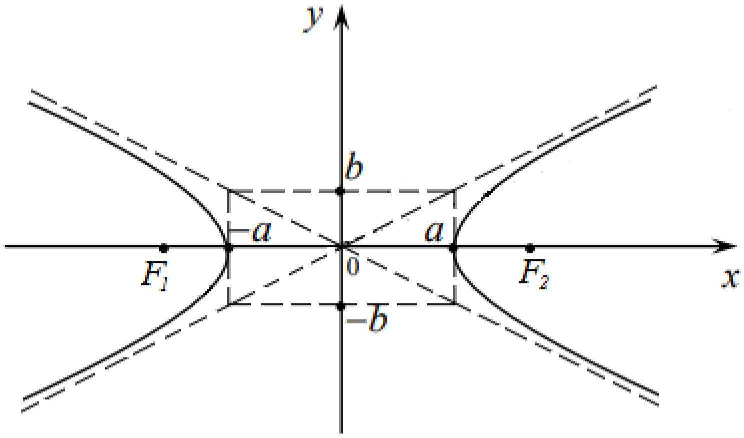


Рис. 8.2

Рівняння виду $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ або $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ визначає гіперболу, фокуси якої розміщено на осі ординат симетрично відносно початку координат. У цьому випадку дійсна вісь дорівнює $2b$, уявна вісь $2a$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, директриси $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$. Гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ і $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ називають *спряженими*, вони мають однакові асимптоти.

Парабола та її характеристики

Параболою називають множину точок площини, для кожної з яких відстань до фіксованої точки (фокуса) дорівнює відстані до фіксованої прямої (директриси). Відстань від фокуса до директриси позначають через p.

Нехай систему координат вибрано так, щоб вісь абсцис проходила через фокус гіперболи перпендикулярно до директриси, а початок координат містився посередині між фокусом і директрисою (див. рис. 8.3).

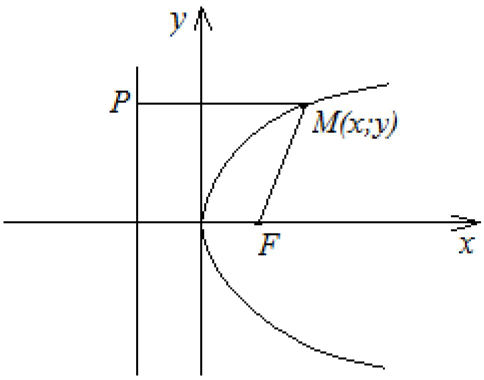


Рис. 8.3

Тоді канонічне рівняння параболи, яка симетрична відносно осі абсцис і проходить через початок координат, має вигляд

$$y^2 = 2px. \qquad (8.5)$$

У цьому випадку парабола лежить у правій півплощині, її фокус $F(p/2;0)$, директриса визначається рівнянням $x = -\frac{p}{2}$. Фокальний радіус довільної точки M параболи обчислюється за формулою $r = x + \frac{p}{2}$.

Якщо парабола симетрична відносно осі абсцис, лежить у лівій півплощині і проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд

$$y^2 = -2px. \qquad (8.6)$$

У цьому випадку фокус $F(-p/2;0)$, а директриса має рівняння $x = \frac{p}{2}$.

Якщо парабола симетрична відносно осі ординат і проходить через початок координат, вона визначається рівнянням: $x^2 = 2py$ (розміщена у верхній півплощині), або $x^2 = -2py$ (розміщена у нижній півплощині).

Зауважимо, що канонічні рівняння кривих другого порядку з центром в точці $C(x_0;y_0)$ мають вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ – рівняння еліпса;

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$ – рівняння гіперболи;

$$(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0),\ (x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0),$$ – рівняння параболи.

Рівняння (8.2) кривих другого порядку $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ можна звести до канонічного виду завдяки групуванню змінних та виділенню повних квадратів. За допомогою паралельного перенесення осей координат можна спростити дослідження та побудову одержаних кривих.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння кола, якщо: а) його центр знаходиться в точці $C(3;\ 1)$ і точка $M(5;\ 2)$ лежить на колі; б) його центр співпадає з початком координат, а пряма $3x - 4y - 20 = 0$ є дотичною до кола.

Розв'язання. а) Координатами центра кола є координати точки *C*, а радіусом кола є відстань між точками *C* і *M*, тобто $R^2 = (5-3)^2 + (2-1)^2 = 5$. Отже рівняння кола матиме вигляд: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

б) Координатами центра кола є точка $(0;0)$, а радіусом кола є відстань від цієї точки до заданої прямої: $R = \frac{|3\cdot 0 - 4\cdot 0 - 20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4$.

Отже, рівняння кола матиме вигляд: $x^2 + y^2 = 16$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі *Ox* симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{4}{5}$.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. За умовою маємо $2c = 8,\ \varepsilon = \frac{4}{5}$. Отже, $c = 4$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{5c}{4} = \frac{5 \cdot 4}{4} = 5$, $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$. Тоді канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Схематичне зображення еліпса подано на рис. 8.4.

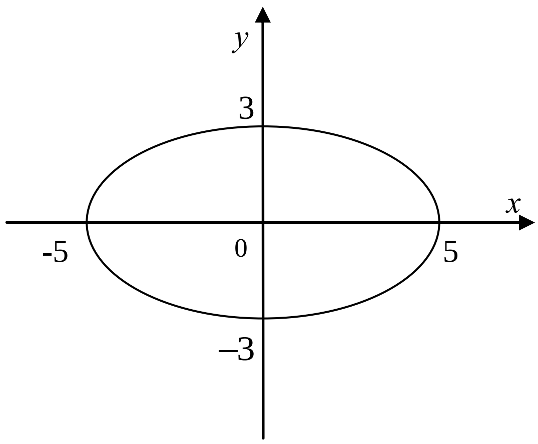


Рис. 8.4

Приклад 3. Записати канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його ексцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а відстань між директрисами дорівнює 32.

Розв'язання. Для визначення канонічного рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, знайдемо параметри a і b. Оскільки рівняння директрис еліпса має вигляд $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, то відстань між директрисами $2d = 2\frac{a}{\varepsilon} = 32$. Звідси дістаємо: $a = 16 \cdot \varepsilon = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$. Оскільки ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $c = \varepsilon \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$. Тоді $b^2 = a^2 - c^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$.

Отже, шукане рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

Якщо фокуси еліпса лежать на осі ординат, тобто $F_1(0;-c), F_2(0;c)$, то відрізок $a = OA_1 = OA_2$ називають малою піввіссю, а відрізок $b = OB_1 = OB_2$ – великою піввіссю, тобто в рівнянні еліпса $a < b$. У цьому випадку еліпс розтягнутий вздовж осі *Oy*. Тоді ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а директриси визначаються рівняннями $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Приклад 4. Визначити півосі, фокуси, ексцентриситет та директриси еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

Розв'язання. Із рівняння еліпса випливає, що $a = 6$, $b = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, тобто велика піввісь дорівнює 6, мала піввісь – $3\sqrt{3}$. Тоді фокальна піввісь $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 27} = 3$, тобто фокусами еліпса є точки $F_1 = (-3;0)$, $F_2 = (3;0)$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Директрисами еліпса є прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{6}{1/2} = \pm 12$.

Приклад 5. Нехай фокуси гіперболи лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат. Записати рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами 6;

2) рівняння директрис $x = \pm 3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами – прямий;

3) гіпербола проходить через точку *A* (3; 2) і має асимптоти $y = \pm\frac{4}{3}x$;

4) відстань між фокусами – 10, а асимптоти задано рівняннями $y = \pm 2x$.

Розв'язання. 1) Координати фокусів F_1 $(-c;\ 0)$; F_2 $(c;\ 0)$, тому з умови $2c=8$; $c=4$. За умовою відстань між директрисами $\frac{2a}{\varepsilon} = 6$, тобто $a = 3\varepsilon$. Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $a = 3\frac{c}{a}$, звідки $a^2 = 3c = 12$. Тоді $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 12 = 4$. Отже, шукане рівняння гіперболи $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

2) Оскільки кут між асимптотами прямий, то $a = b$. Тоді $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, тобто $c = a\sqrt{2}$. Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, а з рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon} = 3\sqrt{2}$, то $a = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6$ і $b = 6$. Отже, рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3) Точка *A* (3; 2) належить гіперболі, тому її координати задовольняють рівняння гіперболи $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає

співвідношення $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, тобто $b=\frac{4}{3}a$. Підставивши значення b у рівняння гіперболи, знайдемо a^2, дістанемо

$$\frac{9}{a^2}-\frac{4}{\frac{16}{9}a^2}=1,\quad \frac{9\cdot 16-4\cdot 9}{16a^2}=1,\quad 16a^2=108,\quad a^2=\frac{27}{4}.$$

Тоді $b^2=\frac{4^2}{3^2}a^2=\frac{16}{9}\cdot\frac{27}{4}=12$. Отже, шукане рівняння $\frac{4x^2}{27}-\frac{y^2}{12}=1$.

4) Із рівняння асимптот $y=\pm 2x$ гіперболи слідує, що $\frac{b}{a}=2$, тобто $b=2a$. Оскільки фокусна відстань (фокальна вісь) за умовою $2c=10$, то $c=5$. Тоді з рівностей $b^2=c^2-a^2$ і $b=2a$ дістаємо $4a^2=25-a^2$, звідки маємо додатне значення $a=\sqrt{5}$. Тоді $b=2\sqrt{5}$. Отже, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1.$$

Приклад 6. Визначити півосі, координати фокусів та асимптоти гіперболи, що визначається рівнянням $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Записати рівняння спряженої гіперболи та знайти її характеристики.

Розв'язання. Із рівняння гіперболи випливає, що $a^2=16$, $b^2=9$, тобто дійсна піввісь $a=4$, уявна піввісь $b=3$. Фокальну піввісь c знайдемо з рівності $b^2=c^2-a^2$, звідки $c^2=a^2+b^2=16+9=25$, тобто $c=5$. Отже, фокуси гіперболи $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, асимптоти гіперболи $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x$.

Рівняння спряженої до заданої гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$, для якої дійсна піввісь $b=3$, уявна піввісь $a=4$, фокальна піввісь $c=5$, фокуси $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$. Спряжена гіпербола має ті самі асимптоти $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Приклад 7. Знайти координати фокуса та записати рівняння директриси параболи, заданої рівнянням а) $y^2=12x$, б) $x^2=8y$.

Розв'язання. а) Віссю симетрії параболи $y^2=12x$ є вісь Ox, $2p=12$, $\frac{p}{2}=3$. Отже фокус параболи $F(3;0)$, а директриса $x=-3$.

б) Віссю симетрії параболи $x^2=8y$ є вісь Oy, $2p=8$, $\frac{p}{2}=2$. Отже фокус параболи $F(0;2)$, а директриса $y=-2$.

Приклад 8. Обчислити фокальний радіус точки M, яка має абсцису $x=7$ і лежить на параболі $y^2=20x.$

Розв'язання. Фокальний радіус точки M параболи обчислюють за формулою $r=x+\dfrac{p}{2}$. Оскільки $x=7,\ 2p=20$, то $r=7+\dfrac{10}{2}=12$.

Приклад 9. Знайти умову, за якої пряма $y=kx+b$ дотикається до параболи $y^2=2px$.

Розв'язання. Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок

$$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=2px. \end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння

$$y^2-\frac{2p}{k}y+\frac{2pb}{k}=0,$$

яке має єдиний розв'язок, коли $D=0$. Отже,

$$D=\frac{p^2}{k^2}-\frac{2pb}{k}=0\Rightarrow p\left(p-2bk\right)=0.$$

Оскільки $p\neq 0$, то $p=2bk$ – умова дотику прямої і параболи.

Приклад 10. Записати рівняння кривої в канонічному вигляді, визначити тип кривої та її основні характеристики, якщо $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

Розв'язання. У даному рівнянні виділимо для змінних x,y повні квадрати і зведемо його до канонічного вигляду

$$(4x^2-40x)+(9y^2+36y)+100=0,$$

$$4(x^2-10x+25)-4\cdot 25+9(y^2+4y+4)-9\cdot 4+100=0,$$

$$4(x-5)^2+9(y+2)^2=36,\qquad \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Перейдемо до нової системи координат з початком в точці $O'(5;-2)$, яка утворюється паралельним перенесенням початкової системи координат за допомогою рівностей $x'=x-5, y'=y+2$. Дістанемо рівняння $\dfrac{(x')^2}{9}+\dfrac{(y')^2}{4}=1,$ яке визначає в новій системі координат еліпс з фокусами, що лежать на осі $O'x'$ (прямій $y=-2$) симетрично відносно точки $O'(5;-2)$. Враховуючи, що $a=3,\ b=2$, і скориставшись формулами $x=x'+5, y=y'-2$, знайдемо координати вершин у початковій системі $A_1(-2;-2), A_2(8;-2), B_1(5;-4), B_2(5;0)$ (див. рис. 8.5).

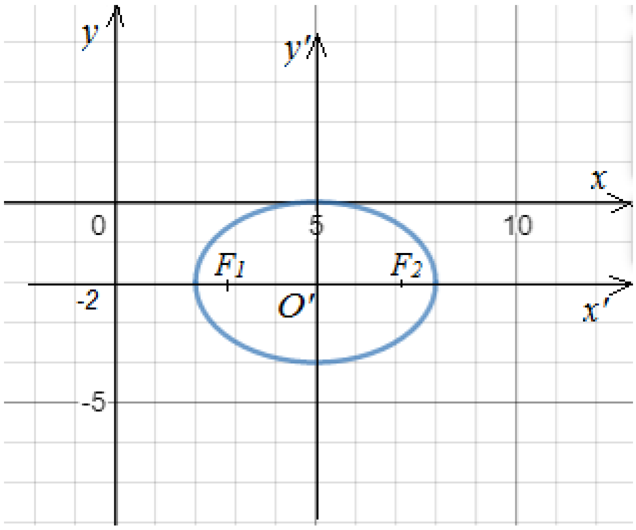


Рис. 8.5

Оскільки $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, то фокуси еліпса в старій системі координат $F_1(-\sqrt{5}+5;-2), F_2(\sqrt{5}+5;-2)$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ Директриси еліпса – прямі, рівняння яких в новій системі $x'=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$, тоді в старій системі координат директриси мають вигляд $x=\frac{9}{\sqrt{5}}+5, x=-\frac{9}{\sqrt{5}}+5$.

Приклад 11. Звести рівняння до канонічного типу та побудувати лінію

а) $2x^2+y^2-20x+4y+4=0$, б) $5x^2-3y^2-30x+6y-18=0$,

в) $5x+2y^2-4y-8=0$.

Розв'язання. а) Згрупуємо доданки відносно змінних x, y та виділимо повний квадрат, дістанемо

$$2x^2+y^2-20x+4y+4=0, \quad 2\left(x^2-10x\right)+y^2+4y+4=0,$$

$$2\left(x^2-10x+25-25\right)+(y^2+4y+4)=0, \; 2\left(x-5\right)^2+\left(y+2\right)^2-50=0,$$

$$2\left(x-5\right)^2+\left(y+2\right)^2=50, \quad \frac{\left(x-5\right)^2}{25}+\frac{\left(y+2\right)^2}{50}=1.$$

Дістали канонічне рівняння еліпса з центром в точці $\left(5;-2\right)$. З рівняння маємо $a^2=25$, тобто $a=5$; $b^2=50$, тобто $b=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\approx 7{,}07$. Оскільки піввісь b більша за піввісь a, то еліпс розтягнутий вздовж прямої $x=5$, паралельної осі Oy. Вершинами еліпса є точки $A_1\left(0;-2\right), A_2\left(10;-2\right)$, $B_1\left(5;-2-5\sqrt{2}\right), B_2\left(5;-2+5\sqrt{2}\right)$. Обчислимо координати фокусів із рівності $c^2=b^2-a^2=50-25=25$, тобто $c=5$. Оскільки фокуси розміщені на прямій $x=5$ і знаходяться на відстані $c=5$ від центра $\left(5;-2\right)$, то координати фокусів $F_1\left(5;\; -7\right), F_2\left(5;\; 3\right)$. Побудуємо еліпс (див. рис. 8.6).

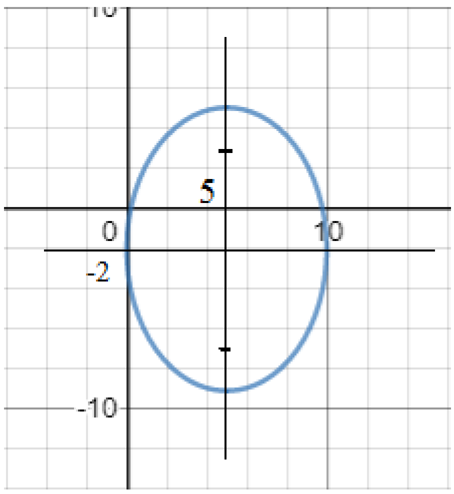


Рис. 8.6

б) У рівнянні $5x^2-3y^2-30x+6y-18=0$ згрупуємо доданки і виділимо повні квадрати для змінних x, y, дістанемо: $5\left(x^2-6x\right)-3\left(y^2-2y\right)-18=0$,

$$5\left(x^2-6x+9-9\right)-3\left(y^2-2y+1-1\right)-18=0,$$

$$5\left(x^2-6x+9\right)-45-3\left(y^2-2y+1\right)+3-18=0,$$

$$5(x-3)^2-3(y-1)^2=60,$$

$$\frac{(x-3)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{20}=1.$$

Одержане рівняння визначає гіперболу з центром в точці (3;1), осями симетрії $x=3$ і $y=1$, дійсною піввіссю $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\approx 3{,}5$ і уявною піввіссю $b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\approx 4{,}5$. Дійсними вершинами гіперболи є точки $A_1\left(3-2\sqrt{3};1\right), A_2\left(3+2\sqrt{3};1\right)$, а уявними – точки $B_1\left(3;1-2\sqrt{5}\right), B_2\left(3;1+2\sqrt{5}\right)$. Знайдемо фокуси, скориставшись рівністю $c^2=a^2+b^2=12+20=32$, тобто $c=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\approx 5{,}7$. Оскільки фокуси розміщені на прямій $y=1$ і знаходяться на відстані $c=4\sqrt{2}$ від центра $(3;1)$, то координати фокусів $F_1\left(3-4\sqrt{2};1\right)$, $F_2\left(3+4\sqrt{2};1\right)$.

Асимптотами гіперболи є прямі $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$, тобто $y-1\approx\pm 1{,}3(x-3)$. Побудову гіперболи завжди починають з її асимптот.

Спочатку будуємо основний прямокутник з центром в точці (3;1) і сторонами $2a$ і $2b$, діагоналями якого є асимптоти гіперболи. Гілки гіперболи розміщені вздовж дійсної осі і наближаються до асимптот на нескінченності (див. рис. 8.7).

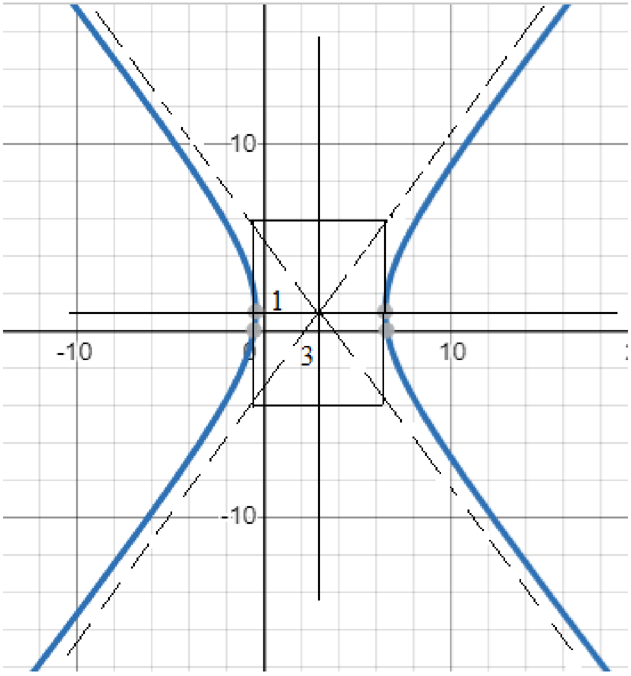


Рис. 8.7

в) Виділимо повний квадрат у рівнянні $5x+2y^2-4y-8=0$, маємо

$$5x+2(y^2-2y)-8=0 \quad\Rightarrow\quad 5x+2(y^2-2y+1)-10=0,$$

$$2(y-1)^2=-5x+10 \quad\Rightarrow\quad 2(y-1)^2=-5(x-2),$$

$$(y-1)^2=-\frac{5}{2}(x-2).$$

Отже, дане рівняння визначає параболу виду $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$ з вершиною в точці (2;1), яка симетрична відносно прямої $y=1$, паралельної осі *Ox,* і напрямлена вліво. Оскільки $2p=\frac{5}{2}$, то $\frac{p}{2}=\frac{5}{8}$, тому фокус цієї параболи $F\left(2-\frac{5}{8};1\right)=F\left(\frac{11}{8};1\right)$, а директриса $x=2+\frac{5}{8}=\frac{21}{8}$ (див. рис. 8.8).

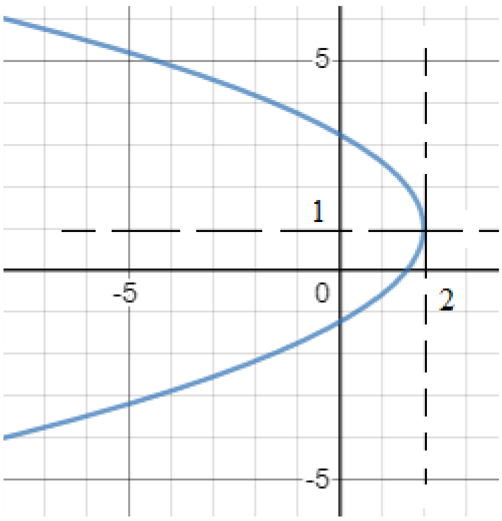


Рис. 8

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, які криві задаються такими рівняннями, знайти їх основні параметри та побудувати, якщо

а) $9x^2+25y^2=225$; б) $3x^2-4y^2=12$; в) $x^2-8y=0$;

г) $16x^2+9y^2=144$; д) $4y^2-9x^2=36$; е) $y^2+20x=0$.

2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо

а) велика вісь дорівнює 26, а відстань між фокусами – 10;

б) відстань між фокусами дорівнює 6, а відстань між директрисами 24;

в) відстань між фокусами дорівнює 16, а ексцентриситет – 4/5;

г) мала вісь дорівнює 4, а відстань між директрисами – 10.

3. Еліпс проходить через точку M(1;1) і має ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$. Скласти рівняння еліпса, якщо його фокуси лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат.

4. Скласти рівняння еліпса з центром в початку координат, якщо один із його фокусів знаходиться в точці (6;0), а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

5. Записати рівняння еліпса, якщо сума його півосей дорівнює $a+b=10$, а відстань між фокусами, які лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат, дорівнює $4\sqrt{5}$.

6. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо

а) велика піввісь дорівнює 8, а відстань між фокусами – 14;

б) відстань між фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет – 5/7;

в) мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет – 3/5.

7. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо

а) дійсна вісь дорівнює 6, а відстань між фокусами – 10;

б) уявна вісь дорівнює 16, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$;

в) відстань між директрисами дорівнює 8/3, а ексцентриситет – 3/2;

г) відстань між фокусами – $10\sqrt{2}$, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$.

8. Скласти рівняння гіперболи з фокальною віссю Ox, якщо вона проходить через точку $M(6;2)$, а її асимптоти мають рівняння $y=\pm\frac{2}{3}x$.

9. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$, а точка $M(-5;3)$ лежить на цій гіперболі.

10. Сума півосей гіперболи $a + b = 17$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{13}{12}$. Записати рівняння гіперболи та знайти її фокуси, якщо вони розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат.

11. Асимптоти гіперболи $y = \pm\frac{3}{4}x$, задано рівняннями , а один із фокусів знаходиться в точці $(-10;0)$. Записати рівняння гіперболи і знайти її ексцентриситет. Скласти рівняння спряженої гіперболи до даної.

12. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо

а) дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами – 26;

б) відстань між фокусами дорівнює 16, а ексцентриситет – 8/5;

в) відстань між фокусами дорівнює 10, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

13. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом у точці

а) $F(6,0)$, б) $F(-2,0)$, в) $F(0,-8)$.

14. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо ця парабола проходить через точку A і має вказану вісь симетрії

а) $A(-2;4),\ Ox$; б) $A(1;-2),\ Ox$; в) $A(6;2),\ Oy$.

15. На параболі $y^2 = 6x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 4,5. Знайти відстань від неї до вершини параболи.

16. Визначити, які криві задаються такими рівняннями, знайти їх характеристики та побудувати, якщо

а) $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 1 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$;

в) $2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y = 0$; г) $2y^2 + 2y - x + 2 = 0$;

д) $4y^2 - 25x^2 + 8y + 100x - 196 = 0$; е) $x^2 - 4x + 4y + 8 = 0$.

§ 9. Площина і пряма у просторі

Площина у просторі

Розглянемо в просторі прямокутну систему координат *Oxyz.* Кожна площина у декартових координатах визначається рівнянням першого степеня, і навпаки: кожне рівняння першого степеня відносно x, y, z визначає у просторі деяку площину. Розглянемо різні види рівнянь площини:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – *загальне рівняння площини*, в якому коефіцієнти A, B, C, D є дійсними числами, причому $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ перпендикулярний до даної площини (вектор нормалі);

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, що *проходить через дану точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *і має вектор нормалі* $\vec{n} = (A; B; C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – *рівняння площини у відрізках* на осях, в якому a, b, c, – величини відрізків, які відтинає площина на осях координат;

4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – *рівняння площини, що проходить через три задані точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$;

5) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ – *нормальне рівняння площини*, в якому $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора нормалі, який проведений з початку координат, p – відстань від початку координат до площини.

Зокрема, розглянемо, як можна отримати загальне рівняння площини. Нехай у просторі задано площину Q, вектор $\vec{N} = (A; B; C)$, перпендикулярний до площини, і точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \in Q$ (див. рис. 9.1).

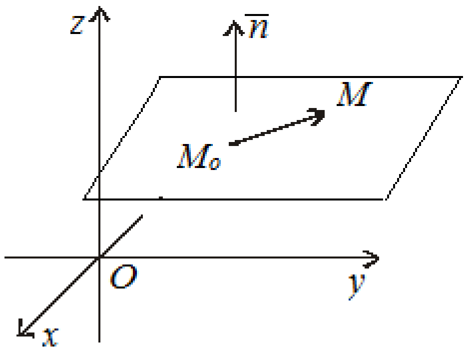


Рис. 9.1

Нехай точка M $(x; y; z)$ – довільна точка площини, тоді вектори $\vec{N}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, тобто їх скалярний добуток

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Оскільки $\vec{N} = (A; B; C)$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, то з умови перпендикулярності векторів дістаємо рівняння площини

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{9.1}$$

Розкривши дужки і позначивши $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, дістанемо загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{9.2}$$

Проведемо *дослідження загального рівняння площини* залежно від значень коефіцієнтів у цьому рівнянні.

1. Нехай D=0, тоді рівняння набуває вигляду $Ax+By+Cz=0$. Оскільки координати точки (0;0;0) задовольняють це рівняння, то площина проходить через початок координат.

2. Нехай один із коефіцієнтів при змінних дорівнює нулю. Припустимо C=0, $A\neq 0$, $B\neq 0$, $D\neq 0$, тоді рівняння набуває вигляду $Ax+By+D=0$. Вектор нормалі $\vec{N}=(A;B;0)$ перпендикулярний до осі Oz, оскільки його проекція на цю вісь дорівнює нулю. Отже, площина паралельна цій осі. Якщо при цьому D=0, то площина $Ax+By=0$ проходить через вісь Oz, тому що паралельна їй і проходить через початок координат. Аналогічно можна розглянути випадки A=0, $B\neq 0$, $C\neq 0$ і $A\neq 0$, B=0, $C\neq 0$.

3. Розглянемо випадок, коли два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю. Нехай $A=B=0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$. Тоді площина $Cz+D=0$ паралельна до обох осей Ox і Oy, тобто вона паралельна площині Oxy, тому перпендикулярна до осі Oz. Якщо при цьому D=0, то z=0 – рівняння координатної площини Oxy. Аналогічно можна розглянути випадки $A\neq 0$, $B=C=0$ і $B\neq 0$, $A=C=0$.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *до площини* $Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (9.3)$$

Якщо задано вектори нормалі $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ двох площин Q_1 і Q_2, то *кут φ між площинами* визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (9.4)$$

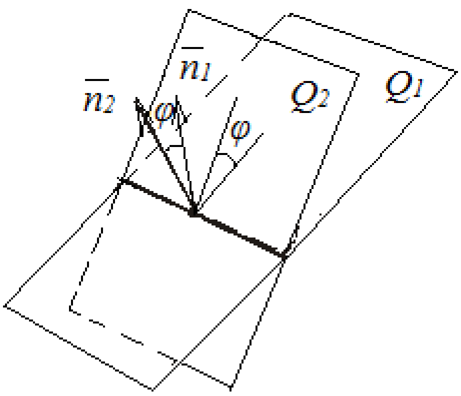


Рис. 9.2

Умова паралельності площин має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

а *умова перпендикулярності* площин має вигляд

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 .$$

Пряма у просторі

Пряма у просторі може задаватися такими рівняннями:

1) $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{p}$ – *канонічне рівняння* прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (l;m;p)$, який називають напрямним для прямої;

2) $x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + pt$ – *параметричне рівняння* прямої, що проходить через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (l;m;p)$;

3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$;

4) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ – *загальне рівняння* прямої, яка є перетином двох площин (при цьому коефіцієнти A_1, B_1, C_1 не пропорційні коефіцієнтам A_2, B_2, C_2). У цьому випадку за напрямний вектор прямої можна взяти вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) = (l;m;p)$, який є векторним добутком векторів нормалі даних площин.

Нехай рівняння двох прямих задано в канонічній формі

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad L_2: \ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Для знаходження *кута між прямими* використовують формулу

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + p_1p_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}. \qquad (9.5)$$

Із формули (9.5) випливає *умова перпендикулярності* двох прямих

$$l_1l_2 + m_1m_2 + p_1p_2 = 0,$$

а з умови колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1 = (l_1;m_1;p_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2;m_2;p_2)$ випливає *умова паралельності* двох прямих

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (9.6)$$

Визначимо умову перетину двох прямих у просторі. Прямі будуть перетинатися тоді, коли вони лежать в одній площині і не є паралельними. Для прямих L_1 і L_2 розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$, $\vec{s}_1=\left(l_1;m_1;p_1\right)$, $\vec{s}_2=\left(l_2;m_2;p_2\right)$. Прямі лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ є компланарними. Отже, *дві прямі перетинаються*, якщо не виконується умова (9.6) і справджується рівність

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Якщо дві прямі у просторі не паралельні і не перетинаються, то вони *мимобіжні.* Тому *умова мимобіжності прямих* у просторі має вигляд

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Взаємне розміщення прямої та площини

Розглянемо взаємне розміщення прямої $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$ і площини $Q: Ax+By+Cz+D=0$ у просторі (див. рис. 9.3).

Визначимо *кут між прямою і площиною.*

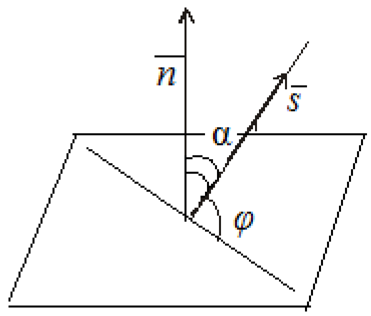


Рис. 9.3

Кут φ між прямою і площиною дорівнює куту між прямою та її проекцією на площину. Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ перпендикулярний до площини Q, а вектор $\vec{s}=(l;m;p)$ паралельний до прямої L. Якщо вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ утворюють кут α, то виконується рівність $\varphi=90^0-\alpha$, тоді

$$\sin\varphi=\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha=\frac{|Al+Bm+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+p^2}}. \qquad (9.7)$$

Якщо пряма L перпендикулярна до площини Q, то вектор $\vec{s}=(l;m;p)$ колінеарний вектору $\vec{n}=(A;B;C)$, тобто *умова перпендикулярності прямої та площини* має вигляд

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{p}{C}.$$

Якщо пряма L паралельна площині Q, то $\vec{n}\perp\vec{s}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{s}=0$, тоді *умова паралельності прямої та площини* має вигляд

$$Al+Bm+Cp=0.$$

Нехай пряма і площина *перетинаються.* Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до параметричного рівняння прямої $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+pt$ і підставимо значення змінних *x, y, z* у рівняння площини, дістанемо

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+pt)+D=0,$$

$$(Ax_0+By_0+Cz_0+D)+t(Al+Bm+Cp)=0.$$

Якщо $Al+Bm+Cp\neq 0$, то можна знайти значення параметра

$$t^*=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cp}, \tag{9.8}$$

тоді координати точки перетину прямої та площини

$$x^*=x_0+lt^*,\quad y^*=y_0+mt^*,\quad z^*=z_0+pt^*.$$

Отже, *умова перетину прямої та площини* має вигляд

$$Al+Bm+Cp\neq 0.$$

Очевидно, що *пряма належить площині* за умови

$$\begin{cases} Al+Bm+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Написати рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(2;2;1)$, $M_2(0;1;3)$, $M_3(4;1;1)$ та знайти відстань від точки $A(1;1;1)$ до цієї площини.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, яка проходить через три точки, скориставшись формулою $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Для заданих точок $M_1(2;2;1)$, $M_2(0;1;3)$, $M_3(4;1;1)$ дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)+2(y-2)+2(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x+2y+2z-8=0.$$

Знайдемо відстань від точки $A(1;1;1)$ до площини

$$d = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 8|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Приклад 2. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(1;-2;3)$ та а) перпендикулярна осям Ox, Oy, Oz; б) паралельна осі Oz і проходить через початок координат.

Розв'язання. а) Скористаємось неповними рівняннями площин. Якщо площина перпендикулярна осі Ox, то її рівняння має вигляд $x=a$. Оскільки площина проходить через точку $M(1;-2;3)$, то маємо $x-1=0$. Аналогічно рівняння $y+2=0$ визначає площину, яка проходить через точку $M(1;-2;3)$ перпендикулярно осі Oy, а рівняння $z-3=0$ – площину, яка проходить через точку $M(1;-2;3)$ перпендикулярно осі Oz.

б) Рівняння площини, паралельної осі Oz має вигляд $Ax+By+D=0$. Оскільки ця площина проходить через початок координат і точку $M(1;-2;3)$, то $D=0$ і $A-2B=0$. Розв'язком цього рівняння може бути $B=1$, $A=2$. Отже рівняння шуканої площини має вигляд $2x+y=0$.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1;4;-5)$, $B(4;2;-3)$ і перпендикулярна до площини $3x+5y-6z-8=0$.

Розв'язання. За вектор нормалі шуканої площини Q_1 візьмемо вектор $\vec{n}_1$, перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{AB}=(3;-2;2)$ і $\vec{n}=(3;5;-6)$, де $\vec{n}$ – вектор нормалі заданої площини $Q: 3x+5y-6z-8=0$ (див. рис. 9.4).

З означення векторного добутку випливає, що вектор $\vec{n}_1=\overrightarrow{AB}\times\vec{n}$ є перпендикулярним до векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{n}$. Отже,

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} + 24\vec{j} + 21\vec{k}.$$

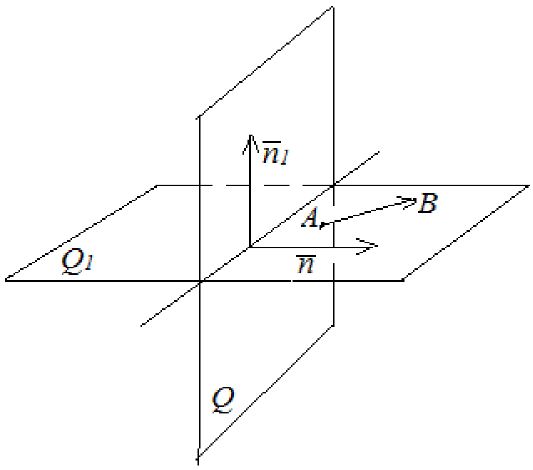


Рис. 9.4

Оскільки шукана площина Q_1 проходить через точку $A(1;4;-5)$ і має вектор нормалі $\vec{n}_1=(2;\,24;\,21)$, то рівняння цієї площини має вигляд

$$2(x-1)+24(y-4)+21(z+5)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+24y+21z+7=0.$$

Приклад 4. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(2;1;1)$, та знайти кут між нею та площиною $3x-y+2z+1=0$.

Розв'язання. Враховуючи задану точку і вектор нормалі, розглянемо рівняння площини виду (1), дістанемо

$$2(x-1)+(y-2)+z=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+y+z-4=0.$$

Оскільки вектор нормалі знайденої площини $\vec{n}=(2;1;1)$, а вектор нормалі заданої площини $\vec{n}_1=(3;-1;2)$, то кут між цими площинами знайдемо за формулою (9.4). Дістанемо

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 2}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{9+1+4}}=\frac{7}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{6} \quad \Rightarrow \quad \varphi=\arccos\frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Приклад 5. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;1;-4)$ перпендикулярно до площини $2x+3y-7z+9=0$.

Розв'язання. Оскільки шукана пряма перпендикулярна до площини $2x+3y-7z+9=0$, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти вектор $\vec{n}_1=(2;3;-7)$. Оскільки пряма проходить через точку $M(5;1;-4)$, то її канонічне рівняння має вигляд $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+4}{-7}$.

Приклад 6. Знайти канонічне рівняння прямої $\begin{cases}3x+2y+4z-11=0,\\ 2x+y-3z-1=0.\end{cases}$

Розв'язання. Очевидно, що задана пряма L лежить на перетині двох площин $Q_1: 3x+2y+4z-11=0$ і $Q_2: 2x+y-3z-1=0$ (див. рис. 9.5).

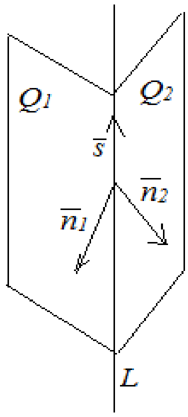


Рис. 9.5

Розглянемо довільну точку, яка належить прямій. Для цього візьмемо, наприклад, $z=1$ і підставимо в систему рівнянь заданих площин, дістанемо

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+8-4x=7 \\ y=4-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Таким чином, $x=1, y=2$, $z=1$, тобто точка $A(1;2;1)$ належить даній прямій. Координати напрямного вектора прямої знаходимо як векторний добуток векторів нормалі площин, на перетині яких лежить дана пряма. Оскільки $\vec{n}_1=(3;2;4)$ і $\vec{n}_2=(2;1;-3)$, то

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & -3\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & -3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}\right)=(-10;\ 17;-1).$$

Отже, канонічне рівняння даної прямої має вигляд: $\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Приклад 7. Знайти кут між прямими

а) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$ та $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+4}{3}$;

б) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z-1}{8}$ та $x=-2+4t, \quad y=1+2t, \quad z=3-4t$.

Розв'язання. а) Рівняння прямих записані в канонічному вигляді. Перша пряма має напрямний вектор $\vec{s}_1=(-2;1;2)$, а друга – $\vec{s}_2=(4;5;3)$. Кут між прямими визначається як кут між цими векторами, тому

$$\cos\varphi=\frac{-8+5+6}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{16+25+9}}=\frac{3}{3\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

б) Перша пряма задана канонічним рівнянням і має напрямний вектор $\vec{s}_1=(1;-4;8)$. Друга пряма задана параметричним рівнянням, її напрямний вектор визначається коефіцієнтами при параметрі t, тобто $\vec{s}_2 = (4;2;-4)$. Тоді кут між прямими визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{4-8-32}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{16+4+16}} = \frac{-36}{9\cdot 6} = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{2}{3}.$$

Приклад 8. Визначити, чи перетинаються у просторі прямі

а) $\frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x+6}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2};$

б) $\frac{x-6}{-2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+4}{1}.$

Розв'язання. а) Перевіримо умову, чи перетинаються дві прямі в просторі. Задані прямі мають напрямні вектори $\vec{s}_1 = (5;1;4)$, $\vec{s}_2 = (4;1;2)$ і проходять відповідно через точки $M_1(-5;2;1)$, $M_2(-6;2;-1)$. Дістаємо

$$\begin{vmatrix} -6+5 & 2-2 & -1-1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-10+0+8+4-0=0.$$

Отже, задані прямі перетинаються.

б) Задані прямі мають напрямні вектори $\vec{s}_1 = (-2;2;3)$ і $\vec{s}_2 = (3;-3;1)$ та проходять відповідно через точки $M_1(6;-3;1)$ і $M_2(3;3;-4)$. Тоді для цих прямих

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6-30+54+30-27+12 = 33 \neq 0.$$

Отже, задані прямі мимобіжні.

Приклад 9. Знайти проекцію точки $A(4;-3;1)$ на площину $x+2y-z-3=0$

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до заданої площини. Оскільки вектор $\vec{n} = (1;2;-1)$ перпендикулярний до цієї площини, то його можна взяти за напрямний вектор прямої. Тоді рівняння прямої має вигляд $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Очевидно, що проекцією точки A на площину є точка перетину знайденої прямої (перпендикуляра) та площини (див. рис. 9.6).

Знайдемо цю точку. Записавши рівняння параметричне прямої $x = 4+t, y = -3+2t, z = 1-t$, підставимо значення змінних у рівняння площини. Дістанемо $4+t+2(-3+2t)-(1-t)-3=0$, звідки визначаємо $t^* = 1$.

Підставивши знайдене значення t^* у параметричне рівняння, знаходимо координати проекції $x = 4 + 1 = 5, y = -3 + 2 = -1, z = 1 - 1 = 0$, тобто $A_1(5;-1;0)$.

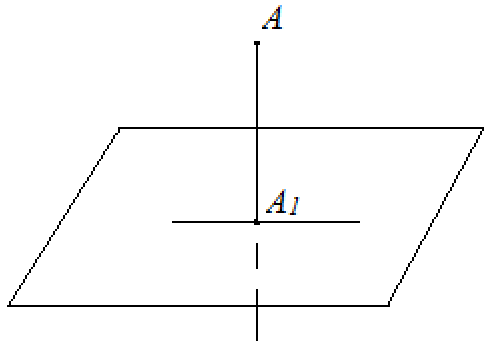


Рис. 9.6

Приклад 10. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-3}$ і площини $3x + y + 2z - 4 = 0$ та визначити кут між ними.

Розв'язання. Параметричне рівняння прямої має вигляд $x = 2 + 2t$, $y = -3 + t$, $z = -3t$. Підставимо вирази для x, y, z у рівняння площини

$$3(2 + 2t) - 3 + t - 6t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Отже координати точки перетину дорівнюють: $x = 4, \quad y = -2, \quad z = -3$. Для визначення кута запишемо вектор нормалі для площини $\vec{n} = (3;1;2)$ і напрямний вектор прямої $\vec{s} = (2;1;-3)$. Скориставшись формулою (9.7), дістанемо

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{6+1-6}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\frac{1}{14}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;2;3)$

а) перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (5;-1;4)$;

б) перпендикулярно до прямої BC, якщо $B(2;0;1)$ і $C(4;1;-2)$;

в) паралельно до площини $3x - 4y + z - 7 = 0$.

2. Написати загальне рівняння площини, що проходить через три точки $M(1;-1;2)$, $K(2;1;2)$, $P(1;1;4)$.

3. Скласти рівняння площини, яка відтинає на координатних осях відрізки $a = 3, b = 5, c = 1$, і знайти відстань до площини від початку координат.

4. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;3)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин $3x + 2y - z + 4 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$.

6. Обчислити кут між площинами $6x + 3y - 2z + 1 = 0$ і $x + 2y + 6z - 2 = 0$.

7. Знайти кут між площиною $11x-8y-7z+5=0$ та площиною, що проходить через точку $A(2;1;2)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $B(9;3;-6)$.

8. Знайти відстань від точки $M(2;5;3)$ до площини, яка проходить через точку $A(1;3;5)$ паралельно до площини $4x+3y-5z+2=0$.

9. Дано тетраедр з вершинами $A(1;-2;2)$, $B(2;-3;-6)$, $C(5;1;4)$, $D(0;-4;4)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини B.

10. Скласти нормальне рівняння площини $5x-4y+3z+10=0$.

11. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2;3)$

а) паралельно до вектора $\vec{u}=(4;-1;5)$;

б) перпендикулярно до площини $2x-y+6z-8=0$.

12. Записати канонічне та параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(2;-3;1)$ і $B(1;4;-2)$.

13. Дано вершини трикутника A $(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ і $C(5;1;-7)$. Скласти канонічне та параметричні рівняння медіани AM.

14. Записати в канонічному вигляді рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0. \end{cases}$

15. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $K(-4;3;0)$ паралельно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

16. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;3;1)$ на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

17. Знайти проекцію точки $A(1;2;8)$ на пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

18. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ та прямою, що проходить через дві точки $A(0;3;-1)$, $B(2;12;5)$.

19. Обчислити кут між прямою та площиною

а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{-2}$ і $x-3y+6z+7=0$;

б) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ і $6x-9y-6z+10=0$.

20. Знайти точку перетину прямої та площини

а) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$ і $x-2y+z-15=0$;

б) $x=5+2t,\ y=2-t,\ z=-1+3t$ і $2x-y+3z+23=0$.

Контрольні запитання

1. Опишіть прямокутну декартову систему координат та сформулюйте її основні задачі.
2. Як визначається полярна система координат? Наведіть формули переходу від полярної до прямокутної системи координат, і навпаки.
3. Як визначається загальне рівняння прямої на площині?
4. Опишіть рівняння прямої, що проходить через дві точки.
5. Наведіть канонічне та параметричне рівняння прямої на площині.
6. Опишіть рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом.
7. Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий вектор нормалі.
8. Як звести загальне рівняння прямої до нормального вигляду?
9. Як визначається кут між двома прямими на площині?
10. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямих.
11. Як визначається відстань від точки до прямої на площині?
12. Опишіть випадки взаємного розташування двох прямих на площині.
13. Як записується загальне рівняння кривих другого порядку?
14. Опишіть канонічне рівняння еліпса та його основні характеристики.
15. Наведіть канонічне рівняння гіперболи та її основні характеристики.
16. Опишіть канонічне рівняння параболи та її основні характеристики.
17. Як звести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду?
18. Які види рівнянь площини у просторі ви знаєте?
19. Запишіть загальне рівняння площини та проведіть його аналіз.
20. Наведіть формулу для обчислення відстані від точки до площини.
21. Як визначається кут між двома площинами?
22. Наведіть умови паралельності і перпендикулярності площин.
23. Опишіть канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.
24. Як звести до канонічного виду рівняння прямої, заданої як перетин двох площин?
25. Як визначається кут між двома прямими у просторі?
26. Опишіть випадки взаємного розташування двох прямих у просторі.
27. Сформулюйте умову мимобіжності двох прямих у просторі.
28. Опишіть випадки взаємного розташування прямої та площини.
29. Як визначається кут між прямою та площиною у просторі?
30. Опишіть, як знайти точку перетину прямої та площини у просторі.

Розділ ІІІ. Вступ до математичного аналізу

§ 10. Множини. Комплексні числа

До основних математичних понять належить *поняття множини*, зокрема числової. Множина складається з об'єктів будь-якої природи, які мають певну властивість і називаються її *елементами*.

Множини позначаються великими латинськими буквами $A, B, C,\ldots$ а їх елементи – малими буквами $a, b, c, \ldots$ Якщо елемент a належить множині A, то це записують у вигляді $a\in A$. Якщо ж елемент a не належить A, то $a\notin A$.

Множини задають переліком елементів або вказують спільну властивість цих елементів. Наприклад, множину A можна задати різними способами: $A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$ або $A=\{2, 3\}$.

Порожньою множиною $\varnothing$ називається множина, яка не містить жодного елемента. Дві множини A та B називаються *рівними*, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, і навпаки: $A=B$: $x\in A \Leftrightarrow x\in B$.

Множина A, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*. Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B.

Розглянемо дії (операції) над множинами і дамо їх наочне зображення. Нехай Ω – *універсальна множина*, яка містить множини A і B.

Об'єднанням двох множин A і B називається множина $A\bigcup B$, елементи якої належать хоча б одній із цих множин A або B: $A\bigcup B=\{x \mid x\in A \text{ або } x\in B\}$ (див. рис. 10.1).

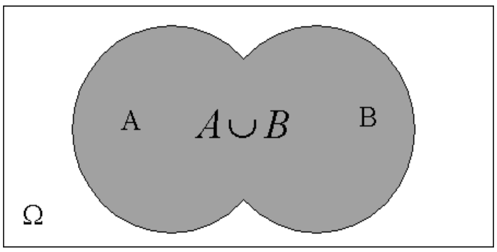


Рис. 10.1

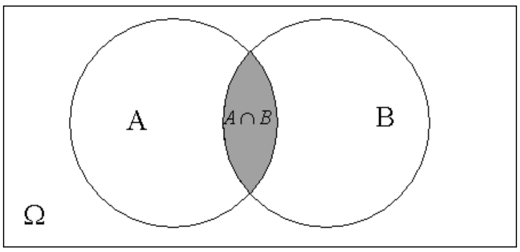


Рис. 10.2

Перерізом двох множин A та B називається множина $A\bigcap B$, елементи якої належать як множині A, так і множині B: $A\bigcap B=\{x \mid x\in A \ і \ x\in B\}$ (див. рис. 10.2).

Різницею множин A і B називається множина $A\setminus B$, елементи якої належать множині A і не належать множині B: $A\setminus B=\{x \mid x\in A \ і \ x\notin B\}$ (див. рис. 10.3). Аналогічно розглядають різницю множин: $B\setminus A=\{x \mid x\in B \ і \ x\notin A\}$.

Доповненням множини A до Ω називається така множина $\overline{A}$, усі елементи якої належать Ω, але не належать *A*, тобто $\overline{A} = \{x \mid x \in \Omega,\ x \notin A\}$ (див. рис. 10.4).

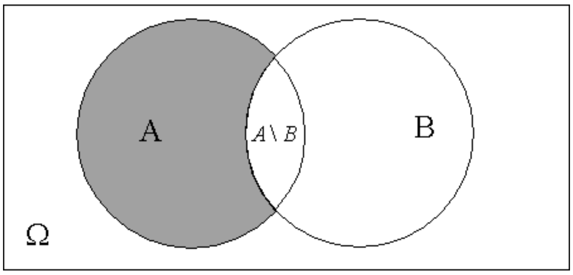


Рис. 10.3

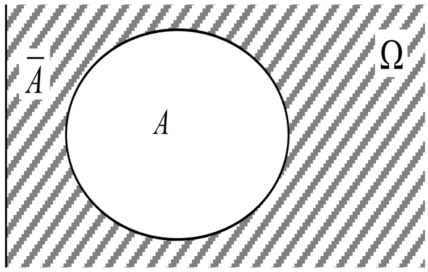


Рис. 10.4

Якщо *M(A)* – кількість елементів множини *A*, то для будь-яких скінченних множин *A* та *B* виконується рівність

$$M(A \cup B) = M(A) + M(B) - M(A \cap B). \qquad (10.1)$$

Розглянемо основні числові множини. Множина натуральних чисел $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$; множина цілих чисел $Z = \{0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n, \ldots\}$; множина раціональних чисел $Q = \left\{\dfrac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N\right\}$. Кожне *раціональне* число можна подати у вигляді десяткового скінченного або нескінченного періодичного дробу. Наприклад, 4/5 = 0,8; 5/33 = 0,151515… = 0,(15). Числа, які подаються у вигляді нескінченного неперіодичного дробу, називається *ірраціональними*. Наприклад, $\sqrt{2}$ – ірраціональне число.

Множина раціональних чисел разом із множиною ірраціональних чисел утворюють *множину дійсних чисел R*.

Кожному дійсному числу відповідає точка на координатній прямій, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає дійсне число (її координата). Отже, всі дійсні числа $x \in (-\infty; +\infty)$.

Абсолютна величина (*модуль*) числа *x* визначається рівністю

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

З геометричної точки зору модуль $|x|$ – це відстань від точки *x* до 0.

Важливими числовими множинами є проміжки (підмножини *R*): інтервал $(a; b)$, відрізок $[a; b]$, півінтервал $(a; b]$, піввідрізок $[a; b)$, нескінченні проміжки $(a; +\infty)$, $(-\infty; b), \ldots$

При розв'язанні квадратних рівнянь (наприклад, $x^2 + 1 = 0$) виникла потреба розширити множину дійсних чисел, тому було введено *множину комплексних чисел C*. Очевидно, що для числових множин *N*={натуральні числа}; *Z*={цілі числа}; *Q*={раціональні числа}; *R*={дійсні числа}; *C*={комплексні числа} виконуються співвідношення $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Множина комплексних чисел

Комплексним числом називається число виду $z = x + iy$, *де* $x, y \in \boldsymbol{R}$, $i^2 = -1$. Множину комплексних чисел позначають через ***C***. Дійсне число x називається *дійсною частиною* комплексного числа, а дійсне число y – його *уявною частиною,* і позначають $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Число i називається *уявною одиницею*. Запис $z = x + iy$ називають алгебраїчною формою комплексного числа z.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються рівними, якщо рівні між собою відповідно їх дійсні частини і уявні частини. Два комплексні числа виду $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$ називаються *спряженими.*

Розглянемо дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,.$$

Різницею двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$$

Добутком двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Зауважимо, що на практиці добуток зручніше обчислювати не за формулою, а безпосереднім множенням. Зокрема,

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)\,(x - iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2\,.$$

Часткою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,i\,.$$

Зазначимо, що на практиці частку зручніше обчислювати не за формулою, а помноживши чисельник і знаменник дробу на комплексне число, спряжене до знаменника.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою $M\left(x; y\right)$ на координатній площині, яка називається комплексною площиною, причому вісь Ox називається дійсною віссю, а вісь Oy – уявною.

Зобразимо на площині комплексні числа 3+4i; –2+3i; –3–2i; 4; 2i (див. рис. 10.5).

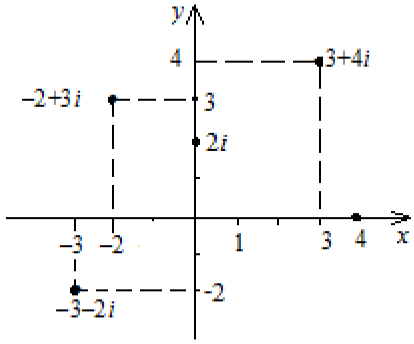


Рис. 10.5

Комплексному числу $z = x + iy$ можна поставити у відповідність вектор, який сполучає точку $M(x;y)$ з початком координат. Полярні координати точки $M(x;y)$ називають *модулем* і *аргументом* комплексного числа і позначають $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = Arg z$ (див. рис. 10.6).

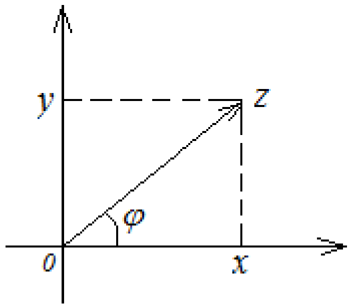


Рис. 10.6

Кожне комплексне число $z \neq 0$ має нескінченну кількість аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$. Надалі ми розглядатимемо *головне значення аргументу* $\varphi = \arg z$, яке належить проміжку $(-\pi;\pi)$.

Модуль $|z|$ комплексного числа обчислюється однозначно, а аргумент φ визначається з рівняння $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ або за однією з формул

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \geq 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

При обчисленні аргументу враховується положення точки z, тобто її абсциса і ордината. Оскільки $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то маємо *тригонометричну форму комплексного числа*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

де $\varphi = \arg z$ – *аргумент* комплексного числа z, $r = |z|$ – його *модуль*.

Скориставшись формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, дістанемо *показникову форму комплексного числа* $z = re^{i\varphi}$.

Зауважимо, що додавання і віднімання комплексних чисел зручно виконувати в алгебраїчній формі, а множення і ділення – у тригонометричній або у показниковій формі.

Добутком двох комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ називають комплексне число

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Часткою двох комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ називають комплексне число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Степінь n комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ знаходимо за формулою Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отже, при піднесенні до степеня n комплексного числа його модуль підноситься до степеня n, а аргумент множиться на n.

Знайдемо корені рівняння $z^n = w$, де w – комплексне число. Нехай $w = \rho e^{i\psi}$, $z = re^{i\varphi}$, де $\rho = |w|$, $\psi = \arg w$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Тоді всі корені $z = \sqrt[n]{w}$ можна знайти за формулою

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1.$$

Зауважимо, що при розв’язуванні квадратних рівнянь у випадку $D < 0$ ми будемо користуватись тим фактом, що $\sqrt{-1} = \pm i$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Іспит з математики складали 50 студентів, серед яких не отримали «відмінно» 42, а склали іспит 46 осіб. Скільки студентів склали іспит на «добре» та «задовільно»?

Розв’язання. Нехай *A* – множина студентів, які склали іспит; *B* – множина студентів, оцінка яких нижче «відмінно». Тоді за умовою маємо

$$M(A\cup B)=50,\ M(A)=46,\ M(B)=42.$$

Отже, студенти, які отримали оцінки «задовільно» й «добре», складають множину $A\cap B$. Враховуючи рівність (1), маємо

$$M(A\cap B)=M(A)+M(B)-M(A\cup B)=46+42-50=38.$$

Приклад 2. Виконати дії над комплексними числами $z_1=3-4i,\ z_2=4+3i$ в алгебраїчній формі. Знайти спряжене число $\overline{z}_1$ до z_1 та обчислити їх добуток.

Розв'язання. Знайдемо суму, різницю, добуток і частку чисел $z_1=3-4i,\quad z_2=4+3i$. Дістанемо

$$z_1+z_2=(3-4i)+(4+3i)=7-i, \qquad z_1-z_2=(3-4i)-(4+3i)=-1-7i,$$

$$z_1\cdot z_2=(3-4i)\cdot(4+3i)=12-16i+9i-12i^2=12-7i-12\cdot(-1)=24-7i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{3\cdot 4+4(-3)}{4^2+3^2}=\frac{12-12}{25}+i\,\frac{-9-16}{25}=-i.$$

Оскільки $\overline{z}_1=3+4i$, то $z_1\cdot\overline{z}_1=(3-4i)\cdot(3+4i)=9+16=25=|z_1|^2$.

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot(-1)=1.$$

Приклад 3. Записати в алгебраїчній формі комплексне число

$$z=5i^{23}+2i^{18}-4i^{16}+3i^9.$$

Розв'язання. Оскільки $i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$, то для будь-якого числа $k>0$ можна записати

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i.$$

Тоді задане комплексне число має вигляд

$$z=5i^{20+3}+2i^{16+2}-4i^{16}+3i^{8+1}=-5i-2-4+3i=-6-2i.$$

Приклад 4. Знайти $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{15}$ і визначити дійсну і уявну частини цього числа.

Розв'язання. Спочатку запишемо число $\dfrac{1+i}{1-i}$, виконавши ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі. Маємо

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{2}=i.$$

Враховуючи формули (10.9), дістаємо

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}=i^{15}=i^3=-i.$$

Тоді дійсна і уявна частини числа $z=0+(-1)i$ відповідно дорівнюють

$$\operatorname{Re}z=0,\qquad \operatorname{Im}z=-1.$$

Приклад 5. Записати число $z=1+i$ в тригонометричній формі.

Розв'язання. Зобразимо комплексне число $z=1+i$ на площині (див. рис. 10.7) та знайдемо модуль і аргумент числа. Маємо $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

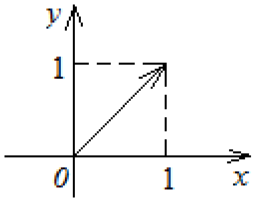


Рис. 10.7

Отже, задане число тригонометричній формі має вигляд

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Приклад 6. Записати число $z=-\sqrt{3}+i$ у тригонометричній та показниковій формах.

Розв'язання. Знайдемо модуль заданого числа

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2.$$

Оскільки $x=-\sqrt{3},\ y=1$, то точка $M(x;\,y)$ лежить у II чверті. Тому аргумент числа дорівнює

$$\varphi=arctg\frac{-1}{\sqrt{3}}+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

Отже, задане число в тригонометричній і показниковій формах має відповідно вигляд

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\qquad z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

Приклад 7. Знайти добуток комплексних чисел у тригонометричній формі

$$z_1=5\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right);\quad z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right).$$

Розв'язання. Оскільки модулі комплексних чисел перемножаються , а їх аргументи додаються, то

$$z_1\cdot z_2=5\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}\right)\right)=10\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Тоді в алгебраїчній формі добуток чисел має вигляд

$$z_1\cdot z_2=10\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=5+5\sqrt{3}i.$$

Приклад 8. Знайти частку чисел $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i,\ z_2 = 2 - 2i$ в тригонометричній формі.

Розв'язання. Запишемо комплексні числа в тригонометричній формі. За відповідними формулами знайдемо модуль і аргумент числа $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i$

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8, \quad \arg z_1 = arctg\frac{4\sqrt{3}}{4} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, число z_1 в тригонометричній формі має вигляд

$$z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Аналогічно знайдемо модуль і аргумент числа $z_2 = 2 - 2i$, маємо

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \qquad \arg z_2 = arctg\frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right).$$

Отже, частка заданих чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Приклад 9. Знайти $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^5$.

Розв'язання. Запишемо комплексне число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі. Знайдемо його модуль і аргумент.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \ \arg z = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тоді комплексне число z в тригонометричній формі має вигляд

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right).$$

Отже,

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{-10\pi}{3} + i\sin\frac{-10\pi}{3}\right) = 2^5\left(\cos\left(-4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-4\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Тоді в алгебраїчній формі маємо

$$\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^5 = 32\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -16 + 16\sqrt{3}i.$$

Приклад 10. Розв'язати рівняння $z^2 + 1 = 0$.

Розв'язання. Оскільки із заданого рівняння випливає $z^2 = -1$, то потрібно знайти всі корені другого степеня ($n = 2$) із числа –1, тобто визначити $\sqrt{-1}$. Для цього число -1 запишемо в тригонометричній формі. Оскільки $r=|-1|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$, $\varphi=arg(-1)=\pi$, то $-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$.

При $n=2$ маємо два корені $\sqrt{-1}$. Оскільки $\sqrt{r}=\sqrt{1}=1$, $\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}=\dfrac{\pi+2\pi k}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, то при $k=0,1$ дістанемо шукані корені рівняння

$$z_1=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=0+i\cdot 1=i,$$

$$z_2=1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=0+i\cdot(-1)=-i.$$

Таким чином, маємо два корені другого степеня $\sqrt{-1}=\pm i$, тобто задане рівняння має два розв'язки $z_1=i,\ z_2=-i.$

Приклад 11. Розв'язати рівняння $x^2-2x+10=0$.

Розв'язання. Задане квадратне рівняння не має дійсних коренів, оскільки дискримінант $D=(-2)^2-4\cdot 10=-36<0$. У цьому випадку рівняння має два комплексних спряжених корені $x_1=\alpha+i\beta, x_2=\alpha-i\beta$, які знаходять за тією самою формулою, що й дійсні. Враховуючи, що $\sqrt{-1}=\pm i$, дістаємо

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm 6\sqrt{-1}}{2}=1\pm 3i.$$

Зазначимо, що квадратне рівняння може бути записано за допомогою будь-якої змінної. В даному випадку комплексні корені позначають $x_1=1+3i,\ x_2=1-3i.$

Завдання для самостійної роботи

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами z_1 і z_2

а) $z_1=-i,\ z_2=1+i$; б) $z_1=4-3i,\ z_2=4+3i$;

в) $z_1=2+2i,\ z_2=4-2i$; г) $z_1=3-4i,\ z_2=-1+5i$;

д) $z_1=2+3i,\ z_2=5-4i$; е) $z_1=-4+i,\ z_2=-2+3i$.

2. Знайти спряжене число до

а) суми чисел $z_1=2-i,\ z_2=3+4i$;

б) добутку чисел $z_1=3-2i,\ z_2=4+i$.

3. Записати в алгебраїчній формі числа

а) $(2+2i)(2-i)$; б) $\dfrac{2-i}{1+i}$; в) $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}$.

4. Визначити дійсну та уявну частини комплексного числа

а) $z=\dfrac{2-i}{2+i}$; б) $z=\dfrac{(1-i)^2}{1+i}+i^5$; в) $z=(2+3i)^3$; г) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^9$.

5. Зобразити комплексні числа на комплексній площині і записати їх в тригонометричній та показниковій формах

а) $z=-4$; б) $z=1-i$; в) $z=i^5$; г) $z=(1-i)^2$;

д) $z=-1+\sqrt{3}i$; е) $z=4\sqrt{3}+4i$; ж) $z=2+2\sqrt{3}i$; з) $z=\sqrt{3}-i$.

6. Знайти z_1z_2 та $\dfrac{z_1}{z_2}$, якщо

а) $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $z_2=3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

б) $z_1=4e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2=4e^{\frac{\pi}{6}i}$.

7. Виконати дії множення і ділення над комплексними числами z_1 і z_2 у тригонометричній формі

а) $z_1=1-i,\ z_2=i$; б) $z_1=2+2\sqrt{3}i,\ z_2=\sqrt{3}-i$;

в) $z_1=2-2i,\ z_2=1+\sqrt{3}i$; г) $z_1=-4+4\sqrt{3}i,\ z_2=1+i$.

8. Обчислити, користуючись формулою Муавра

а) $(1+i)^8$; б) $(1-i)^{26}$; в) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{12}$; г) $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^{16}$;

д) $\dfrac{4i}{(1+i)^6}$; е) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}\cdot i^{103}$; ж) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$;

з) $\left(\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$; к) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^5$; л) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$.

9. Знайти всі значення кореня

а) $\sqrt{5+12i}$; б) $\sqrt[4]{i}$; в) $\sqrt[4]{-16}$;

г) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$; д) $\sqrt[3]{-2+2i}$; е) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

10. Знайти корені рівняння

а) $z^2=-4$; б) $z^3+1=0$; в) $z^3-i=0$;

г) $z^4+i=0$; д) $z^3+27i=0$; е) $z^5-32i=0$.

11. Розв’язати рівняння на множині комплексних чисел

а) $x^2+2x+5=0$; б) $4x^2-2x+1=0$; в) $x^3-1=0$;

в) $x^2-8x+25=0$; г) $2x^2+6x+7=0$; д) $x^4-16=0$.

12. Зобразити множину точок комплексної площини, яка визначається такими умовами

а) $\operatorname{Re} z<2$; б) $-1\le \operatorname{Im} z\le 1$; в) $|z|\le 4$; 4) $|z|>1$;

г) $|z-1|<3$; д) $|z-2+i|\le 0$; е) $1<|z-1-i|<3$; ж) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1$.

§ 11. Функція однієї змінної та її властивості

Функцією називається така відповідність між множинами D і E, коли кожному елементу $x\in D$ відповідає тільки один елемент $y\in E$. При цьому $y=f(x)$, x – незалежна змінна (аргумент), y – залежна змінна (значення функції), D – область визначення функції, E – множина значень функції. Основні способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний.

Функцію $y = F(u)$, де $u=\varphi(x)$, називають *складною (складеною) функцією* або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначають $y=F(\varphi(x))$. Наприклад, $y=5^{\sin^2 x}$ – складна функція, яка є суперпозицією трьох функцій: $y=5^u$, $u=v^2$, $v=\sin x$.

Функція $y=y(x)$ називається *неявною*, якщо її задано рівнянням $F(x,y)=0$, яке не розв’язане відносно змінної y. Наприклад, рівняння $x+y+3^y=0$ визначає неявну функцію y від x.

Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції, називається *областю визначення* функції і позначається $D(f)$. Будь-яке дослідження функції починають з її області визначення. Зазначимо, що область визначення функції може бути задана в умові задачі.

Розглянемо *основні властивості* функції: *парність, періодичність, обмеженість, монотонність*.

Функція $y=f(x)$ називається *парною (непарною),* якщо для будь-якого $x\in D(f)$ виконуються умови: 1) $-x\in D(f)$, 2) $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$).

Функція буде *ні парною, ні непарною* (загального вигляду), якщо хоча б одна з цих умов не виконується.

Функція $y=f(x)$ називається *періодичною*, якщо для будь-якого $x\in D(f)$ існує таке число $T\neq 0$, що $x+T\in D(f)$ і $f(x+T)=f(x)$, де число T –

період функції. Як правило, під періодом функції розуміють її найменший додатний період (основний період). Наприклад, функція $y = tg\,x$ – періодична функція з періодом $T = \pi$.

Функція $y = f(x)$ називається *1) зростаючою; 2) спадною; 3) незростаючою; 4) неспадною* на множині X, якщо для всіх $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає 1) $f(x_1) < f(x_2)$; 2) $f(x_1) > f(x_2)$; 3) $f(x_1) \geq f(x_2)$; 4) $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Такі функції називають *монотонними* на множині X. Наприклад, $y = \log_a x$ є спадною при $0 < a < 1$ і зростаючою при $a > 1$.

Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою* на множині X, якщо для всіх $x \in X$ існує таке число $M > 0$, для якого виконується умова $\left|f(x)\right| \leq M$. Аналогічно розглядають *обмежену знизу* функцію (при виконанні умови $f(x) \geq M_1$) і *обмежену зверху* функцію (при виконанні умови $f(x) \leq M_2$). Функція є обмеженою тільки тоді, коли вона обмежена і зверху, і знизу.

Наприклад, $y = \arcsin x$ – обмежена функція для всіх $x \in [-1;1]$, бо $\left|\arcsin x\right| \leq \dfrac{\pi}{2}$. А функція $y = 3^x$ обмежена знизу, бо $3^x > 0 \ \forall x \in (-\infty;+\infty)$.

Нагадаємо, що *основними елементарними функціями є функції:*

1) степенева $y = x^{\alpha}$;

2) показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометричні: $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$;

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$.

Функція називається *елементарною*, якщо вона може бути утворена з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних дій та суперпозицій. Наприклад, $y = \sin^5(x - \sqrt{x}) + \ln\dfrac{x+2}{x-3}$ є елементарною функцією.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти область визначення функцій

а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; б) $y = \dfrac{x-5}{x^2 + 2x + 1}$;

в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$; г) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln(x+1)}$.

Розв'язання. а) Знайдемо область визначення функції $y=\sqrt{4-x^2}$. Оскільки підкореневий вираз повинен бути невід'ємний, то

$$4-x^2\ge 0 \;\Rightarrow\; x^2-4\le 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2)\le 0 \;\Rightarrow\; -2\le x\le 2.$$

Таким чином, $D(f)=[-2;2]$.

б) Оскільки знаменник дробу не дорівнює нулю, то для заданої функції $y=\dfrac{x-5}{x^2+2x+1}=\dfrac{x-5}{(x+1)^2}$ маємо $x+1\ne 0,\ x\ne -1$. Тому $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

в) Для знаходження області визначення функції $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$ враховуємо умову існування дробу $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ та область визначення арксинуса, тобто

$$\begin{cases}\sqrt{x}\ne 0\\ x\ge 0\\ -1\le 2x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0\\ x\ge 0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \quad 0<x\le\frac{1}{2}.$$

Отже, $D(f)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ – область визначення даної функції.

г) Область визначення функції $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln(x+1)}$ передбачає існування підкореневого виразу та область визначення логарифмічної функції. Тому

$$D(f)=\begin{cases}1-x\ge 0\\ x+1>0\\ \ln(x+1)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x>-1\\ x+1\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x\le 1\\ x\ne 0.\end{cases}$$

Таким чином, $D(f)=(-1;0)\cup(0;1]$ – область визначення даної функції.

Приклад 2. Дослідити функції на парність

а) $f(x)=x^3+2\sin x$; б) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; в) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-1}$

Розв'язання. а) Оскільки $D(f)=(-\infty;+\infty)$ і $f(-x)=(-x)^3+2\sin(-x)=$ $=-x^3-2\sin x=-f(x)$, то функція непарна.

б) Маємо $D(f)=(-\infty;+\infty)$ і $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$, тому функція парна.

в) Область визначення даної функції $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ не є симетричною відносно нуля. Тому можна не перевіряти другу умову парності і визначати $f(-x)$. Отже, дана функція є ні парною, ні непарною (функція загального вигляду).

Приклад 3. Нехай функція $y=f(x)$ періодична з періодом T. Показати, що функція $y=f(ax+b),\ a\neq 0,$ має період $\frac{T}{a}$.

Розв'язання. Оскільки T є періодом функції $y=f(x)$, то

$$y=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+T+b)=f((ax+b)+T)=f(ax+b),$$

тому $\frac{T}{a}$ є періодом функції $y=f(ax+b)$.

Приклад 4. Знайти основний період функції

а) $y=\cos 4x$; б) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y=\sin^2 x$.

Розв'язання. а) Оскільки основний період функції $\cos x$ дорівнює 2π, то для функції $y=\cos 4x$ основним періодом є число $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

б) Основний період функції $y=\operatorname{tg} x$ дорівнює π, тому основним періодом функції $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ є число $T=\frac{\pi}{1/2}=2\pi$.

в) Врахуємо тригонометричну формулу $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ і властивість функції $y=f(ax+b)$, яка має період $\frac{T}{a}$. Оскільки основний період $\cos x$ дорівнює 2π, то функція $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ має період $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Приклад 5. Перевірити, чи є обмеженими функції

а) $y=\frac{1}{1+x^2},\ x\in R$; б) $y=\frac{1}{x^4},\ x\in(0;1)$.

Розв'язання. а) Оскільки $x^2\geq 0 \Rightarrow 1+x^2\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}\leq 1$, крім того, $1+x^2>0 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}>0$, то $0<\frac{1}{1+x^2}\leq 1\ \forall x\in R$. Отже, задана функція є обмеженою на всій області визначення.

б) Розглянемо функцію $y=\frac{1}{x^4}$ на проміжку $(0;1)$. Оскільки $x^4>0 \Rightarrow \frac{1}{x^4}>0$, то функція обмежена знизу. Але знаменник може бути як завгодно маленьким числом, близьким до нуля, тому функція може бути як завгодно великою. Отже, задана функція є обмеженою знизу на проміжку $(0;1)$.

Приклад 6. Дослідити функції на монотонність

а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=\frac{1}{x^3}$; в) $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0,\\ 1, \quad x\geq 0.\end{cases}$

Розв'язання. Функція $f(x)=x^2$ визначена на всій числовій прямій. Якщо $x_1<x_2$, то на проміжку $(-\infty;0)$ виконується нерівність $x_1^2>x_2^2$, тобто $f(x_1)>f(x_2)$, а на проміжку $(0;+\infty)$ – нерівність $x_1^2<x_2^2$, тобто $f(x_1)<f(x_2)$. Тому дана функція не є монотонною на своїй області визначення, вона є спадною при $x<0$ і зростаючою при $x>0$.

б) Область визначення даної функції $D(f)=(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Якщо $x_1<x_2<0$, то $\frac{1}{x_1^3}>\frac{1}{x_2^3}$, тобто функція є спадною на проміжку $(-\infty;0)$. При $0<x_1<x_2$ також виконується нерівність $\frac{1}{x_1^3}>\frac{1}{x_2^3}$, тобто функція теж є спадною на проміжку $(0;+\infty)$. Але задана функція не є монотонною на своїй області визначення, оскільки $\frac{1}{x_1^3}<\frac{1}{x_2^3}$ при $x_1<0<x_2$.

в) Задана функція визначена на $(-\infty;+\infty)$. Для $x_1<x_2<0$ виконується нерівність $f(x_1)>f(x_2)>1$, а для $0\leq x_1<x_2$ маємо $f(x_1)=f(x_2)=1$. Тоді для будь-яких $x_1<x_2$ дістаємо $f(x_1)\geq f(x_2)$, тобто дана функція є незростаючою на своїй області визначення.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій

а) $y=\sqrt{2x+3}$; б) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$; в) $y=\frac{x+3}{x-1}$;

г) $y=\frac{x}{x^2-1}$; д) $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$; е) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$;

ж) $y=\frac{2-x}{\sqrt{8-2x-x^2}}$; з) $y=\frac{x}{\sqrt{9x-x^3}}$; к) $y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$;

л) $y=\log_3\left(x+2\right)$; м) $y=\lg(x^2-x)$; н) $y=\sqrt{\sin x}+1$;

п) $y=\log_2\dfrac{2x-1}{x+1}$; р) $y=\arccos\dfrac{x-2}{x}$; с) $y=\dfrac{\arcsin\frac{x}{3}+\sqrt{1-x^2}}{\ln\left(1-x\right)}$.

2. Для функції $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1-x^2}$ знайти $f(-2),\ f(0),\ f(a),\ f(x^2),\ \left(f(x)\right)^2$. Визначити, чи існує $f\left(-1\right),\ f\left(1\right)$.

3. Знайти множину значень функцій

а) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; б) $y=-x^2-5x+6$; в) $y=1-\left|x\right|$;

г) $y=\dfrac{2-x}{x+3}$; д) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; е) $y=\sqrt{\sin x-1}$.

4. Для заданих функцій знайти обернені

а) $y=x$; б) $y=x^2-2x$; в) $y=3x+1$;

г) $y=x^2+1$; д) $y=10^{x+1}$; е) $y=e^{4x}$;

ж) $y=\dfrac{1}{x+2}$; з) $y=\log_x 2$; к) $y=2+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$.

5. Дослідити функції на парність

а) $y=4x^3-3x$; б) $y=x^2+5x$; в) $y=x^3+x$;

г) $y=3x^4-x^2+4$; д) $y=\left|x+1\right|$; е) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$;

ж) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; з) $y=x\cos x$; к) $y=\left|x\right|\sin 3x$;

л) $y=2^x+2^{-x}$; м) $y=x5^{-x}$; н) $y=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

п) $y=\sqrt[3]{x}+x$; р) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$; с) $y=\sqrt[3]{x^5}+\sin x$.

6. Знайти основний період функцій

а) $y=\cos 3x$; б) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$; в) $y=\cos\dfrac{x}{2}$;

г) $y=\operatorname{ctg}2x$; д) $y=3\sin 5x$; е) $y=\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$;

ж) $y=3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; з) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$; к) $y=\cos\dfrac{1}{x}$.

7. Визначити, які з функцій є періодичними, і знайти їх період

а) $y=\dfrac{x-1}{\left|x-1\right|}$; б) $y=\dfrac{2}{\cos x}$; в) $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}$;

г) $y=\sin\dfrac{x}{3}+\mathrm{ctg}\dfrac{x}{4}$; д) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; е) $y=|\sin x|$;

ж) $y=\lg(\cos^2 x)$; з) $y=2^{\sin 2x}$; к) $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{5x}{6}+1\right)$.

8. Перевірити, чи є обмеженими функції на вказаному проміжку

а) $y=\dfrac{1}{x^3}$, $x\in(0;1)$; б) $y=-4^x$, $x\in R$; в) $y=\dfrac{x^2}{1+x^4}$, $x\in R$.

9. Визначити, чи обмежена функція $y=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}+\ln\dfrac{2}{x}$ на $[1;2]$.

10. Дослідити функції на монотонність

а) $y=x^4$; б) $y=x^2-3x+2$; в) $y=\dfrac{1}{x-1}$;

г) $y=3^{x+1}$; д) $y=e^{-x}$; е) $y=\sqrt{x+1}$.

§ 12. Числова послідовність. Границя послідовності

Числові послідовності та їх властивості

Числова функція $y=f(n)$, визначена на множині натуральних чисел, називається *числовою послідовністю*, або просто *послідовністю*. Поклавши $y=x_n$, послідовність позначають через (x_n), $n\in N$.

Значення $x_1=f(1),\ x_2=f(2),\ \ldots,\ x_n=f(n),\ \ldots$ називаються *членами послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано n-й член (*загальний член*) послідовності.

Зокрема, при $x_n=\dfrac{1}{n}$ дістаємо послідовність $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots$; а при $x_n=(-1)^n$ послідовність має вигляд $-1,\ 1,-1,\ 1,\ldots,(-1)^n,\ldots$ Прикладами числових послідовностей також є *арифметична прогресія* із загальним членом $a_n=a_1+(n-1)d$ (d – різниця прогресії) та *геометрична прогресія* із загальним членом $b_n=b_1q^{n-1}$ (q – знаменник прогресії).

Послідовність називається *обмеженою*, якщо існує таке число $M>0$, що для будь-якого $n\in N$ виконується нерівність $|x_n|\le M$. В іншому випадку послідовність називається *необмеженою.*

Легко побачити, що послідовності $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ і $\left((-1)^n\right)$ є обмеженими, а послідовності $\left(n^2+1\right)$ і $\left((-1)^n n\right)$ – необмежені.

Послідовність називається *зростаючою (неспадною)*, якщо для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $x_n < x_{n+1}$ $(x_n \le x_{n+1})$. Аналогічно визначається *спадна* (*незростаюча*) послідовність. Такі послідовності називаються *монотонними.*

Наприклад, послідовність $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ є спадною, послідовність $\left(n^2+1\right)$ – зростаючою, а послідовність $\left((-1)^n n\right)$ не є монотонною.

Границя послідовності

Число a називається *границею послідовності* (x_n), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число N, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність

$$\left|x_n - a\right| < \varepsilon. \tag{12.1}$$

Позначають границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Дамо *геометричну інтерпретацію* границі послідовності. Для цього на числовій осі побудуємо ε-окіл точки *a*, тобто інтервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, і розглянемо розміщення членів послідовності за умови $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Число a є границею послідовності (x_n), якщо для будь-якого ε-околу точки a існує такий номер N, що всі члени послідовності з номерами $n > N$ потрапляють в ε-окіл точки *a* (див. рис. 12.1).

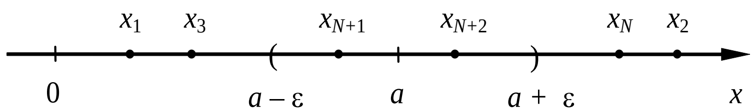


Рис. 12.1

Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною.*

Зазначимо, що стала послідовність при $x_n = C$ є збіжною до числа C, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

Послідовність α_n називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Наприклад, послідовність $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ – нескінченно мала, бо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Зазначимо, що нескінченна геометрична прогресія $b_1, b_1q, ..., b_1q^{n-1}, ...$ із знаменником $|q| < 1$ є нескінченно малою послідовністю (b_n). Сума n перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Оскільки при $|q|<1$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, то $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$. Таким чином, сума нескінченної геометричної прогресії є скінченною, якщо її знаменник $|q|<1$. Зокрема, геометрична прогресія $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ є нескінченно малою послідовністю, а її сума $S = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$.

Розглянемо основні *властивості нескінченно малих* послідовностей.

1. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

2. Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

3. Добуток обмеженої величини на нескінченно малу послідовність є нескінченно малою послідовністю.

Послідовність (x_n) називається *нескінченно великою послідовністю*, якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$ існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$. Наприклад, послідовність (n^3) є нескінченно великою , оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$.

Для нескінченно великих послідовностей мають місце властивості, аналогічні властивостям нескінченно малих послідовностей.

Між нескінченно малою та нескінченно великою послідовностями існує зв'язок: якщо α_n – нескінченно мала послідовність ($\alpha_n \neq 0$), то послідовність $y_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ є нескінченно великою послідовністю**,** і навпаки.

Розглянемо *властивості збіжних послідовностей*.

Теорема 1 (*єдиність границі послідовності).* Кожна збіжна послідовність має єдину границю.

Теорема 2 (*необхідна умова збіжності послідовності).* Кожна збіжна послідовність є обмеженою.

Теорема 3 (арифметичні дії над збіжними послідовностями). Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = C \lim\limits_{n\to\infty} x_n = Ca, C = const;$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Теорема 4 (*граничний перехід у нерівності).* Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ і, починаючи з деякого номера n виконується нерівність $x_n \le y_n$, то $a \le b$.

Теорема 5 (границя проміжної послідовності). Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ і, починаючи з деякого номера n виконується нерівність $x_n \le z_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

Теорема 6 (про зв'язок збіжної та нескінченно малої послідовностей). Для існування границі a послідовності (x_n) необхідно і достатньо, щоб послідовність $\alpha_n = x_n - a$ була нескінченно малою.

З останньої теореми випливає: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n = a + \alpha_n$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Користуючись наведеними теоремами, для збіжних послідовностей можна виконувати граничний перехід, зокрема, при обчисленні границь.

Якщо умови теореми 3 порушуються, то вираз під знаком границі спочатку перетворюють так, щоб арифметичні дії виконувалися зі збіжними послідовностями, а потім виконують граничний перехід.

Теорема Вейєрштрасса. Кожна монотонна й обмежена послідовність має границю.

Користуючись наведеною теоремою, можна показати, що послідовність із загальним членом $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ має границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, де число $e \approx 2{,}7183...$ є основою натурального логарифма $\ln a = \log_e a.$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Записати три перші члени послідовності $(x_n) = \left(\dfrac{n^2+1}{3^n}\right).$

Розв'язання. Поклавши $n = 1, 2, 3$ у формулі загального члена послідовності $x_n = \dfrac{n^2+1}{3^n}$, дістанемо $x_1 = \dfrac{2}{3},\quad x_2 = \dfrac{5}{9},\quad x_3 = \dfrac{10}{27}.$

Приклад 2. За даними трьома першими членами послідовності $x_1 = 1,\quad x_2 = -\dfrac{3}{4},\quad x_3 = \dfrac{5}{7}$ знайти формулу її загального члена.

Розв'язання. Оскільки $x_1 = \dfrac{1}{1}$, то помічаємо, що чисельники є непарними числами, а знаменники відрізняються на 3, крім того, знаки дробів чергуються. Тоді загальний член послідовності має вигляд $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{3n-2}.$

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Розв'язання. Розглянемо послідовність із загальним членом $x_n=\frac{1}{n}$. Оскільки нерівність $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ виконується для всіх $n>\frac{1}{\varepsilon}$, то в якості числа N можна взяти цілу частину $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність (1), і за означенням маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Зокрема при $\varepsilon=0{,}1$ нерівність $\frac{1}{n}<\varepsilon$ виконується для всіх $n>10$, тобто всі члени послідовності, починаючи з $n=11$, потрапляють в ε-окіл нуля. Отже, послідовність $\left(\frac{1}{n}\right)$ є збіжною до нуля.

Приклад 4. Користуючись означенням, довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}=2$.

Розв'язання. За означенням границі число 2 є границею послідовності $\left(\frac{2n+5}{n+3}\right)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число N, що для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність

$$|x_n-a|=\left|\frac{2n+5}{n+3}-2\right|=\left|\frac{2n+5-2n-6}{n+3}\right|=\left|\frac{-1}{n+3}\right|=\frac{1}{n+3}<\varepsilon.$$

З нерівності $\frac{1}{n+3}<\varepsilon$ знаходимо $n>\frac{1}{\varepsilon}-3$. Отже, для всіх номерів, для яких виконується умова $n>\frac{1}{\varepsilon}-3$, відповідні члени послідовності задовольняють нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$. Тому за означенням $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}=2$.

Приклад 5. Показати, що послідовність $\frac{3}{4},\frac{5}{7},\frac{7}{10},\ldots,\frac{2n+1}{3n+1},\ldots$ має границю число $\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Загальний член послідовності $x_n=\frac{2n+1}{3n+1}$. Тому

$$x_n-\frac{2}{3}=\frac{2n+1}{3n+1}-\frac{2}{3}=\frac{3(2n+1)-2(3n+1)}{3(3n+1)}=\frac{1}{3(3n+1)}.$$

Розглянемо додатне число $\varepsilon > 0$. Розглянемо нерівність $\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$, тобто $\frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$. Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{3n+1}{\varepsilon}$, дістанемо $\frac{1}{3\varepsilon} < 3n+1$, звідки $n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right)$.

Якщо в означенні границі взяти число $N = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right) \right]$, де $[x]$ – ціла частина числа *x*, то для всіх $n > N$ буде виконуватись умова $\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$.

Приклад 6. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}$.

Розв'язання. Скориставшись теоремою 3, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{3n}$.

Розв'язання. Оскільки послідовності у чисельнику і знаменнику не є збіжними, то для застосування теореми 3 спочатку потрібно провести перетворення, поділивши чисельник і знаменник на *n* (найвищий степінь *n* в чисельнику і знаменнику). Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{4}{n}}{\frac{3n}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 4\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 8. Знайти границі а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right)$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sin n$.

Розв'язання. а) Оскільки $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$ при $n \to \infty$, а сума двох нескінченно малих послідовностей теж є нескінченно малою, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

б) Оскільки $|\sin n|\le 1$, то маємо добуток нескінченно малої послідовності $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ на обмежену $(\sin n)$. Тоді послідовність $\left(\frac{1}{n^2}\sin n\right)$ теж є нескінченно малою, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sin n = 0$.

Приклад 9. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right)$.

Розв'язання. Маємо границю добутку двох послідовностей, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n^2}\right)=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}3-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)=(1+0)\cdot(3-0) = 3.$$

Приклад 10. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{n-2n^2}$.

Розв'язання. Спочатку поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, тобто на n^2. Оскільки $\frac{3}{n}\to 0, \frac{5}{n^2}\to 0, \frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{n-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}-2}=\frac{1+0-0}{0-2} =-\frac{1}{2}.$$

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-1}{n^3-2n^2+3}$.

Розв'язання. Для обчислення границі поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, тобто на n^3. У чисельнику ми дістанемо суму нескінченно малих послідовностей, а в знаменнику – суму одиниці та нескінченно малих послідовностей. Оскільки $\frac{4}{n}\to 0, \frac{1}{n^2}\to 0, \frac{1}{n^3}\to 0, \frac{2}{n}\to 0, \frac{3}{n^3}\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-1}{n^3-2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^3-2n+1}{5n^3-4n^2+2}$.

Розв'язання. Для обчислення границі поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, тобто на n^4. У чисельнику маємо 1, а в знаменнику дістаємо нескінченно малу послідовність. Оскільки обернена до нескінченно малої послідовності є нескінченно великою, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^3-2n+1}{5n^3-4n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}{\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^4}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

Розв'язання. У чисельнику та знаменнику маємо нескінченно великі послідовності, тому поділимо чисельник і знаменник на степінь з найбільшою основою 3^n. Оскільки геометрична прогресія із знаменником $q=\dfrac{2}{3}<1$ є нескінченно малою послідовністю, то $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0$. Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n+3^n}{3^n}}{\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3}=\frac{0+1}{2\cdot 0+3}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 14. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Розв'язання. Для обчислення границі подамо кожний дріб у вигляді різниці двох дробів, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

Приклад 15. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

Розв'язання. Під знаком границі помножимо і поділимо вираз на спряжений до нього і скористаємось формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

Приклад 16. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$.

Розв'язання. Скориставшись границею $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot e\cdot 1=e^2.$$

Приклад 17. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3n-1}$.

Розв'язання. Скористаємось відомою границею $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{e^3}{1}=e^3.$$

Приклад 18. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+4}$.

Розв'язання. Проведемо перетворення у виразі, а потім скористаємось границею $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$. Враховуючи, що $\dfrac{n+1}{2}\to\infty$ при $n\to\infty$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+2}{n+1}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot 2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3}=e^2\cdot 1^3=e^2.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Написати перші чотири члени послідовності, якщо

а) $x_n=\dfrac{1}{1+n^2}$; б) $x_n=\dfrac{3^n}{n!}$; в) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n n}{n}$;

г) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2+1}$; д) $x_n=(-1)^n\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

2. Написати формулу загального члена послідовності

а) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{7}{8},\ldots$ б) $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{6}{27},\ \dfrac{8}{81},\ldots$

в) $\frac{2}{3\cdot 1}, \frac{3}{4\cdot 2}, \frac{4}{5\cdot 3}, \frac{5}{6\cdot 4},...$ г) $\frac{2}{3!}, \frac{8}{5!}, \frac{32}{7!}, \frac{128}{9!},...$

3. Довести за означенням, що

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-5}{n+3}=1;$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$

4. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n^2}\right);$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)}{n^2+2};$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n};$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2};$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3};$ е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2-5n+4};$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^3-n^2+4};$ з) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3+5n^2}{0{,}1n^4-10n^3+1};$

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-6n^2+5}{7n^2+3n};$ л) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

5. Знайти границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3};$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2};$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+n}-\sqrt{2+n});$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-1}-\sqrt{4n^2+1});$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!};$ е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!};$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{2^n+3^n};$ з) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}};$

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}};$ л) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right).$

6. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+2};$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+2};$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n+3};$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$

§ 13. Границя функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 (скінченної або нескінченно віддаленої), можливо, крім самої точки x_0. Сформулюємо два еквівалентних означення границі функції в точці.

Означення (мовою послідовностей). Число називають A *границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0 (при $x \to x_0$), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу x_n, збіжної до x_0 ($x_n \neq x_0$), послідовність відповідних значень функції $f(x_n)$ збігається до числа A, тобто $x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to A$.

Означення (мовою «$\varepsilon - \delta$»). Число називають A *границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0 (при $x \to x_0$) якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що при всіх $x \neq x_0$, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають границю функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A,\; x \to x_0$. Отже, число A (скінченне або нескінченне) є границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо значення функції f як завгодно близько наближаються до A, коли значення аргументу x наближаються до x_0 і $x \neq x_0$.

Дамо *геометричну інтерпретацію* границі функції: для заданого ε-околу числа A знайдеться такий δ-окіл числа x_0, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta),\, x \neq x_0$, відповідні значення функції $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ (див. рис. 13.1).

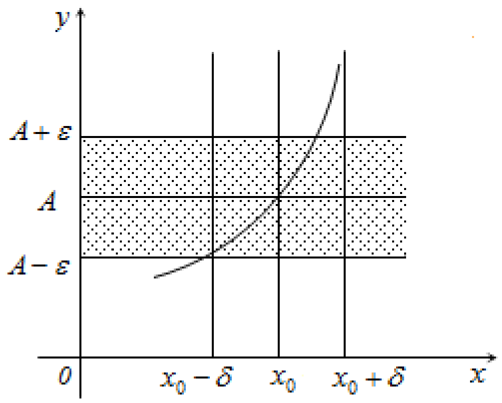


Рис. 13.1

У деяких випадках спосіб наближення аргументу x до x_0 (зліва чи справа) впливає на значення границі функції. Тому вводять поняття односторонніх границь.

Число називають A_1 *лівосторонньою границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0 (при $x \to x_0$ зліва), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Отже, $f(x) \approx A_1$, коли

$x \approx x_0,\ x < x_0$. Позначають лівосторонню границю $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ або $f(x_0 - 0)$.

Число називають A_2 *правосторонньою границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0 (при $x \to x_0$ справа), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $\left| f(x) - A_2 \right| < \varepsilon$. Отже, $f\left(x\right) \approx A_2$, коли $x \approx x_0,\ x > x_0$. Позначають правосторонню границю $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ або $f(x_0 + 0)$.

Лівостороння і правостороння границі функції називаються *односторонніми границями.*

Твердження 1. Для того, щоб існувала границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ функції $y = f(x)$ в точці x_0, необхідно й достатньо, щоб існували обидві односторонні границі функції в цій точці і виконувалась умова

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Зазначимо, що точка x_0 може бути як скінченною, так і нескінченно віддаленою. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Розглянемо *границю функції на нескінченності*.

Число називають A *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що при всіх x, які задовольняють умову $|x| > M$, виконується нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Позначають границю функції на нескінченності $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. Якщо $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$, то відповідно записують $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$. Наприклад, для функції $y = \ln x$ можна розглядати тільки границю при $x \to +\infty$, оскільки вона визначена на проміжку $(0; +\infty)$.

Нескінченно великі функції (величини)

Функція $y = f(x)$ називається *нескінченно великою функцією (величиною)* при $x \to x_0$, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що при всіх $x \neq x_0$, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $\left| f(x) \right| > M$.

Отже, для нескінченно великої функції $y = f(x)$ маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Якщо функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно великою і набуває тільки додатних значень, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; а якщо тільки від'ємних, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Аналогічно визначають нескінченно велику функцію на нескінченності.

Функція $y = f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \to \infty$, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує таке число $N > 0$, що при всіх x, які задовольняють умову $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x-1}$ є нескінченно великою при $x \to 1$, тобто $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$, а функція $y = \ln x$ є нескінченно великою при $x \to +\infty$, тобто $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Нескінченно малі функції (величини)

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою функцією (величиною)* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Отже, функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \to x_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що при всіх $x \neq x_0$, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Аналогічно визначають нескінченно малі величини при $x \to \infty$, а також при $x \to x_0 - 0$ (зліва) та при $x \to x_0 + 0$ (справа).

Наприклад, функція $y = x^2$ є нескінченно малою при $x \to 0$, а функція $y = \dfrac{2}{x}$ є нескінченно малою при $x \to \infty$.

Розглянемо *властивості нескінченно малих величин*.

1. Сума двох нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

Зауважимо, що сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною.

2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу величину є нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \quad |f(x)| \leq M, x \to x_0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \alpha(x)) = 0.$$

Наслідками властивості 2 є наступні дві властивості.

3. Добуток двох нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною.

4. Добуток нескінченно малої величини на число є нескінченно малою величиною.

Твердження 2 (*зв'язок між нескінченно малою та нескінченно великою величинами*). Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$, то функція $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$, і навпаки.

Якщо в процесі обчислення границі дістанемо величину, обернену до нескінченно малої, то для зручності будемо використовувати запис $\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$.

Аналогічно для величини, оберненої до нескінченно великої, маємо $\left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$. Наприклад, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$.

Твердження 3 (*зв'язок між границею функції та нескінченно малою величиною*). Для того, щоб функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ мала границю A, необхідно й достатньо, щоб функцію можна було подати у вигляді суми числа A та нескінченно малої величини, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x), x \to x_0.$$

Теореми про границі

Розглянемо основні *властивості границь* (теореми про границі).

Теорема 1 (*про єдиність границі*). Якщо функція $y = f(x)$ має границю при $x \to x_0$, то ця границя – єдина.

Теорема 2 (арифметичні дії над границями). Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то існують границя суми, різниці, добутку і частки функцій $f(x)$ і $g(x)$, які обчислюють за формулами

а) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

б) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

в) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x \to x_0}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \to x_0} f(x), \; C = const..$$

Наслідок 2. Границю степеня з натуральним показником обчислюють за формулою $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n$, зокрема, $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

Теорема 3. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, причому $f(x) < g(x)$ у деякому околі точки x_0, то виконується нерівність

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Теорема 4 (границя проміжної функції). Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають однакові границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, причому $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ у деякому околі точки x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

Теорема 5. Якщо функція $y = f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ (при $x > x_0$), то вона має скінченну лівосторонню границю $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (правосторонню границю $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$).

Теорема 6. Кожна елементарна функція f із областю визначення $D(f)$ має скінченну границю у будь-якій точці $x_0 \in D(f)$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема 7. Якщо для функцій $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ існують скінченні границі $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = u_0$, то існує границя складної функції $y = f(\varphi(x))$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

Наведені теореми застосовують при обчисленні границь функцій. Зокрема, скориставшись теоремою 2 та її наслідками, знайдемо границю:

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 5) = (\lim_{x\to 1} x)^2 - 3\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 5 = 1 - 3 + 5 = 3.$$

Якщо при виконанні граничного переходу порушуються умови теореми 2, то обчислення границі суми, різниці, добутку і частки зводиться до розкриття однієї з невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0\cdot\infty], [\infty - \infty]$.

Зокрема, при обчисленні границі відношення двох нескінченно малих функцій маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розглянемо приклади розкриття цієї невизначеності для раціональних та ірраціональних функцій.

Важливі границі

При обчисленні границь функцій використовують *важливі границі*. Розглянемо *першу важливу границю*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (13.1)$$

Отже, границя відношення синуса до його аргументу дорівнює одиниці, коли аргумент прямує до нуля. Оскільки $\sin x \to 0$ при $x \to 0$, то формулу (13.1) застосовують для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ при обчисленні границь від тригонометричних функцій.

Розглянемо наслідки з першої важливої границі, які найчастіше використовуються при обчисленні границь. Нехай числа $k \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. Дійсно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$. За формулою (1) маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$, оскільки $x\to 0\Rightarrow kx\to 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$. Із формули (1) маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$. Зробимо заміну $t=\arcsin x$ і врахуємо $x\to 0\Rightarrow t\to 0$, маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{matrix} t=\arcsin x \\ x=\sin t\end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$. Аналогічно попередній границі, дістаємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{arctg} x \\ x=\operatorname{tg} t\end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\operatorname{tg} t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}\cdot\cos t=1$.

При використанні першої важливої границі та її наслідків часто виникає потреба у застосуванні тригонометричних формул, зокрема

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad \sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

При обчисленні границь функцій для розкриття невизначеності $[1^\infty]$ широко застосовують *другу важливу границю*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{13.2}$$

де число $e\approx 2{,}718$.

Зробивши заміну $t=\dfrac{1}{x}$ у рівності (13.2) і враховуючи, що $x\to\infty\Rightarrow t\to 0$, дістанемо інший запис другої важливої границі

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e. \tag{13.3}$$

Розглянемо інші важливі границі, які є наслідками із другої важливої границі та найчастіше використовуються в обчисленнях:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}.$$

Зауважимо, що за допомогою другої важливої границі та її наслідків можна розкривати невизначеності виду $\left[1^\infty\right],\left[0^0\right],\left[\infty^0\right]$.

Порівняння нескінченно малих величин

Розглянемо нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Визначимо, як нескінченно малі величини можна порівнювати.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$, де $A\neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини *одного порядку*.

Зокрема, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *еквівалентними,* і позначають $\alpha\sim\beta$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою *вищого порядку,* ніж $\beta(x)$. Позначають це $\alpha=o(\beta)$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою *нижчого порядку,* ніж $\beta(x)$. Оскільки в цьому випадку $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$, то $\beta=o(\alpha)$.

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ *не можна порівняти*.

Величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою порядку p по відношенню до нескінченно малої $\beta(x)$ (при $x\to x_0$), якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^p}=C, C\neq 0$.

Еквівалентність нескінченно малих величин

Серед нескінченно малих одного порядку особливу роль відіграють еквівалентні нескінченно малі величини $\alpha\sim\beta$, для яких $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Зокрема, з першої важливої границі випливає, що функції $\alpha(x)=\sin x$ і $\beta(x)=x$ – еквівалентні при $x\to 0$, тобто $\sin x \sim x,\ x\to 0$.

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну (або одну) з них замінити еквівалентною їй нескінченно малою.

Для розкриття невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ застосовують відомі еквівалентні нескінченно малі величини, які є наслідками першої і другої важливих границь. Запишемо основні з них, які найчастіше використовуються при обчисленні границь у випадку $x\to 0$, а саме:

$$\sin x \sim x, \qquad \mathrm{tg}\, x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x, \qquad \mathrm{arctg}\, x \sim x, \qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$e^x - 1 \sim x, \qquad a^x - 1 \sim x\ln a, \qquad \ln(1+x) \sim x, \qquad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},$$

$$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha\cdot x, \alpha>0, \quad \text{зокрема,} \quad \sqrt{1+x}-1 \sim x/2.$$

Еквівалентність нескінченно малих величин використовуються у наближених обчисленнях. Зокрема, з еквівалентності $\ln(1+x)\sim x, x\to 0$ маємо $\ln 1{,}032 = \ln(1+0{,}032) \approx 0{,}032.$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Довести, що границя функції $f(x)=2x+1$ у точці $x=1$ дорівнює 3.

Розв’язання. Доведемо, що для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що при всіх $x\neq 1$, які задовольняють нерівність $|x-1|<\delta$, виконується нерівність $|(2x+1)-3|<\varepsilon$, тобто $|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon$.

Якщо взяти $\delta=\varepsilon/2$, то для всіх x, які задовольняють умову $|x-1|<\delta=\varepsilon/2$, виконується нерівність $|2(x-1)|<\varepsilon$, тобто $|(2x+1)-3|<\varepsilon$. Тоді за означенням границі маємо $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Приклад 2. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}$.

Розв’язання. Розклавши многочлени у чисельнику і знаменнику на множники, скоротимо дріб на спільний множник $(x-1)$, оскільки під знаком границі $x-1\neq 0$. Дістанемо величину, обернену до нескінченно малої

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x-1}=\left[\frac{6}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 3. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^2-4}$.

Розв'язання. Розклавши многочлени у чисельнику і знаменнику на множники, скоротимо дріб на спільний множник $(x-2)$, оскільки під знаком границі $x-2\neq 0$. Маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)+3(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x+2}=\frac{4+3}{2+2}=\frac{7}{4}.$$

Приклад 4. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)^2}$.

Розв'язання. а) Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ позбавимось від ірраціональності, помноживши чисельник і знаменник на «спряжений вираз» до чисельника. Після скорочення дробу на однаковий вираз дістанемо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}.$$

б) Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої позбавимось від ірраціональності, домноживши чисельник і знаменник на «спряжений вираз» до чисельника. Після скорочення дробу на спільний множник $(x-3)$, дістанемо у знаменнику нескінченно малу величину. Отже,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)^2(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)^2(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)^2(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 5. Знайти границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+6}{4+3x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2-5}{3x^4-5x^3+2x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2-x}{x^2-3x+7}$.

Розв'язання. а) При $x\to\infty$ чисельник і знаменник дробу прямують до нескінченності, тому маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, для розкриття якої поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на x^2.

Скориставшись теоремами про границі, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+6}{4+3x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}-2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}2}=\frac{4-0+0}{0+0-2}=-2.$$

б) Маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Поділивши чисельник і знаменник дробу на x^4 (на x у найвищому степені у даному дробі), маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2-5}{3x^4-5x^3+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\frac{0+0-0}{3-0+0-0}=0.$$

в) Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ поділимо чисельник і знаменник на x^3. Дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2-x}{x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=2$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)=0$, то маємо величину, обернену до нескінченно малої. Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2-x}{x^2-3x+7}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^3+x}-2x}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник дробу прямують до нескінченності, тому маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на $x^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{x}$. Дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^3+x}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}}{\frac{4\sqrt{x^3+x}-2x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{4\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $[\infty-\infty]$, для розкриття якої позбавимось від ірраціональності, помноживши і поділивши вираз на «спряжений». Дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$.

Розв'язання. Оскільки $x\to0$, то $4x\to0$ і $\sin5x\to0$, то маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скориставшись першою важливою границею, дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{4x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{4}\cdot1=\frac{5}{4}.$$

Приклад 9. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\operatorname{tg}4x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{9x^2}$.

Розв'язання. а) Скориставшись першою важливою границею, маємо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{7x}\cdot\frac{7}{x}=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{7}{x}=\left[\frac{7}{0}\right]=\infty.$$

б) Розкриємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ за допомогою першої важливої границі

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\operatorname{tg}4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\dfrac{\sin4x}{\cos4x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin4x}\cdot\frac{3x}{4x}\cdot\cos4x\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin4x}\cdot\lim_{x\to0}\cos4x=\frac{3}{4}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{3}{4}.$$

в) Оскільки при $x\to0$ функції в чисельнику та знаменнику прямують до нуля, то маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, для розкриття якої використаємо першу важливу границю. Скориставшись формулою $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{9x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{9x^2}=\frac{2}{9}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\cdot4=\frac{2}{9}\cdot1\cdot4=\frac{8}{9}.$$

Зауважимо, що можна спростити обчислення границь у наведеному прикладі, скориставшись еквівалентністю нескінченно малих величин. Зокрема,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}=\left|\begin{matrix}\sin 3x\sim 3x\\ \operatorname{tg} 4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Приклад 10. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, яку розкриємо за допомогою першої важливої границі. Скориставшись тригонометричною формулою $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 3x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=-6.$$

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Розв'язання. Застосуємо другу важливу границю, зробивши заміну $u=\dfrac{x}{2}$. Оскільки $x\to\infty\Rightarrow u\to\infty$, то маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{2\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e\cdot e=e^2.$$

Приклад 12. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{5x}$.

Розв'язання. Для розкриття невизначеності $[1^\infty]$ використаємо другу важливу границю, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)+3}{x-1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{x-1}{3}\cdot\frac{3}{x-1}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{15x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x}{x-1}}=e^{15}.$$

Приклад 13. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{4x-3}$.

Розв'язання. При обчисленні границі маємо невизначеність вигляду $[1^{\infty}]$, оскільки при $x\to\infty$ функція $\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{2-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\to 1$, а $4x-3\to\infty$. Для розкриття цієї невизначеності використаємо другу важливу границю, перетворивши вираз $\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{4x-3}$ до вигляду $\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}$, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+1)-2}{2x+1}\right)^{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{4x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}\cdot\frac{-2}{2x+1}\cdot(4x-3)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{-8x+6}{2x+1}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}=e$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8x+6}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8+\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}=-4$ то скориставшись другою важливою границею, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{-8x+6}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x+6}{2x+1}}=e^{-4}.$$

Приклад 14. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2x-7\right)^{\frac{3}{x-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. а) Оскільки при $x\to 4$ вираз $2x-7\to 1$, а вираз $\dfrac{3}{x-4}\to\infty$, то маємо невизначеність виду $[1^{\infty}]$, для розкриття якої скористаємось другою важливою границею у вигляді (3). Оскільки при $x\to 4$ вираз $x-4\to 0$, то зробимо заміну $t=x-4$. Тоді $x=t+4$, звідки $2x-7=2t+1$. Дістанемо

$$\lim_{x\to 4}\left(2x-7\right)^{\frac{3}{x-4}}=\lim_{t\to 0}\left(1+2t\right)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+2t\right)^{\frac{1}{2t}\cdot 6}=\lim_{t\to 0}\left(\left(1+2t\right)^{\frac{1}{2t}}\right)^{6}=e^{6}.$$

б) Для розкриття невизначеності виду $[1^\infty]$, скористаємось другою важливою границею у вигляді (3) та першою важливою границею. Дістанемо

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}=e^2.$$

Приклад 15. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{\ln(1+4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{\arcsin(x-1)}$.

Розв'язання. а) Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ замінимо функції в чисельнику і знаменнику еквівалентними нескінченно малими функціями, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{2x}-1)}{\ln(1+4x)}=\left|\begin{matrix}e^{2x}-1\sim 2x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

б) Скориставшись відомими еквівалентностями нескінченно малих величин, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg}(3x^2)}=\left|\begin{matrix}\ln(1+\sin x)\sim\sin x\\ \operatorname{tg}(3x^2)\sim 3x^2\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

в) Використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій $\arcsin(x-1)$ і $x-1$ при $x\to 1$, дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{\arcsin(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+3)=4.$$

Приклад 16. Порівняти порядок функцій $\alpha(x)=\sin x$ і $\beta(x)=x^2$ при $x\to 0$.

Розв'язання. Обидві функції є нескінченно малими при $x\to 0$. Скориставшись першою важливою границею, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty,$$

тобто $\alpha(x)=\sin x$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\beta(x)=x^2$.

Приклад 17. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)=1-\cos x$ відносно $\beta(x)=e^{2x}-e^x$ при $x\to 0$.

Розв'язання. Розглянемо границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^p\beta(x)}$ і визначимо порядок малості p з умови $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^p\beta(x)}=C, C\neq 0$. Враховуючи еквівалентність нескінченно малих величин, дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x^p\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^p(e^{2x}-e^x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^pe^x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^p\cdot1\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^p\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x^p}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x^{p-1}}=\frac{1}{2}\;\Rightarrow\; p-1=0,\; p=1.$$

Отже, нескінченно мала $\alpha(x)=1-\cos x$ має порядок малості $p=1$ відносно нескінченно малої $\beta(x)=e^{2x}-e^x$ при $x\to0$.

Приклад 18. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0:

а) $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$, $x_0=1$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}$, $x_0=2$.

Розв'язання. а) Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі функції $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$ у точці $x_0=1$. Якщо $x\to1$ зліва, то $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{5}{x-1}=\left[\dfrac{5}{-0}\right]=-\infty$; а при $x\to1$ справа маємо $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{5}{x-1}=\left[\dfrac{5}{+0}\right]=+\infty$.

б) Розглянемо односторонні границі функції $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}$ у точці $x_0=2$. Якщо $x\to2-0$, то $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty\Rightarrow3^{\frac{1}{x-2}}\to3^{-\infty}\Rightarrow\;3^{\frac{1}{x-2}}\to\dfrac{1}{3^{+\infty}}\Rightarrow$ $3^{\frac{1}{x-2}}\to\dfrac{1}{+\infty}\Rightarrow\;3^{\frac{1}{x-2}}\to0$. Отже, $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}=\dfrac{1}{2+0}=\dfrac{1}{2}$. При $x\to2+0$ маємо $\dfrac{1}{x-2}\to+\infty\Rightarrow3^{\frac{1}{x-2}}\to+\infty$, звідки дістаємо $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}=\left[\dfrac{1}{+\infty}\right]=0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3}{3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8x^2+1}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3-9x}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

2. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{1-5x}}{7x+x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x+2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x}}$.

3. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+1}{2-3x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^3-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2-x^3}{2x^4+3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+3x^2-1}{x^3-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x+1}{2x^3-x^2+8}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2}{\sqrt{x^8-2x+1}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+8}-\sqrt{x^2-4})$.

4. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg} 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{arctg} 5x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos 2x}$.

5. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x-3}{4}}$; в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{4}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{4/x}$; к) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{x}{3-x}}$.

6. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0, якщо

а) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, $x_0=3$; б) $f(x)=\dfrac{3}{x+5}$, $x_0=-5$;

в) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$, $x_0=2$; г) $f(x)=4^{\frac{1}{(x+3)^2}}$, $x_0=-3$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0=1$; е) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0=1$.

§ 14. Неперервність функції

Розглянемо функцію $y=f(x)$ з областю визначення $D(f)$.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 якщо границя функції в точці x_0 існує і дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Отже, функція є неперервною в точці, якщо виконуються такі умови:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0, тобто існує $f(x_0)$;

2) існує границя функції $f(x)$ в точці x_0;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Надамо приросту Δx аргументу так, щоб $x=x_0+\Delta x\in D(f)$. Тоді приріст функції дорівнює $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Розглянемо *означення неперервності мовою приростів*.

Функція $y=f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Отже, функція $y=f(x)$ є неперервною в точці x_0, якщо з умови $\Delta x=x-x_0\to 0$ випливає $\Delta y=f(x)-f(x_0)\to 0$ (див. рис. 14.1).

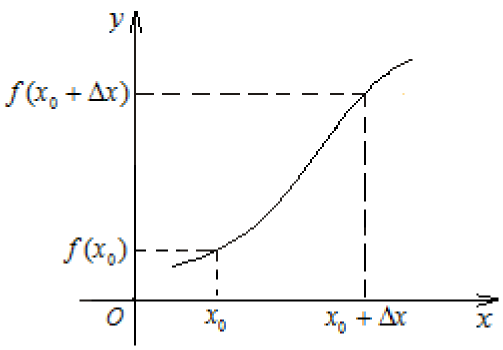


Рис. 14.1

Функція $y = f(x)$ є *неперервною в точці* x_0, якщо існують обидві *односторонні границі* функції в цій точці, які рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо функція неперервна в точці, то границю можна внести під знак функції, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ *неперервна на інтервалі* (a, b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функція неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b), причому в точці a неперервна справа і в точці b неперервна зліва, тобто $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Класифікація точок розриву

Точка x_0 називається *точкою розриву* функції $y = f(x)$, якщо функція не є неперервною в цій точці.

Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду*, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі (лівостороння і правостороння). У таких точках функція може мати усувний або стрибковий розрив.

Якщо існує скінченна границя функції в точці x_0 (односторонні границі рівні між собою), яка не дорівнює значенню функції в цій точці $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то маємо точку *усувного розриву*. Оскільки в такій точці існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, але $f(x_0) \neq A$, то цей розрив можна усунути. Для цього на основі функції $f\left(x\right)$ можна побудувати функцію $F\left(x\right)$, яка буде неперервною в точці x_0, а саме

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \neq x_0, \\ A & \text{при} \quad x = x_0. \end{cases}.$$

Якщо існують скінченні односторонні границі, які не рівні між собою $A_1 = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, то маємо точку *стрибкового розриву.* Стрибок функції визначають за формулою $h = |A_2 - A_1|$.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь в точці x_0 не існує або нескінченна, то ця точка називається *точкою розриву другого роду*.

Розглянуті випадки точок розриву зображено на рисунку (точка усувного розриву, точка стрибкового розриву, точка розриву II роду).

Для дослідження функції на неперервність в точці потрібно перевірити виконання таких умов: 1) чи визначена функція $y = f(x)$ в цій точці; 2) чи існує границя функції (рівні односторонні границі) в точці x_0; 3) чи виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то в точці x_0 функція $f(x)$ має розрив (див. рис. 14.2).

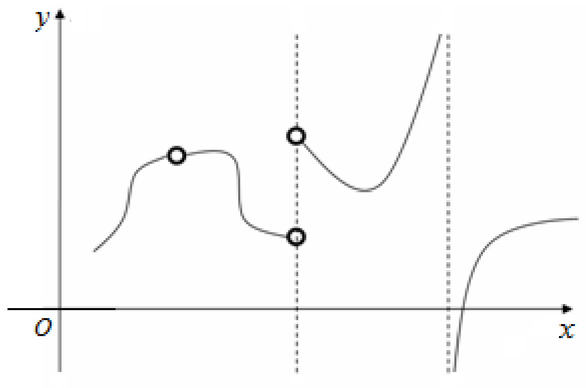


Рис. 14.2

Зауважимо, що всі елементарні функції є неперервними на своїй області визначення. При дослідженні функції на неперервність спочатку знаходять її область визначення.

Властивості неперервних функцій

Розглянемо *властивості неперервних функцій*.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці будуть неперервними їх сума $f(x)+g(x)$, різниця $f(x)-g(x)$, добуток $f(x)\cdot g(x)$ і частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$).

Теорема 2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці $x_0 \in X$, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складна функція $y = f\left(\varphi(x)\right)$ неперервна в точці $x_0 \in X$.

Розглянемо *властивості неперервних на відрізку функцій*.

Теорема 3 (перша теорема Вейерштрасса). Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ є обмеженою на цьому відрізку.

Теорема 4 (друга теорема Вейерштрасса). Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ досягає на ньому свого найменшого m і найбільшого M значень.

Теорема 5 (перша теорема Больцано – Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків $f(a) > 0,\ f(b) < 0$ (або $f(a) < 0,\ f(b) > 0$), то існує хоча б одна така точка $x_0 \in (a;b)$, в якій $f(x_0) = 0$ (див. рис. 14.3).

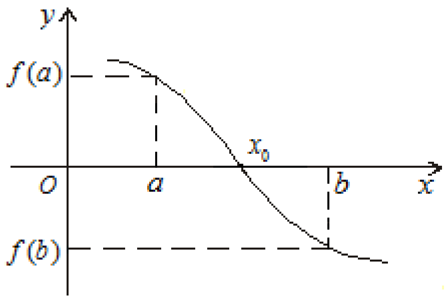


Рис. 14.3

Зокрема, теорему 5 застосовують для наближеного обчислення коренів рівнянь.

Теорема 6 (*друга теорема Больцано – Коші*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка набуває різних значень $A = f(a) \neq f(b) = B$. Тоді для будь-якого числа C, яке знаходяться між $f(a)$ і $f(b)$, існує хоча б одна точка $c \in (a,b)$ така, що $f(c) = C$.

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на ньому свого найменшого m і найбільшого M значень, то на цьому відрізку функція пробігає всі значення між m і M.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin x$.

Розв’язання. Область визначення функції $D(f) = R$. Візьмемо довільне $x \in D(f)$, надамо йому приросту Δx, тоді приріст функції Δy дорівнює

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо $\Delta x \to 0$, тоді Δx – нескінченно мала величина. За першою важливою границею, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \Delta x \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 0.$$

При обчисленні границі ми скористались тим, що добуток нескінченно малої величини Δx на обмежену величину $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ є нескінченно малою величиною. Таким чином, із умови $\Delta x \to 0$ випливає $\Delta y \to 0$. Тому функція $y = \sin x$ неперервна $\forall x \in R$, тобто на всій області визначення.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=\dfrac{x+2}{x-4}$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(f)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$. Знайдемо односторонні границі $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x+2}{x-4}=\left[\dfrac{6}{-0}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x+2}{x-4}=\left[\dfrac{6}{+0}\right]=+\infty$.

Оскільки в точці $x=4$ існують нескінченні односторонні границі функції, то це точка розриву II роду. Отже, функція неперервна у всіх точках області визначення, а в точці $x=4$ має розрив другого роду.

Приклад 3. Дослідити функцію $y=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ на неперервність.

Розв'язання. Задана функція є неперервною в усіх точках області визначення. Оскільки знаменник $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$ при $x=1$, $x=2$, то область визначення функції: $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$. Дослідимо функцію у точках $x=1$ і $x=2$, знайшовши односторонні границі в цих точках. Оскільки

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1-0}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty,$$

то точка $x=1$ є точкою розриву II роду.

Якщо $x=2$, то $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-1}=1$.

Отже, в цій точці функція має границю, але невизначена. Тому точка $x=2$ є точкою усувного розриву I роду.

Зокрема, цей розрив можна усунути, побудувавши функцію

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}, & x\neq 2,\\ 1, & x=2.\end{cases}$$

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}$.

Розв'язання. Розглянемо значення *x*, в яких знаменник перетворюється в нуль. Оскільки $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, то $x=-3$ і $x=1$ є точками розриву функції. Областю визначення функції є $D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;+\infty)$.

У точці $x=-3$ знаходимо односторонні границі

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-3-0}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to-3-0}\frac{x+5}{x+3}=\left[\frac{2}{-0}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to -3+0}\frac{x+5}{x+3}=\left[\frac{2}{+0}\right]=+\infty .$$

Оскільки в точці $x=-3$ існують нескінченні односторонні границі функції, то це точка розриву II роду.

У точці $x=1$ знаходимо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x+3}=1{,}5 .$$

Отже, в точці $x=1$ існує скінченна границя, але функція невизначена. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$, то $x=1$ є точкою розриву I роду (усувного).

Приклад 5. Дослідити на неперервність функції $y=7^{\frac{1}{2-x}}$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. У точці $x=2$ функція невизначена, тобто не виконується перша умова неперервності, тому в цій точці функція має розрив. Щоб визначити характер точки розриву, знайдемо односторонні границі функції в цій точці, дістанемо

$$\lim_{x\to 2-0}7^{\frac{1}{2-x}}=\left[7^{\frac{1}{+0}}\right]=\left[7^{+\infty}\right]=+\infty,\qquad \lim_{x\to 2+0}7^{\frac{1}{2-x}}=\left[7^{\frac{1}{-0}}\right]=\left[7^{-\infty}\right]=\left[\frac{1}{7^{+\infty}}\right]=0 .$$

Оскільки лівостороння границі функції нескінченна, то $x=2$ є точкою розриву другого роду.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ і з'ясувати характер точок розриву.

Розв'язання. Функція $f(x)$ визначена у всіх точках $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Розрив можливий тільки в точці $x=0$, тому знайдемо односторонні границі

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0,\qquad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=\infty.$$

Отже, функція $f(x)$ в точці $x=0$ має розрив другого роду.

Приклад 7. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ x, & x\geq 0.\end{cases}$.

Розв'язання. Областю визначення функції є $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Задана функція є неперервною в усіх точках, крім, можливо, точки $x=0$, оскільки в цій точці змінюється аналітичний вираз функції.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$, то в точці $x=0$ існують односторонні границі функції, не рівні між собою. Тому функція не є неперервною в точці $x=0$, причому ця точка є точкою стрибкового розриву I роду (стрибок $h=|0-(-1)|=1$). Графік функції зображено на рис. 14.4.

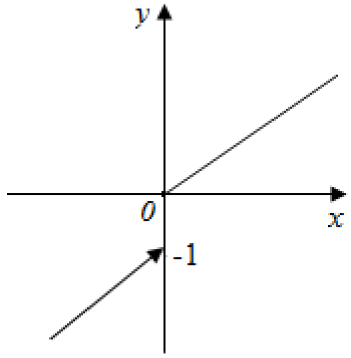


Рис. 14.4

Приклад 8. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік, якщо $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x\le 2, \\ 5-x, & x>2. \end{cases}$

Розв'язання. Функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжках $(-\infty,0)$, $(0,2)$ і $(2,+\infty)$, де вона задана неперервними елементарними функціями. Отже, розрив можливий тільки в точках $x=0$ і $x=2$.

Оскільки при $x=0$ маємо $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x-1)^2=1$, $f(0)=0^2=0$, то функція $f(x)$ в точці $x=0$ має розрив I роду (стрибковий). А при $x=2$ маємо $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)^2=1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(5-x)=3$, $f(2)=(2-1)^2=1$, тому $x=2$ теж є точкою розриву I роду (стрибкового). Зобразимо графік даної функції (див. рис. 14.5).

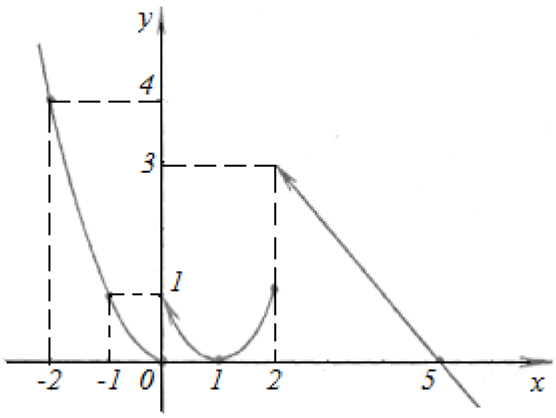


Рис. 14.5

Приклад 9. Показати, що рівняння $x^3-3x+1=0$ на відрізку $[1;2]$ має дійсний корінь, і знайти його значення з точністю до $0{,}1$.

Розв'язання. Оцінимо значення функції $f(x)=x^3-3x+1$ на кінцях заданого проміжку $f(1)<0$, $f(2)>0$. Оскільки на відрізку $[1;2]$ функція $f(x)=x^3-3x+1$ неперервна і на його кінцях набуває значень різних знаків, то за першою теоремою Больцано – Коші всередині цього проміжку існує хоча б одна точка, в якій функція перетворюється в нуль. Ця точка і буде дійсним коренем заданого рівняння. Для знаходження кореня із заданою точністю відрізок $[1;2]$ розділимо точками $1{,}1;\ \ 1{,}2;\ \ \ldots,\ \ 1{,}9$, і в кожній з них визначимо знак функції $f(x)=x^3-3x+1$. Дістанемо $f(1{,}1)<0$, $f(1{,}2)<0$, $f(1{,}3)<0$, $f(1{,}4)<0$, $f(1{,}5)<0$, $f(1{,}6)>0$, $f(1{,}7)>0$, $f(1{,}8)>0$, $f(1{,}9)>0$. Оскільки $f(1{,}5)<0$, а $f(1{,}6)>0$, то з точністю до $0{,}1$ дійсний корінь даного рівняння міститься між $1{,}5$ і $1{,}6$, тобто $1{,}5<x<1{,}6$.

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись означенням, довести неперервність функції в області визначення, якщо

а) $f(x)=3x^2+2x+1$;   б) $f(x)=\cos x$.

2. Дослідити функції на неперервність і визначити точки розриву

а) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$;   б) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-16}$;   в) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$;

г) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$;   д) $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{x^2-5x+4}$;   е) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$.

3. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}$.

4. Довести, що при $x=5$ функція $y=\dfrac{x}{5-x}$ має розрив.

5. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

6. Визначити характер розриву функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$.

7. Знайти точки розриву функції $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$.

8. Дослідити функції на неперервність і визначити точки розриву

а) $f(x)=5^{\frac{1}{x+3}}$;   б) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;   г) $f(x)=\dfrac{1}{1-4^{\frac{1}{x+1}}}$.

9. З'ясувати характер розриву функції $y=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}$ при $x=1$.

10. Знайти точки розриву функції $y=\frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$.

11. Дослідити функції на неперервність та побудувати їх графіки

а) $f\left(x\right)=\begin{cases} x-1, & \text{якщо } x<2, \\ 2-x, & \text{якщо } x\geq 2; \end{cases}$

б) $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x<0, \\ x^2, & \text{якщо } x\geq 0; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\leq 0, \\ \ln x, & \text{якщо } x>0; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{якщо } x<0, \\ \sin x, & \text{якщо } x\geq 0; \end{cases}$

д) $f\left(x\right)=\begin{cases} x+1 & \text{при } x\leq -1, \\ \left(x+1\right)^2 & \text{при } -1<x<1, \\ 4 & \text{при } x\geq 1; \end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x<0, \\ 2 & \text{при } x=0, \\ x+2 & \text{при } x>2; \end{cases}$

ж) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{якщо } x\leq -1, \\ 2x^2-1, & \text{якщо } -1<x<1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x\geq 1; \end{cases}$

з) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{якщо } x<0, \\ x^2+1, & \text{якщо } 0\leq x\leq 1, \\ x, & \text{якщо } x>1. \end{cases}$

12. Чи має рівняння $x^3+3x^2-2x-6=0$ хоча б один корінь на [0;2]?

Контрольні запитання

1. Опишіть, які операції можна виконувати над множинами.
2. Сформулюйте поняття комплексного числа та опишіть, які дії виконуються над комплексними числами.
3. Опишіть поняття функції та сформулюйте її властивості.
4. Дайте означення границі числової послідовності.
5. Сформулюйте означення границі функції та теореми про границі.
6. Наведіть першу і другу чудові границі та опишіть їх застосування.
7. Дайте означення нескінченно малих і нескінченно великих величин та сформулюйте їх властивості.
8. Як застосовують еквівалентність нескінченно малих при обчисленні границь?
9. Дайте означення неперервності функції. Як визначаються точки розриву?
10. Сформулюйте властивості неперервних функцій.

Розділ IV. Диференціальне числення функції однієї змінної

§ 15. Похідна функції. Основні правила та формули диференціювання

Нехай точка M рухається нерівномірно вздовж прямої. Відстань S цієї точки від початкового положення M_0 у будь-який момент часу відома і залежить від часу t, тобто $S=S(t)$. Знайдемо швидкість точки в момент часу t, коли точка знаходиться в положенні M_1. У момент часу $t+\Delta t$ точка знаходиться в положенні M_2, її відстань від початкового положення M_0 дорівнює $S(t+\Delta t)$ (див. рис. 15.1).

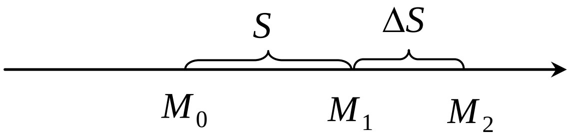


Рис. 15.1

За проміжок часу Δt відстань зміниться на величину ΔS, тобто $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$. Середня швидкість руху за проміжок часу Δt дорівнює $v_{сер}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Тоді *миттєва швидкість* точки в момент часу t дорівнює

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0} v_{сер}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Задача про миттєву швидкість – це одна із задач, які приводять до поняття похідної.

Розглянемо означення похідної функції. Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y=f(x)$ (див. рис. 15.2), причому значення аргументу x належить цьому відрізку. Надамо аргументу x приросту Δx так, щоб значення $x+\Delta x$ теж належало відрізку $[a;b]$. Значенню аргументу $x+\Delta x$ відповідає значення функції $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$. Розглянемо відношення $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$.

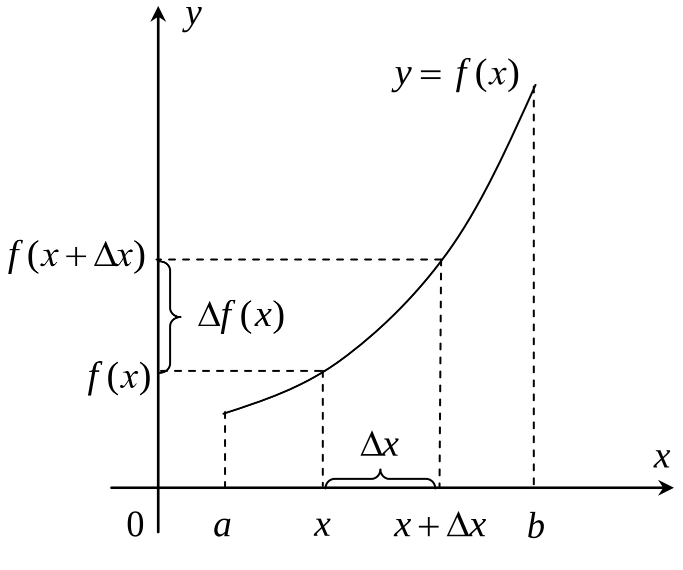


Рис. 15.2

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається скінченна границя відношення приросту функції $\Delta f(x)$ в цій точці до приросту аргументу Δx, якщо Δx прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x позначають $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ не існує або нескінченна, то похідна $f'(x)$ не існує.

Розглянемо *механічний та геометричний* та зміст похідної.

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і нерівномірно, то миттєва швидкість точки в момент часу t дорівнює похідній від пройденого шляху $S(t)$, тобто $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$ (*механічний зміст похідної*).

Взагалі, якщо функція $f(t)$ описує деякий процес, то $f'(t)$ є швидкістю зміни цього процесу в момент часу t.

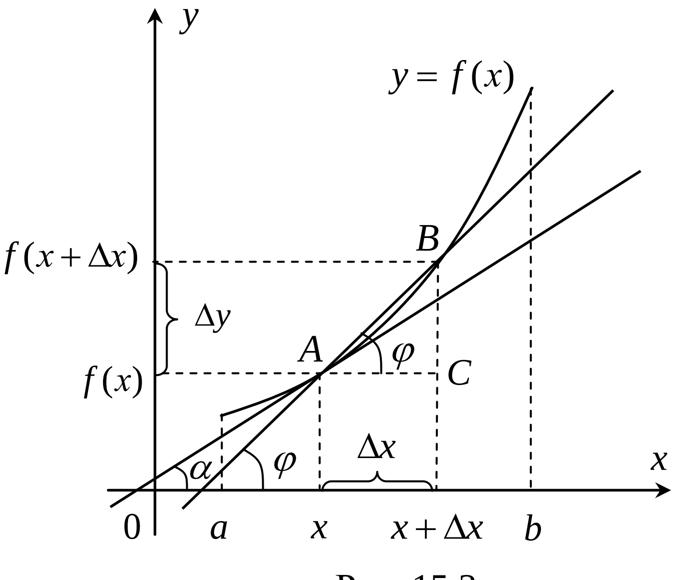


Рис. 15.3

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Розглянемо на кривій $y = f(x)$ точки $A(x; f(x))$, $B(x+\Delta x; f(x+\Delta x))$ і проведемо січну AB. Переміщуємо точку B вздовж кривої до точки A.

Дотичною до кривої $y = f(x)$ в точці A називається граничне положення січної AB, якщо точка B наближається вздовж кривої до точки A (див. рис. 15.3).

Позначимо через φ кут нахилу до осі Ox січної AB, через α – кут нахилу до осі Ox дотичної, яка проведена до кривої $y = f(x)$ в точці A. Із ΔABC маємо $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $\varphi \to \alpha$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отже, похідна $f'(x)$ функції в точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x; f(x))$ (*геометричний зміст похідної*).

Розглянемо рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці.

Нехай крива $y = f(x)$ має дотичну в точці $M(x_0; y_0)$, тобто функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Складемо рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці M.

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0; y_0)$ із заданим кутовим коефіцієнтом має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$. З геометричного змісту похідної функції в точці випливає $k = f'(x_0)$, тому рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Оскільки нормаль перпендикулярна до дотичної в точці $(x_0; y_0)$, то кутовий коефіцієнт нормалі до кривої дорівнює $k_н = -\frac{1}{k_д} = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Отже, рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною* в точці x_0, якщо вона має похідну в цій точці. Розглянемо зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції в точці.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Обернене твердження невірне, тобто з неперервності функції в точці не випливає її диференційованість. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна, але недиференційовна в точці $x_0 = 0$.

Основні правила та формули диференціювання функцій

Для диференціювання (знаходження похідної) функцій використовують правила диференціювання і формули диференціювання (таблицю похідних). Розглянемо функції $u = u(x),\ v = v(x)$.

Розглянемо *правила диференціювання* функцій.

1. *Похідна суми* функцій *u* і *v*: $(u + v)' = u' + v'$.

2. *Похідна добутку* функцій *u* і *v*: $(uv)' = u'v + uv'$.

3. *Сталий множник* можна виносити за знак похідної: $(Cv)' = Cv'$.

4. *Похідна частки* функцій *u* і *v*: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Зокрема, $\left(\frac{u(x)}{C}\right)' = \left(\frac{1}{C}u(x)\right)' = \frac{1}{C}u'(x)$, якщо $C = const$.

5. *Похідна від складної функції*. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u в точці $u = \varphi(x)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну точці x, причому $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

6. Якщо функція $y = f(x)$ є строго монотонною на $(a;b)$ і має $f'(x) \neq 0$ в довільній точці $x \in (a;b)$, то *обернена функція* $x = \varphi(y)$ теж має похідну, яка визначається рівністю $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ або $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Таблиця похідних

1. $c' = 0$ (c – стала)

2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R$

2.1. $x' = 1$

2.2. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

2.3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

3.1. $\left(e^x\right)' = e^x$

4. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

4.1. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

7. $\left(\mathrm{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8. $\left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $\left(\mathrm{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $\left(\mathrm{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Диференціювання неявно та параметрично заданих функцій. Логарифмічна похідна

Нехай функція $y = y(x)$ задана в неявному вигляді, тобто рівнянням $F(x, y) = 0$. Для знаходження її похідної потрібно продиференціювати за змінною x обидві частини цього рівняння. Одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Якщо функція $y=f(x)$ задана параметрично $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ то її похідну обчислюють як похідну складної функції $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, тобто

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

У випадках, коли функція є добутком або часткою складних степеневих виразів, використовують *логарифмічну похідну*. Спочатку функцію логарифмують, а потім диференціюють вираз $\ln y$. Оскільки $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, то $y' = y \cdot (\ln y)'$.

Зокрема, логарифмічне диференціювання застосовують при знаходженні похідної степенево-показникової функції $y=u^v$, де $u=u(x),\ v=v(x)$. Оскільки $\ln y = \ln u^v = v \cdot \ln u$, то після диференціювання обох частин рівності дістанемо $\dfrac{1}{y}y' = v'\ln u + \dfrac{1}{u}u'v$, звідки маємо

$$y' = y\left(v'\ln u + \frac{u'}{u}v\right) = u^v\left(v'\ln u + \frac{u'}{u}v\right).$$

Зазначимо, що похідну від степенево-показникової функції $y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$ можна знайти іншим способом. Продиференціювавши спочатку як показникову, а потім як степеневу функцію, дістанемо $(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для функції $y=x^2$ знайти похідну за означенням в точці x=3.

Розв'язання. Надамо аргументу x приросту Δx, тоді приріст функції

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Розглянемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$. Тоді похідна функції в точці x=3 дорівнює $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Розв'язання. За правилами диференціювання маємо

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

Користуючись таблицею похідних, дістаємо

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 2^x + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Скористаємось правилом похідної суми і таблицею похідних, дістаємо

$$y' = \left(2^x\right)' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' - \left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)' = 2^x \ln 2 + \left(x^{-2}\right)' - \left(4x^{-1/2}\right)' =$$

$$= 2^x \ln 2 - 2x^{-3} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = 2^x \ln 2 - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x^3}}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = x^2 \cos x$.

Розв'язання. Скориставшись правилом похідної добутку і таблицею похідних, дістанемо

$$y' = \left(x^2 \cos x\right)' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2}{2 - x}$.

Розв'язання. За правилом диференціювання частки маємо

$$y' = \left(\frac{x^2}{2-x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)' \cdot (2-x) - x^2 \cdot (2-x)'}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = (2x^3 + 4)^6$.

Розв'язання. Позначимо $t = 2x^3 + 4$, тоді $y = t^6$. За правилом диференціювання складної функції маємо $y' = y'_t \cdot t'_x$, тому

$$y' = 6t^5 \cdot (2x^3 + 4)' = 6(2x^3 + 4)^5 \cdot 6x^2 = 36x^2 (2x^3 + 4)^5.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \operatorname{tg}^2 x$.

Розв'язання. Скориставшись правилом похідної складної функції, дістанемо

$$y' = \left(\operatorname{tg}^2 x\right)' = 2\operatorname{tg} x \left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}.$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = \sin(3x + 2)$.

Розв'язання. За правилом диференціювання складної функції маємо

$$y' = (\sin(3x+2))' = \cos(3x+2) \cdot (3x+2)' = 3\cos(3x+2).$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = \mathrm{ctg}\,(\ln x)$.

Розв'язання. Скориставшись правилом похідної складної функції, дістаємо

$$y' = \left(\mathrm{ctg}(\ln x)\right)' = \frac{-1}{\sin^2(\ln x)} \cdot (\ln x)' = \frac{-1}{\sin^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{x \cdot \sin^2(\ln x)};$$

Приклад 10. Знайти похідну функції $y = \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)$.

Розв'язання. а правилом диференціювання складної функції маємо

$$y' = \left(\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\sin\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2}.$$

Приклад 11. Обчислити похідну функції $y = \left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^5$.

Розв'язання. Застосуємо правила диференціювання складної функції та частки, дістанемо

$$\left(\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^5\right)' = 5\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{(1+2x)' \cdot (x-1) - (1+2x)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= 5\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{2\cdot(x-1)-(1+2x)\cdot 1}{(x-1)^2} = 5\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{-3}{(x-1)^2} = -\frac{15(1+2x)^4}{(x-1)^6}.$$

Приклад 12. Знайти похідну функції $y = 5^{1-x^2} \cdot \arccos x^3$.

Розв'язання. Дана функція є добутком двох складних функцій. За правилами та формулами диференціювання дістанемо

$$y' = \left(5^{1-x^2}\right)' \arccos x^3 + 5^{1-x^2}\left(\arccos x^3\right)' = 5^{1-x^2}\ln 5 \cdot (-2x) \cdot \arccos x^3 +$$

$$+5^{1-x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\right)\cdot 3x^2 = -5^{1-x^2}\left(2x\ln 5 \arccos x^3 + \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\right).$$

Приклад 13. Знайти похідну функції $y = \frac{\mathrm{arctg}^2\, x}{e^{3x+x^3}}$.

Розв'язання. За правилами та формулами диференціювання маємо

$$y' = \left(\frac{\mathrm{arctg}^2\, x}{e^{3x+x^3}}\right)' = \frac{\left(\mathrm{arctg}^2\, x\right)' \cdot e^{3x+x^3} - \mathrm{arctg}^2\, x \cdot \left(e^{3x+x^3}\right)'}{\left(e^{3x+x^3}\right)^2} =$$

$$=\frac{2\operatorname{arctg}x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot e^{3x+x^3}-\operatorname{arctg}^2 x\cdot e^{3x+x^3}\left(3+3x^2\right)}{\left(e^{3x+x^3}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{3x+x^3}\operatorname{arctg}x\left(\frac{2}{1+x^2}-3(1+x^2)\operatorname{arctg}x\right)}{\left(e^{3x+x^3}\right)^2}=\frac{\operatorname{arctg}x\left(2-3(1+x^2)^2\operatorname{arctg}x\right)}{(1+x^2)e^{3x+x^3}}.$$

Приклад 14. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=x^2-2x+3$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

Розв'язання. Знайдемо значення функції $y=x^2-2x+3$ в точці $x_0=2$

$$f\left(x_0\right)=f\left(2\right)=2^2-2\cdot 2+3=3.$$

Оскільки похідна функції: $f'\left(x\right)=\left(x^2-2x+3\right)'=2x-2$, то

$$f'\left(x_0\right)=f'\left(2\right)=2\cdot 2-2=2.$$

Підставивши значення $f\left(x_0\right)$ і $f'\left(x_0\right)$ у рівняння дотичної $y-f(x_0)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, дістанемо $y-3=2(x-2)\Rightarrow y=2x-1$.

Аналогічно підставимо значення $f\left(x_0\right)$ і $f'\left(x_0\right)$ у рівняння нормалі $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)$. Маємо $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+4$.

Приклад 15. Нехай $s=\frac{1}{2}gt^2$ – рівняння вільного руху тіла, g – прискорення вільного падіння. Знайти миттєву швидкість тіла в момент часу t=2с.

Розв'язання. Враховуючи фізичний зміст похідної, маємо

$$v=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt.$$

Зокрема, при t=2, дістаємо $v(2)=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6$ м/с.

Приклад 16. Знайти похідну неявно заданої функції $x^2+\sin y-e^{xy}=0$.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x. Дістанемо

$$2x+\cos y\cdot y'-e^{xy}(y+xy')=0,\ 2x+\cos\ y\cdot y'-ye^{xy}-xy'e^{xy}=0,$$

$$y'(\cos y-xe^{xy})=ye^{xy}-2x,\qquad y'=\frac{ye^{xy}-2x}{\cos y-xe^{xy}}.$$

Приклад 17. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = t^3 + 2t^2 - 1, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$

Розв'язання. Скориставшись формулою для диференціювання параметрично заданої функції, дістанемо

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2+t+1)'}{(t^3+2t^2-1)'} = \frac{2t+1}{3t^2+4t}.$$

Приклад 18. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо похідну y'_x від параметрично заданої функції

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Приклад 19. Знайти похідну y' для функції $y = (\sin x)^x$.

Розв'язання. Логарифмуємо функцію та диференціюємо одержаний вираз $\ln y = \ln(\sin x)^x = x\ln(\sin x)$, тоді $(\ln y)' = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}$. Оскільки $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, то $y' = y(\ln y)' = (\sin x)^x(\ln(\sin x) + x\operatorname{ctg} x)$.

Приклад 20. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}$ за допомогою логарифмічного диференціювання.

Розв'язання. Маємо степенево-показникову функцію виду $y = (u(x))^{v(x)}$. Прологарифмуємо її та знайдемо $\ln y$, після чого визначимо похідну $(\ln y)'$. Оскільки $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, то похідна функції дорівнює $y' = y \cdot (\ln y)'$.

Для даної функції маємо

$$\ln y = \ln\left((\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}\right) = \sin 4x \cdot \ln \operatorname{tg}3x,$$

$$(\ln y)' = 4\cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg}3x + \sin 4x \cdot \frac{1}{tg3x} \cdot \frac{3}{\cos^2 3x} = 4\cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\operatorname{tg}3x \cdot \cos^2 3x},$$

$$y' = y \cdot (\ln y)' = (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4\cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\operatorname{tg}3x \cdot \cos^2 3x}\right).$$

Похідну від $y = (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}$ можна знайти іншим способом, продиференціювавши спочатку як показникову, а потім як степеневу функцію

$$\left((\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}\right)' = (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}\ln(\operatorname{tg}3x) \cdot 4\cos 4x + \sin 4x(\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x - 1} \cdot \frac{3}{\cos^2 3x} =$$

$$= (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4\cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\operatorname{tg}3x \cdot \cos^2 3x}\right).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідну функції

а) $y=3x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{x}{2}$; б) $y=x^2-\frac{4}{x^3}+\sqrt{x}$;

в) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}-3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{2}$; г) $y=2x+\frac{6}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x\sqrt{x}}$;

д) $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$; е) $y=x^3\sin x$;

ж) $y=(x^2+1)\mathrm{arctg}x$; з) $y=3^x\mathrm{tg}x$;

к) $y=\frac{5x}{2-x^2}$; л) $y=\frac{x^2}{2-x}$;

м) $y=\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$; н) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

п) $y=\frac{e^x}{tgx+1}$; р) $y=\frac{3^x}{\ln x-2}$;

с) $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$; т) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

2. Знайти похідну функції

а) $y=(2+3x)^4$; б) $y=(x^3-4x)^6$; в) $y=\sqrt{x^3-3x^2+1}$;

г) $y=\cos(4x-2)$; д) $y=\sin^3 x$; е) $y=\sin\sqrt[5]{x}$;

ж) $y=\ln(1-x^5)$; з) $y=\ln^5 x$; к) $y=\ln\cos x$;

л) $y=\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}$; м) $y=\sqrt{\mathrm{arctg}\,x}$; н) $y=\arcsin\frac{1}{x}$;

п) $y=e^{-2x+3}$; р) $y=3^{\sqrt{x}+1}$; с) $y=4^{\mathrm{tg}x}$.

3. Знайти похідну функції

а) $y=\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}$; б) $y=\sin^5(\ln x)$; в) $y=\ln\sin\sqrt{x}$;

г) $y=\mathrm{tg}^2\sqrt{1+x}$; д) $y=\ln\mathrm{tg}\frac{2x+1}{4}$; е) $y=\sin 2x\cos\frac{x}{2}$;

ж) $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$; з) $y=\frac{2\mathrm{arctg}x}{\sqrt{x^2+1}}$; к) $y=\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

4. Знайти значення похідної функції $f(x)$ в точці x_0

а) $f(x)=2^{\sin x},\ x_0=\pi$; б) $f(x)=\arcsin 3x,\ x_0=\frac{1}{5}$;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}, x_0=0$; г) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+1}, x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

5. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої, заданої функцією, в точці з абсцисою x_0

а) $y=x^2-2x+3,\ x_0=2$; б) $y=x^2-3x+1,\ x_0=2$;

в) $y=x^3-4x^2+8x-6,\ x_0=1$; г) $y=\dfrac{8}{4+x^2},\ x_0=2$.

6. Визначити, в якій точці дотична до кривої $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+8x+4$ паралельна прямій $2x+2y-5=0$.

7. Визначити, в якій точці дотична до кривої $y=4x^2-6x+3$ перпендикулярна прямій $y=\dfrac{x}{4}$.

8. Тіло рухається прямолінійно за законом $s=2t^2-t+4$. Знайти швидкість руху тіла у момент часу $t_0=3$.

9. Знайти швидкість руху тіла у момент часу $t=2$, якщо закон руху задано формулою $s=4t^2-3$.

10. Знайти похідні від неявно заданої функції $y=f(x)$

а) $x^3+x^2y+y^2=8$; б) $x^5-3xy^2=3$;

в) $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$; г) $tg(x+y)=xy$;

д) $x+y=e^{x-y}$; е) $\ln y+\dfrac{x}{y}=2$.

11. Знайти похідну функції логарифмічним диференціюванням

а) $y=(arctgx)^{2x}$; б) $y=\left(\cos 2x\right)^{tgx}$;

в) $y=\left(\sin 3x\right)^{\cos 5x}$; г) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

д) $y=x\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$; е) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

12. Знайти похідну y'_x параметрично заданої функції $y=f(x)$, якщо

а) $\begin{cases} x=3t+t^2 \\ y=4t-t^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t-1} \\ y=\sqrt[3]{t+1} \end{cases}$; в) $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$; д) $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$; е) $\begin{cases} x=t+\ln\sin t \\ y=t+\ln\cos t \end{cases}$.

§ 16. Диференціал функції. Похідні та диференціали вищих порядків. Правило Лопіталя

Диференціал функції та його застосування

Нехай функція $y = f(x)$ в точці x має похідну $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. За теоремою про зв'язок границі функції з нескінченно малою величиною маємо $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$, де α – нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$. Тоді приріст функції запишемо у вигляді $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$, де вираз $f'(x)\Delta x$ – головна частина приросту функції $y = f(x)$ в точці x.

Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x називається головна лінійна частина приросту функції в цій точці, тобто $df(x) = f'(x)dx$ або $dy = y'dx$, де $dx = \Delta x$. Розглянемо геометричний зміст диференціала.

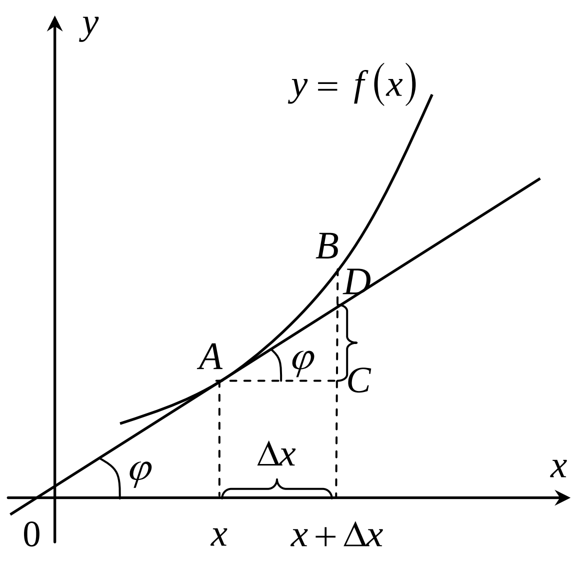


Рис. 16.1

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано неперервну функцію $y = f(x)$, диференційовну в точці x. Візьмемо на кривій $y = f(x)$ точку $A(x; f(x))$. Проведемо дотичну до кривої в точці A і позначимо через φ кут нахилу цієї дотичної до осі Ox. Надамо аргументу x приросту Δx так, щоб значення $x + \Delta x$ теж належало відрізку $[a;b]$. Тоді значенню аргументу $x + \Delta x$ відповідає на кривій точка $B(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$ (див. рис. 16.1).

З трикутника ΔADC маємо $DC = \Delta x \operatorname{tg}\varphi = y'\Delta x$. Оскільки $dy = y'dx$, то $DC = dy$. Отже, диференціал функції $y = f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x; f(x))$ (*геометричний зміст диференціала*).

Диференціал має властивість *інваріантності* (незмінності) *форми*. Знайдемо диференціал складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$. Для функції $y = f(\varphi(x))$ маємо $dy = y'_x dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = y'_u \cdot du$. Отже, диференціал зберігає форму для будь-якого аргументу, залежного чи незалежного.

Розглянемо *застосування диференціала в наближених обчисленнях*. Якщо величина Δx досить мала, то $\Delta f(x) \approx df(x)$. Розглянемо приріст функції

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в точці x_0. Оскільки $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, звідки дістаємо формулу для наближених обчислень за допомогою диференціала

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x похідну $f'(x)$. Якщо функція $f'(x)$ диференційовна в точці x, то її похідна називається *похідною другого порядку* функції $y = f(x)$ і позначається $f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$. Отже, $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x похідну другого порядку (другу похідну) то вона є двічі диференційовною у цій точці. Аналогічно розглядають похідну третього порядку як похідну від другої похідної $f'''(x) = \left(f''(x)\right)', \ldots$

Похідною n*-го порядку* функції $y = f(x)$ у точці x називається похідна (якщо вона існує) від її $(n-1)$-ї похідної в цій точці, тобто $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, яку позначають $f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}$.

Розглянемо механічний зміст другої похідної . Нехай $S(t)$ – шлях, який проходить матеріальна точка за час t, рухаючись прямолінійно і нерівномірно. Миттєва швидкість точки в момент часу t дорівнює $v(t) = S'(t)$. За проміжок часу Δt швидкість точки набуде приросту Δv. Середнє прискорення точки за час Δt дорівнює $a_{\text{сер}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, тоді миттєве прискорення точки $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, звідки $a(t) = v'(t) = S''(t)$.

Отже, прискорення матеріальної точки, яка рухається прямолінійно і нерівномірно, в момент часу t дорівнює другій похідній від шляху за часом (*механічний зміст другої похідної*).

Розглянемо другу похідну параметрично заданої функції $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Нагадаємо, що її перша похідна обчислюється за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Знайдемо другу похідну як похідну складної функції, $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left(y'_x\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$, тобто

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

Розглянемо диференціали вищих порядків. Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x, тоді її диференціал $dy = y'dx$ також є функцією. Диференціал від диференціала функції $y = f(x)$ в точці x називають *диференціалом другого порядку* функції і позначають $d^2y = y''dx^2$. Дійсно,

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)' dx = y''dx^2.$$

Аналогічно розглядають диференціал третього порядку $d^3y = y'''dx^3$,... Тоді *диференціал n-го порядку* має вигляд $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Зазначимо, що всі наведені формули для диференціалів вищих порядків мають місце тільки тоді, коли x – незалежна змінна.

Основні теореми диференціального числення

Розглянемо кілька важливих теорем диференціального числення, які мають широке застосування.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Якщо на кінцях цього відрізка функція набуває однакових значень, тобто $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $x_0 \in (a;b)$, в якій $f'(x_0) = 0$.

Розглянемо *геометричний зміст* теореми Ролля. Якщо неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $y = f(x)$, яка має в кожній точці дотичну, набуває на кінцях відрізка рівних значень, то на кривій $y = f(x)$ знайдеться хоча б одна точка з абсцисою $x_0 \in (a;b)$, в якій дотична паралельна осі *Ox* (див. рис. 16.2).

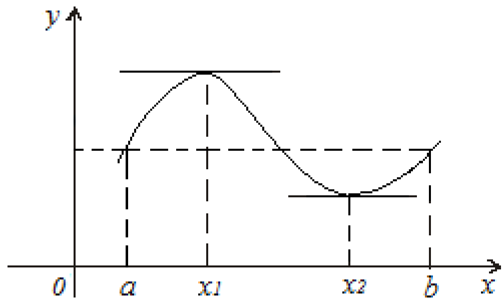


Рис. 16.2

Теорема Лагранжа (*теорема про скінченні прирости функції*). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то знайдеться хоча б одна точка $x_0 \in (a;b)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (16.1)$$

Запишемо цю рівність в іншому вигляді

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Остання формула називається *формулою Лагранжа або формулою скінченних приростів,* оскільки $b-a$ – це приріст аргументу на відрізку $[a,b]$, а $f(b)-f(a)$ – приріст функції на цьому відрізку.

Розглянемо геометричний зміст теореми Лагранжа. Очевидно, що величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є тангенсом кута α нахилу хорди, що проходить через точки *A* і *B* графіка функції $y=f(x)$ з абсцисами *a* і *b*. З іншого боку, $f'(x_0)$ – тангенс кута нахилу дотичної до кривої у точці *C* з абсцисою x_0 (див. рис. 16.3).

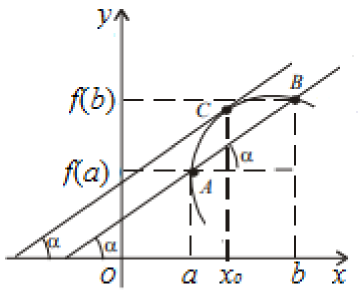


Рис. 16.3

Геометричний зміст теореми Лагранжа: якщо для всіх точок кривої $y=f(x)$ існує дотична, то на цій кривій знайдеться точка з абсцисою x_0, в якій дотична паралельна хорді *AB*, яка сполучає точки *A* і *B*.

Теорема Коші. Нехай функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ та диференційовні на інтервалі $(a;b)$, причому $\varphi'(x)\neq 0$ для $x\in(a;b)$. Тоді знайдеться хоча б одна точка $x_0\in(a;b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}. \qquad (16.2)$$

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа, оскільки формула (16.1) випливає із формули (16.2) при $\varphi(x)=x$.

Наведені теореми мають велике теоретичне та прикладне значення. Зокрема, з теореми Лагранжа випливає наступне твердження.

Наслідок. Якщо похідна функції на деякому проміжку дорівнює нулю, то функція є сталою на цьому проміжку.

Правило Лопіталя

Розглянемо правило Лопіталя, яке дає змогу спрощувати обчислення границь. Сформулюємо це правило у вигляді двох теорем.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точки x_0, крім можливо самої точки x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ і $g'(x)\neq 0$ в околі точки x_0. Якщо існує границя відношення похідних функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна чи нескінченна), то існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точки x_0, крім можливо самої точки x_0, і виконуються умови: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ і $g'(x)\neq 0$ в околі точки x_0. Якщо існує границя відношення похідних функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна чи нескінченна), то існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження 1. Правило Лопіталя виконується і при $x\to\infty$, а також при $x\to x_0-0,\ x\to x_0+0$.

Зауваження 2. У випадку, коли границя відношення похідних знову є невизначеністю $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів, якщо при цьому похідні функцій $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умови наведених теорем.

Зауваження 3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує, то це не означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ також не існує. Просто в цьому випадку правило Лопіталя не дає змогу знайти границю.

Розглянуті теореми дозволяють розкривати невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Правило Лопіталя застосовують також для розкриття невизначеностей $[0\cdot\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[\infty-\infty]$, $[1^\infty]$, які можуть бути зведені до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ за допомогою алгебраїчних перетворень.

Розглянемо невизначеність $[0\cdot\infty]$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}uv=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u}{\frac{1}{v}}$ або $\lim\limits_{x\to x_0}uv=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{v}{\frac{1}{u}}$, тоді дістаємо $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Розглянемо *невизначеності виду* $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$. Для функції $u(x)^{v(x)}$ при $x\to x_0$ (x_0 – скінченне або нескінченне) можливі такі випадки

1) якщо $u\to 0,\ v\to 0$, то маємо невизначеність виду $[0^0]$;

2) якщо $u\to\infty,\ v\to 0$, то дістанемо невизначеність виду $[\infty^0]$;

3) якщо $u \to 1$, $v \to \infty$, то маємо невизначеність виду $\left[1^{\infty}\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності $[0 \cdot \infty]$. Позначимо дану функцію через y, тобто $y = u^{v}$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y = v \ln u \ (u > 0)$.

Легко перевірити, що в усіх трьох випадках добуток $v \ln u$ при $x \to x_0$ буде невизначеністю виду $[0 \cdot \infty]$. Для розкриття цієї невизначеності знайдемо границю $\lim\limits_{x \to x_0} \ln y = p$ (p – скінченне або нескінченне), звідки маємо

$$\lim_{x \to x_0} y = \lim_{x \to x_0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \ln y} = e^{p}.$$

Розглянемо *невизначеність виду* $[\infty - \infty]$. Якщо функції $u(x) \to \infty$, $v(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то для різниці $u - v$ маємо невизначеність $[\infty - \infty]$, яка за допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = x^3 + 5x^2 - 1$.

Розв’язання. Знайдемо диференціал функції за формулою $dy = y'dx$, тобто

$$dy = \left(x^3 + 5x^2 - 1\right)' \cdot dx = \left(3x^2 + 10x\right)dx.$$

Приклад 2. Знайти диференціал функції $y = \dfrac{x-2}{x+4}$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо похідну функції

$$y' = \left(\frac{x-2}{x+4}\right)' = \frac{(x-2)' \cdot (x+4) - (x-2) \cdot (x+4)'}{(x+4)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x+4) - (x-2) \cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{x + 4 - x + 2}{(x+4)^2} = \frac{6}{(x+4)^2}.$$

Звідси випливає, що $dy = \dfrac{6}{(x+4)^2} dx$.

Приклад 3. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Розв’язання. Для наближеного обчислення $\operatorname{arctg} 1{,}05$ використаємо попередню формулу, в якій $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}05$. Оскільки $f(x_0) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$, то

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{0{,}05}{2} \approx 0{,}785 + 0{,}025 = 0{,}811.$$

Приклад 4. Обчислити наближене значення $\sin(31^{\circ})$.

Розв'язання. обчислення наближеного значення функції $f(x)=\sin x$ використаємо наближену рівність

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Оскільки $x_0=30^{\circ}=\dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x=1^{\circ}=\dfrac{\pi}{180}$, $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$, то

$$\sin(31^{\circ})=\sin(30^{\circ}+1^{\circ})=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx$$

$$\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0,5+0,866\cdot 0,0175\approx 0,515.$$

Приклад 5. Знайти похідну другого порядку для функції $y=x\sqrt{x}$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що $x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$. Тоді

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},\quad y''=\left(y'\right)'=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

Приклад 6. Знайти похідну n-го порядку для функції $y=e^{kx}$.

Розв'язання. Знаходимо кілька перших похідних і помічаємо закономірність. Отже,

$$y'=\left(e^{kx}\right)'=ke^{kx},\ y''=\left(ke^{kx}\right)'=k^2e^{kx},\quad y'''=\left(k^2e^{kx}\right)'=k^3e^{kx},\ldots,\quad y^{(n)}=k^ne^{kx}.$$

Приклад 7. Знайти другу похідну y''_x для функції $\begin{cases}x=t^3+3t,\\ y=3t^5+5t^3.\end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо першу похідну параметрично заданої функції за формулою $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. Маємо

$$x'_t=3t^2+3=3\left(t^2+1\right),\ y'_t=15t^2\left(t^2+1\right),\quad y'_x=\frac{15t^2\left(t^2+1\right)}{3\left(t^2+1\right)}=5t^2.$$

Тоді друга похідна функції визначається так $y''_x=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. Отже,

$$y''_x=\frac{(5t^2)'}{3\left(t^2+1\right)}=\frac{10t}{3\left(t^2+1\right)}.$$

Приклад 8. Знайти y''_{xx} якщо $\begin{cases}x=\sin 2t,\\ y=t^2+1.\end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо першу похідну

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t^2+1)'}{(\sin 2t)'}=\frac{2t}{2\cos 2t}=\frac{t}{\cos 2t},$$

а потім другу похідну

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\dfrac{t}{\cos 2t}\right)'_t}{(\sin 2t)'}=\frac{\dfrac{\cos 2t+2t\sin 2t}{\cos^2 2t}}{2\cos 2t}=\frac{\cos 2t+2t\sin 2t}{2\cos^3 2t}=\frac{1+2t\cdot \mathrm{tg}2t}{2\cos^2 2t}.$$

Приклад 9. Знайти диференціал другого порядку для $y=\mathrm{arctg}x$.

Розв'язання. Знайдемо диференціал другого порядку за формулою $d^2y=y''dx^2$. Оскільки $y'=\left(\mathrm{arctg}\,x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, то

$$y''=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\left((1+x^2)^{-1}\right)'=-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$d^2y=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx^2.$$

Приклад 10. За допомогою правила Лопіталя обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\ln(2x-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3^x+1}$.

Розв'язання. а) Оскільки вирази в чисельнику і знаменнику дробу $\dfrac{x-2}{\ln(2x-3)}$ прямують до 0 при $x\to 2$, то маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скористаємось правилом Лопіталя, перейдемо під знаком границі до похідних функцій в чисельнику і знаменнику. Маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\ln(2x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)'}{(\ln(2x-3))'}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\dfrac{2}{2x-3}}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{2}=\frac{1}{2}.$$

б) Маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для обчислення границі $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3^x+1}$ застосуємо правило Лопіталя двічі. Дістанемо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3^x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3^x\ln 3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3^x\ln^2 3}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

Приклад 11. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}\cdot$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

Розв'язання. а) Чисельник і знаменник дробу $\dfrac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}$ прямують до нуля при $x\to 1$, маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скористаємось правилом

Лопіталя (теоремою 1), тобто знайдемо відношення похідних заданих функцій

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

б) Використаємо правило Лопіталя (теорему 2) і першу важливу границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{\sin x}{x}}{2x\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}=2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ \ln\ x\right)$.

Розв'язання. При обчисленні границі маємо невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, дістанемо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ і застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ \ln\ x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ x}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\ x\right)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\ x^3\ =0.$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^x$.

Розв'язання. При обчисленні границі маємо невизначеністю виду $\left[\infty^0\right]$. Перед застосуванням правила Лопіталя прологарифмуємо задану функцію. Оскільки $\ln\left((\operatorname{ctg}x)^x\right)=x\ln\operatorname{ctg}x$, то $\left(\operatorname{ctg}x\right)^x=e^{x\ln ctgx}$, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln ctgx}$. Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\ln\left((\operatorname{ctg}x)^x\right)=\lim_{x\to 0}x\ln\operatorname{ctg}x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\dfrac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{0}{1}\cdot 1=0,$$

звідки дістаємо $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^x=e^0=1.$

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{3x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$. Позначимо функцію, яка стоїть під знаком границі, через $y=\left(\sin x\right)^{3x}$. Прологарифмувавши, дістанемо

$$\ln y = \ln\left((\sin x)^{3x}\right) = 3x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{(3x)^{-1}}.$$

Обчислимо границю від логарифма даної функції, застосувавши правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{(3x)^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-3x^{-2}\right)} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = 0.$$

Тоді границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{3x} = e^0 = 1$.

Приклад 15. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. При $x \to 1$ маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$. Прологарифмуємо функцію та знайдемо границю

$$y = x^{\frac{1}{x-1}}, \quad \ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1}\cdot\ln x = \frac{\ln x}{x-1},$$

$$\lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1,$$

звідки маємо

$$\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e.$$

Приклад 16. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\ln x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$. Логарифмуючи функцію $y = \left(1+x\right)^{\ln x}$ та використовуючи правило Лопіталя тричі, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\ln\left(\left(1+x\right)^{\ln x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln\left(1+x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{x+1} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\ln x} = e^0 = 1$.

Приклад 17. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left[\infty - \infty\right]$. Зведемо дроби до спільного знаменника і дістанемо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої двічі застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 18. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Звівши до спільного знаменника, дістаємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої двічі застосовуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти диференціал функції $y=f(x)$

а) $y=\frac{x^2+2x}{x-3}$; б) $y=\frac{(x-1)^2}{x+4}$; в) $y=\ln\frac{x-6}{x+6}$;

г) $y=\sin\frac{1}{x^2}$; д) $y=\ln\sqrt{\cos x}$; е) $y=x^3e^{3x+2}$.

2. Обчислити наближено значення функції:

а) $\ln 1{,}02$; б) $\sqrt{27}$; в) $\arcsin 0{,}51$;

г) $\cos 59^0$; д) $\sqrt[4]{17}$; е) $\mathrm{arctg}\, 0{,}98$.

3. Знайти похідну другого порядку для функції $y=f(x)$

а) $y=\sin x^2$; б) $y=x^2\ln x$; в) $y=\cos^2 x$;

г) $y=\frac{x}{x+1}$; д) $y=\frac{1}{1+x^3}$; е) $y=\sqrt{1+x^2}$.

4. Знайти похідну вказаного порядку для функції $y=f(x)$

а) $y=x^2+5x-6$, $y'''-?$ б) $y=\sqrt[3]{x}$, $y'''-?$

в) $y=\frac{1-x}{1+x}$, $y^{(4)}-?$ г) $y=3^x+3^{-x}$, $y^{(5)}-?$

5. Знайти похідну другого порядку для параметрично заданої функції

а) $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=2t^2+1\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=\sqrt{t-1}\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=2\sqrt{t}+1\\ y=\ln t\end{cases}$;

г) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$; д) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \ln\sin 2t \end{cases}$; е) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

6. Знайти диференціал вказаного порядку функції $y = f(x)$

а) $y = \ln x + 2x,\ d^2y - ?$ б) $y = \dfrac{3}{x+1},\ d^2y - ?$

в) $y = \cos\ln x,\ d^2y - ?$ г) $y = e^{2x}(x-2),\ d^2y - ?$

7. Знайти границю функції за правилом Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

8. Обчислити границю функції, користуючись правилом Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3 + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2 + 1}{e^x - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x + 1}{\ln x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{3x} + x}{\sqrt{x} + 1}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x}{x^2 + 3}$; е) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

9. Знайти границю функції за правилом Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$; в) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}4x$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln^2 x\cdot e^{-x}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x + 2^x\right)\dfrac{1}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to +0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; к) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$; н) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

§ 17. Застосування похідної. Повне дослідження функції та побудова графіка

Монотонність та екстремум функції

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з цього інтервалу, для яких $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогічно функція $y = f(x)$ називається *спадною,* якщо для будь-яких x_1, x_2, для яких $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ Такі функції називають строго *монотонними* на $(a;b)$.

Розглянемо *необхідну та достатню умови монотонності функції.*

Теорема 1 (*необхідна умова зростання (спадання) функції*). Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції $f'(x) \geq 0$ на цьому проміжку. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції $f'(x) \leq 0$ на цьому проміжку.

Теорема 2 (*достатня умова зростання (спадання) функції*). Якщо похідна функції $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всіх x з проміжку $(a;b)$, то на цьому проміжку функція f зростає (спадає).

Точку x_0 називають *точкою максимуму (точкою мінімуму)* функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$ $(x \neq x_0)$ ($f(x_0) < f(x)$ $(x \neq x_0)$). Значення функції в точці максимуму (точці мінімуму) називають *максимумом (мінімумом) цієї функції*. Точки максимуму та мінімуму називаються *точками екстремуму*, а значення функції в цих точках називають *екстремумом функції.*

Оскільки екстремум є найбільшим або найменшим значенням функції в деякому околі точки x_0, то його називають *локальним екстремумом* функції. Функція може мати декілька точок максимуму і точок мінімуму, а може не мати жодної (див. рис. 17.1).

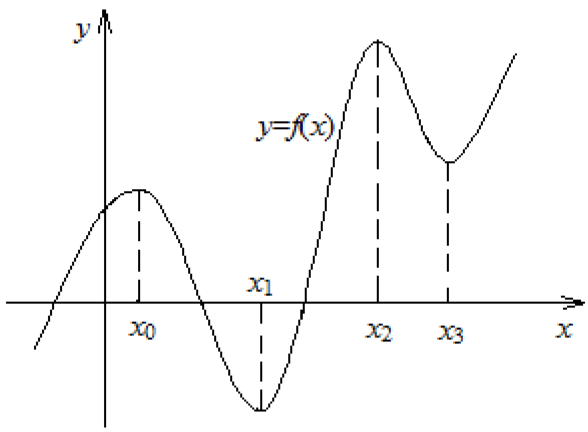


Рис. 17.1

Розглянемо *необхідну та достатні умови існування екстремуму*.

Теорема 3. (*необхідна умова існування екстремуму функції*). Якщо диференційовна функція має в точці x_0 екстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Функція $y = f(x)$ може мати екстремум тільки в тих точках з області визначення, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Такі точки називають *критичними точками функції*.

Але не кожна критична точка функції є точкою екстремуму цієї функції. Зокрема, для функції $f(x) = x^3$ критична точка $x = 0$ не є точкою екстремуму.

Для перевірки, чи є критична точка функції точкою екстремуму, використовують достатні умови існування екстремуму.

Теорема 4 (*перша достатня умова існування екстремуму функції.*). Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в деякому околі критичної точки x_0, крім, можливо, самої точки. Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна змінює знак з «+» на «–», то в точці x_0 функція має максимум; якщо похідна змінює знак з «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум. Якщо при переході через точку x_0 похідна не змінює свого знака, то функція в цій точці екстремуму не має.

Наведемо *алгоритм знаходження проміжків зростання, спадання та екстремумів функції.*

1. Знайти область визначення функції $y = f(x)$.

2. Знайти похідну функції $f'(x)$.

3. Визначити критичні точки функції f. Позначити на числовій прямій критичні точки і точки, які не належать області визначення.

4. Визначити знак похідної $f'(x)$ на кожному з утворених інтервалів. На проміжках, де $f'(x) > 0$, функція зростає, а там, де $f'(x) < 0$, – функція спадає.

5. Знайти точки екстремуму функції $y = f(x)$. Якщо при переході через критичну точку $f'(x)$ змінює знак з “+” на “–”, то ця точка є її точкою максимуму; якщо змінює знак з “–” на “+”, то ця точка є її точкою мінімуму; якщо $f'(x)$ не змінює знаку, то ця точка не є точкою екстремуму.

6. Знайти екстремуми функції $y = f(x)$, обчисливши значення функції у знайдених точках екстремуму.

Теорема 5 (друга достатня умова існування екстремуму функції). Нехай для диференційовної в точці x_0 функції $y = f(x)$ її перша похідна дорівнює нулю, а друга похідна існує і відмінна від нуля, тобто $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Якщо друга похідна $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 функція має мінімум, а якщо $f''(x_0) < 0$, то має максимум.

Якщо досліджувати функцію на екстремум за другою достатньою умовою, то після визначення критичних точок функції з умови $f'(x) = 0$ треба обчислити значення $f''(x)$ в цих точках. Після цього зробити висновок про існування екстремуму функції.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [a; b], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення. Найбільше і найменше значення функції на проміжку [a; b] називається *глобальним максимумом і мінімумом.*

Функція може досягати свого найбільшого (найменшого) значення на відрізку [a, b] на одному з кінців цього відрізка або у внутрішній точці відрізка, а саме в точці можливого екстремуму.

Наведемо *алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку.*

1. Знайти область визначення функції і перевірити, чи належить їй заданий відрізок.
2. Визначити всі критичні точки функції, які належать відрізку [a; b].
3. Обчислити значення функції в критичних точках та на кінцях відрізка [a; b].
4. Серед всіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше значення відрізку [a; b].

Опуклість та точки перегину графіка функції

Графік функції $y = f(x)$ називають *опуклим вгору* (*опуклим вниз*) *на* проміжк*у* (a;b), якщо всі точки графіка, за виключенням точки дотику, розміщені нижче (вище) будь-якої дотичної, проведеної до графіка функції на цьому проміжку (див. рис. 17.2, 17.3). Точку графіка функції $(x_0; f(x_0))$, в якій змінюється характер опуклості, називають *точкою перегину графіка функції* (див. рис. 17.4). У точках перегину дотична перетинає графік функції.

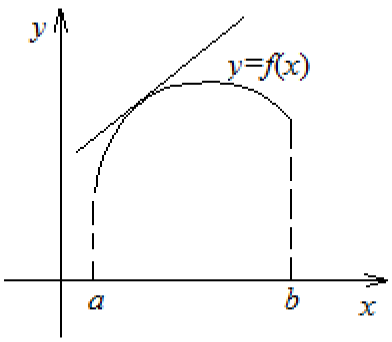


Рис. 17.2

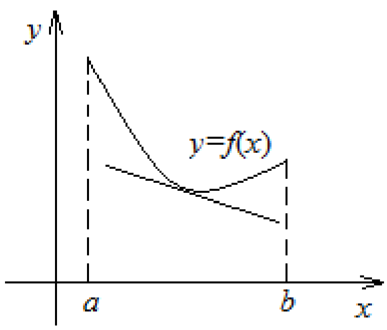


Рис. 17.3

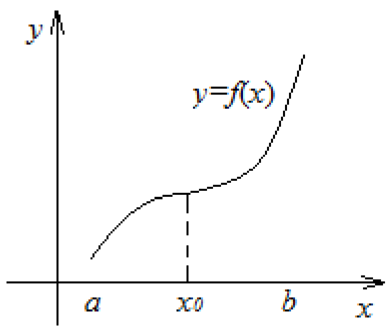


Рис. 17.4

Точки з області визначення функції $y = f(x)$, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує, називають *критичними точками другого роду* функції. Саме в таких точках можуть існувати точки перегину графіка функції.

Теорема 6. Якщо в усіх точках проміжку $(a;b)$ функція $y = f(x)$ має додатну другу похідну $f''(x) > 0$, то графік функції опуклий вниз. Якщо ж в усіх точках проміжку друга похідна від'ємна $f''(x) < 0$, то графік функції опуклий вгору.

Теорема 7. Якщо для функції $y = f(x)$ її друга похідна $f''(x)$ у точці x_0 перетворюється в нуль або не існує, а при переході через цю точку змінює свій знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $(x_0; f(x_0))$ не є точкою перегину.

Наведемо *алгоритм знаходження проміжків опуклості та точок перегину графіка функції.*

1. Знайти область визначення функції $y = f(x)$.

2. Знайти другу похідну функції $f''(x)$.

3. Знайти критичні точки другого роду функції з умов: $f''(x)$=0 або $f''(x)$ не існує. Позначити на числовій прямій критичні точки і точки, які не належать області визначення. Вони розіб'ють область визначення функції f на проміжки, на кожному з яких $f''(x)$ зберігає сталий знак.

4. Визначити знак $f''(x)$ на кожному з утворених проміжків. На проміжках, де $f''(x) > 0$, графік функції опуклий вниз, а там, де $f''(x) < 0$, – опуклий вгору.

5. Якщо при переході через критичну точку x_0 другого роду $f''(x)$ змінює знак, то відповідна точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину. Якщо ж $f''(x)$ не змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ не є точкою перегину графіка функції.

Асимптоти графіка функції

Пряму L називають *асимптотою кривої*, якщо відстань від довільної точки M кривої до прямої L прямує до нуля при необмеженому віддаленні точки M у нескінченність.

Розрізняють три види асимптот: *вертикальні, горизонтальні та похилі*.

1. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$.

2. Якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то пряма $y = b$ є *горизонтальною асимптотою* графіка функції f. Якщо ж $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$), то пряма $y = b$ є правою (лівою) горизонтальною асимптотою графіка функції f.

3. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ і $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$, то пряма $y=kx+b$ є *похилою асимптотою* графіка функції *f*.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ і $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$ (або при $x\to-\infty$), то пряма $y=kx+b$ є правою (лівою) похилою асимптотою графіка функції *f*.

У випадку, коли k=0, похила асимптота $y=kx+b$ перетворюється в горизонтальну асимптоту $y=b$. Отже, горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти при k=0.

За допомогою певного алгоритму можна провести повне дослідження функції та на його основі побудувати ескіз графіка цієї функції. Розглянемо *схему дослідження функції та побудови її графіка*.

1. Провести елементарні дослідження функції: знайти область визначення функції; визначити точки перетину графіка з координатними осями; дослідити функцію на парність і періодичність; знайти проміжки знакосталості функції (якщо це нескладно).

2. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву.

3. Знайти асимптоти графіка функції (вертикальні, похилі, горизонтальні).

4. Знайти проміжки монотонності (зростання і спадання) функції, точки екстремуму та значення функції в цих точках (за допомогою першої похідної).

5. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції (за допомогою другої похідної).

6. Побудувати графік функції, враховуючи проведені дослідження. Якщо необхідно, можна розглянути допоміжні точки графіка функції.

Наведемо зауваження, які необхідно враховувати при використанні наведеної схеми для дослідження функції.

У процесі проведення дослідження функції можна одночасно визначати на координатній площині ті області, де буде міститись графік функції. При цьому враховуються: область визначення функції, точки перетину графіка з осями; проміжки знакосталості функції. Дослідивши функцію на парність, можна зробити висновок про симетричність графіка функції відносно осі *Oy* (якщо функція парна), відносно початку координат (якщо функція непарна).

Після дослідження на неперервність і визначення характеру точок розриву (якщо вони є) можна зробити висновок про розміщення графіка функції. Зокрема, для точок розриву другого роду доцільно розглядати односторонні границі, що дає можливість уявити, куди прямує графік функції (вниз чи вгору) при наближенні до відповідної точки зліва чи справа. Після дослідження на неперервність на наступному кроці доцільно визначити асимптоти графіка. Якщо функція має точки розриву другого роду, то можна зразу знайти вертикальні асимптоти.

Досліджуючи функцію на монотонність та екстремум, треба враховувати її область визначення. Перевіряючи знак похідної, на координатній прямій необхідно розглядати як критичні точки (точки можливого екстремуму), так і точки, в яких функція не існує. Це необхідно для правильного визначення проміжків зростання та спадання функції. Після знайдених екстремумів функції (якщо вони існують), можна їх відразу зобразити на координатній площині для поступової побудови графіка функції.

При знаходженні проміжків опуклості вгору і вниз теж потрібно враховувати точки, які не належать області визначення, оскільки при переході через них друга похідна може змінювати свій знак. Слід звернути увагу, що точка перегину лежить на графіку функції, тому містить дві координати $(x_0; f(x_0))$.

Провівши повне дослідження функції, можна уявити приблизне розташування графіка. Побудову графіка функції треба завжди починати з асимптот (якщо вони існують). Для точності побудови графіка можна розглянути кілька допоміжних точок.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Обчислимо похідну функції $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right)$.

Прирівнявши похідну до нуля, розв'яжемо рівняння $x^2 - x - 2 = 0$. Критичними точками є $x_1 = 2,\ x_2 = -1.$ Використаємо другу достатню умову існування екстремуму, для чого знайдемо другу похідну $y'' = 12x - 6$ та обчислимо її значення в критичних точках

$$y''(2) = 12 \cdot 2 - 6 = 18 > 0, \quad y''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18 < 0.$$

За другою достатньою умовою існування екстремуму маємо $x = 2$ – точка мінімуму, а $x = -1$ – точка максимуму функції. Знайдемо значення функції в точках мінімуму і максимуму відповідно, маємо

$$y_{\max} = y(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 1 = 8,$$

$$y_{\min} = y(2) = 2 \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot 2 + 1 = -19.$$

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Розв'язання. Використаємо алгоритм дослідження функції за першою достатньою умовою існування екстремуму.

1. Область визначення функції $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$.

2. Знаходимо похідну функції $y'=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

3. Знаходимо критичні точки функції. З умови $y'=0$ випливає, що $x=1, x=3$ – критичні точки. Оскільки похідна існує в усіх точках області визначення, то інших критичних точок немає.

4. Наносимо на числовій прямій критичні точку і дістаємо три проміжки $(-\infty,\ 1)$, (1, 3), $(3,\ +\infty)$. Виберемо на кожному проміжку одну точку і обчислимо значення похідної в цих точках

$$x=0\in(-\infty,1),\ \ y'(0)=3>0;$$
$$x=2\in(1,3),\ \ y'(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1<0;$$
$$x=4\in(3,+\infty),\ \ y'(4)=4^2-4\cdot 4+3=11>0.$$

Знак похідної на кожному проміжку збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного проміжку. Отримані результати вносимо в таблицю.

X	$(-\infty,\ 1)$	1	(1, 3)	3	$(3,\ +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

5. З таблиці видно, що при переході (зліва направо) через точку x = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Тому точка x = 1 є точкою максимуму. А при переході через точку x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Тому x = 3 є точкою мінімуму.

6. Обчислимо максимум і мінімум функції в знайдених точках

$$y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3},\qquad y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$$

Приклад 3. Знайти екстремум функції $y=e^{-x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(y)=(-\infty,\ +\infty)$. Знаходимо першу похідну $y'(x)=-2xe^{-x^2}$ і прирівнюємо її до нуля, тобто $-2xe^{-x^2}=0$. Одержуємо критичну точку $x=0$ – точку можливого екстремуму. Для перевірки точки застосуємо другу достатню умову існування екстремуму. Знайдемо похідну другого порядку $y''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(4x^2-2)$.

Оскільки $y''(0)<0$, то в точці $x=0$ функція має максимум, тобто

$$y_{\max}=y(0)=1.$$

Приклад 4. Знайти проміжки зростання, спадання та екстремум функції $f(x)=\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції: $D(f)=(-\infty;2)\bigcup(2;+\infty)$. Знайдемо похідну функції

$$f'(x)=\left(\frac{4x}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(4x)'\cdot(x-2)^2-4x\left((x-2)^2\right)'}{\left((x-2)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{4(x-2)^2-4x\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{4(x-2)((x-2)-2x)}{(x-2)^4}=\frac{-4(x+2)}{(x-2)^3}.$$

Знайдемо критичні точки функції, тобто такі точки з області визначення, в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує.

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-4(x+2)}{(x-2)^3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-2.$$

Отже, $f'(x)=0$ у точці $x=-2$. Оскільки ця точка належить області визначення функції, то вона є критичною точкою. Похідна не існує в точці $x=2$, але ця точка не належить $D(f)$, тому не є критичною точкою функції. Отже, функція f має одну критичну точку $x=-2$. На координатній прямій позначимо критичну точку і точку, яка не належить області визначення. Дістанемо проміжки $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;+\infty)$, на кожному з яких похідна зберігає сталий знак. Визначимо знак похідної на кожному з утворених проміжків. Для цього необхідно обчислити значення $f'(x)$ у будь-якій одній точці з кожного проміжку.

На інтервалі $(-\infty;-2)$ виберемо довільну точку, наприклад, $x=-3$, і обчислимо значення $f'(x)$ у цій точці

$$f'(-3)=\frac{-4\cdot(-1)}{(-3-2)^3}=\frac{4}{-125}<0.$$

Отже, $f'(x)<0$ для всіх $x\in(-\infty;-2)$. Аналогічно визначимо знак $f'(x)$ на інтервалах $(-2;2)$ і $(2;+\infty)$

$$x=0\in(-2;2),\quad f'(0)=\frac{-4\cdot 2}{(0-2)^3}=1>0.$$

Таким чином, $f'(x)>0$ для всіх $x\in(-2;2)$.

$$x=3\in(2;+\infty),\quad f'(3)=\frac{-4(3+2)}{(3-2)^3}=-20<0.$$

Отже, $f'(x)<0$ для всіх $x\in(2;+\infty)$.

Зобразимо проведені дослідження на координатній прямій (див. рис. 17.5).

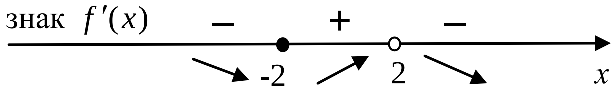


Рис. 17.5

Таким чином, $f'(x)<0$ на проміжках $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$, тому $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ є проміжками спадання функції. Оскільки $f'(x)>0$ на проміжку $(-2;2)$, то $(-2;2)$ – проміжок зростання функції.

Знайдемо точки екстремуму функції f. При переході через критичну точку $x=-2$ похідна $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+", тому ця точка є точкою мінімуму функції, тобто $x_{min}=-2$. Точка $x=2$ не є критичною точкою функції, тому не є точкою екстремуму функції, хоча при переході через неї $f'(x)$ змінює знак. Точок максимуму функція не має.

Визначимо екстремум функції, обчисливши значення функції $f(x)$ у знайденій точці екстремуму. Оскільки $x_{min}=-2$, то маємо мінімум функції

$$f_{min}=f(-2)=\frac{-8}{(-4)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 5. Знайти проміжки монотонності та екстремум функції $y=x\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Функція визначена при $-1\le x\le 1$. Знайдемо похідну та критичні точки функції. Маємо

$$y'=\left(x\sqrt{1-x^2}\right)'=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{1(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=0,\qquad 1-2x^2=0,\qquad x_1=-\frac{1}{\sqrt2},\ x_2=\frac{1}{\sqrt2}.$$

Маємо дві критичні точки $x=\pm\frac{1}{\sqrt2}$, оскільки похідна y' не існує при $x=\pm1$, тобто на кінцях відрізка $[-1;1]$ – області визначення функції. Розглянемо проміжки, на які розбито область визначення функції $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2};\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2};1\right)$, на кожному з них визначимо знак похідної

$$y'\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{-1/8}{\sqrt{7/16}}=-\frac{1}{2\sqrt7}<0,\quad y'(0)=1>0,\quad y'\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt7}<0.$$

Оскільки на проміжках $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$ похідна $y'<0$, то функція спадає, а на проміжку $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ похідна $y'>0$, тому функція зростає. Внаслідок того, що похідна змінює знак при переході через точки $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, то в точці $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ функція має мінімум

$$y_{\min}=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2},$$

а в точці $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ функція має максимум

$$y_{\max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=3x^4+4x^3+1$ на відрізку $x\in[-2;1]$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(y)=(-\infty,\ +\infty)$, тому заданий відрізок їй належить. Знаходимо критичні точки функції на відрізку

$$y'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1),$$

$$y'(x)=0 \text{ при } x_1=0\in[-2;1] \text{ і при } x_2=-1\in[-2;1].$$

Обчислюємо значення функції у критичних точках та на кінцях відрізка

$$y(0)=1,\quad y(-1)=0,\quad y(-2)=17,\quad y(1)=8.$$

Вибираємо найбільше і найменше значення функції на відрізку $[-2,\ 1]$

$$\min_{[-2;\,1]} y=y(-1)=0,\qquad \max_{[-2;\,1]} y=y(-2)=17.$$

Приклад 7. Визначити на відрізку $[-3;1/2]$ найбільше й найменше значення функції $y=x^3-3x+3$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(y)=(-\infty,\ +\infty)$, тому заданий відрізок їй належить. Знаходимо критичні точки функції на відрізку

$$y'=3x^2-3,3x\ -3=0,\ x_1=-1,\ x_2=1.$$

Оскільки точка $x_2=1$ не належить відрізку $[-3,\ 1/2]$, то надалі її не розглядаємо. Таким чином, маємо одну критичну точку $x_1=-1$.

Обчислимо значення функції у точці $x_1=-1$ та на кінцях відрізка

$$y(-1)=5,\quad y(-3)=-15,\quad y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{8}.$$

Виберемо найбільше і найменше значення функції на відрізку $[-3;1/2]$. Маємо

$$\min_{[-3;1/2]} y = y(-3) = -15, \qquad \max_{[-3;1/2]} y = y(-1) = 5.$$

Приклад 8. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Для дослідження на опуклість графіка функції знайдемо похідну другого порядку

$$y' = 3x^2 - 12x + 9, \qquad y'' = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Друга похідна дорівнює нулю в точці $x=2$. Визначимо знак другої похідної на інтервалах (–∞;2) та (2;+∞), дістанемо

$$y''(1) = 6(1-2) = -6 < 0, \qquad y''(3) = 6(3-2) = 6 > 0.$$

Результати досліджень внесемо в таблицю.

x	(–∞;2)	2	(2;+∞).
y''	–	0	+
$y=f(x)$	опукла вгору	точка перегину	опукла вниз

Отже, графік функції є опуклим вгору на проміжку (–∞; 2) і опуклим вниз на проміжку (2; +∞). Оскільки друга похідна змінює знак при переході через точку $x=2$, причому $y(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 = 2$, то точка (2; 2) є точкою перегину графіка функції.

Приклад 9. Знайти інтервали опуклості та точки перегину кривої $f(x) = x^5 - x + 2$.

Розв'язання. Область визначення заданої функції: $(-\infty, +\infty)$. Оскільки $f''(x) = 20x^3$, то з умови $f''(x) = 0$ маємо, що $x = 0$ – критична точка другого роду. Інших критичних точок немає, бо $f''(x)$ існує на $(-\infty, +\infty)$.

Якщо $x \in (-\infty, 0)$, то $f''(x) < 0$ і крива опукла вгору на $(-\infty, 0)$; якщо ж $x \in (0, +\infty)$, то $f''(x) > 0$ і крива опукла вниз на $(0, +\infty)$. Отже, $(0, 2)$ – точка перегину даної кривої.

Приклад 10. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Знайдемо першу, а потім другу похідну функції $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2-\frac{1}{2}=0, \text{ звідки } x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки друга похідна y'' існує в усіх точках, то маємо дві критичні точки другого роду x_1 і x_2. При переході через ці точки друга похідна змінює свій знак. Результати досліджень внесемо в таблицю.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Точка перегину	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

З таблиці видно, що графік функції на проміжках $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ опуклий вниз, а на проміжку $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – опуклий вгору. Отже, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Приклад 11. Визначити асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm0} y=\lim_{x\to\pm0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=\mp\infty,$$

то x=0 є точкою розриву другого роду, тому пряма x=0 (вісь Oy) є вертикальною асимптотою.

Нехай похила асимптота має рівняння $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to}\frac{2x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ – похила асимптота для графіка функції. Оскільки $k\neq0$, то горизонтальних асимптот немає.

Приклад 12. Знайти асимптоти графіка функції $f(x)=xe^x$.

Розв'язання. Область визначення заданої функції $D(f)=(-\infty,+\infty)$. Графік функції не має вертикальних асимптот, тому що функція не має точок розриву другого роду. Перевіримо, чи має графік функції похилу асимптоту. Оскільки

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=e^{+\infty}=+\infty$, то при $x\to+\infty$ графік функції не має ні похилої, ні горизонтальної асимптоти. Обчисливши границі при $x\to-\infty$, дістанемо

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=-\lim_{x\to-\infty}e^x=0.$$

Таким чином, при $x\to-\infty$ графік функції має горизонтальну асимптоту $y=0$ (як окремий випадок похилої асимптоти). Отже, задана функція має тільки ліву горизонтальну асимптоту (при $x\to-\infty$).

Приклад 13. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Проведемо повне дослідження функції за наведеною схемою.

1. Знайдемо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x=1$. Отже, область визначення $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат, а саме

з віссю Ox: $y=0,\ \frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,\ 2x-1=0,\ x=\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$;

з віссю Oy: $x=0,\ y=\frac{-1}{1}=-1,\ (0;\ -1)$.

Оскільки область визначення функції несиметрична відносно початку координат, то функція ні парна, ні непарна. Функція неперіодична.

Для даної функції легко знайти проміжки знакосталості. Оскільки вираз у знаменнику $(x-1)^2$ завжди додатний, то знак функції залежить від виразу в чисельнику $2x-1$. Тому функція набуває додатних значень при $x>1/2$ і від'ємних значень при $x<1/2$. Отже $f(x)>0, x>1/2$, $f(x)<0, x<1/2$.

2. Функція неперервна на своїй області визначення. Точка $x=1$ є точкою розриву другого роду, оскільки

$$\lim_{x\to1\pm0}y=\lim_{x\to1\pm0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1\pm0}(x-1)^2}=+\infty.$$

Обчисливши границю функції в точці $x=1$, бачимо, що графік функції при $x\to1$ (і зліва, і справа) прямує вгору.

3. Оскільки $x=1$ – точка розриву другого роду, то пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y=kx+b$, маємо

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Таким чином, похилої асимптоти немає, а є горизонтальною є пряма $y=0$ (вісь Ox).

4. Знайдемо проміжки зростання і спадання та точки екстремуму. Визначимо першу похідну

$$y'=\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

З умови $y'=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$ – критична точка. При $x=1$ похідна не існує, але в цій точці функція невизначена, тому $x=1$ не є критичною точкою. Визначимо знак похідної на одержаних проміжках.

$$y'(-1)=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0;\qquad y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{-1/8}=8>0,\qquad y'(2)=\frac{-4}{1}=-4<0.$$

Результати досліджень заносимо у таблицю.

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
y'	–	0	+	не існує	–
y	$\searrow$	$y_{\min}(-1)$	$\nearrow$	не існує	$\searrow$

За результатами досліджень маємо: функція спадає на проміжках $(-\infty;0)$ і $(1;+\infty)$, функція зростає на проміжку $(0,1)$.

Проходячи через критичну точку $x=0$ зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», тому в цій точці функція має мінімум

$$y_{\min}=y(0)=\frac{-1}{1}=-1.$$

При переході через точку $x=1$ похідна теж змінює свій знак, але функція в цій точці невизначена.

5. Точки перегину та інтервали опуклості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної

$$y''=\left(-\frac{2x}{(x-1)^3}\right)'=\frac{-2(x-1)^3+6x(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

З умови $y''=0 \Rightarrow 2(2x+1)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ – критична точка другого роду. При $x=1$ друга похідна y'' не існує, але в цій точці функція невизначена.

Визначимо проміжки опуклості вгору і вниз

$$y''(-1)=\frac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\frac{1}{8}<0,\qquad y''(0)=\frac{2}{1}=2>0,\qquad y''(2)=\frac{2\cdot 5}{1}=10>0.$$

Отже, графік функції опуклий вгору на проміжку $(-\infty; -1/2)$ і опуклий вниз на проміжках $(-1/2; 1)$, $(1;+\infty)$.

При переході через точку $x=-\dfrac{1}{2}$, друга похідна y'' змінює знак. Оскільки $y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1}{\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)^2}=-\dfrac{8}{9}\approx-0{,}9$, то $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{8}{9}\right)$ – точка перегину.

Результати досліджень заносимо у таблицю.

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
y''	–	0	+	не існує	+
y	$\cap$	точка перегину	$\cup$	не існує	$\cup$

За результатами досліджень будуємо графік функції. Для більш точної побудови візьмемо кілька допоміжних точок (див. рис. 17.6).

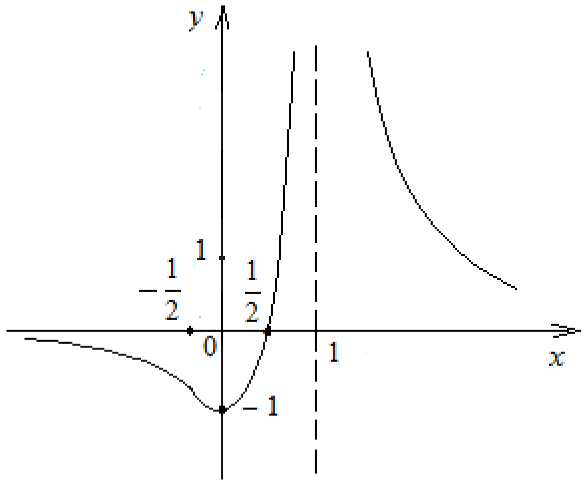


Рис. 17.6

Приклад 14. Знайти максимальну площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого рівна 6 см.

Розв'язання. Розглянемо ΔABC, в якому $AB=BC=6$ (див. рис. 17.7).

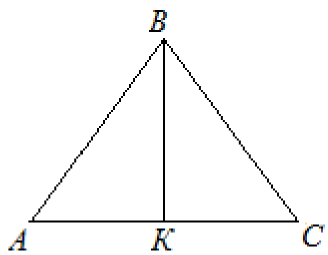


Рис. 17.7

Нехай $BK = x$, тоді $AC = 2\sqrt{36 - x^2}$ і площа ΔABC: $S = x\sqrt{36 - x^2}$. Тепер знайдемо найбільше значення функції $S(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ на відрізку $[0;6]$. Визначимо похідну функції та критичні точки

$$S'(x) = \sqrt{36 - x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{36 - x^2}} = \frac{36 - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$S'(x) = 0$ при $x = \pm 3\sqrt{2}$, $S'(x)$ не існує при $x = \pm 6$.

Розглянемо тільки точку $x = 3\sqrt{2}$, оскільки точки $x = -6$ і $x = -3\sqrt{2}$ не належать відрізку $[0;6]$, а точка $x = 6$ збігається з правим кінцем відрізка. Визначимо знак похідної на проміжках $(0;3\sqrt{2})$ і $(3\sqrt{2};6)$. Оскільки $S'(3) = \frac{18}{\sqrt{27}} = 2\sqrt{3} > 0$, $S'(3\sqrt{3}) = \frac{36 - 54}{\sqrt{36 - 27}} = -6 < 0$, то $x = 3\sqrt{2}$ – точка максимуму. Тоді найбільша площа $S_{\max} = S(3\sqrt{2}) = 18$.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити проміжки зростання і спадання функції

а) $y = -x^2 - 4x + 3$; б) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

в) $y = 2 - 3x + x^3$; г) $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 4$;

д) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$; е) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;

ж) $y = x\sqrt{2 - x^2}$; з) $y = \sqrt{(x^2 - 1)^3}$;

к) $y = x(1 + \sqrt{x})$; л) $y = xe^{-x}$;

м) $y = x^2 e^{-x}$; н) $y = \ln(1 - x^2)$;

п) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; р) $y = 2x^2 - \ln x$.

2. Дослідити функцію на екстремум

а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$; б) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$;

в) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$; г) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$;

д) $y = x\sqrt{1 - x^2}$; е) $y = x + \sqrt{1 - x}$;

ж) $y = x - \ln(1 + x)$; з) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції на вказаному відрізку

а) $y = 2x^2 - 3x + 1,\ [-1;2]$; б) $y = x^4 - 2x^3 + 3,\ \ [-3;2]$;

в) $y = x^4 - 2x^2 + 5,\ [-2;2]$; г) $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5,\ \left[-4;1\right]$;

д) $y = \frac{x-1}{x+1},\ x \in [0;4]$; е) $y = \frac{x^2+3}{x^2+2x+5},\ x \in [-1;3]$.

4. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції

а) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$; б) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$;

в) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$; г) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

д) $y = a - \sqrt[3]{x-b}$; е) $y = \left(x+1\right)^4 + e^x$;

ж) $y = x + \frac{4}{x+2}$; з) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$;

к) $y = xe^{-2x}$; л) $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

5. Знайти асимптоти кривих

а) $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 5}$; б) $y = \frac{5x}{x^2+2}$;

в) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$; г) $y = \frac{2x^2+1}{x^2-2x-3}$;

д) $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$; е) $y = \frac{x^3}{x^2+2x+4}$;

ж) $y = \sqrt{x^2-1}$; з) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$;

к) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; л) $y = xe^x$.

6. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

а) $y = x^2 - 5x + 6$; б) $y = x^4 - 4x^3 + 3$; в) $y = 2x^4 - x^2 + 1$;

г) $y = x\sqrt{1-x^2}$; д) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; е) $y = \sqrt[3]{x^2}\left(x^2 - 4\right)$.

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

а) $y = \frac{x}{1+x^2}$; б) $y = \frac{x^2+4}{x}$; в) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;

г) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$;	д) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$;	е) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

ж) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$;	з) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$;	к) $y=\dfrac{1+2x}{3-x}$;

л) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$;	м) $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$;	н) $y=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$.

7. Відкритий басейн об’ємом 32 м^3 має квадратне дно. Якими повинні бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

8. Знайти розміри циліндра з найбільшим об’ємом, якщо він вписаний в кулю радіуса R.

9. Які повинні бути розміри прямокутника найбільшої площі, вписаного в коло радіуса 6 см?

Контрольні запитання

1. Опишіть задачі, які приводять до поняття похідної.
2. Сформулюйте означення похідної функції.
3. Запишіть рівняння дотичної та нормалі для графіка функції.
4. Сформулюйте правила диференціювання функції.
5. Наведіть основні формули диференціювання функції.
6. Як застосовують логарифмічне диференціювання?
7. Опишіть схему диференціювання неявно заданої функції.
8. Наведіть формулу диференціювання параметрично заданої функції.
9. Дайте означення диференціала функції та опишіть його застосування.
10. Як визначаються похідні та диференціали вищих порядків?
11. Сформулюйте основні теореми диференціального числення (теореми Ролля, Лагранжа, Коші).
12. Сформулюйте правило Лопіталя та опишіть його застосування при обчисленні границь.
13. Наведіть умови монотонності функції.
14. Сформулюйте необхідну та достатні умови існування екстремуму.
15. Наведіть алгоритм відшукання екстремуму функції.
16. Як визначається найбільше і найменше значення функції на відрізку?
17. Опишіть поняття опуклості вгору (вниз) графіка функції.
18. Як визначається напрям опуклості та точки перегину графіка функції?
19. Як визначаються асимптоти графіка функції?
20. Сформулюйте алгоритм дослідження функції та побудови її графіка.

Розділ V. Диференціальне числення функції багатьох змінних

§ 18. Поняття функції багатьох змінних. Границя та неперервність функції двох змінних. Частинні похідні функції двох змінних

На координатній площині відповідає точка $M_0(x_0; y_0)$ має дві координати. Аналогічно, в *n*-вимірному просторі розглядають точку $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, яка має *n* координат $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$. Розглянемо основні поняття для множин точок на площині, але їх можна узагальнити на випадок множин *n*-вимірного простору.

Множина точок називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити ламаною лінією так, щоб усі точки цієї лінії належали цій множині. Множина точок називається *обмеженою*, якщо всі її точки лежать всередині круга скінченного радіуса. Позначимо відстань між точками $M(x; y)$ і $M_0(x_0; y_0)$ через $\rho = \rho(M; M_0)$.

Множина точок площини, координати яких задовольняють нерівність $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$, називають ε*-околом* (або просто *околом*) точки $M_0(x_0; y_0)$. Отже, окіл точки $M_0(x_0; y_0)$ – це внутрішність круга з радіусом $R = \varepsilon$ та центром у цій точці (див. рис. 18.1). Якщо з околу точки M_0 вилучити саму цю точку, то дістанемо виколотий окіл точки.

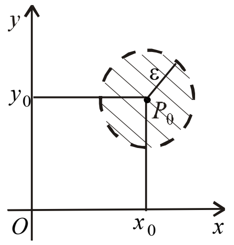


Рис. 18.1

Зауважимо, що для n-вимірного простору окіл точки $M_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ визначається нерівністю $\sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n^0\right)^2} < \delta$.

Точка називається *внутрішньою* точкою множини, якщо вона належить їй разом з деяким своїм околом. Точка називається *зовнішньою* для множини, якщо існує такий окіл цієї точки, який повністю не належить цій множині.

Множина, яка містить тільки внутрішні точки, називається *відкритою* множиною. Відкрита зв'язна множина називається *відкритою областю* (або просто *областю*). Позначимо область через *D*.

Точка називається *межовою* для області, якщо в будь-якому її околі існують точки, що належать цій області і не належать їй. Множина межових точок називається *межею області*. Область разом зі своєю межею називається *замкненою областю*.

Наприклад, $\overline{D} = \left\{(x; y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 \le 9\right\}$ – замкнена область (див. рис. 18.2), $x^2 + y^2 = 9$ – рівняння її межі, *K* – внутрішня, *L* – зовнішня, *M* – межова точка.

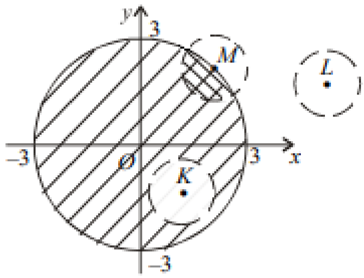


Рис. 18.2

Поняття функції багатьох змінних

Якщо кожній точці $M(x_1;x_2;...;x_n)$ області D n-вимірного простору поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то говорять, що в області $D \subset R^n$ задано функцію n незалежних змінних $z = f(x_1;x_2;...;x_n)$. При цьому $D = D(f)$ називають *областю визначення функції,* $E = E(f)$ *– областю значень функції.*

Зокрема, при n=2 маємо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, яка кожній парі незалежних змінних x, y (точці $(x; y) \in D$) ставить у відповідність дійсне число z. Наприклад, площа прямокутника $S = a \cdot b$ зі сторонами a,b є функцією двох змінних.

Функцію двох змінних можна задавати в аналітичним способом (за допомогою формули), табличним або графічним способом.

Для графічного зображення функції двох змінних розглядаємо систему координат у тривимірному просторі. Для кожної пари чисел x, y знайдемо відповідне значення функції $z = f(x, y)$ і дістанемо в просторі точку $M(x; y; z)$. Множина точок $(x; y; z)$, де $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D(f)$, утворює певну поверхню у просторі. Така поверхня є *графіком функції* $z = f(x, y)$.

Функції двох змінних також можна зображати за допомогою ліній рівня. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x, y)$ набуває однакових значень, тобто рівняння лінії рівня має вигляд $f(x, y) = C$.

За виглядом ліній рівня можна дістати наближене уявлення про функцію. Прикладом зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті.

Якщо функцію двох змінних задано аналітично, то її область визначення знаходимо з умови існування аналітичного виразу цієї функції. Розглянемо приклад знаходження області визначення функції двох змінних.

Границя і неперервність функції двох змінних

Розглянемо функцію двох змінних, оскільки поняття границі та основні теореми будуть аналогічними для функцій багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Число A називається *границею функції* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ має місце нерівність $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$ і позначається $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$.

Для функції двох змінних справедливі теореми про границі, аналогічні відповідним теоремам для функції однієї змінної.

Теорема 1. Нехай $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = A$, $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} g(x, y) = B$. Тоді

1) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \left(f(x, y) + g(x, y) \right) = A + B$;

2) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$;

4) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} k \cdot f\left(x, y\right) = k \cdot \lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f\left(x, y\right) = k \cdot A$.

Теорема 2. Якщо функція $z = f\left(x, y\right)$ має границю при $\left(x; y\right) \to \left(x_0; y_0\right)$, то ця границя єдина.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = A$, $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} g(x, y) = B$, і в деякому околі точки $\left(x_0; y_0\right)$ виконується нерівність $f(x, y) \le g(x, y)$, то $A \le B$.

Зауважимо, що між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних є багато спільного, але є важлива відмінність. При обчисленні границі функції однієї змінної $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ до точки x_0 можна прямувати зліва і справа. Якщо лівостороння і правостороння границі існують і рівні між собою, то існує границя функції в цій точці.

Для функції двох змінних $z = f\left(x, y\right)$ наближатися до точки $(x_0; y_0)$ можна в будь-якому напрямку. Границя $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) = A$ існує тільки тоді, коли вона не залежить від напряму наближення до точки $(x_0; y_0)$.

Функція $z = f\left(x, y\right)$ називається *неперервною* в точці $(x_0; y_0)$, якщо границя функції дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Точки розриву можуть утворювати лінії, деякі множини на площині. Так, функція $f(x; y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ має розрив вздовж прямих $y = \pm x$, а функція $f(x; y) = \sin\dfrac{x}{y}$ розривна вздовж осі *Ох*.

Розглянемо властивості функцій, неперервних у точці та на замкненій обмеженій.

Теорема 4. Якщо функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ неперервні в точці $(x_0; y_0)$, то в цій точці є неперервними їх сума, різниця $f(x, y) \pm g(x, y)$, добуток $f(x, y) \cdot g(x, y)$, частка $\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ (при $g(x_0, y_0) \neq 0$).

Теорема 5. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена на цій множині.

Теорема 6. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то на цій множині вона має найменше і найбільше значення.

Частинні похідні та повний диференціал функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$. Надамо незалежним змінним x і y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ містилась у вказаному околі. Тоді точки $K(x_0 + \Delta x; y_0)$, $M(x_0; y_0 + \Delta y)$ також належать цьому околу (див. рис. 18.3).

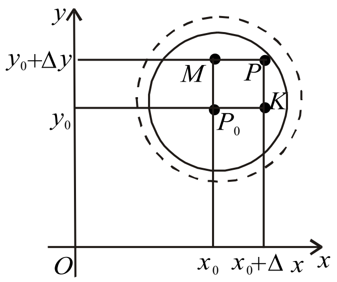


Рис. 18.3

Частинним приростом функції $z = f(x, y)$ *за змінною x* називають величину $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$. Аналогічно розглядають *частинний приріст* функції *за змінною y, тобто* $\Delta_y z = \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ називають різницю

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Повного приросту функція набуває при переході від точки $(x_0; y_0)$ до точки $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$.

Частинною похідною функції $z = f(x,y)$ *за змінною x (по x)* в точці $(x_0; y_0)$ називається границя відношення ч*астинного приросту функції по x до приросту* змінної *x* при $\Delta x \to 0$ (якщо ця границя існує). Позначають частинну похідну по *x* через z'_x, $f'_x(x_0, y_0)$ або $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Аналогічно розглядають *частинну похідну* функції $z = f(x,y)$ *за змінною y (по y*). Позначають її через z'_y, $f'_y(x_0, y_0)$ або $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$. Отже, $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, $z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Зауважимо, що при знаходженні z'_x змінна *y* вважається *сталою* (*y=const*), а при знаходженні z'_y змінна *x* вважається *сталою (x=const*). Тому частинні похідні шукають за тими самими правилами і формулами диференціювання, що й похідні функції однієї змінної.

Розглянемо *геометричний зміст частинних похідних.* Нехай функція $z = f(x,y)$ має частинні похідні в точці $(x_0; y_0)$, З геометричної точки зору умова $y = y_0$ означає, що поверхня $z = f(x,y)$ перетинається площиною $y = y_0$, паралельною координатній площині Oxz. При перетині поверхні площиною маємо лінію. Тоді $f'_x(x_0, y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до цієї лінії в точці $(x_0; y_0)$. Аналогічно, $f'_y(x_0, y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної в точці $(x_0; y_0)$ до кривої, яка утворюється в результаті перетину поверхні $z = f(x,y)$ площиною $x = x_0$ (див. рис. 18.4).

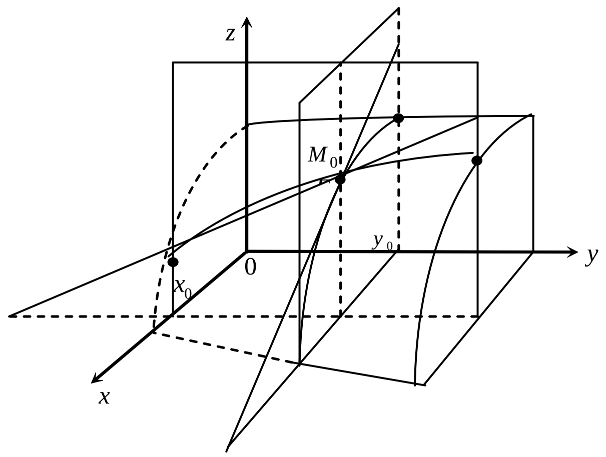


Рис. 18.4

Функція $z = f(x,y)$ називається *диференційовною* в точці $(x; y)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{18.1}$$

де *A*, *B* – числа, α, β – нескінченно малі при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Теорема 7. Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $(x;y)$, то вона неперервна в цій точці.

Теорема 8 (*необхідна умова диференційовності функції*). Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $(x;y)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Можна показати, що у рівності (1) $A = z'_x$, $B = z'_y$, тобто

$$\Delta z = z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\,. \qquad (18.2)$$

Теорема 9 (достатня умова диференційовності функції). Якщо функція $z = f(x,y)$ в деякому околі точки $(x;y)$ має неперервні частинні похідні z'_x і z'_y, то вона диференційовна в цій точці.

*Повним диференціалом (*або просто *диференціалом) функції* двох змінних $z = f(x,y)$ у точці $(x;y)$ називається головна лінійна частина приросту функції і позначається dz , тобто з рівності (18.2) маємо

$$dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y \quad \text{або} \qquad df(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y\,.$$

Оскільки диференціали незалежних змінних співпадають з їх приростами $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то повний диференціал функції можна обчислити так

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \qquad (18.3)$$

Повний диференціал функції двох змінних застосовують у наближених обчисленнях. Для точки $(x_0;y_0)$ формулу (18.2) можна переписати у вигляді

$$\Delta f\left(x_0,y_0\right) = f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y\,.$$

Оскільки α, β – нескінченно малі при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$, то дістаємо наближену рівність, у правій частині якої записано диференціал $df(x,y)$

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0,y_0\right) \approx f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y.$$

З останньою рівності дістаємо формулу *використання диференціала для наближених обчислень*

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) \approx f\left(x_0,y_0\right) + f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y. \qquad (18.4)$$

Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай поверхню у просторі задано рівнянням $F\left(x,y,z\right)=0$, тоді рівняння дотичної площини до цієї поверхні в точці $\left(x_0;y_0;z_0\right)$ має вигляд:

$$F'_x\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(x-x_0\right) + F'_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(y-y_0\right) + F'_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(z-z_0\right) = 0\,.$$

Нормаль до поверхні в точці $\left(x_0;y_0;z_0\right)$ – це пряма, що проходить через точку $\left(x_0;y_0;z_0\right)$ перпендикулярно до дотичної площини. Отже, її канонічне рівняння має вигляд

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}. \qquad (18.5)$$

Якщо поверхню у просторі задано функцією $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні знаходять за формулами

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти область визначення функцій

а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; б) $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$.

Розв’язання. а) Функція $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ визначена, якщо підкореневий вираз у знаменнику $1-x^2-y^2>0$ або $x^2+y^2<1$. Останню нерівність задовольняють точки круга з центром у початку координат і радіусом 1 (виключаючи точки кола).

б) В аналітичному виразі функції $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$ перший доданок визначений при $-1\le\dfrac{x}{2}\le 1$, тобто $-2\le x\le 2$. У другому доданку підкореневий вираз $xy\ge 0$, тобто при $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$ або $\begin{cases}x\le 0\\ y\le 0\end{cases}$. Зобразимо область визначення функції (див. рис. 18.5).

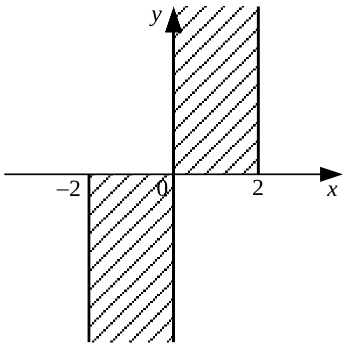


Рис. 18.5

Приклад 2. Знайти та зобразити область визначення функції $z=\dfrac{\ln\left(4-x^2-y^2\right)}{\sqrt{4x-y}}$.

Розв'язання. З умов існування логарифмічної функції та квадратного кореня (в знаменнику) маємо дві нерівності $4 - x^2 - y^2 > 0,\ \ 4x - y > 0$. Тому область визначення функції можна записати у вигляді

$$D = \left\{ (x; y) \in R^2 \middle|\ x^2 + y^2 < 4,\ y < 4x \right\}.$$

Замінивши знайдені нерівності відповідними рівностями, будуємо лінії, що їм відповідають на координатній площині, тобто коло $x^2 + y^2 = 4$ і пряму $y = 4x$. За допомогою довільної точки визначаємо розміщення області D на площині. Підставивши координати точки $M(1; 1)$ в нерівність $x^2 + y^2 < 4$, дістанемо $1^2 + 1^2 < 4$. Оскільки точка задовольняє цю нерівність, то маємо внутрішність кола $x^2 + y^2 = 4$, в якій лежить ця точка. Аналогічно підставимо координати точки $M(1; 1)$ у нерівність $y < 4x$, маємо $1 < 4$. Отже, ця нерівність визначає праву півплощину (під прямою $y = 4x$), якій належить точка $M(1; 1)$. Спільна частина цих множин і буде областю визначення даної функції.

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} \dfrac{x^2 + y^3}{2x - 3y}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} x = 2$, $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} y = 1$, за теоремою 1 про арифметичні дії під знаком границі, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(2;1)} \frac{x^2 + y^3}{2x - 3y} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} \left(x^2 + y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} (2x - 3y)} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} x^2 + \lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} y^3}{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} 2x - 3 \cdot \lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} y} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = 5.$$

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1 + 2xy)}{\sin 3xy}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $t = xy$. Оскільки $(x; y) \to (0; 0)$, то $t \to 0$, тоді задану границю можна переписати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1 + 2t)}{\sin 3t}$. При $t \to 0$ маємо $\ln(1 + 2t) \sim 2t$; $\sin 3t \sim 3t$, тобто $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1 + 2t)}{\sin 3t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t}{3t} = \dfrac{2}{3}$. Таким чином,

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{(1 + 2xy)}{\sin 3xy} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 5. Показати, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Розв'язання. Будемо наближатися до точки (0;0) по прямій $y = kx$, тоді

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2xkx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Отже, значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, вздовж якої наближаємось до точки (0;0). Зокрема, при $k=1$ границя дорівнює 1, а при $k=2$ границя дорівнює $\frac{4}{5}$. Таким чином, границя $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію двох змінних

1) $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 1, & x^2+y^2=0. \end{cases}$

Розв'язання. 1) Функція $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ неперервна в усіх точках площини, крім точки (0;0). Вона має розрив у точці (0;0), бо в цій точці не існує границя функції $f(x;y)$ (див. попередній приклад).

2) Функція $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 1, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ неперервна в усіх точках площини, включаючи точку (0;0). Дійсно, границя функції в точці (0,0) дорівнює значенню функції в цій точці

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\left|\begin{matrix} t=x^2+y^2, \\ t\to 0 \end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1=f(0,0).$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні функції $z=x^2y+xy^2$.

Розв'язання. Знайдемо z'_x, вважаючи $y=\text{const}$, маємо $z'_x=2xy+y^2$. При обчисленні z'_y вважаємо $x=\text{const}$, тому $z'_y=x^2+2xy$.

Приклад 8. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z=x^3y+\sin\left(x^2+\sqrt{y}\right)+\ln y$.

Розв'язання. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y=\text{const}$, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)\cdot 2x=3x^2y+2x\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right).$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x=\text{const}$. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{y}=x^3+\frac{\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{y}.$$

Приклад 9. Знайти частинні похідні для функцій

а) $z = 3x^2y + x^2 - y^2 + 5$; б) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. а) Знайдемо частинні похідні функції $z = 3x^2y + x^2 - y^2 + 5$. Вважаючи y сталою, знаходимо частинну похідну за змінною x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y \cdot \left(x^2\right)'_x + \left(x^2\right)'_x - \left(y^2\right)'_x + \left(5\right)'_x = 3y \cdot 2x + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо частинну похідну за змінною y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot \left(y\right)'_y + \left(x^2\right)'_y - \left(y^2\right)'_y + \left(5\right)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 = 3x^2 - 2y.$$

б) Для функції $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ знайдемо частинні похідні, враховуючи правило диференціювання складної функції. Дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(x^2 - y^2\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Приклад 10. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні заданої функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)'_x = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_x = \operatorname{ctg}\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{1}{\sin\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y \cdot \frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}} = \frac{2}{y \cdot \sin\frac{2x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)'_y = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_y = \operatorname{ctg}\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2 \cdot \sin\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{x}{y}} = \frac{-x}{y^2 \cdot \frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}} = \frac{-2x}{y^2 \cdot \sin\frac{2x}{y}}.$$

Приклад 11. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні заданої функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-y\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot(y)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x}.$$

Приклад 12. Знайти частинні похідні першого порядку функції трьох змінних $u=x^3y^2z+2x-3y+z+5$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні для заданої функції трьох змінних. Вважаючи y та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_x=y^2z\left(x^3\right)'_x+\left(2x\right)'_x-\left(3y\right)'_x+\left(z\right)'_x+\left(5\right)'_x=$$

$$=y^2z\cdot 3x^2+2-0+0+0=3x^2y^2z+2.$$

Вважаючи x та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_y=x^3z\left(y^2\right)'_y+\left(2x\right)'_y-\left(3y\right)'_y+\left(z\right)'_y+\left(5\right)'_y=$$

$$=x^3\cdot z\cdot 2y+0-3+0+0=2x^3yz-3.$$

Вважаючи x та y сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_z=x^3y^2\left(z\right)'_z+\left(2x\right)'_z-\left(3y\right)'_z+\left(z\right)'_z+\left(5\right)'_y=$$

$$=x^3y^2\cdot 1+0-0+1+0=x^3y^2+1.$$

Приклад 13. Для функції $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ показати, що $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні для функції $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}\cdot(x)'_x=$$

$$=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1=\frac{y}{y^2+x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)_y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)_y'$$

$$=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{-x}{y^2+x^2}.$$

Отже, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy}{y^2+x^2}-\frac{xy}{y^2+x^2}=0$.

Приклад 14. Знайти повний диференціал функцій

а) $z=x^2y^3$; б) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

Розв'язання. а) Знайдемо частинні похідні та повний диференціал функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2y^3\right)_x'=2xy^3,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y^3\right)_y'=x^2\cdot 3y^2=3x^2y^2,$$

$$dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy.$$

б) Аналогічно для функції $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_x'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_y'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y,$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

Приклад 15. Знайти повний диференціал функції $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні та повний диференціал функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_x'=2\sin x\cdot\left(\sin x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_y'=2\cos y\cdot\left(\cos y\right)'=-2\cos y\cdot\sin y=-\sin 2y,$$

$$dz=\sin 2x\,dx+\left(-\sin 2y\right)dy.$$

Приклад 16. Знайти повний диференціал функції $f\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $P\left(3;4\right)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні та повний диференціал функції, а потім його значення у точці $P\left(3;4\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x'=\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_x'=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$df\left(3,4\right)=\frac{-3}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dx-\frac{4}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dy=-\frac{3}{125}dx-\frac{4}{125}dy=$$

$$=-\frac{1}{125}(3dx+4dy).$$

Приклад 17. Обчислити наближено $1{,}02^{3{,}01}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x;y)=x^y$. Покладемо $x_0=1,\ y_0=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$. Для обчислення наближеного значення функції використаємо формулу

$$f\left(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0;y_0\right)+f'_x\left(x_0;y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0;y_0\right)\Delta y.$$

Значення функції в точці $\left(x_0;y_0\right)$ дорівнює $f\left(1;3\right)=1^3=1$. Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці $\left(x_0;y_0\right)$, дістанемо

$$f'_x=y\cdot x^{y-1},\ f'_y=x^y\ln x\quad\Rightarrow\quad f'_x(1;3)=3\cdot 1^2=3,\ f'_y(1;3)=1^3\ln 1=0.$$

Тоді наближене значення функції

$$1{,}02^{3{,}01}\approx 1+3\cdot 0{,}02+0\cdot 0{,}01=1{,}06.$$

Приклад 18. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=\frac{x}{y}$, де $x=e^t$, $y=\ln t$.

Розв'язання. Знайдемо похідну складної функції $z=f(x(t),y(t))$ за формулою
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Для цього визначимо відповідні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)'_y=-\frac{x}{y^2},\qquad \frac{dx}{dt}=\left(e^t\right)'=e^t,\quad \frac{dy}{dt}=\left(\ln t\right)'=\frac{1}{t}.$$

Дістанемо $\frac{dz}{dt}=\frac{1}{y}\cdot e^t-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{\ln t}\cdot e^t-\frac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\frac{1}{t}=\frac{e^t}{\ln t}\left(1-\frac{1}{t\ln^2 t}\right).$

Приклад 19. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=x^2y$, де $x=u\cdot v,\ y=\frac{u}{v}$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні та використаємо формули

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy=2uv\cdot\frac{u}{v}=2u^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2=(uv)^2$, $\frac{\partial x}{\partial u}=v$, $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{v}$, $\frac{\partial x}{\partial v}=u$, $\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$, то $\frac{\partial z}{\partial u}=2u^2v+u^2v^2\frac{1}{v}=3u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial v}=2u^2u+u^2v^2\left(-\frac{u}{v^2}\right)=2u^3-u^3=u^3$.

Приклад 20. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ в точці $(2;-1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці $M(2;-1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=2.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі знайдемо за формулами

$$z-z_0=f_x'(x_0,\,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,\,y_0)(y-y_0),$$

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,\,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,\,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Отже, рівняння дотичної площини таке

$$z-1=2(x-2)+2(y+1)\ \Rightarrow\ 2x+2y-z-1=0,$$

а рівняння нормалі до заданої поверхні має вигляд

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Приклад 21. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до еліпсоїда $2x^2+y^2+z^2=15$ у точці $M_0(1;2;3)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, заданої в неявному вигляді, знайдемо за формулами

$$F_x'(x_0,\,y_0,\,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,\,y_0,\,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,\,y_0,\,z_0)(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,\,y_0,\,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,\,y_0,\,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,\,y_0,\,z_0)}.$$

Задана поверхня (еліпсоїд) визначається рівнянням $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-15$. Частинні похідні цієї функції мають вигляд: $F_x'=4x$, $F_y'=2y$, $F_z'=2z$. Знайдемо їх значення у точці $M_0(1;2;3)$, маємо $F_x'(M_0)=4\cdot1=4$, $F_y'(M_0)=2\cdot2=4$, $F_z'(M_0)=2\cdot3=6$.

Підставивши ці значення у відповідні формули, дістанемо рівняння дотичної площини та нормалі

$$4(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,\ \text{тобто}\ \ 2x+2y+3z-15=0;$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}, \text{ тобто } \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

Приклад 22. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2+y^2-z^2+4=0$ в точці (1; 2; 3).

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції $F=x^2+y^2-z^2+1$ в точці (1;2;3). Оскільки $F'_x=2x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-2z$, то

$$F'_x(1;2;3)=2,\ \ F'_y(1;2;3)=4,\ \ F'_z(1;2;3)=-6.$$

Тоді рівняння дотичної площини в точці (1;2;3) має вигляд

$$2(x-2)+4(y-2)-6(z-3)=0,$$

звідки маємо

$$x+2y-3z+3=0.$$

Рівняння нормалі до заданої поверхні в точці (1;2;3) має вигляд

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-6}, \text{ тобто } \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти та зобразити область визначення заданої функції:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$; б) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$;

в) $z=\ln(y^2-4x+8)$; г) $z=\frac{xy}{\ln(x-y)}$;

д) $z=\frac{x}{y}+\frac{\sin y}{\sqrt{x}}$; е) $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$.

2. Знайти частинні похідні даної функції:

а) $z=x^3y-y^3x+2y^2-3x+4$; б) $z=x^2+x^2y-9y+5$;

в) $z=\sin(x^2y+e^{-x})$; г) $z=tg^3(xy+1)$;

д) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; е) $z=\ln\frac{x+y}{\sqrt{x}}$.

3. Показати, що для заданої функції виконується умова $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $z=\ln(x^2+y^2)$.

4. Знайти повний диференціал функції:

а) $z=(x^3y+xy^2-y+x)^5$; б) $z=(xy+x^3y^2+2x)^3$;

в) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; г) $z=\ln\dfrac{1+xy}{x^2}$.

5. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=f(x,y)$ у точці M

а) $z=x^2+\dfrac{y^2}{2}$, $M(1;-2;3)$; б) $z=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}$, $M(2;-2;1)$.

§ 19. Похідна функції за напрямом. Градієнт функції. Частинні похідні вищих порядків. Екстремум функції двох змінних

Похідна функції за напрямом. Градієнт функції двох змінних

Нехай функція $z=f(x,y)$ неперервна та має неперервні частинні похідні в деякій області D. Розглянемо точку $P_0(x_0;y_0)\in D$ і вектор $\vec{l}$, проведений з цієї точки, який має напрямні косинуси $\cos\alpha,\cos\beta$. Надамо приростів $\Delta x,\Delta y$ аргументам так, щоб точка $P(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ належала цьому вектору (рис. 1). Позначимо через Δl довжину відрізка P_0P, тобто $\Delta l=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Тоді повний приріст функції $z=f(x,y)$ в напрямку вектора $\vec{l}$ можна записати у вигляді $\Delta z_l=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ (див. рис. 19.1).

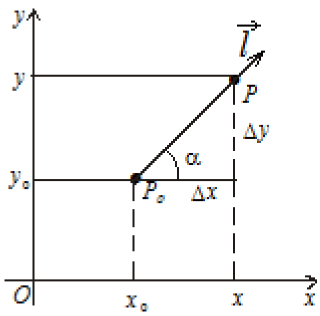


Рис. 19.1

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta z_l}{\Delta l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta l}$ відношення приросту функції в напрямку $\vec{l}$ до приросту аргументу в цьому напрямку, то її називають *похідною функції* $z=f(x,y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ *у точці* $(x_0;y_0)$ і позначають $z'_l(x_0;y_0)$ або $\dfrac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial l}$. Якщо похідну за напрямом розглядають в довільній точці $(x;y)$, то позначають z'_l або $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

Між похідною за напрямом та частинними похідними існує зв'язок. Зокрема, частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ є похідною функції z за додатним напрямом осі Ox, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ є похідною функції z за додатним напрямом осі Oy.

Похідна за напрямом $\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial l}$ характеризує *швидкість зміни функції* $z=f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$ за напрямом $\vec{l}$. З геометричної точки зору, похідна за напрямом $\vec{l}$ у точці $(x_0;y_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до лінії перетину поверхні $z=f(x,y)$ та площини, яка проходить через цю точку паралельно осі Oz та вектору $\vec{l}$.

Теорема. Якщо функція $z=f(x,y)$ має в точці $P_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ за напрямом, який визначається одиничним вектором $\vec{l}=(\cos\alpha;\cos\beta)$, причому

$$\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial l}=\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cos\beta. \qquad (19.1)$$

Якщо координати вектора є частинними похідними функції $z=f(x,y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$, то його називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(x_0;y_0)$. Отже,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(x_0;y_0)=\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\vec{j}.$$

У довільній точці $(x;y)$ градієнт функції записують так

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \qquad \text{або} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (19.2)$$

З формул (19.1) і (19.2) випливає, що похідна за напрямом $\vec{l}$ дорівнює скалярному добутку градієнта функції на вектор $\vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\cdot\vec{l}.$$

Оскільки вектор $\vec{l}$ є одиничним, то за означенням скалярного добутку маємо

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\right|\cdot\left|\vec{l}\right|\cdot\cos\varphi=\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\right|\cdot\cos\varphi, \qquad (19.3)$$

де φ – це кут між векторами $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z$ і $\vec{l}$.

З формули (19.3) випливає, що похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial l}$ набуває свого максимального значення, коли $\varphi = 0$, тобто вектори $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ і $\vec{l}$ співнапрямлені. Отже, градієнт $\overrightarrow{\text{grad}}\, z(x_0; y_0)$ – це вектор, який визначає напрям найбільшого зростання функції $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$.

Зазначимо, що градієнт функції двох змінних $\overrightarrow{\text{grad}}\, z(x_0; y_0)$ напрямлений перпендикулярно до лінії рівня $f(x, y) = C$, яка проходить через точку $(x_0; y_0)$.

Частинні похідні та диференціали функції вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційована в області D. Тоді в довільній точці $(x; y) \in D$ існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які теж є функціями двох змінних x і y. Якщо для них існують частинні похідні, то їх називають *частинними похідними другого порядку* і позначають так

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx} = (z'_x)'_x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy} = (z'_y)'_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xy} = (z'_x)'_y, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

Похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ називають частинними похідними першого порядку.

Аналогічно визначають частинні похідні третього і вищих порядків, зокрема

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

Частинною похідною n-го порядку називають частинну похідну від похідної (n-1)-го порядку. Якщо диференціювання відбувається за різними змінними, то частинні похідні називають *мішаними* похідними. Розглянемо теорему, яка визначає умови, при яких виконується рівність мішаних похідних.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена в області D і має в точці $(x; y) \in D$ неперервні частинні похідні першого порядку f'_x, f'_y та другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то в цій точці виконується рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Розглянемо диференціали вищих порядків. Нехай функція $z = f(x, y)$ двічі диференційована в деякій точці $(x; y) \in D$.

Диференціалом другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Отже, за означенням маємо

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right), \qquad \ldots, \qquad d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Екстремум функції двох змінних

Розглянемо функцію двох змінних. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x; y) \neq (x_0; y_0)$ цього околу виконується нерівність $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $\left(f(x, y) > f(x_0, y_0)\right)$, тоді точка $(x_0; y_0)$ називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x, y)$. Точки максимуму й мінімуму називають *точками екстремуму функції*. Дамо геометричну ілюстрацію точок екстремуму функції двох змінних. На рис. 19.2 зображено точку максимуму, а на рис. 19.3 – точку мінімуму функції $z = f(x, y)$, яка задає відповідну поверхню.

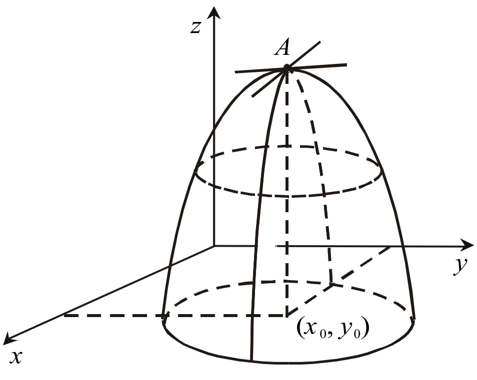


Рис. 19.2

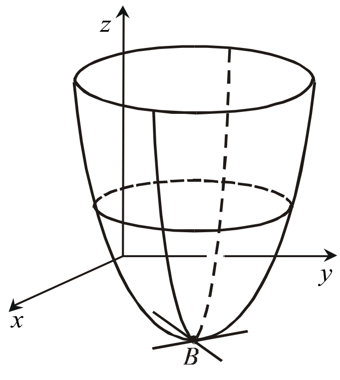


Рис. 19.3

Теорема 1 (необхідна умова існування екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ і має в цій точці екстремум, тоді в точці $(x_0; y_0)$ частинні похідні функції дорівнюють нулю

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{19.4}$$

Точки, в яких функція визначена, а її частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ дорівнюють нулю, називають *стаціонарними* точками цієї функції. Стаціонарні точки та точки, в яких не існує хоча б одна з частинних похідних функції, називають її *критичними точками*. Точки екстремуму функції треба шукати тільки серед її критичних точок.

Умова (19.4) не є достатньою умовою існування екстремуму функції. Зокрема, для функції $z = xy$ ця умова виконується в точці (0;0), але ця точка не є точкою екстремуму для даної функції.

Теорема 2 (достатня умова існування екстремуму). Нехай функція $z = f(x, y)$ має в околі точки $(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні першого і другого порядку, причому $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Якщо $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, $\Delta = AC - B^2$, то при $\Delta > 0$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $(x_0; y_0)$, а саме: при $A < 0$ точка $(x_0; y_0)$ є точкою максимуму, а при $A > 0$ є точкою мінімуму функції $z = f(x, y)$. Якщо $\Delta < 0$, то точка $(x_0; y_0)$ не є точкою екстремуму, а при $\Delta = 0$ потрібні додаткові дослідження.

Розглянемо *алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум.*

1. Знайти область визначення функції $z = f(x, y)$.

2. Знайти частинні похідні першого порядку $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

3. Знайти стаціонарні точки, тобто точки з області визначення функції, в яких $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$..

4. Знайти частинні похідні другого порядку $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$.

5. Для кожної стаціонарної точки $(x_0; y_0)$ обчислити $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, $\Delta = AC - B^2$. Користуючись достатньою умовою існування екстремуму, визначити, чи є знайдені точки точками екстремуму.

6. Обчислити значення функції в точках екстремуму (якщо вони існують).

Найбільше і найменше значення функції на замкненій множині

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна на замкненій множині D, тоді вона досягає на цій множині свого *найбільшого та найменшого значень*. Функція може набувати цих значень як у внутрішніх точках множини D (критичних точках функції), так і на її межі. Для цього потрібно провести дослідження функції всередині множини D та у межових точках множини.

Розглянемо *алгоритм визначення найбільшого та найменшого значеньфункції двох змінних на замкненій множині.*

1. Знайти область визначення функції $z = f(x, y)$; перевірити, чи належить їй задана множина D.

2. Знайти критичні точки функції, які належать множині D, і обчислити значення функції в цих точках.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції на межі множини D, враховуючи рівняння ліній, які утворюють цю межу.

4. Серед значень функції $z = f(x, y)$, обчислених у всіх знайдених точках, вибрати найменше та найбільше значення, які і будуть найменшими і найбільшими значеннями функції на замкненій множині D.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти похідну функції $z = x^2 + y^2 x$ в точці $A(1;2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;0)$.

Розв’язання. Спочатку визначимо координати та довжину вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}=(3-1;\ 0-2)=(2;\ -2), \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Обчислимо напрямні косинуси вектора, поділивши відповідну координату на довжину $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, тобто

$$\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\beta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Знайдемо частинні похідні функції та обчислимо їх значення в точці (1;2)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = 6,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)} = 4.$$

Тоді за формулою (1) маємо похідну за напрямом

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $z = 2x^2 - 3y^2$ у точці $P(1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, який утворює з віссю Ox кут 120°.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення в точці $P(1; -1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = 6.$$

Визначимо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, маємо

$$\cos\alpha = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді за формулою $\frac{\partial z}{\partial l} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P \cdot \cos\beta$ дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 + 3\sqrt{3}.$$

Приклад 3. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ в точці $P(1; 1)$.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні та їх значення в заданій точці.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy\,,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=2\cdot1\cdot1=2\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\,,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=1^2=1\,.$$

Отже, $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z(P)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P\vec{j}=2\,\vec{i}+\vec{j}$.

Приклад 4. Знайти градієнт функції $z=2-x^2-2y^2-xy$ в точці (1;2).

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці (1;2)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)}=\left(-2x-y\right)\Big|_{(1;2)}=-4,\qquad\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;\,2)}=\left(-4y-x\right)\Big|_{(1;\,2)}=-9.$$

Тоді $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z(1;2)=-4\,\vec{i}-9\,\vec{j}$.

Приклад 5. Знайти похідну функції $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ у точці $P\left(3;1\right)$ за напрямом від цієї точки до точки $N\left(6;5\right)$. Знайти градієнт функції цій у точці.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції та їх значення у точці P

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6xy+3y^2;\qquad\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=3\cdot3^2-6\cdot3\cdot1+3\cdot1^2=12\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3x^2+6xy\,;\qquad\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=-3\cdot3^2+6\cdot3\cdot1=-9\,.$$

Тоді градієнт даної функції в точці $P\left(3;1\right)$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z(P)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P\vec{j}=12\,\vec{i}-9\,\vec{j}\,.$$

Визначимо координати вектора $\vec{l}=\overrightarrow{PN}$, тобто $\vec{l}=(6-3;5-1)=(3;4)$. Оскільки довжина вектора $\left|\vec{l}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$, то координати його орта $\vec{l}_0=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$. Отже, напрямні косинуси вектора $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$.

Тоді похідна функції $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ за напрямом $\vec{l}=\overrightarrow{PN}$ дорівнює

$$\frac{\partial z}{\partial l}=12\cdot\frac{3}{5}+\left(-9\right)\cdot\frac{4}{5}=0\,.$$

Приклад 6. Для функції $z=x^3-3x^2y^2+2xy^3-3x+2y$ знайти частинні похідні другого порядку.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку z'_x, z'_y

$$z'_x=3x^2-6xy^2+2y^3-3,\qquad\quad z'_y=-6x^2y+6xy^2+2\,,$$

тоді частинні похідні другого порядку визначають так

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(3x^2-6xy^2+2y^3-3)'_x=6x-6y^2,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 - 6xy^2 + 2y^3 - 3)'_y = -12xy + 6y^2 = z''_{yx},$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-6x^2 y + 6xy^2 + 2)'_y = -6x^2 + 12xy.$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні другого порядку для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right),$$

тоді частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Зазначимо, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад 8. Знайти частинні похідні другого порядку для функції $z = \cos\left(xy\right)$. Показати, що для функції z виконується умова $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\cos\left(xy\right)\right)'_x = -\sin\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)'_x = -y\sin\left(xy\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\cos\left(xy\right)\right)'_y = -\sin\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)'_y = -x\sin\left(xy\right),$$

тоді частинні похідні другого порядку мають вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-y\sin\left(xy\right)\right)'_x = -y\cdot\cos\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)'_x = -y^2\cos\left(xy\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x\sin\left(xy\right)\right)'_y = -x\cdot\cos\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)'_y = -x^2\cos\left(xy\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-y\sin\left(xy\right)\right)'_y = -\Big(\left(y\right)'_y\cdot\sin\left(xy\right) + \left(\sin\left(xy\right)\right)'_y\cdot y\Big) =$$

$$= -\Big(\sin\left(xy\right) + \cos\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)'_y\cdot y\Big) = -\left(\sin\left(xy\right) + xy\cos\left(xy\right)\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-x\sin\left(xy\right)\right)'_x = -\Big(\left(x\right)'_x\cdot\sin\left(xy\right) + \left(\sin\left(xy\right)\right)'_x\cdot x\Big) =$$

$$= -\left(\sin\left(xy\right) + xy\cos\left(xy\right)\right).$$

Перевіримо виконання заданої умови. Враховуючи знайдені частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, дістанемо

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2y^2\cos(xy)+y^2x^2\cos(xy)=0.$$

Приклад 9. Знайти d^2z, якщо $z=\sin x\cdot\sin y$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого і другого порядків

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x\sin y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\sin y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x\cos y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin x\sin y.$$

Тоді диференціал другого порядку має вигляд

$$d^2z=-\sin x\sin y dx^2+2\cos x\cos y\,dxdy-\sin x\sin y dy^2.$$

Приклад 10. Знайти екстремум функції $z=x^2+y^2+xy-2x-y$.

Розв'язання. Область визначення даної функції – це множина всіх точок координатної площини. Знайдемо частинні похідні $f'_x=2x+y-2$, $f'_y=2y+x-1$. З необхідної умови існування екстремуму $f'_x(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases}2x+y-2=0,\\ x+2y-1=0.\end{cases}$$

Розв'язавши систему, дістанемо стаціонарну точку $M(1;0)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку $f''_{xx}(x,y)=2,\quad f''_{xy}(x,y)=1,\quad f''_{yy}(x,y)=2,$ перевіримо виконання достатньої умови існування екстремуму в стаціонарній точці. Для стаціонарної точки маємо $A=f''_{xx}(1,0)=2$, $B=f''_{xy}(1,0)=1$, $C=f''_{yy}(1,0)=2$, $\Delta=AC-B^2=2\cdot 2-1^2=3$. Оскільки Δ>0 і A>0, то в точці M маємо локальний мінімум. Отже, мінімальне значення функції дорівнює $z_{\min}=z(1,0)=1^2+0^2+1\cdot 0-2\cdot 1-0=-1$.

Приклад 11. Знайти екстремум функції $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

Розв'язання. Для знаходження стаціонарних точок даної функції знайдемо частинні похідні $f'_x=4\left(x^3-x+y\right)$, $f'_y=4\left(y^3+x-y\right)$ і прирівняємо їх до нуля. Дістанемо $\begin{cases}x^3-x+y=0,\\ y^3+x-y=0.\end{cases}$

Додаючи рівняння цієї системи, знаходимо, що $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$. Підставляючи $y = -x$ у перше рівняння системи, знаходимо, що $x^3 - 2x = 0$, тобто $x\left(x^2 - 2\right) = 0$. Звідси знаходимо стаціонарні точки: $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = -x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $y_3 = -x_3 = \sqrt{2}$.

Отже, функція має три стаціонарні точки: $\mathrm{O}(0,0)$, $M_1\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Для кожної з цих точок знайдемо величини $A = f''_{xx} = 12x^2 - 4$, $B = f''_{xy} = 4$, $C = f''_{yy} = 12y^2 - 4$, $\Delta = AC - B^2$.

Для стаціонарної точки $\mathrm{O}(0,0)$ маємо $A = -4 = C$, $B = 4$, $\Delta = 0$. Оскільки $\Delta = 0$, то у цій точці достатню умову застосувати не можна. Переконаємось, що у цій точці екстремум відсутній. Нехай $y = 0$, тоді $f(x,y) = x^4 - 2x^2 = x^2\left(x^2 - 2\right)$ і в околі точки $f(x,y) < 0$. Тепер візьмемо $y = x$, $f(x,y) = 2x^4 > 0$. Отримали, що $f(0;0) = 0$, а в околі цієї точки функція має різні знаки, тому екстремум у точці $\mathrm{O}(0,0)$ відсутній.

У точках $M_1\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ знаходимо значення коефіцієнтів $A = 12 \cdot 2 - 4 = 20$, $B = 4$, $C = 12 \cdot 2 - 4 = 20$, $\Delta = 20 \cdot 20 - 4^2 = 384 > 0$. У цих точках є екстремум. Оскільки для кожної з цих точок коефіцієнт A додатний, то $M_1\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ є точками мінімуму, при цьому $f_{min} = f(M_1) = f(M_2) = -8$.

Приклад 12. Дослідити функцію $z = 3\left(x^2 + y^2\right) - x^3 + 4y$ на екстремум.

Розв'язання. Областю визначення функції є всі точки координатної площини. Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$f'_x = 6x - 3x^2, \qquad f'_y = 6y + 4.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0, \\ 6y + 4 = 0, \end{cases}$ знайдемо критичні точки $M_1(0;-2/3)$ і $M_2(2;-2/3)$. Визначимо частинні похідні другого порядку

$$f''_{xx}(x,y) = 6 - 6x, \quad f''_{xy}(x;y) = 0, \quad f''_{yy}(x;y) = 6.$$

У точці $M_1(0;-2/3)$ обчислимо $A = f''_{xx}(0,-2/3) = 6$, $B = f''_{xy}(0,-2/3) = 0$, $C = f''_{yy}(0,-2/3) = 6$. Оскільки $\Delta = 6 \cdot 6 - 0^2 = 36 > 0$, то $M_1(0;-2/3)$ є точкою мінімуму.

Для точки $M_2(2;-2/3)$ дістаємо $A=f''_{xx}\left(2,-2/3\right)=6-12=-6$, $B=f''_{xy}\left(0,-2/3\right)=0$, $C=f''_{yy}\left(0,-2/3\right)=6$. Оскільки $\Delta=-6\cdot 6-0^2=-36<0$, то в точці $M_2(2;-2/3)$ екстремуму немає.

Обчислимо значення функції в точці мінімуму

$$z_{\min}=z\left(0;-\frac{2}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{9}-0-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Приклад 13. Визначити найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в області $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\ge -3$.

Розв'язання. Зазначена область є трикутником (див. рис. 19.4).

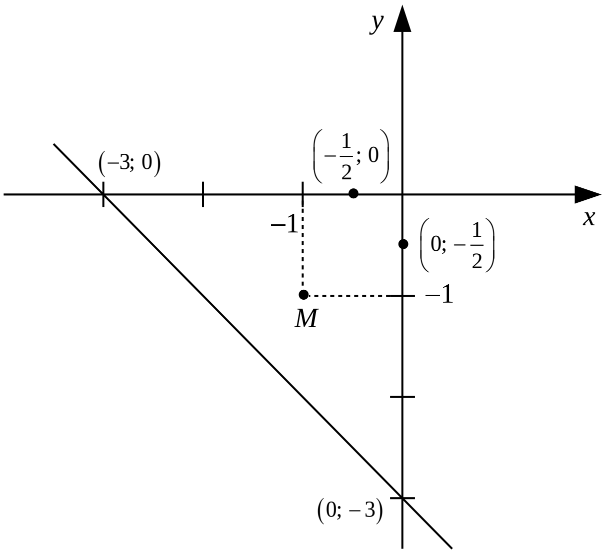


Рис. 19.4

Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x=2x-y+1$, $z'_y=2y-x+1$, $\begin{cases}2x-y+1=0\\2y-x+1=0\end{cases}$.

Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases}x=-1\\y=-1.\end{cases}$ Точка $M\left(-1;-1\right)$ належить заданій області. У точці M значення функції $z\left(M\right)=-1$.

Дослідимо функцію на межі області. Якщо $x=0$, то $z=y^2+y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3\le y\le 0$. Похідна функції $z'=\left(y^2+y\right)'=2y+1$.

Знайдемо критичні точки з умови $z'=0$: $2y+1=0$, $y=-\frac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $\left[-3,0\right]$. Знаходимо значення функції

$$z\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4},$$

$$z(-3)=(-3)^2-3=9-3=6, \quad z(0)=0+0=0.$$

При $y=0$ маємо $z=x^2+x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3\le x\le 0$. Маємо

$$z'=\left(x^2+x\right)'=2x+1, \quad z'=0: \quad 2x+1=0, \quad x=-\frac{1}{2}\in[-3, 0],$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}, \quad z(-3)=(-3)^2-3=6, \quad z(0)=0+0=0.$$

При $x+y=-3$, тобто $y=-3-x$, маємо на відрізку $-3\le x\le 0$ функцію

$$z=x^2+(-3-x)^2-x\cdot(-3-x)+x+(-3-x)=3x^2+9x+6.$$

Дослідження функції проведемо аналогічно попередньому.

$$z'=\left(3x^2+9x+6\right)'=6x+9, \quad z'=0: \quad 6x+9=0, \quad x=-\frac{3}{2}\in[-3, 0],$$

$$z\left(-\frac{3}{2}\right)=3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+6=-\frac{3}{4},$$

$$z(-3)=3\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+6=6, \quad z(0)=0+0+6=6.$$

Порівняємо всі знайдені значення функції z. Таким чином, $z_{\text{найб}}=6$ у точках $(0;\,-3)$ і $(-3;\,0)$; $z_{\text{найм}}=-1$ у стаціонарній точці $M(-1;\,-1)$.

Приклад 14. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3+y^3-3xy$ в області, обмеженій прямими $x=-1$, $x=2$, $y=-1$, $y=3-x$.

Розв'язання. Побудуємо область, обмежену даними лініями (див. рис. 19.5).

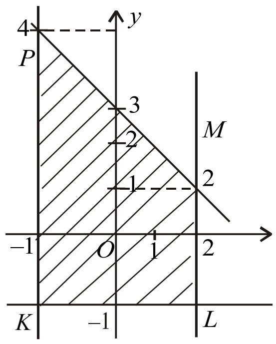


Рис. 19.5

Областю визначення заданої функції є вся координатна площина. Дослідимо поведінку функції всередині області *KLMP*. Знайдемо частинні похідні функції $z=x^3+y^3-3xy$, дістанемо $z'_x=3x^2-3y$, $z'_y=3y^2-3x$. Прирівнявши їх до нуля, дістанемо критичні точки $O(0;\,0)$ та $E(1;\,1)$.

Дослідимо поведінку функції на межі області. Відрізок *KL* задано рівнянням $y=-1$, $-1\le x\le 2$. Підставивши $y=-1$ у задану функцію, дістанемо $z=x^3-1+3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$. Оскільки $z' = 3x^2 + 3 > 0$, то функція зростає і тому досягає найменшого і найбільшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і $L(2;\ -1)$.

Відрізок LM задано рівнянням $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію від змінної y: $z = 8 + y^3 - 6y$. Оскільки $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\ 1]$, то функція z є спадною і досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\ -1)$ і $M(2;\ 1)$.

Відрізок PM задано рівнянням $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \dfrac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $N\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP задано рівнянням $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, задана функція може досягти свого найбільшого і найменшого значень тільки в точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;-1)$, $M(2;1)$, $P(-1;4)$, $N\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Обчислимо значення функції в цих точках $f(0;0) = 0$, $f(1;1) = -1$, $f(-1;-1) = -5$, $f(2;-1) = 13$, $f(2;1) = 3$, $f(-1;4) = 75$, $f\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right) = 0$. Отже, функція набуває свого найменшого і найбільшого значення на заданій множині в точках $K(-1;-1)$ і $P(-1;4)$, тобто

$$z_{\min} = z(-1;-1) = -5, \qquad z_{\max} = z(-1;4) = 75.$$

Найменше та найбільше значення функції часто доводиться шукати у прикладних задачах. Розглянемо одну з них.

Приклад 15. Відкритий прямокутний басейн повинен мати об’єм V. Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

Розв’язання. Нехай x – довжина, y – ширина, z – глибина басейну. Оскільки басейн має форму паралелепіпеда, то його об’єм $V = xyz$, звідки виразимо змінну $z=\dfrac{V}{xy}$. Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну, визначається площею поверхні паралелепіпеда (площа нижньої та бічних граней). Цю площу можна знайти за формулою

$$S = xy + 2yz + 2xz \quad \text{або} \quad S = S(x,y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\ x>0,\ y>0.$$

З умови задачі випливає, що потрібно знайти мінімум функції $S(x,y)$. Знайдемо частинні похідні функції

$$S'_x = y - \frac{2V}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{2V}{y^2}.$$

Визначимо стаціонарні точки функції S, прирівнявши частинні похідні до нуля, дістанемо систему

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $x = y = \sqrt[3]{2V}$. Отже, функція $S(x,y)$ має стаціонарну точку $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$. Перевіривши достатні умови існування екстремуму, переконуємось, що в цій точці функція досягає мінімуму, при цьому глибина басейну $z=\dfrac{V}{xy}=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

Таким чином, мінімальна кількість матеріалу буде витрачена при розмірах басейну $x=y=\sqrt[3]{2V}$, $z=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$, коли площа поверхні басейну $S_{\min}=3\sqrt[3]{4V^2}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідну функції z за напрямом вектора $\vec{l}$ в точці P і градієнт функції в цій точці

а) $z = x^2 - xy + y^2$, $P(1;1)$, $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$;

б) $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$, $P(-2;-1)$, $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j}$;

в) $z = 3x^2 + 4y^2 + x - 2y + 1$, $P(-1;\, 2)$, $\vec{l} = 3\vec{i} - \vec{j}$;

г) $z = \ln\left(x^2 + 2y^2\right)$, $P(1;1)$, $\vec{l} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$.

2. Для функції z знайти частинні похідні другого порядку

а) $z = x^3y - y^3x + 2y^2 - 3x + 4$; б) $z = x^2 + x^2y - 9y + 5$;

в) $z=\ln\left(x^2+y\right)$; г) $z=\arcsin(xy)$;

д) $z=\sqrt{2xy+y^2}$; е) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. Показати, що для функції z виконується вказана умова

а) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$, $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

б) $z=\sin^2\left(x+2y\right)$, $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

4. Для функції $f\left(x,\,y,\,z\right)=\ln\left(xy+z\right)$ знайти частинні похідні $f'_x,\,f'_y,\,f'_z$, їх значення в точці $(1;2;0)$ та повний диференціал.

5. Дослідити на екстремум функцію

а) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; б) $z=x^2-y^2+2xy-4x-8y+1$;

в) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$; г) $z=2xy-3x^2-2y^2+10$;

д) $z=4\left(x-y\right)-x^2-y^2$; е) $z=x^3+y^3+9xy$;

є) $z=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$; ж) $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2y\left(4-x-y\right)$ в трикутнику, обмеженому прямими $x=0,\,y=0,\,x+y=6$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=xy$ в крузі $x^2+y^2\le 1$.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте поняття функції багатьох змінних.
2. Як визначається функція двох змінних, її область визначення і графік?
3. Дайте означення границі функції двох змінних.
4. Сформулюйте поняття неперервності функції двох змінних.
5. Як визначаються частинні похідні для функції двох змінних?
6. Сформулюйте необхідну і достатню умови диференційованості функції двох змінних.
7. Дайте означення повного диференціала функції двох змінних та опишіть його застосування.
8. Як визначається похідна за напрямом функції двох змінних?
9. Дайте означення градієнта функції двох змінних.
10. Сформулюйте необхідну та достатню умови існування екстремуму.
11. Як визначається екстремум функції двох змінних?
12. Опишіть алгоритм визначення найбільшого та найменшого значень функції двох змінних на замкненій множині.

Розділ VI. Інтегральне числення функції однієї змінної

§ 20. Невизначений інтеграл, властивості та методи інтегрування

Означення та властивості невизначеного інтеграла

У диференціальному численні функції однієї змінної розглядалась задача знаходження похідної функції. Зокрема, за функцією шляху тіла визначалась його швидкість. Постає питання, як розв'язати обернену задачу і визначити функцію шляху, знаючи швидкість тіла. Інтегральне числення і займається розв'язанням оберненої задачі до диференціювання функції, а саме відшуканням самої функції (первісної) за її похідною.

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$.

З означення випливає, що первісна $F(x)$ є диференційованою функцією, тому вона неперервна на проміжку X.

Теорема 1. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то функція $F(x)+C$, де $C = const$, також є первісною для $f(x)$.

Дійсно, $(F(x)+C)' = (F(x))' = f(x)$. Таким чином, якщо функція $f(x)$ має хоча б одну первісну, то вона має нескінченну множину первісних.

Теорема 2. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку X, то множину всіх первісних на цьому проміжку можна подати у вигляді $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Отже, знайшовши для одну первісну, можна визначити всі інші первісні цієї функції. Наприклад, для функції $f(x) = \cos x$ всі первісні можна подати у вигляді $F(x) = \sin x + C$, де $C = const$, оскільки $F'(x) = (\sin x + C)' = \cos x$.

Операція знаходження первісних функції $f(x)$ називається *інтегруванням* цієї функції. Задача інтегрування функції на проміжку X полягає у тому, щоб знайти всі її первісні, або довести, що вона не має первісних на цьому проміжку.

Для розв'язання задачі інтегрування функції достатньо знайти будь-яку первісну $F(x)$ на розглядуваному проміжку, тоді за теоремою 2 множина всіх первісних на цьому проміжку має вигляд $F(x)+C$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку X називається сукупність всіх первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ на проміжку X, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{20.1}$$

де $\int$ – знак невизначеного інтеграла, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування, dx – диференціал цієї змінної.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що сукупність первісних $F(x)+C$ визначає *сім'ю кривих*, які утворюються паралельним перенесенням лінії $y=F(x)$ уздовж осі ординат.

Теорема 3 (достатня умова існування невизначеного інтеграла). Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку X, то вона інтегрована на ньому, тобто існує невизначений інтеграл від функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Зауважимо, що є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які існують, але не виражаються через елементарні функції. Вони називаються інтегралами, що «не беруться». Наприклад, інтеграл $\int \sqrt{x}\cdot\cos x\,dx$ «не береться», бо не існує такої елементарної функції, похідна від якої дорівнює $y=\sqrt{x}\cdot\cos x$. Такі інтеграли можна знайти за допомогою наближених чисельних методів. Деякі з них мають широке застосування. Зокрема,

$\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуассона (теорія ймовірностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм (теорія чисел),

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ – інтеграли Френеля (фізика),

$\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, – інтегральні синус та косинус.

Розглянемо *основні властивості невизначеного інтеграла*.

1) Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Дійсно, $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$.

2) Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Із попередньої властивості маємо $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

3) Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції з точністю до сталої: $\int dF(x) = F(x)+C$.

Дійсно, $\int dF(x) = \int\left(F'(x)dx\right) = \int f(x)dx = F(x)+C$.

4) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,\quad k\neq 0.$$

5) Невизначений інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx.$$

Зауважимо, що інтегрування функції (знаходження невизначених інтегралів) є набагато складнішою задачею, ніж диференціювання. Загальних правил інтегрування не існує, тому застосовують різні методи та підстановки залежно від вигляду підінтегральної функції.

При знаходженні невизначених інтегралів використовують *основні формули інтегрування*, подані у вигляді таблиці.

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 0\cdot dx=C$;

2. $\int dx=x+C$;

3. $\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$;

5. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0, a\neq 1$;

6. $\int e^x dx=e^x+C$;

7. $\int \cos x dx=\sin x+C$;

8. $\int \sin x dx=-\cos x+C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$;

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$;

13. $\int \dfrac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C$;

14. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$;

15. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$;

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$.

Методи інтегрування у невизначеному інтегралі

Розглянемо основні методи інтегрування: метод безпосереднього інтегрування, метод заміни змінної та метод інтегрування частинами.

1. *Метод безпосереднього інтегрування* базується на використанні властивостей невизначеного інтеграла. Розкладаючи підінтегральну функцію на доданки, заданий інтеграл зводиться до суми табличних інтегралів.

2. *Метод заміни змінної (метод підстановки)*.

За допомогою заміни змінної даний інтеграл зводять до такого інтеграла, який простіше інтегрується або є табличним. Зокрема, якщо підінтегральна функція є складною, то внутрішню функцію замінюють новою змінною, після чого інтеграл зводиться до табличного.

Метод заміни змінної базується на використанні формул

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (20.2)$$

або

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| t = \varphi(x) \right| = \int f(t)dt \qquad (20.3)$$

Зауважимо, що формулу (20.3) зручно використовувати, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$, тобто під інтегралом є деяка функція та її похідна. Тоді заміна цієї функції новою змінною дає можливість звести інтеграл до табличного.

Зауваження. Інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, якою є змінна інтегрування: незалежною змінною чи функцією (внаслідок інваріантності диференціала). Наприклад,

$$\left(\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right) \Rightarrow \left(\int (\sin x)^{\alpha} d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.\right.$$

Тому в деяких випадках при застосуванні формули (20.3) заміну змінної роблять усно, використовуючи операцію *внесення функції під знак диференціала*. Якщо $\int f(u)du = F(u) + C,$ то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Зокрема, коли φ(x) є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b,$ то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b) \cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Зазначимо, що під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок, оскільки значення диференціала при цьому не зміниться:

$$d\varphi(x) = d\left(\varphi(x) + C\right).$$

3. *Метод інтегрування частинами.*

Метод інтегрування частинами базується на використанні формули

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du, \qquad (20.4)$$

де функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ мають неперервні похідні.

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ визначають так. В інтегралі $\int f(x)dx$ підінтегральний вираз розбивають на два множники, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$. Функція $u(x)$ вибирається так, щоб вона спрощувалась при диференціюванні, але при цьому вираз dv повинен легко інтегруватись. При знаходженні функції v, тобто при інтегруванні виразу dv, вважають сталу $C = 0$.

Методом інтегрування частинами зручно обчислювати:

1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – дійсне число, причому за функцію u беруть множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)arctgx\,dx$, $\int P(x)arcctgx\,dx$, в яких вибирають $dv = P(x)dx$;

3) інтеграли виду $\int e^{kx}\cos\alpha xdx$, $\int e^{kx}\sin\alpha xdx$, де k,α – дійсні числа, після застосування формули (20.4) двічі утворюється рівняння відносно шуканого інтеграла, розв'язавши яке, знаходимо інтеграл.

Зауважимо, що в деяких випадках доводиться інтегрувати частинами кілька разів для того, щоб звести заданий інтеграл до табличного.

При знаходженні деяких інтегралів доводиться використовувати кілька методів інтегрування.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\left(x^2 + \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{x^2}\right)dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл дорівнює сумі табличних інтегралів:

$$\int\left(x^2 + \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int(x^2 + x^{3/4} - 2x^{-2})dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - \frac{2x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{2}{x} + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\left(4^x + 2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$.

Розв'язання. Використавши властивості невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\int\left(4^x + \sin x - \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx = \int 4^x dx + \int \sin xdx - 3\int\frac{dx}{\cos^2 x} = 4^x \ln 4 - \cos x - 3\text{tg}x + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли а) $\int\left(3-x^2\right)^2 dx$, б) $\int\frac{x^2dx}{x^2+3}$.

Розв'язання. а) Спочатку перетворимо підінтегральну функцію, а потім використаємо властивості невизначеного інтеграла і таблицю інтегралів. Маємо

$$\int\left(3-x^2\right)^2 dx=\int\left(9-6x^2+x^4\right)dx=9\int dx-6\int x^2dx+\int x^4dx=$$

$$=9x-6\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+C=9x-2x^3+\frac{1}{5}x^5+C.$$

б) Оскільки чисельник і знаменник підінтегральної функції відрізняються тільки сталим доданком, то після перетворень зведемо даний інтеграл до двох табличних інтегралів

$$\int\frac{x^2dx}{x^2+3}=\int\frac{(x^2+3)-3}{x^2+3}dx=\int 1\cdot dx-3\int\frac{dx}{x^2+3}=\int dx-3\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=x-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

Розв'язання. Скориставшись тригонометричною формулою, перетворимо підінтегральну функцію і зведемо даний інтеграл до двох табличних інтегралів

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\operatorname{tg}x dx$.

Розв'язання. Перетворивши підінтегральний вираз, маємо функцію та її похідну під знаком інтеграла. Зробивши заміну змінної, маємо

$$\int\operatorname{tg}x dx=\int\frac{\sin x dx}{\cos x}=\left|\begin{array}{c}t=\cos x\\ dt=d(\cos x)=-\sin x dx\end{array}\right|=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{5+3x}$.

Розв'язання. Внесемо під знак диференціала відповідну функцію, дістанемо

$$\int\frac{dx}{5+3x}=\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{5+3x}=\frac{1}{3}\int\frac{d(5+3x)}{5+3x}=\frac{1}{3}\ln|5+3x|+C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int (4-5x)^9\,dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної і зведемо інтеграл до табличного, дістанемо

$$\int (4-5x)^9\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 4-5x \\ dt = -5dx \\ dx = -\frac{1}{5}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{5}\int t^9 dt = -\frac{t^{10}}{5\cdot 10} + C = -\frac{(4-5x)^{10}}{50}.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

Розв'язання. Під інтегралом є складна функція, замінимо її внутрішню функцію і дістанемо табличний інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \int (1-2x)^{-\frac{2}{3}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-2x \\ dt = -2dx \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{2}{3}} dt = -\frac{3t^{\frac{1}{3}}}{2} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-2x} + C.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+4)$, внесемо x під знак диференціала. Маємо

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C.$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \frac{2xdx}{1+x^4}$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної і зведемо інтеграл до табличного. Оскільки під знаком інтеграла є похідна для функції x^2, то зробимо заміну $t = x^2$, дістанемо

$$\int \frac{2xdx}{1+x^4} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = d(x^2) \\ dt = 2xdx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctgx^2 + C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної і зведемо інтеграл до табличного. Оскільки під знаком інтеграла є функція $1+x^4$, для якої є похідна з точністю до сталої, то виконаємо підстановку $t=1+x^4$

$$\int\frac{x^3dx}{1+x^4}=\left|\begin{array}{c} t=1+x^4 \\ dt=4x^3dx \\ x^3dx=\dfrac{1}{4}dt \end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)+C.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

Розв'язання. Оскільки $d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$ то внесемо функцію під знак диференціала, маємо

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\cos\sqrt{x}\frac{dx}{2\sqrt{x}}=2\int\cos\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right)=2\sin\sqrt{x}+C.$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int x\sqrt{x-5}dx.$

Розв'язання. Використаємо метод заміни змінної, дістанемо

$$\int x\sqrt{x-5}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{x-5} \\ x=t^2+5 \\ dx=2tdt \end{array}\right|=\int(t^2+5)\cdot t\cdot 2tdt=2\int t^2(t^2+5)dt=$$

$$=2\int t^4dt+10\int t^2dt=\frac{2t^5}{5}+\frac{10t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5}+\frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3}+C.$$

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int x^2e^{x^3}dx$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є складна функція та існує похідна (з точністю до сталої) для її внутрішньої функції, то зробимо заміну і дістанемо табличний інтеграл

$$\int x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}dx=\left|\begin{array}{c} t=x^3 \\ dt=d\left(x^3\right)=3x^2dx \end{array}\right|=\frac{1}{3}\int e^tdt=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C\ .$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є функція та її похідна, то замінимо цю функцію новою змінною. Маємо

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}=\int\frac{1}{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{dx}{(1+x^2)}=\int\frac{d(\operatorname{arctg}x)}{\operatorname{arctg}x}=\ln|\operatorname{arctg}x|+C.$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \sin x \cos^5 x dx$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є функція та її похідна, то використавши метод заміни змінної, дістанемо

$$\int \sin x \cos^5 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int t^5 dt = -\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

Приклад 17. Знайти інтеграл $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної і зробимо підстановку $t = \sin 2x$, тоді $dt = 2\cos 2x dx$, $\cos 2x = \frac{1}{2} dt$. Маємо

$$\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{\sin 2x} + C.$$

Приклад 18. Знайти інтеграл $\int \frac{(2\ln x + 3)^3 dx}{x}$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є функція та її похідна, то замінимо цю функцію новою змінною, дістанемо

$$\int \frac{(2\ln x + 3)^3 dx}{x} = \int (2\ln x + 3)^3 \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} t = 2\ln x + 3 \\ dt = \frac{2dx}{x} \\ \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{8} t^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C.$$

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int \frac{x + e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Розв'язання. Для обчислення даного інтеграла розкладемо підінтегральну функцію в суму функцій. Маємо

$$\frac{x + e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Враховуючи, що $d(1 - x^2) = -2x dx$, тобто $x dx = -\frac{1}{2} d\left(1 - x^2\right)$, і зробивши заміну $u = \arcsin x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, дістанемо

$$\int \frac{x + e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)+\int e^u du=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1/2}+e^u+C=$$

$$=-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+e^{\arcsin x}+C=-\sqrt{1-x^2}+e^{\arcsin x}+C.$$

Приклад 20. Знайти інтеграли а) $\int x\sin xdx$, б) $\int x\ln xdx$.

Розв'язання. Для обчислення даних інтегралів використаємо метод інтегрування частинами.

а) За функцію $u(x)$ візьмемо степеневу функцію, оскільки вона спрощується при диференціюванні. При цьому вираз $dv=\sin xdx$ легко інтегрується. Отже, за формулою $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu$ дістанемо

$$\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx, \\ dv=\sin xdx, \\ v=\int dv=\int\sin xdx= \\ =-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

б) В якості функції $u(x)$ можна було б взяти степеневу функцію x, але інтеграл $\int dv=\int\ln xdx$ не є табличним, а для його обчислення теж потрібно використати метод інтегрування частинами. Тому візьмемо $u=\ln x$, тоді $dv=xdx$. За формулою інтегрування частинами маємо

$$\int x\ln xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x & dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{2\cdot 2}+C=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

Приклад 21. Обчислити інтеграл $\int(x+2)\cos xdx.$

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є добуток двох різнотипних функцій (степеневої і тригонометричної), то застосуємо метод інтегрування частинами, тобто формулу $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu$. Покладемо $u=x+2, dv=\cos xdx.$ Тоді $du=dx,\ v=\int\cos xdx=\sin x, C=0.$ Дістаємо

$$\int(x+2)\cos xdx=(x+2)\sin x-\int\sin xdx=(x+2)\sin x+\cos x+C.$$

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int x\cdot 7^x dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є добутком степеневої та показникової функцій, тому для обчислення інтеграла використаємо метод інтегрування частинами. За функцію u візьмемо степеневу функцію , оскільки вона спрощується при диференціюванні. При цьому вираз $dv = 7^x dx$ легко інтегрується. Дістаємо

$$\int x\cdot 7^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = 7^x dx \\ du = dx & v = \int 7^x dx = \dfrac{7^x}{\ln 7} \end{matrix} \right| = \frac{x\cdot 7^x}{\ln 7} - \int \frac{7^x}{\ln 7} dx =$$

$$= \frac{x\cdot 7^x}{\ln 7} - \frac{7^x}{\ln^2 7} + C = \frac{7^x}{\ln^2 7}\left(x\ln 7 - 1\right) + C.$$

Приклад 23. Знайти інтеграл $\int x^2 e^{5x} dx$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу інтегрування частинами двічі, знаходимо:

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2,\ du = 2xdx, \\ dv = e^{5x}dx, v = \dfrac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx, \\ dv = e^{5x}dx, v = \dfrac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{5}e^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx\right) = e^{5x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2}{25}x + \frac{2}{125}\right) + C.$$

Приклад 24. Обчислити інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл містить добуток степеневої на логарифмічну функцію, тому застосовуємо формулу інтегрування частинами. Дістанемо

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x^3 dx, \\ v = \int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$$

Приклад 25. Обчислити інтеграл $\int \ln(2x+1)dx$.

Розв'язання. Для інтегрування логарифмічної функції застосуємо формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int \ln(2x+1)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(2x+1),\ du = \dfrac{2dx}{2x+1}, \\ dv = dx,\ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln(2x+1) - \int \frac{2xdx}{2x+1} =$$

$$= x\ln(2x+1) - \int \frac{(2x+1)-1}{2x+1}dx = x\ln(2x+1) - \int dx + \int \frac{dx}{2x+1} =$$

$$=x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}=x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2x+1)(2x+1)-x+C.$$

Приклад 26. Знайти інтеграл $\int\arcsin x dx$.

Розв'язання. Для обчислення інтеграла від оберненої тригонометричної функції використаємо метод інтегрування частинами, маємо

$$\int\arcsin x dx=\left|\begin{array}{l} u=\arcsin x, \\ dv=dx, \\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ v=\int dx=x. \end{array}\right|=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Приклад 27. Знайти інтеграл $\int\operatorname{arcctg}2x dx$.

Розв'язання. Оскільки під знаком інтеграла є тільки одна функція (обернена тригонометрична), то її позначають через $u(x)$, тоді $dv=dx$. Використаємо спочатку метод інтегрування частинами, а потім метод заміни змінної. Дістанемо

$$\int\operatorname{arcctg}2x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arcctg}2x & dv=dx \\ du=-\dfrac{2dx}{1+4x^2} & v=x \end{array}\right|=x\operatorname{arcctg}2x-\int\left(-\frac{2x}{1+4x^2}\right)dx=$$

$$=x\operatorname{arcctg}2x+\frac{1}{4}\int\frac{8xdx}{1+4x^2}=\left|\begin{array}{l} t=1+4x^2 \\ dt=8xdx \end{array}\right|=x\operatorname{arcctg}2x+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=x\operatorname{arcctg}2x+\frac{1}{4}\ln|t|+C=x\operatorname{arcctg}2x+\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C.$$

Приклад 28. Обчислити інтеграл $\int x\operatorname{arctg}x dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int x\operatorname{arctg}x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg}x-x+\operatorname{arctg}x)+C.$$

Приклад 29. Знайти інтеграл $\int e^x \cos x dx$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є добуток показникової та тригонометричної функції, то для його обчислення двічі застосуємо метод інтегрування частинами. Маємо

$$I = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x, \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x, \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - I.$$

Отримали рівняння, з якого знаходимо даний інтеграл. Оскільки

$$I = e^x (\cos x + \sin x) - I, \qquad 2I = e^x (\cos x + \sin x),$$

то даний інтеграл дорівнює

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтеграли

а) $\int (9x^2 - 4x + 5) dx$; б) $\int (2^{3x} + 3x^2) dx$; в) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$;

г) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x}} dx$; д) $\int \frac{(2x-7)^2}{\sqrt{x}} dx$; е) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$;

ж) $\int \frac{5 - 4\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$; з) $\int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}} dx$.

2. Знайти інтеграли

а) $\int \frac{dx}{6x-5}$; б) $\int (2-4x)^3 dx$; в) $\int \sqrt[3]{(8-5x)^2} dx$;

г) $\int e^{7x} dx$; д) $\int \sin 3x dx$; е) $\int \cos \frac{x}{4} dx$;

ж) $\int \frac{dx}{(3x-2)^5}$; з) $\int \frac{dx}{16x^2 - 1}$; к) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

3. Знайти інтеграли

а) $\int \sin(4x+3) dx$; б) $\int \frac{x^5 dx}{2+x^6}$; в) $\int \frac{3x^2 dx}{1+x^6}$;

г) $\int \frac{e^x dx}{3+e^{2x}}$; д) $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$; е) $\int \frac{dx}{x(2-\ln^2 x)}$;

ж) $\int \frac{\sqrt{1+3\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$; з) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; к) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$.

4. Обчислити інтеграли

а) $\int x\sin 3x dx$; б) $\int x\cos 5x dx$; в) $\int \ln(x+1)dx$; г) $\int x\ln x dx$;

д) $\int x^2\cos 2x dx$; е) $\int x^2 e^{3x}dx$; ж) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; з) $\int \operatorname{arctg} 3x dx$;

к) $\int x\operatorname{arctg} x dx$; л) $\int x\arcsin x dx$; м) $\int e^{2x}\sin x dx$.

§ 21. Інтегрування раціональних функцій

Многочленом (цілою раціональною функцією) називається функція $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, де натуральне число n – степінь многочлена; a_0, a_1, ..., a_n – його коефіцієнти (дійсні або комплексні). Розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Коренем многочлена називається числове значення змінної $x = x_1$, при якому $P_n(x_1) = 0$. Згідно з основною теоремою алгебри, будь-який многочлен степеня $n > 0$ має хоча б один корінь, дійсний або комплексний. Отже, будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні та квадратні (з комплексними коренями) множники з дійсними коефіцієнтами.

Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ не тотожні нулі, називається *дробово-раціональною функцією* або *раціональним дробом*. Раціональний дріб називається *правильним*, якщо $n < m$; і *неправильним* при $n \ge m$. Якщо знаменник є числом ($m = 0$), то маємо цілу раціональну функцію.

Теорема 1. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_r(x) + \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}, \quad \text{де } p < m. \tag{21.1}$$

Елементарними раціональними дробами називають такі дроби

1) $\frac{A}{x-a}$, 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, 3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, 4) $\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

де a, p, q, A, B, C, – дійсні числа, $k \ge 2$, $D = p^2 - 4q < 0$, тобто квадратний многочлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

Теорема 2. Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{R_p(x)}{Q_m(x)}$ можна подати у вигляді скінченної суми елементарних дробів, а саме

1) якщо $Q_m(x)=(x-a)^k\cdot g_{m-k}(x)$, то

$$\frac{R_p(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)},$$

2) якщо $Q_m(x)=\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-2k}(x),$ то $\dfrac{R_p(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-k}(x)}=$

$$=\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_kx+C_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

3) якщо $Q_m(x)=a_0(x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)\left(x^2+mx+n\right)^l$, то

$$\frac{R_p(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+mx+n}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+mx+n\right)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+mx+n\right)^l}, \qquad (21.2)$$

де A_i,B_i,C_i,D_i,M_i,N_i – невідомі коефіцієнти, $\dfrac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$, $\dfrac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ – правильні раціональні дроби.

Наприклад, розкладемо правильний раціональний дріб $\dfrac{R_p(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}$ ($p<12$) в суму елементарних дробів. Оскільки квадратні многочлени x^2-x+2 і x^2+1 не мають дійсних коренів, то за теоремою 2 дістаємо:

$$\frac{R_p(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+$$

$$+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_3}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2-x+2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів у розкладі (21.2) можна скористатись *методом невизначених коефіцієнтів*, сформулюємо суть цього методу. Помноживши обидві частини рівності (21.2) на $Q_m(x)$, дістанемо два тотожно рівні многочлени: зліва – відомий многочлен $R_p(x)$, а справа – многочлен з невідомими коефіцієнтами. Прирівнюючи їх коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему лінійних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Крім вказаного методу, застосовують ще *метод окремих значень аргументу*, за яким після отримання двох тотожно рівних многочленів, надають змінній конкретних значень стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів. При цьому доцільно розглядати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$. В результаті дістають систему лінійних рівнянь, з якої визначають невідомі коефіцієнти. В деяких випадках зручно користуватися *комбінованим методом*, який поєднує обидва розглянутих метода.

Інтегрування елементарних раціональних дробів

Розглянемо основні етапи інтегрування довільних раціональних функцій. З рівності (21.1) випливає, що інтеграл від неправильного раціонального дробу зводиться до суми двох інтегралів:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int L_r(x)dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}dx .$$

Інтеграл від многочлена знаходять як суму табличних інтегралів, а інтеграл від правильного дробу за допомогою формули (2) зводять до інтегралів від елементарних дробів I–IV типів, а саме

$$\text{I. } \int \frac{Adx}{x-a}; \quad \text{II. } \int \frac{Adx}{(x-a)^k}; \quad \text{III. } \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx; \quad \text{IV. } \int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx .$$

Розглянемо, як інтегруються елементарні раціональні дроби.

$$\text{I. } \int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C .$$

$$\text{II. } \int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C .$$

III. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ зводиться до табличних інтегралів $\int \frac{du}{u}$ і $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$. Для цього в знаменнику підінтегральної функції виділяють повний квадрат $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, після чого виконують підстановку $t = x+\frac{p}{2}$ і покладають $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$. У результаті алгебраїчних перетворень даний інтеграл розкладають в суму двох інтегралів $\int \frac{2tdt}{t^2+a^2}$ і $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$, перший з яких шляхом заміни $u = t^2+a^2$ зводять до табличного $\int \frac{du}{u}$.

Зауважимо, що інтеграл $\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}dx$ обчислюють за допомогою підстановки $t = x + \frac{b}{2a}$ оскільки $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

IV. $\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$ зводиться до суми двох інтегралів $\int \frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ і $\int \frac{Mdx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$. Перший з них обчислюють за допомогою підстановки $u = x^2+px+q$, а другий інтеграл – за допомогою підстановки $t = x+\frac{p}{2}$ зводиться до інтеграла $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$, який знаходять за рекурентною формулою

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right). \qquad (21.3)$$

Узагальнюючи різні випадки інтегрування цілих та дробово-раціональних функцій, сформулюємо *алгоритм інтегрування раціональних функцій*.

1. Якщо під інтегралом є ціла раціональна функція (многочлен) або елементарний дріб І, ІІ типу, то інтеграл легко зводиться до табличного. У випадку, коли підінтегральна функція є елементарним дробом ІІІ типу, то використовують відповідну підстановку. Якщо маємо елементарний дріб IV типу, то використовують рекурентну формулу (21.3).

2. Якщо підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення многочлена на многочлен дріб подають у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу.

3. У випадку правильного раціонального дробу під інтегралом знаменник дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб розкладають у суму елементарних дробів за формулою (21.2), використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

4. У загальному випадку інтеграл від раціональної функції знаходять як суму інтегралів від многочлена та елементарних дробів.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від дробово-раціональної функції. Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на елементарні дроби, дістанемо

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 1=A(x-3)+B(x+1).$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A і B розглянемо окремі значення змінної $x=-1, x=3$, дістанемо

$$\left.\begin{array}{r|l} x=-1 & 1=-4A \\ x=3 & 1=4B \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} A=-\dfrac{1}{4} \\ B=\dfrac{1}{4} \end{cases}\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2-2x-3}=-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-3)}.$$

Отже, даний інтеграл дорівнює

$$\int\frac{dx}{x^2-2x-3}=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3}=-\frac{1}{4}\int\frac{d(x+1)}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\frac{2x+8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Для обчислення інтеграла розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби

$$\frac{2x+8}{x^3-4x}=\frac{2x+8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=$$
$$=\frac{A\left(x^2-4\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(x+2\right)}.$$

Прирівнявши чисельники першого і останнього дробів, дістанемо

$$2x+8=A\left(x^2-4\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-2\right),$$
$$0\cdot x^2+2\,x+8=x^2\left(A+B+C\right)+x\left(2B-2C\right)-4A.$$

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & 0=A+B+C \\ x^1 & 2=2B-2C \\ x^0 & 8=-4A \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} A=-2 \\ B+C=2 \\ B-C=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=-2 \\ B=3/2 \\ C=1/2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{2x+8}{x^3-4x}=-\frac{2}{x}+\frac{3}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}.$$

Отже,

$$\int\frac{2x+8}{x^3-4x}dx=-2\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=-2\ln|x|+\frac{3}{2}\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|x-2|^3+\ln|x+2|\right)-\ln x^2+C=\ln\frac{\sqrt{|x-2|^3|x+2|}}{x^2}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{2x+3}{x^3-3x^2}dx$.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на елементарні дроби, дістанемо

$$\frac{2x+3}{x^3-3x^2}=\frac{2x+3}{x^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2x+3=x^2\left(A+C\right)+x\left(B-3A\right)-3B,$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+C \\ x^1 & 2=B-3A \\ x^0 & 3=-3B \end{array}\Bigg\}\Rightarrow\begin{cases}C=1\\A=-1\\B=-1\end{cases}\Rightarrow\;\frac{2x+3}{x^3-3x^2}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-3}\;\Bigg|,\text{ тоді}$$

$$\int\frac{2x+3}{x^3-3x^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-3}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}-\int x^{-2}dx+\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln|x-3|+C=\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^3+x}$.

Розв'язання. Оскільки під знаком інтеграла маємо правильний раціональний дріб, то його можна розкласти на елементарні дроби. Маємо

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+A}{x^3+x},$$

$$1=(A+B)x^2+Cx+A.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C. Оскільки

$$0\cdot x^2+0\cdot x+1=(A+B)x^2+Cx+A,$$

то маємо $A+B=0$, $C=0$, $A=1$, звідки $B=-1$. Дістанемо $\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$, тоді

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\frac{xdx}{x^4-16}$.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби

$$\frac{x}{x^4-16}=\frac{x}{(x^2-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=$$

$$=\frac{A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)}.$$

Прирівняємо чисельники першого і останнього дробів, знайдемо невідомі коефіцієнти, взявши конкретні значення x, зокрема дійсні корені знаменника дробу, дістанемо

$$x=A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4),$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x=2 & 2=A(2+2)(4+4)=32A \\ x=-2 & -2=B(-2-2)(4+4)=-32B \\ x=0 & 0=8A-8B-4D \\ x=1 & 1=15A-5B-3C-3D \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=B=\dfrac{1}{16} \\ D=0 \\ C=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x^4-16}=\frac{1}{16(x-2)}+\frac{1}{16(x+2)}-\frac{x}{8(x^2+4)}.$$

Дістанемо

$$\int\frac{xdx}{x^4-16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{8}\int\frac{xdx}{x^2+4}=\frac{1}{16}\ln|x-2|+\frac{1}{16}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{16}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}+C=\frac{1}{16}\ln\left|x^2-4\right|-\frac{1}{16}\ln\left|x^2+4\right|+C=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right|+C.$$

Приклад 6. Знайти $\int\frac{x+1}{x^2-4x+13}dx$.

Розв'язання. Многочлен у знаменнику не має дійсних коренів ($D<0$), тому підінтегральна функція є елементарним дробом III типу. У знаменнику виділимо повний квадрат, дістанемо

$$x^2-4x+13=(x^2-4x+4)+9=(x-2)^2+9.$$

Виконаємо заміну змінної, після чого даний інтеграл розкладемо в суму двох інтегралів

$$\int\frac{x+1}{x^2-4x+13}dx=\int\frac{x+1}{(x-2)^2+9}dx=\left|\begin{array}{l} t=x-2 \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{array}\right|=\int\frac{(t+2)+1}{t^2+9}dt=$$

$$=\int\frac{t+3}{t^2+9}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+9}+3\int\frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+9)}{t^2+9}+3\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+9)+\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\ln\sqrt{x^2-4x+13}+\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$.

Розв'язання. Виділивши повний квадрат у знаменнику дробу і зробивши заміну, дістанемо суму двох табличних інтегралів

$$\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx=\int\frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{3x-1}{\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}dx=\left|\begin{array}{c} t=x-\frac{1}{2} \\ dt=dx \\ x=t+\frac{1}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt=\frac{3}{4}\int\frac{tdt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{3}{8}\int\frac{2tdt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{1}{8\cdot 2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+\frac{3}{8}\ln 4+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+\left(C-\frac{3}{8}\ln 4\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C_1.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, то поділимо многочлен в чисельнику на многочлен в знаменнику, дістанемо суму многочлена і правильного раціонального дробу

$$\frac{x^4+2x}{x^3+8}=\frac{(x^4+8x)-6x}{x^3+8}=\frac{x(x^3+8)-6x}{x^3+8}=x-\frac{6x}{x^3+8}.$$

Розкладемо одержаний правильний дріб на елементарні дроби і визначимо невідомі коефіцієнти комбінованим методом

$$\frac{6x}{x^3+8}=\frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)}{x^3+8}\Rightarrow 6x=A\left(x^2-2x+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)\Rightarrow$$

$$0\cdot x^2+6x+0\cdot x=x^2\left(A+B\right)+x\left(-2A+2B+C\right)+(4A+2C),$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+B \\ x^1 & 6=-2A+2B+C \\ x^0 & 0=4A+2C \end{array}\right\} \\ x=-2 \Rightarrow -12=12A \end{array}\right\} \Rightarrow A=-1,\ B=1,\ C=2.$$

Звідси маємо $\dfrac{6x}{x^3+8}=-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}$.

Тоді заданий інтеграл дорівнює

$$\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx=\int\left(x-\frac{6x}{x^3+8}\right)dx=\int\left(x+\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx=$$

$$=\int xdx+\int\frac{d(x+2)}{x+2}-\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3}=\left|\begin{array}{l} t=x-1 \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{t+3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{tdt}{t^2+3}-\int\frac{3dt}{t^2+3}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+3)}{t^2+3}-3\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left|t^2+3\right|-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтеграли

а) $\displaystyle\int\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{x^2-1}dx$; в) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}dx$;

г) $\displaystyle\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$; е) $\displaystyle\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

2. Обчислити інтеграли

а) $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^2(x-2)}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{3x^2+2x-1}{(x+2)(x-1)^2}dx$; в) $\displaystyle\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$;

г) $\displaystyle\int\frac{5x-1}{x^3-3x-2}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$; е) $\displaystyle\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

3. Обчислити інтеграли

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-8}$; в) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3-1}$;

г) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$; д) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$; е) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

4. Знайти інтеграли

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$; в) $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2-2x+6}$.

§ 22. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій

Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли від тригонометричних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Наведемо основні типи таких інтегралів, які за допомогою певних підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються). Розглянемо підстановки, які використовують для обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – деяка раціональна функція від функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Універсальна тригонометрична підстановка

Розглянемо універсальну тригонометричну підстановку $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, яку можна застосовувати при інтегруванні довільної тригонометричної функції. Використовуючи тригонометричні формули, маємо

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \qquad x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{22.1}$$

Дістаємо

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

де R_1 – раціональна функція від t.

Зауваження. Універсальна тригонометрична підстановка завжди зводить тригонометричну функцію до раціональної. Але на практиці її використовують, якщо під інтегралом функції $\sin x$ і $\cos x$ мають невисокий степінь, інакше розрахунки будуть дуже громіздкими. У багатьох випадках доцільно застосовувати інші підстановки. Наведемо деякі з них.

Використання тригонометричних підстановок

I. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, то роблять підстановку $t = \cos x$.

II. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, використовують підстановку $t = \sin x$.

III. Якщо підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, причому функції $\sin x$ і $\cos x$ мають парні (зокрема, від'ємні) степені, то .застосовують підстановку $t = \mathrm{tg}\, x$. У цьому випадку використовують формули

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}.$$

Зауважимо, що в інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ доцільно скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \qquad (22.2)$$

Використання тригонометричних перетворень

При обчисленні інтегралів виду $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$ застосовують тригонометричні формули

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right).$$

Зауважимо, що при інтегруванні деяких тригонометричних функцій використовують прийоми, які значно полегшують обчислення інтегралів. Зокрема, перетворення тригонометричних виразів та використання тригонометричних формул дає можливість швидко звести інтеграл до табличного.

Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграли від ірраціональних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо основні випадки, коли інтеграли від ірраціональних виразів зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються) за допомогою певних підстановок.

Інтегрування квадратичних ірраціональностей

Розглянемо інтеграли виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, які можна звести до табличних інтегралів за допомогою підстановки $x + \frac{b}{2a} = t$, попередньо виділивши повний квадрат в підкореневому виразі.

Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей

Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx$ обчислюють за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

Зокрема, інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx$ підстановкою $ax+b=t^n$ зводять до інтеграла $\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a} = \int R_1(t)dt.$

Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ обчислюють за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, ..., \frac{m_k}{n_k}$). Зокрема, для обчислення інтеграла $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ використовують підстановку $x = t^s$, де $s = НСК(n_1,\ n_2\ \ldots, n_k)$.

Використання тригонометричних підстановок

Для обчислення інтегралів $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ застосовують тригонометричні підстановки, а саме:

$$\text{I. } \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left|\begin{array}{l} x = a\sin t \\ \text{або} \\ x = a\cos t \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x = a\sin t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ t = \arcsin\frac{x}{a}, \\ dx = a\cos t dt;\ \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \\ = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t| = a\cos t \end{array}\right| =$$

$$= \int R(a\sin t,\ a\cos t)a\cos t dt = \int R^*(\sin t, \cos t)dt.$$

$$\text{II. } \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\sin t} \\ \text{або} \\ x = \dfrac{a}{\cos t} \end{array}\right| = \int R^*(\sin t, \cos t)dt.$$

III. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left|\begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\,t \\ \text{або} \\ x = a\,\mathrm{ctg}\,t \end{array}\right| = \int R^*(\sin t, \cos t)dt$.

Зауваження. Інтеграл $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ після виділення повного квадрата і заміни $x+\dfrac{b}{2a}=t$ зводять до одного з інтегралів типу I–III залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта a.

Використання підстановок Ейлера

Інтеграли типу $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можуть бути знайдені за допомогою *підстановок Ейлера*:

а) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, при $a>0$;

б) $\sqrt{ax^2+bc+c}=tx\pm\sqrt{c}$, при $c>0$;

в) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$, при $b^2-4ac>0$, де x_1, x_2 – корені тричлена ax^2+bx+c.

Інтегрування диференціального бінома

Інтеграл *від диференціального бінома* має вигляд $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де $m,\ n,\ p$ – раціональні числа. Цей інтеграл можна обчислити в скінченному вигляді тільки в таких випадках:

1) якщо p – ціле число, то виконують підстановку $x=t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m та n;

2) якщо $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число, то використовують підстановку $a+bx^n=t^s$, де s – знаменник дробу p;

3) якщо $\dfrac{m+1}{n}+p$ – ціле число, то застосовують підстановку $a+bx^n=t^s x^n$, де s – знаменник дробу p.

Якщо не виконується жодна з умов 1) – 3), то інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ не є елементарною функцією, тому його можна обчислити тільки наближено.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити $\int\dfrac{dx}{\sin x+1}$.

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int\frac{dx}{\sin x+1}=\left|\begin{array}{l} t=tg\,\dfrac{x}{2} \\ x=2arctg\,t \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{array}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\dfrac{2t}{1+t^2}+1\right)}=2\int\frac{dt}{\left(t+1\right)^2}=$$

$$=-\frac{2}{t+1}+C=C-\frac{2}{tg\dfrac{x}{2}+1}.$$

Приклад 2. Знайти $\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

Розв'язання. Обчислимо даний інтеграл за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $t=\text{tg}\frac{x}{2}$, тоді

$$x=2arctg\,t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}=\int\frac{1}{5+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=2\int\frac{1+t^2}{5+5t^2+2t+3-3t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{2t^2+2t+8}=\int\frac{dt}{t^2+t+4}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t^2+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)-\dfrac{1}{4}+4}=\int\frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\left|\begin{array}{l} t+\dfrac{1}{2}=u \\ dt=du \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{du}{u^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{15}}\text{arctg}\frac{2u}{\sqrt{15}}+C=\frac{2}{\sqrt{15}}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{15}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\text{arctg}\frac{2\text{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\sin^5 x\cos x dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є непарною відносно обох тригонометричних функцій, але функція $\sin x$ входить у п'ятому степені, тому її і треба замінити. Зробимо це усно, для чого внесемо функцію $\cos x$ під знак диференціала і дістанемо табличний інтеграл відносно $\sin x$, а саме

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Приклад 4. Обчислити $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx.$

Розв'язання. Оскільки під інтегралом функція $\cos x$ в непарному степені, то використаємо підстановку $t = \sin x$. Для цього перетворимо підінтегральну функцію так, щоб відокремити $\cos x$ і утворити похідну від $\sin x$. Маємо

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \left(1 - t^2\right) t^2 dt =$$

$$= \int \left(t^2 - t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграли а) $\int \sin^3 x dx$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.

Розв'язання. а) Перетворимо підінтегральну функцію і усно зробимо заміну змінної. Для цього внесемо функцію $\cos x$ під знак диференціала:

$$\int \sin^3 dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) =$$

$$= \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

б) Перетворимо підінтегральну функцію так, щоб використати підстановку $t = \cos x$, дістанемо

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1 - t^2}{t^2} \left(-dt\right) = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграли

а) $\int \sin^4 x dx$, б) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$, в) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція містить $\sin x$ у парному степені, тому перетворимо її так, щоб використати формули (22.2) пониження степеня

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \int \cos 2x d(2x) + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) \right) =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

б) Оскільки під інтегралом обидві тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ мають парний степінь, то застосуємо формули (22.2) пониження степеня

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4x dx\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x)\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C\,.$$

в) Оскільки під інтегралом функції $\sin x$ і $\cos x$ мають парні від'ємні степені, то використовуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$, дістаємо

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int\left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C\,.$$

Приклад 7. Знайти інтеграли а) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx$.

Розв'язання. а) Виконавши перетворення над тригонометричними функціями, застосуємо підстановку $t = \cos x$, дістанемо

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\sin x dx = -\int \frac{\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)^2} d(\cos x) = -\int \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(-\ln|1-t| - \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{1-\cos x} + \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + C\,.$$

б) Оскільки обидві тригонометричні функції у парному степені, то застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$, провівши попередньо перетворення

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x(1+tg^2 x)^2 d(tgx) = \int (t^2 + 2t^4 + t^6) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}tg^3 x + \frac{2}{5}tg^5 x + \frac{1}{7}tg^7 x + C.$$

Приклад 8. Знайти $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx$.

Розв'язання. Застосуємо тригонометричні формули пониження степеня $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$. Дістанемо

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx = \int \left(\sin^2 x \cdot \cos^2 x\right) \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{4 \cdot 4}\int \left(1-\cos 4x\right)\cdot\left(1+\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cdot \cos 2x\right)dx.$$

Оскільки $\cos ax \cos bx = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)x + \cos\left(a+b\right)x\right)$, то

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{16}\left(\int dx + \int \cos 2x dx - \int \cos 4x dx - \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 6x) dx\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{2 \cdot 2}\int \cos 2x d(2x) - \frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) - \frac{1}{2 \cdot 6}\int \cos 6x d(6x)\right) =$$

$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x + C.$$

Приклад 9. Знайти $\int \dfrac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.

Розв'язання. Оскільки обидві тригонометричні функції у парному степені, причому містяться в знаменнику, то застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$, тоді

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\quad x = arctgt,\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Дістанемо

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{1}{\dfrac{3}{1+t^2} + \dfrac{4t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{3+4t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$, $a > 0, b > 0$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз так, щоб використати підстановку $t = \operatorname{tg} x$. Маємо

$$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{a + b\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{a + b\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$=\int\frac{d\,(\mathrm{tg}x)}{a+b\,\mathrm{tg}^2x}=\left|t=\mathrm{tg}x\right|=\int\frac{dt}{a+bt^2}.$$

Таким чином, даний інтеграл від тригонометричної функції звели до інтеграла від раціональної функції, який легко обчислюється. Маємо

$$\int\frac{dt}{a+bt^2}=\frac{1}{b}\int\frac{dt}{t^2+a/b}=\frac{1}{b}\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{a/b})^2}=\frac{1}{b\sqrt{a/b}}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{a/b}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}\,arctg\sqrt{\frac{b}{a}}\,t+C=\frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}\,arctg\sqrt{\frac{b}{a}}\,tg\,x+C.$$

Приклад 11. Знайти $\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу добутку тригонометричних функцій $\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin\left(a-b\right)x+\sin\left(a+b\right)x\right)$, дістанемо

$$\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{12}dx+\frac{1}{2}\int\sin\frac{7x}{12}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 12\int\sin\frac{x}{12}\cdot d\left(\frac{x}{12}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}\int\sin\frac{7x}{12}\cdot d\left(\frac{7x}{12}\right)=-6\cos\frac{x}{12}-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12}+C.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Заданий інтеграл містить ірраціональні вирази. Враховуючи $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, то застосуємо заміну змінної, дістанемо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{c}\frac{m}{n}=\frac{1}{2},\ \frac{p}{q}=\frac{1}{3},\\ k=6,\ t=\sqrt[6]{x},\\ x=t^6,\ dx=6t^5dt\\ \begin{array}{c|c|c}x&1&64\\ \hline t&1&2\end{array}\end{array}\right|=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^2\cdot t^3}{t^2(t+1)}dt=6\int\frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt=$$

$$=6\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-\int\frac{dt}{t+1}=6\int(t^2-t+1)dt-6\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln\left|t+1\right|=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$.

Розв'язання. Під інтегралом є тільки один ірраціональний вираз $\sqrt{x-1}$, тому виконаємо підстановку $t=\sqrt{x-1}$, тоді $t^2=x-1$, звідки $x=t^2+1,\ dx=2tdt$.

Таким чином,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{\left(t^2+1\right)^2 2tdt}{t} = 2\int\left(t^4+2t^2+1\right)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3 + 2t + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{(x-1)} + C.$$

Приклад 14. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. а) Застосовуючи відповідну дробово-лінійну підстановку, дістаємо

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^3-1\right)3t^2dt}{t^2} = 3\int\left(t^3-1\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - 3t + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C.$$

б) Оскільки підінтегральна функція містить ірраціональності $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, то використаємо дробово-лінійну підстановку $x = t^s$, де число $s = 12$ є спільним знаменником дробів $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$. Маємо

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^{12},\ 12 = HCK(2,3,4) \\ dx=12t^{11}dt,\ t=\sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} =$$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} = 12\int \frac{t^4\left(t^{10}-1+1\right)dt}{t^5-1} = 12\int\left(t^4\left(t^5+1\right) + \frac{t^4}{t^5-1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left|\ t^5-1\ \right|\right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left|\ \sqrt[12]{x^5} - 1\ \right| + C.$$

Приклад 15. Знайти $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція містить ірраціональний вираз $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, то застосуємо підстановку $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, тобто $t^3 = \frac{1-x}{1+x}$. Дістанемо

$$x = \frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = \frac{-6t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt, \quad 1+x = \frac{2}{1+t^3}.$$

Тому даний інтеграл дорівнює

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2} = -\int \frac{t \cdot 6t^2 \left(1+t^3\right)^2}{\left(1+t^3\right)^2 \cdot 2^2} dt = -\frac{3}{2}\int t^3 dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = -\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{4}{3}} + C .$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділивши повний квадрат і зробивши заміну, маємо:

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = x-1 \\ x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}} dt = 4\int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= -4\int \frac{d\left(6-t^2\right)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад 17. Знайти $\int \frac{(4x+7)\cdot dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Розв'язання. Помічаючи, що $d\left(3-2x-x^2\right) = \left(-2x-2\right)dx$, виконаємо перетворення і дістанемо

$$\int \frac{(4x+7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -2\int \frac{(-2x-2)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} + \int \frac{3dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$$

$$= -2\int (3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(3-2x-x^2) + 3\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$$

$$= -2 \cdot 2\sqrt{3-2x-x^2} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} .$$

Для знаходження $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ застосуємо підстановку $t = x+1$, тоді $x = t-1,\ dx = dt$. Отже, маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{3-2(t-1)-(t-1)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= \arcsin\frac{x+1}{2} + C .$$

Остаточно дістанемо

$$\int \frac{(4x+7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -4\sqrt{3-2x-x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

Приклад 18. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція містить ірраціональний вираз $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{2^2-x^2}$, то застосуємо тригонометричну підстановку $x=2\sin t$, тоді $dx=2\cos t dt$. Дістанемо

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t.$$

Підставивши одержані вирази в інтеграл, дістанемо

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int \frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t dt}{2\cos t}=4\int \sin^2 t dt=2\int (1-\cos 2t)dt=$$
$$=2\int dt-2\int \cos 2t dt=2t-\sin 2t+C.$$

Оскільки $x=2\sin t$, то $\sin t=\frac{x}{2}$, тобто $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Тоді

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}.$$

Отже,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

Приклад 19. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$

Розв'язання. Цей інтеграл містить вираз вигляду $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{9+x^2}$, тому застосуємо підстановку $x=3\operatorname{tg} t$. Враховуючи формулу $1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, маємо

$$I=\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}=\left|\begin{array}{c} x=3\operatorname{tg} t,\ dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}, \\ 9+x^2=9(1+\operatorname{tg}^2 t)=\frac{9}{\cos^2 t} \\ \sqrt{9+x^2}=\frac{3}{\cos t} \end{array}\right|=\int \frac{\frac{3dt}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\frac{3}{\cos t}}=$$
$$=\frac{1}{9}\int \cos t dt=\frac{1}{9}\sin t+C.$$

Повернемося до змінної x. Із підстановки $x=3\operatorname{tg} t$ маємо $\operatorname{tg} t=\frac{x}{3}$, тоді $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$. Оскільки $1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, то

$$\cos^2 t=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t},\ \sin^2 t=1-\cos^2 t=1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}=\frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t},$$

$$\sin t=\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Отже, шуканий інтеграл

$$\int\frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}=\frac{1}{9}\sin t+C=\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}+C.$$

Приклад 20. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$.

Розв'язання. Розглянувши випадок III, дістанемо

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}=\left|\begin{array}{l} x=4\operatorname{tgt},\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right),\quad t\neq 0,\\ dx=\frac{4dt}{\cos^2 t},\quad t=\operatorname{arctg}\frac{x}{4},\\ \sqrt{x^2+16}=4\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}=\frac{4}{\cos t}\end{array}\right|=\int\frac{\cos t\cdot 4dt}{4\cdot 16\operatorname{tg}^2 t\cdot\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{16}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=-\frac{1}{16\sin t}+C=-\frac{1}{16\sin\left(arctg\frac{x}{4}\right)}+C.$$

Враховуючи тригонометричну формулу $\sin^2 t=\frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$, знайдемо

$$\sin t=\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\ \Rightarrow\ \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)}}=\frac{\frac{x}{4}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{16}}}=\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}.$$

Отже, даний інтеграл

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}=-\frac{1}{16\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)}+C=-\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x}+C.$$

Приклад 21. Знайти $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2-a^2}$, то застосуємо тригонометричну підстановку $x=\frac{1}{\sin t}$, тоді $dx=-\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$.

Дістанемо

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Тоді

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{\sin^2 t \cdot \sin t}{\cos t} \cdot \frac{-\cos t dt}{\sin^2 t} = -\int \sin t dt = \cos t + C =$$

$$= \cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) + C = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)} + C = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Розв'язання. Використавши першу з підстановок Ейлера, дістанемо інтеграл від дробово-раціональної функції та розкладемо її на елементарні дроби. Маємо

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} == \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} = t - x, \\ x = \dfrac{t^2-1}{2t-1}\ ,\ dx = \dfrac{2(t^2-t+1)}{\left(2t-1\right)^2}dt \\ t = x+\sqrt{x^2-x+1} \end{array} \right| = 2\int \frac{t^2-t+1}{t\left(2t-1\right)^2}dt =$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2(2t-1)} + \frac{3}{2\left(2t-1\right)^2} \right)dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| - \frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1)} + C.$$

Приклад 23. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є диференціальним біномом. Оскільки маємо 3 випадок, то для інтегрування застосуємо підстановку $a+bx^n = t^s x^n$, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 \cdot \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} m=0, \quad n=4, \quad p=-\dfrac{1}{4}, \quad a=b=1, \\ \dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{0+1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0 \in Z \Rightarrow \\ \Rightarrow 1+x^4 = t^4x^4, \quad x^4 = \dfrac{1}{t^4-1}, \\ x = \left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad dx = -t^3 \cdot \left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}} dt, \\ \sqrt[4]{1+x^4} = tx = t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}} dt}{t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1}.$$

За допомогою підстановки дістали інтеграл від раціональної функції. Розкладемо її на елементарні дроби

$$\frac{t^2}{t^4-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2=A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)\Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4},\ C=0,\ D=\frac{1}{2}.$$

Тоді даний інтеграл дорівнює

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{4}\ln\left|\ \frac{t+1}{t-1}\ \right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Оскільки $t=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, то остаточно маємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{1}{4}\ln\left|\ \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\ \right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}+C.$$

Приклад 24. Знайти $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{4-x^3}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл містить диференціальний біном, тобто маємо інтеграл виду $\int x^m\cdot\left(a+bx^n\right)^p dx$. У нашому випадку $m=-3, n=3, p=-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{m+1}{n}+p=-1$ – ціле число, тому робимо підстановку $a+bx^n=x^n\cdot t^s$, де s – знаменник дробу p, тобто $4-x^3=x^3\cdot t^3$, звідки $t=\dfrac{\sqrt[3]{4-x^3}}{x}$. Дістанемо

$$x^3=\frac{4}{\left(1+t^3\right)},\ x=\sqrt[3]{4}\left(1+t^3\right)^{-\frac{1}{3}},\ dx=\sqrt[3]{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1+t^3\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot 3t^2dt=-\frac{\sqrt[3]{4}t^2dt}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4}},$$

$$4-x^3=x^3\cdot t^3\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{4-x^3}=x\cdot t=\sqrt[3]{4}\left(1+t^3\right)^{-\frac{1}{3}}t=\frac{\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{1+t^3}},$$

$$x^3\cdot\sqrt[3]{4-x^3}=\frac{4}{\left(1+t^3\right)}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{1+t^3}}=\frac{4\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4}}.$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{4-x^3}} = -\int \frac{\sqrt[3]{4}t^2dt}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4} \cdot \dfrac{4\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4}}} = -\frac{1}{4}\int tdt = -\frac{t^2}{8} + C = -\frac{\sqrt[3]{\left(4-x^3\right)^2}}{8x^2} + C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли

а) $\int \sin^4 x \cos x dx$; б) $\int \cos^2 x dx$; в) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

г) $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$; д) $\int \cos 5x \cos 4x dx$; е) $\int \sin 3x \cos 5x dx$;

ж) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$; з) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; к) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

2. Знайти інтеграли

а) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$; в) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$;

г) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; д) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; е) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

3. Обчислити інтеграли

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; д) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$; е) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$;

ж) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4}$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$; к) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}}{x\left(\sqrt[4]{x}+1\right)} dx$.

4. Знайти інтеграли

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; в) $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

5. Обчислити інтеграли

а) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$;

г) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}}$; д) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$; е) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$.

§ 23. Визначений інтеграл та його властивості. Методи інтегрування у визначеному інтегралі

Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

1.Обчислення площі плоскої фігури.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a;b]$. Розглянемо криволінійну трапецію – плоску фігуру, обмежену лініями $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$, і визначимо її площу.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками $x_i, i = \overline{0,n},$ так що $a = x_0$, $b = x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i)$ (див. рис. 23.1).

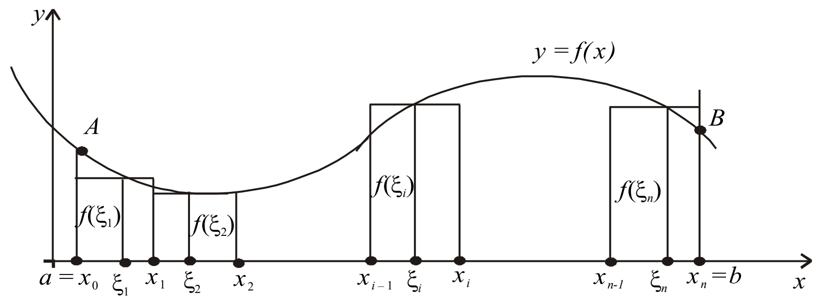


Рис. 23.1

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції, чим менша довжина $\max \Delta x_i$, тобто

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

2. Обчислення роботи змінної сили

Визначимо роботу змінної сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки із точки a в точку b на відрізку $[a;\ b]$.

Розіб'ємо проміжок $[a;\ b]$ на n частин точками $x_i, i = \overline{0,n}.$ На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (див. рис. 23.2).

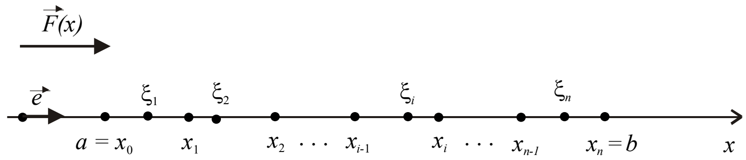


Рис. 23.2

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i дорівнює $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Тоді робота A сили $\vec{F}$ на відрізку $[a;\, b]$ визначається так:

$$A = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

Сума вигляду $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*. В загальному випадку інтегральна сума може залежати від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, а також від вибору на них точок ξ_i.

Поняття та властивості визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, задана на проміжку $[a;b]$. Розіб'ємо $[a;b]$ на n частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \overline{1,n}$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і складемо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Позначимо через $\lambda = \max\Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум Sn при $\lambda\to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i, \tag{23.1}$$

де $\int_a^b$ – знак визначеного інтеграла, *a, b* – нижня та верхня межі інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, dx – диференціал змінної інтегрування.

З означення випливає, що визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ залежить від функції $f(x)$ та проміжку $[a;b]$ і не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

Функція, для якої на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, називається *інтегровною* на цьому відрізку. Далі буде показано, що будь-яка неперервна на відрізку функція є інтегрованою на ньому.

Розглянемо *геометричний зміст визначеного інтеграла:* якщо $f(x)\ge 0,\ x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=f(x),\ y=0,\ x=a,\ x=b$ (див. рис. 23.1).

Наведемо *властивості визначеного інтеграла*.

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла

$$\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

2. Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int\limits_a^b f_1(x)\,dx+\int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

3. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx.$$

4. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int\limits_a^a f(x)dx=0.$$

5. Якщо функція $f(x)$ – інтегровна на $[a;b]$, а точка $c\in[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

6. Якщо $f(x)=c=\text{const}$, то $\int\limits_a^b cdx=c\cdot(b-a)$.

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ і $f(x)\ge 0$ для всіх $x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$.

8. Якщо функції $f(x),\ g(x)$ інтегровні на $[a;b]$, причому $f(x)\ge g(x)$ для всіх $x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

9. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,\ b]$, причому $m\le f(x)\le M$ для $x\in[a,b]$, то

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

10. *Теорема про середнє.* Якщо функція $f(x)$ неперервна для $x\in[a;b]$, , то існує така точка $c\in[a;b]$, для якої виконується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)\,.$$

Геометричний зміст теореми про середнє: для неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$ існує прямокутник зі сторонами $b-a$ і $f(c)$, $c\in[a;b]$, площа якого дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=f(x), y=0, x=a, x=b$.

Формула Ньютона – Лейбніца

Розглянемо інтеграл $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dt$, який є функцією від верхньої межі інтегрування x.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна для будь-якого $x\in[a;b]$, то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\Phi'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)_x' = f(x). \qquad (23.2)$$

Наслідок 1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є первісною для цієї функції.

Наслідок 2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a;\,b]$ має на цьому проміжку первісну, зокрема, функцію $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt.$

Розглянемо *формулу Ньютона – Лейбніца*, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \qquad (23.3)$$

Отже, для обчислення визначеного інтеграла потрібно знайти первісну підінтегральної функції (невизначений інтеграл) і підставити верхню, а потім нижню межі інтегрування.

Методи інтегрування у визначеному інтегралі

1. *Метод заміни змінної.*

Якщо $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;\,b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\,\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то виконується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array}\right|=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (23.4)$$

Зауваження. При заміні змінної у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, тому не потрібно повертатись до початкової змінної.

2. *Метод інтегрування частинами.*

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають неперервні похідні для всіх $x \in [a;\ b]$, то виконується рівність

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (23.5)$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 5\right) dx$.

Розв'язання. Для заданого визначеного інтеграла застосуємо формулу Ньютона – Лейбніца (23.3), дістанемо

$$\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 5\right)\ dx = \left(x^4 - x^3 + 5x\right)\Big|_1^2 = \left(2^4 - 2^3 + 5\cdot 2\right) - \left(1^4 - 1^3 + 5\cdot 1\right) =$$

$$= (16 - 8 + 10\ ) - (1 - 1 + 5\ ) = 18 - 5 = 13.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right) dx$**.**

Розв'язання. Знайдемо первісну підінтегральної функції і використаємо формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right) dx = \left(e^x - x\right)\Big|_0^{\ln 2} = \left(e^{\ln 2} - \ln 2\right) - \left(e^0 - 0\right) = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int_{\pi/9}^{\pi/6} \sin 3x dx$.

Розв'язання. Під інтегралом можна зробити заміну змінної, але простіше внести функцію під знак диференціала, дістанемо

$$\int_{\pi/9}^{\pi/6} \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int_{\pi/9}^{\pi/6} \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx$.

Розв'язання. Внесемо функцію під знак диференціала, маємо

$$\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 d\left(e^x - 1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x - 1\right)^5\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2} - 1\right)^5 - \left(e^0 - 1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2 - 1)^5 - (1 - 1)^5\right) = \frac{1}{5}.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної, поклавши $t = \sin x$. Тоді $dt = \cos x dx$, при $x = \frac{\pi}{6}$: $t = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, а при $x = \frac{\pi}{2}$: $t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Отже,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t^3} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} t^{-3} dt = \left. \frac{t^{-2}}{-2} \right|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\left. \frac{1}{2t^2} \right|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{2} + 2 = 1{,}5.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання. Зробивши заміну змінної, дістанемо

$$\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x},\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\, dt =$$

$$= 2\int\limits_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2\left(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)\right) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $t = \sqrt[3]{x+1},\ x+1 = t^3,\ dx = 3t^2 dt$. Змінимо межі інтегрування: для нижньої межі $x = -1$ змінна $t = 0$, а для верхньої межі $x = 0$ змінна $t = 1$. Маємо

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = 3\int\limits_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = 3\int\limits_0^1 \frac{(t^2-1)+1}{t+1} dt = 3\int\limits_0^1 (t-1) d(t-1) + 3\int\limits_0^1 \frac{d(t+1)}{1+t} =$$

$$= 3\left(\frac{(t-1)^2}{2} + \ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1 = 3\ln 2 - \frac{3}{2}.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$.

Розв'язання. Застосувавши формулу (23.5), дістанемо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos 2x dx, \\ v = \int \cos 2x dx = \\ \quad = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2}x\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x d(2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi - 0\cdot\sin 0\right) + \frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є добуток різнотипних функцій, то для його обчислення потрібно застосувати метод інтегрування частинами. Поклавши $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, маємо $du = dx$, $v = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x}$.

Скориставшись формулою $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$, дістанемо

$$\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - \left(e^{-1} - e^0\right) = 1 - \frac{2}{e}.$$

Приклад 10. Обчислити $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\, x dx.$

Розв'язання. Використаємо метод інтегрування частинами, маємо

$$\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\, x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\, x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Приклад 11. Знайти $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної, а потім метод інтегрування частинами, дістанемо

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\arcsin x \\ x=\sin t \\ dx=\cos t dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin t\cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot \cos t\, dt = \int_0^{\pi/6} t\sin t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u=t, du=dt \\ dv=\sin t dt \\ v=\int \sin t dt=-\cos t \end{array} \right| = -t\cos t\Big|_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6}\cos t dt = -\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + \sin t\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} = \frac{6-\pi\sqrt{3}}{12}.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int_3^4 \frac{2x+8}{x^3-4x}dx$.

Розв’язання. Для обчислення визначеного інтеграла потрібно спочатку знайти первісну, для цього розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби і прирівняємо чисельники першого і останнього дробів, дістанемо

$$\frac{2x+8}{x^3-4x} = \frac{2x+8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A\left(x^2-4\right) + Bx\left(x+2\right) + Cx\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(x+2\right)}.$$

$$2x+8 = A\left(x^2-4\right) + Bx\left(x+2\right) + Cx\left(x-2\right),$$

$$0\cdot x^2 + 2x + 8 = x^2\left(A+B+C\right) + x\left(2B-2C\right) - 4A.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+B+C \\ x^1 & 2=2B-2C \\ x^0 & 8=-4A \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B+C=2 \\ B-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3/2 \\ C=1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{2x+8}{x^3-4x} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}.$$

Маємо

$$\int_3^4 \frac{x+4}{x^3-4x}dx = -2\int_3^4 \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int_3^4 \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -2\ln|x|\Big|_3^4 + \frac{3}{2}\ln|x-2|\Big|_3^4 + \frac{1}{2}\ln|x+2|\Big|_3^4 = 2\ln\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5} =$$

$$= 2\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 8 + \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5} = 2\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{48}{5}.$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є елементарним дробом IV типу. Виділивши повний квадрат в знаменнику дробу $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, зробимо заміну $t=x+2$, $x=t-2,$ $dx=dt$, $0\le t\le 1$. Дістанемо

$$\int\limits_{-2}^{-1}\frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{3x-4}{(x+2)^2+1}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{3(t-2)-4}{t^2+1}dt=$$

$$=3\int\limits_{0}^{1}\frac{tdt}{t^2+1}-10\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-10\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(t^2+1)\Big|_0^1-10\operatorname{arctg}t\Big|_0^1=\frac{3}{2}\ln 2-10\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{5\pi}{2}.$$

Приклад 14. Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку

$$\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x=2arctgt, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{2dt}{1+t^2+2t+1-t^2}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|\Big|_0^1=\ln 2.$$

Приклад 15. Знайдемо інтеграл $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція містить тригонометричну функцію в парному степені, то для обчислення інтеграла доцільно застосувати підстановку $t=\operatorname{tg}x$. Дістанемо

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c} t=\operatorname{tg}x,\ x=\operatorname{arctg}t \\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/3 \\ \hline t & 0 & \sqrt{3} \end{array} \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+2t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{6}\,.$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Заданий інтеграл містить ірраціональні вирази. Враховуючи $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, то застосуємо заміну змінної, дістанемо

$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{c}\frac{m}{n}=\frac{1}{2},\ \frac{p}{q}=\frac{1}{3},\\ k=6,\ t=\sqrt[6]{x},\\ x=t^6,\ dx=6t^5dt\\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 64\\ \hline t & 1 & 2\end{array}\end{array}\right|=\int_1^2\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int_1^2\frac{t^2\cdot t^3}{t^2(t+1)}dt=6\int_1^2\frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt=$$

$$=6\int_1^2\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-\int_1^2\frac{d(t+1)}{t+1}=6\int_1^2(t^2-t+1)dt-6\ln|t+1|\Big|_1^2=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_1^2-6\ln\frac{3}{2}=6\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+2-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-1\right)-6\ln\frac{3}{2}=11-6\ln\frac{3}{2}\,.$$

Приклад 17. Знайдемо інтеграл $\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$.

Розв'язання. підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{a^2-x^2}$, то зробимо тригонометричну підстановку $x=a\sin t=2\sin t,$ тоді

$$\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}x=5\sin t,\quad dx=5\cos t dt\\ \sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-25\sin^2 t}=\\ =\sqrt{25\cos^2 t}=5\cos t\\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5\\ \hline t & 0 & \pi/2\end{array}\end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}5\cos t\cdot 5\cos t dt=$$

$$=25\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt=\frac{25}{5}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt-\frac{25}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{25\pi}{4}\,.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли

а) $\int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}-3^x\right)dx$; б) $\int_1^5 (\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}+5\sqrt[3]{x^2})dx$; в) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$; д) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; е) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

2. Обчислити інтеграли

а) $\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx$; б) $\int_0^1 xe^{3x}dx$; в) $\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$;

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}dx$; д) $\int_1^{\sqrt{3}} arctgxdx$; е) $\int_0^1 x\arcsin xdx$.

3. Обчислити інтеграли

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 xdx$; в) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} ctg^3 xdx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\cos 4xdx$.

4. Знайти інтеграли

а) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)}dx$; б) $\int_2^3 \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$; в) $\int_1^2 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

г) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+6}$; д) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{2x^2-4x+5}$; е) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-8}$.

5. Знайти інтеграли

а) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$; в) $\int_2^5 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$;

г) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$; д) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}-1}$; е) $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

§ 24. Застосування визначеного інтеграла

Геометричні застосування визначеного інтеграла

1. Площа плоскої фігури.

Нехай функція $f(x)$ неперервна та $f(x)\geq 0$ на $[a;b]$. Розглянемо криволінійну трапецію, тобто фігуру, обмежену лініями $y=f(x)$,

$y=0,\ x=a,\ x=b$ (див. рис. 24.1). З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає формула для обчислення площі криволінійної трапеції

$$S=\int_a^b f(x)dx. \tag{24.1}$$

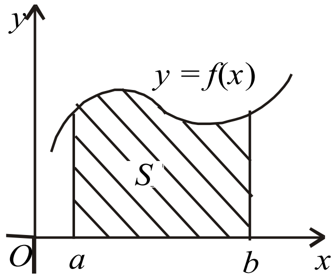


Рис. 24.1

Якщо функція $f(x)\le 0$ (див. рис. 24.2), то площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=f(x),\ y=0,\ x=a,\ x=b$, обчислюють за формулою

$$S=\int_a^b |f(x)|dx.$$

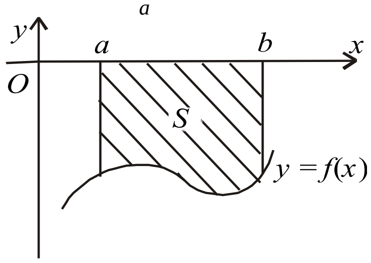


Рис. 24.2

Нехай фігура обмежена лініями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, де функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні та $f(x)\ge g(x)$ для $x\in[a;\ b]$ (див. рис. 24.3). Площа такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b, тобто

$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx. \tag{24.2}$$

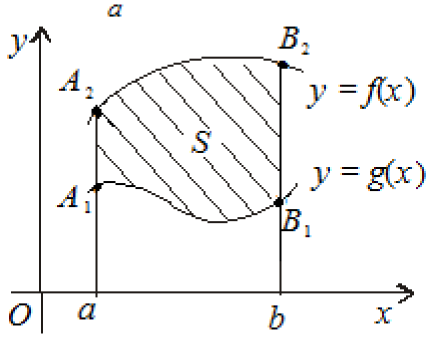


Рис. 24.3

У випадку, коли фігура обмежена кривою $x=\psi(y)$, $\psi(y)>0$, та прямими $y=c,\ y=d,\ x=0$ (див. рис. 24.4), її площу знаходять за формулою

$$S=\int_c^d \psi(y)dy.$$

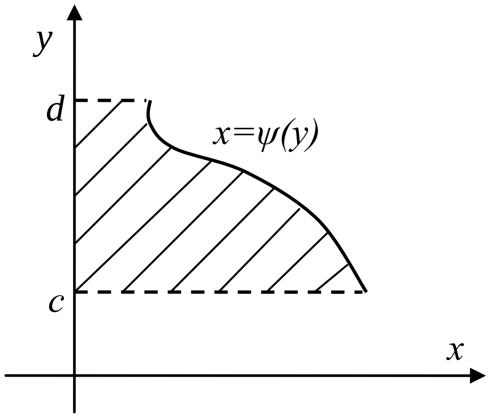


Рис. 24.4

Якщо фігура обмежена і параметрично заданою кривою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\left|x'(t)\right|dt \cdot \tag{24.3}$$

Якщо фігура обмежена кривою $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ заданою в полярних координатах (див. рис. 24.5), то її площа обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi \cdot \tag{24.4}$$

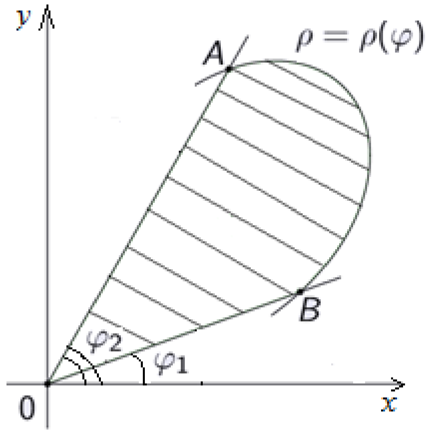


Рис. 24.5

2. Довжина дуги кривої.

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні, то довжина дуги кривої $f(x)$ на цьому відрізку обчислюється за формулою

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{24.5}$$

Якщо криву задано параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, причому функції $x(t),\ y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними $x'(t),\ y'(t)$ на $[\alpha;\beta]$, то довжина дуги цієї кривої

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \qquad (24.6)$$

Зазначимо, що довжину дуги просторової кривої, заданої рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, аналогічно обчислюють за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,.$$

Якщо криву задано в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,$ причому функції $\rho(\varphi), \rho'(\varphi)$ неперервні на $[\alpha;\beta]$, то її довжина визначається за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d t\,. \qquad (24.7)$$

3. Об'єм просторового тіла.

а) Об'єм тіла за площею перерізу. Розглянемо просторове тіло (див. рис. 24.6), об'єм якого потрібно знайти. Нехай функція $S = S(x)$ визначає площу поперечного перерізу цього тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox у деякій точці $x \in [a;\ b]$.

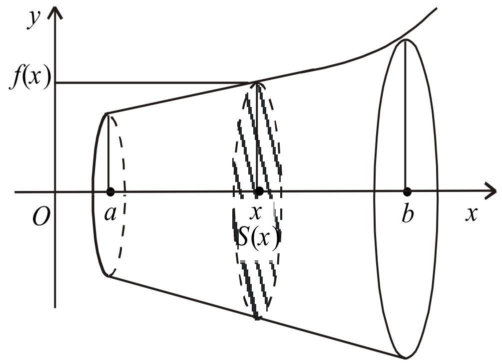


Рис. 24.6

Тоді об'єм тіла за площами паралельних перерізів визначають так

$$V = \int_{a}^{b} S(x)dx\,.$$

б) Об'єм тіла обертання. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = f(x) \ge 0,\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ (див. рис. 24.7), обчислюють за формулою

$$V_x = \pi \int_{a}^{b} f^2(x)dx\,. \qquad (24.8)$$

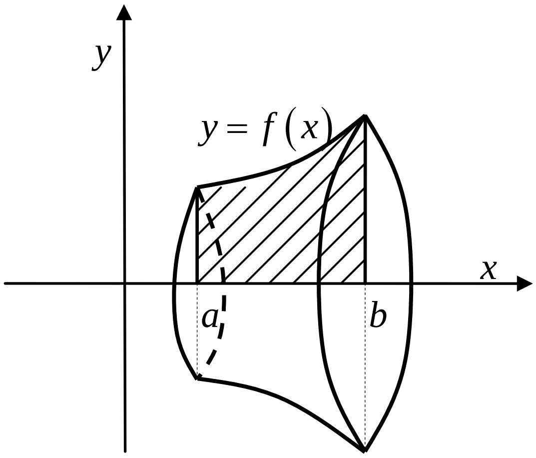


Рис. 24.7

Нехай задано дві криві $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причому $f_2(x) \ge f_1(x) > 0$ при $a \le x \le b$ і функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ неперервні на $[a;b]$. Тоді об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ на відрізку $[a;b]$, обчислюється за формулою

$$V_x = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x) \right) dx .$$

Об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = \varphi(y) \ge 0$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (див. рис. 24.8), знаходять аналогічно

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy . \tag{24.9}$$

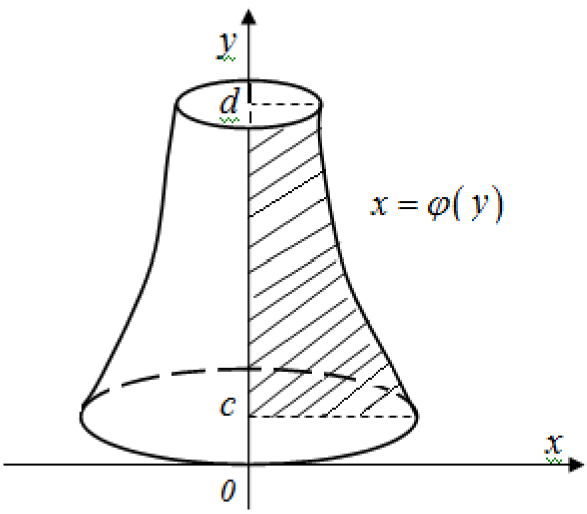


Рис. 24.8

Об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox або осі Oy кривої, заданої в параметричному вигляді $x = x(t),\ y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, обчислюється відповідно за формулами

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt \quad \text{або} \quad V_y = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t) y'(t) dt.$$

Нехай криву задано в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна функція при $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ (див. рис. 24.9).

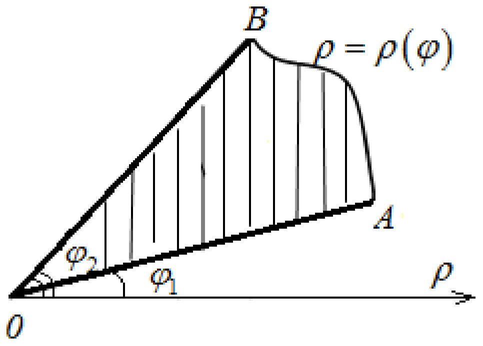


Рис. 24.9

Тоді об’єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та двома полярними радіусами OA і OB, які відповідають кутам φ_1 та φ_2, обчислюється за формулою

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi) \cdot \sin\varphi \, d\varphi.$$

4. Площа поверхні, утвореної обертанням кривої.

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої, заданої функцією $y = f(x)$, $a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$P = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Якщо крива задана в параметричному вигляді $x = x(t),\ y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то площа поверхні обертання дуги кривої навколо осі Ox визначається так

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Якщо криву задано в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то площа поверхні її обертання навколо осі Ox обчислюється за формулою

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) |\sin\varphi| \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Фізичні застосування визначеного інтеграла

1. Шлях тіла, що рухається прямолінійно.

Якщо тіло рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = v(t)$, то шлях, пройдений тілом за час від t_1 до t_2, визначається формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \cdot$$

2. Робота змінної сили по переміщенню тіла.

Якщо змінна сила $F = F(x)$ діє вздовж осі Ох, то робота цієї сили по переміщенню матеріальної точки вздовж відрізка $[a; b]$ дорівнює

$$A = \int_a^b F(x)\,dx\,.$$

3. Маса плоскої кривої із змінною густиною.

Нехай дуга кривої, заданої функцією $y = f\left(x\right),\ a \le x \le b$, має густину $\gamma = \gamma(x)$, тоді масу кривої обчислюють за формулою

$$m = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

Якщо дугу кривої задано в параметричному вигляді $x = x(t),\ y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то її масу визначають за формулою

$$m = \int_\alpha^\beta \gamma(x(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt\,.$$

4. Статичні моменти і координати центра маси.

Нехай дуга кривої із масою m та густиною $\gamma(x)$ задана функцією $y = f\left(x\right),\ a \le x \le b$, тоді статичні моменти кривої відносно осей Ox та Oy обчислюють за формулами

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,,$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x)\cdot x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

Якщо дугу кривої задано в параметричному вигляді $x = x(t),\ y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то статичні моменти кривої відносно осей Ox та Oy визначають так

$$M_x = \int_\alpha^\beta \gamma(x(t))y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt\,,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \gamma(x(t))x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt\,.$$

Координати центра маси, розподіленої вздовж дуги кривої, заданої функцією $y = f(x),\ a \le x \le b$, обчислюють за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

5. Моменти інерції дуги кривої.

Нехай дуга кривої із масою m та густиною $\gamma(x)$ задана функцією $y = f(x),\ a \le x \le b$, тоді моменти інерції кривої відносно осей Ox та Oy визначають за формулами

$$I_x = \int_a^b \gamma(x) f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \quad I_y = \int_a^b \gamma(x) x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Якщо дугу кривої задано в параметричному вигляді $x = x(t),\ y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то статичні моменти кривої відносно осей Ox та Oy дорівнюють

$$I_x = \int_\alpha^\beta \gamma(x(t)) y^2(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$

$$I_y = \int_\alpha^\beta \gamma(x(t)) x^2(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ та $x + y = 0$.

Розв'язання. Побудуємо на площині фігуру, обмежену заданими лініями. Знайдемо межі інтегрування – точки перетину параболи $y = 2x - x^2$ та прямої $y = -x$. Дістанемо $2x - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$ (див. рис. 24.10).

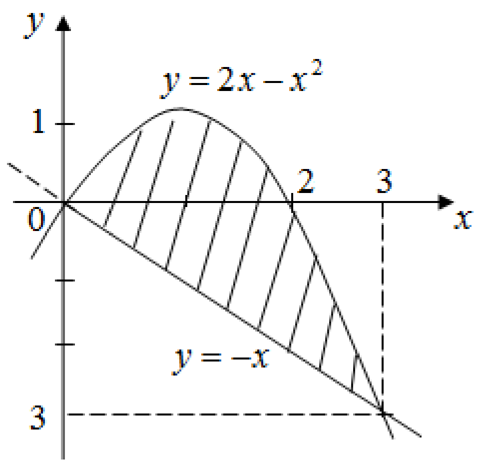


Рис. 24.10

Оскільки графік функції $y = 2x - x^2$ лежить вище прямої $y = -x$, то площу фігури знаходимо за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \int_0^4 \left(2x - x^2 - (-x) \right) dx = \int_0^4 \left(3x - x^2 \right) dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 = 3 \cdot \frac{9}{2} - 9 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x$ і $y = 4 - x^2$.

Розв'язання. Графіком функції $y = x^2 - 2x$ є парабола, гілки якої напрямлені вгору. Нагадаємо, як можна побудувати параболу, визначивши вершину параболи та точки перетину з осями координат. Абсцису вершини параболи знайдемо за формулою $x = -\dfrac{b}{2a}$, де a – коефіцієнт при x^2, b – коефіцієнт при x. Оскільки $x = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1$, то $y = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$. Отже, $A(1;-1)$ – вершина параболи. Точки перетину параболи $y = x^2 - 2x = x(x-2)$ з віссю абсцис $O(0;0)$ і $B(2;0)$.

Графіком функції $y = 4 - x^2$ є парабола, гілки якої напрямлені вниз. Вершина параболи $D(0;4)$, а точки перетину з віссю абсцис $K(-2;0)$ $B(2;0)$. Побудуємо задані параболи (див. рис. 24.11).

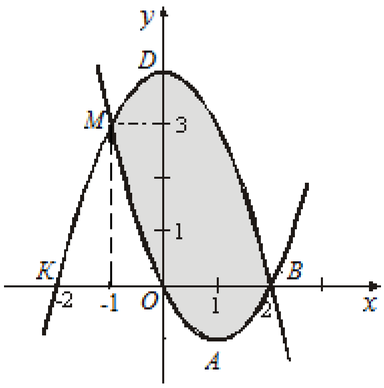


Рис. 24.11

Визначимо точки перетину заданих ліній, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = x^2 - 2x; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 = 0; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=2; \end{array}\right. \\ y=4-x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1; \\ y=4-(-1)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2; \\ y=4-2^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1; \\ y=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2; \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Маємо точки перетину заданих ліній $M(-1;3)$ і $B(2;0)$. Отже, $AOMDB$ – фігура, обмежена параболами $y=x^2-2x$ і $y=4-x^2$. Знайдемо її площу.

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(4-x^2-(x^2-2x)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx=$$

$$=\left(-2\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=-\frac{2\cdot 2^3}{3}+2^2+4\cdot 2-\left(-\frac{2\cdot(-1)^3}{3}+(-1)^2+4\cdot(-1)\right)=$$

$$=-\frac{16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4=-\frac{16}{3}-\frac{2}{3}+15=-6+15=9.$$

Приклад 3. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y=\sqrt{x^3}$ від точки $A(1, 1)$ до точки $B(4, 8)$.

Розв'язання. Оскільки крива задана в явному вигляді, то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Для заданої кривої маємо $y=\sqrt{x^3}$, $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, тому

$$l=\int_1^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot dx=\frac{4}{9}\int_1^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_1^4=\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_1^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-\frac{13}{8}\sqrt{13}\right).$$

Приклад 4. Знайти довжину першого витка спіралі Архімеда $\rho=a\varphi$.

Розв'язання. Перший виток спіралі відповідає зміні кута φ от 0 до 2π (див. рис. 24.12).

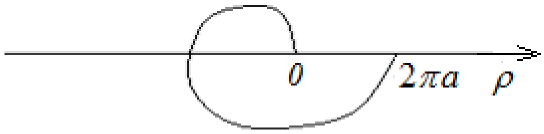


Рис. 24.12

Оскільки крива задана в полярній системі координат, то застосуємо формулу

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\,d\varphi,$$

де $\rho=a\varphi,\ \rho'=a,\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

Знайдемо довжину дуги кривої, обчисливши інтеграл

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\left|\begin{array}{ll}\varphi=\operatorname{ctg}t & t=\operatorname{arcctg}\varphi\\ d\varphi=-\dfrac{dt}{\sin^2 t} & \begin{array}{c|c|c}\varphi & 0 & 2\pi\\ \hline t & \dfrac{\pi}{2} & \operatorname{arcctg}2\pi\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=-a\int_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\sqrt{\operatorname{ctg}^2 t+1}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-a\int_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\sin^2 t}}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-a\int_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\frac{dt}{\sin^3 t}.$$

Знайдемо первісну підінтегральної функції, тобто обчислимо невизначений інтеграл за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\int\frac{dt}{\sin^3 t}=\left|\begin{array}{l}u=\operatorname{tg}\dfrac{t}{2},\ \ t=2\operatorname{arctg}u\\ dt=\dfrac{2du}{1+u^2},\ \sin t=\dfrac{2u}{1+u^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+u^2)^3\cdot 2du}{8u^3(1+u^2)}=$$

$$=\frac14\int\frac{(1+u^2)^2}{u^3}du=\frac14\int\frac{1+2u^2+u^4}{u^3}du=\frac14\left(\int\frac{du}{u^3}+2\int\frac{du}{u}+\int u\,du\right)=$$

$$=-\frac{1}{8u^2}+\frac12\ln|u|+\frac18u^2+C=-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}+\frac12\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\frac18\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+C.$$

Враховуючи знайдену первісну, дістаємо

$$l=-a\int_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\frac{dt}{\sin^3 t}=-a\left.\left(-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}+\frac12\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\frac18\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)\right|_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}=$$

$$=a\left(\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}=\frac{a}{8}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}-4\ln\frac{1}{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}=$$

$$=\frac{a}{8}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}}+4\ln\operatorname{ctg}\left|\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}\right|-1+1+0\right).$$

Оскільки $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\frac{1+\cos t}{\sin t}=\frac{1}{\sin t}+\operatorname{ctg}t=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg}t}+\operatorname{ctg}t=\sqrt{\operatorname{ctg}^2 t+1}+\operatorname{ctg}t$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}=\sqrt{\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg}2\pi)+1}+\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}2\pi)=\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi.$$

Отже, шукана довжина дуги кривої дорівнює

$$l=\frac{a}{8}\left(\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^2-\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^2}-4\ln\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)\right)=$$

$$=a\left(\frac{\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^4-1}{8\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^2}-\ln\sqrt{\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi}\right).$$

При обчисленні довжини дуги кривої інтеграл можна знайти іншим способом, а саме

$$l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\left|\begin{array}{ll}\varphi=\operatorname{tg}t & t=\operatorname{arctg}\varphi\\ d\varphi=\dfrac{dt}{\cos^2 t} & \begin{array}{c|c|c}\varphi & 0 & 2\pi\\ \hline t & 0 & \operatorname{arctg}2\pi\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=a\int_0^{\operatorname{arctg}2\pi}\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=a\int_0^{\operatorname{arctg}2\pi}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=a\int_0^{\operatorname{arctg}2\pi}\frac{dt}{\cos^3 t}=$$

$$=a\int_0^{\operatorname{arctg}2\pi}\frac{\cos t\,dt}{\cos^4 t}=a\int_0^{\operatorname{arctg}2\pi}\frac{d\sin t}{(1-\sin t)^2(1+\sin t)^2}=a\int_0^{\operatorname{arctg}2\pi}\frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

Враховуючи тригонометричну формулу $\sin^2 t=\frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$, маємо

$$\sin t=\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\quad\Rightarrow,\qquad \sin(\operatorname{arctg}2\pi)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2\pi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}2\pi)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}.$$

Зробивши підстановку $u = \sin t$, розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби, дістанемо

$$l = \left| \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{u = \sin t} \\ \dfrac{t}{u} & \dfrac{0}{0} & \dfrac{\operatorname{arctg} 2\pi}{\dfrac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}} \end{array} \right| = a \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}} \frac{du}{(1+u)^2(1-u)^2} =$$

$$= \frac{1}{4a} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} \right) du =$$

$$= \frac{1}{4a} \left(\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) \Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}} = a \left(\ln\sqrt{2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}} + \pi\sqrt{1+4\pi^2} \right)$$

Приклад 5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3,\ x = 4$.

Розв'язання. Побудувавши фігуру, обмежену параболою $y^2 = 3(x-1)$ та прямою $x = 4$, визначимо об'єм тіла обертання цієї фігури навколо осі $0x$ (див. рис. 24.13)

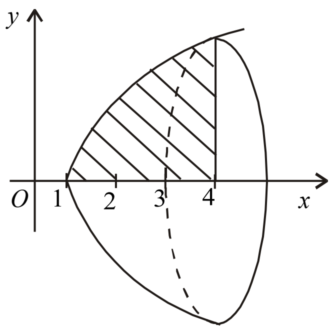


Рис. 24.13

Скориставшись формулою $V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, дістанемо

$$V = \pi \int\limits_1^4 y^2 dx = 3\pi \int\limits_1^4 (x-1)\,dx = 3\pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Bigg|_1^4 = 3\pi \left(8 - 4 - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{27}{2}\pi .$$

Приклад 6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Оy астроїди $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. Зобразимо задану криву (див. рис. 24.14). Оскільки криву задано в параметричному вигляді, то використаємо формулу $V_y = \pi \int\limits_\alpha^\beta x^2(t)\, y'(t)\, dt$ для обчислення об'єму тіла обертання навколо осі Oy.

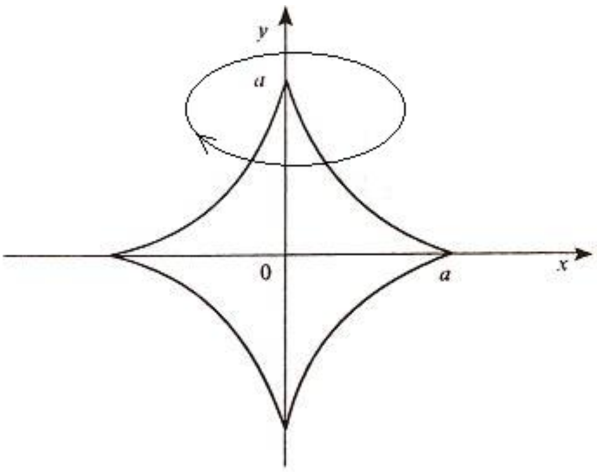


Рис. 24.14

Враховуючи, що $x^2 = a^2\cos^6 t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$, $t_1 = -\dfrac{\pi}{2}$, $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$, маємо

$$V = \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^6 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t dt = 3\pi a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^3\sin^2 t\cdot d(\sin t) =$$

$$= 3\pi a^3\left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{3\sin^5 t}{5} + \frac{3\sin^7 t}{7} - \frac{\sin^9 t}{9}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

Приклад 7. Обчислити площу поверхні, яка утворюється обертанням навколо осі абсцис частини кривої $y = \sqrt{x}$ від x=0 до x=1.

Розв'язання. Для обчислення площі поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* дуги кривої, заданої функцією $y = f\left(x\right)$, $a \le x \le b$, скористаємось формулою $P = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$, дістанемо

$$P = 2\pi\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx = 2\pi\int_0^1\sqrt{x+\frac{1}{4}}dx = \frac{4\pi}{3}(x+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}.$$

Приклад 8. Визначити величину роботи, яку потрібно виконати при переміщенні матеріальної точки від 1 метра до 3 метрів під дією сили $F(x) = 2x+1$ (Н).

Розв'язання. Робота по переміщенню матеріальної точки під дією сили $F(x)$ вздовж відрізка [1; 3] визначається за формулою

$$A = \int_1^3(2x+1)dx = \left(x^2+x\right)\Big|_1^3 = (3^2+3)-(1+1) = 10 \text{ (Дж).}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями

а) $y = x^2 + 2x,\ y = x + 2$; б) $y = 2x - x^2,\ y = -x$;

в) $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$; г) $y = \sqrt{x},\ y = -x + 2,\ y = 0$;

д) астроїдою $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$;

е) однією аркою циклоїди $x = a(t - sint), y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox;

ж) кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos\varphi)$;

з) кривою $\rho = 5\sin 3\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої

а) $y = 2\sqrt{x}$ від точки $O(0; 0)$ до $A(1; 2)$;

б) $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$;

в) астроїди $x = 5\cos^3 t, y = 5\sin^3 t$;

г) однієї арки циклоїди $x = a(t - sint), y = a(1 - \cos t)$;

д) кардіоїди $\rho = a(1 - \cos\varphi)$;

е) кривої $\rho = 2\sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$.

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями

а) $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ навколо осі Ox;

б) $2y = x^2,\ \ 2x + 2y - 3 = 0$ навколо осі Ox;

в) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2,\ \ y = 2$ навколо осі Oy;

г) $y^2 = 4 - x,\ \ x = 0$ навколо осі Oy;

д) астроїдою $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ навколо осі Oy;

е) однією аркою циклоїди $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t)$ навколо осі Ox.

§ 25. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого роду

Раніше ми розглядали визначений інтеграл на скінченному відрізку $[a;b]$. Проте в деяких задачах виникає потреба розглядати інтеграли на нескінченних проміжках $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;+\infty)$.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty)$ і інтегровна для будь-якого скінченного $b \in [a;+\infty)$, тобто існує інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Невласним інтегралом І роду (з нескінченною верхньою межею) від функції $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$ називають границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (25.1)$$

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а підінтегральну функцію – *інтегровною на проміжку* $[a;+\infty)$. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то інтеграл – *розбіжний.*

З геометричної точки зору збіжний невласний інтеграл І роду визначає площу необмеженої фігури (див. рис. 25.1).

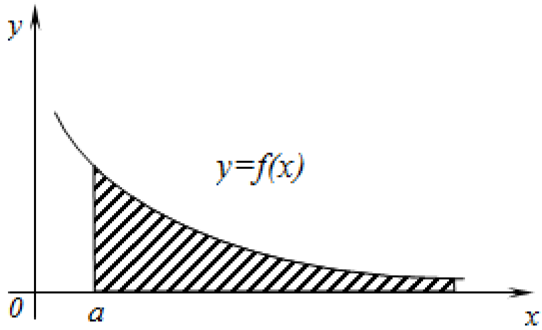


Рис. 25.1

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(-\infty;b]$ й інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $a\in[-\infty;b)$

Невласним інтегралом І роду (з нескінченною нижньою межею) від функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty;b]$ називають границю $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (25.2)$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(-\infty;+\infty)$ й інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, то розглядають *невласний інтеграл І роду* **(***з нескінченними межами)* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Цей інтеграл розбивають на два невласні інтеграли:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (25.3)$$

де c – довільне дійсне число.

Якщо обидва інтеграли в правій частині рівності (25.3) збігаються, то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним*. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини рівності (25.3) розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним*.

Тоді невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;+\infty)$ визначають так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

У теорії ймовірностей використовують невласний інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, для якого можна довести $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Враховуючи парність підінтегральної функції і зробивши заміну змінної, дістанемо найбільш поширену форму інтеграла Пуассона $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}$.

Зауважимо, що питання про збіжність (розбіжність) невласного інтеграла можна вирішити, не обчислюючи його. При цьому застосовують ознаки збіжності невласних інтегралів.

Розглянемо *ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду*.

1. Ознака порівняння.

Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$.

2. Гранична ознака порівняння.

Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\quad 0 < k < +\infty$, ($f(x) > 0$, $g(x) > 0$), то інтеграли $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідки. 1) Якщо $k=0$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

2) Якщо $k=+\infty$, то із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, який в цьому випадку називається *абсолютно збіжним.*

Найчастіше при дослідженні інтегралів першого роду для порівняння використовують функції $\frac{1}{x^p}$. Дослідимо на збіжність інтеграл Діріхле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Розглянемо три випадки.

1) Нехай $p=1$, тоді маємо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty,$$

тому при $p = 1$ інтеграл розбіжний.

2) При $p<1$ дістаємо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right) = +\infty.$$

У цьому випадку інтеграл розбіжний.

3) Нехай $p>1$, тоді

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{\frac{1}{p-1}}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1},$$

тому при $p>1$ інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при $p>1$ та розбіжний при $p\le 1$.

Теорема. Для збіжності невласного інтеграла (25.1) необхідно і достатньо, щоб інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ зі зростанням верхньої межі був обмеженим зверху, тобто $\int_a^b f(x)dx \le L \quad (L = \text{const})$.

Теорема. Нехай для достатньо великих *x* функція *f*(*x*) має вигляд $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^\lambda} \quad (\lambda > 0)$. Якщо $\lambda > 1$ і $\varphi(x) \le c$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а якщо $\lambda \le 1$ і $\varphi(x) \ge c > 0$, то цей інтеграл розбігається.

Ознака Абеля. Нехай функції *f*(*x*) і *g*(*x*) визначені на проміжку $[a;+\infty)$, причому функція *f*(*x*) інтегровна на цьому проміжку, тобто інтеграл (25.1) збігається, а функція *g*(*x*) монотонна і обмежена ($|g(x)| \le L,\ L = \text{const}$). Тоді інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збіжний.

Ознака Діріхле. Нехай функція *f*(*x*) інтегровна на будь-якому проміжку $[a;b]$, інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ обмежений: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le K \quad (K = \text{const})$; а функція *g*(*x*) монотонно прямує до 0: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Тоді інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збіжний.

Невласні інтеграли другого роду

Ми розглядали визначені інтеграли від неперервних на $[a;b]$ функцій. Проте є задачі, що приводять до розгляду інтеграла від функції, яка має нескінченний розрив у деякій точці.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку (*a*; *b*] і в точці $x = a$ має розрив другого роду (є необмеженою поблизу точки $x = a$). Тоді функція інтегровна на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;\, b]$, де $0 < \varepsilon < b - a$.

Невласним інтегралом II роду від функції $f(x)$ на проміжку $(a;b]$ називають границю $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ і позначають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (25.4)$$

Якщо існує скінченна границя в рівності (25.4), то інтеграл називається *збіжним*. Функція $f(x)$ при цьому називається інтегровною на даному проміжку. Якщо ж границя нескінченна або не існує, тоді інтеграл називається *розбіжним*.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$ і в точці $x=b$ має розрив другого роду (див. рис. 25.2). Тоді функція інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$.

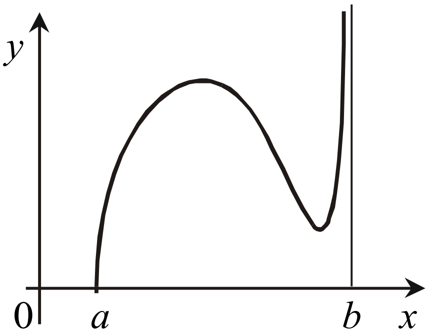


Рис. 25.2

Невласним інтегралом II роду від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b)$ називають границю $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{25.5}$$

Розглянемо випадок, коли точками нескінченного розриву функції є одночасно точки $x=a$ і $x=b$. Це означає, що функція $f(x)$ необмежена на $[a;a+\varepsilon]$ та на $[b-\varepsilon;b]$, а на будь-якому відрізку $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$ вона є інтегровною. Тоді інтеграл розбивають на два невласні інтеграли

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx,$$

де $x=c$ – довільна точка інтервалу $(a;b)$. Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Можливий випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ має точку розриву всередині відрізка $[a;b]$, тобто $x=c\in[a;b]$. В усіх інших точках відрізка $[a;b]$ функція $f(x)$ інтегровна. Тоді інтеграл розбивають на два невласні інтеграли:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Зауважимо, що ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні подібним ознакам для інтегралів першого роду. При дослідженні на збіжність інтегралів з точкою розриву $x = a$ для порівняння використовують функцію $\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha}}$, інтеграл від якої $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$ збігається, якщо $0 < \alpha < 1$ і розбігається, якщо $\alpha \geq 1$. Якщо точкою розриву функції $f(x)$ є точка $x = b$, використовують функцію $\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha}}$, інтеграл від якої $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ збігається при $0 < \alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

Розглянемо *ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду*.

Теорема. Нехай $f(x) \geq 0$. Для збіжності невласного інтеграла (25.4) необхідно і достатньо, щоб при всіх ε > 0 інтеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ був обмеженим зверху, тобто $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq L \quad (L = \text{const})$.

Ознака Коші. Нехай для достатньо близьких до числа b значень x функція $f(x)$ має вигляд $f(x) = \dfrac{g(x)}{(b-x)^{\lambda}}$, $\lambda > 0$. Тоді

1) якщо $\lambda < 1$ і $0 < g(x) \leq c$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збіжний;

2) якщо $\lambda \geq 1$ і $g(x) \geq c > 0$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбіжний;

3) якщо при $x \to b$ функція $f(x)$ є нескінченно великою порядку $\lambda > 0$ по відношенню до $\dfrac{1}{b-x}$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ є збіжним при $\lambda < 1$ і розбіжним при $\lambda \geq 1$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ або обчислити його, якщо це можливо.

Розв’язання. Маємо невласний інтеграл І роду з нескінченною верхньою межею інтегрування. За означенням дістанемо

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, даний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ або дослідити його на збіжність.

Розв'язання. Скористаємось означенням невласного інтеграла I роду з нескінченною верхньою межею інтегрування, дістанемо

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^b=2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-1\right)=+\infty.$$

Таким чином, даний інтеграл є розбіжним.

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл $\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}dx$.

Розв'язання. Скористаємось означенням невласного інтеграла I роду з нескінченною верхньою межею інтегрування, маємо

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-2b}+1\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^{2b}}+1\right)=1.$$

Отже, даний невласний інтеграл збігається.

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{0}x\cdot e^{x}dx$ або дослідити його на збіжність.

Розв'язання. Скористаємось означенням невласного інтеграла I роду з нескінченною нижньою межею інтегрування, обчислимо його методом інтегрування частинами

$$\int_{-\infty}^{0}x\cdot e^{x}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}x\cdot e^{x}dx=\begin{vmatrix}u=x,\ du=dx\\ dv=e^{x}dx,\ v=e^{x}\end{vmatrix}=\lim_{a\to-\infty}\left(x\cdot e^{x}\Big|_a^0-\int_{a}^{0}e^{x}dx\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(x\cdot e^{x}-e^{x})\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(0-a\cdot e^{a}-e^{0}+e^{a})=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{a}{e^{-a}}-1+\frac{1}{e^{-a}}\right)=$$

$$=-1-\lim_{a\to-\infty}\frac{a'}{\left(e^{-a}\right)'}+\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{e^{-a}}=-1-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{-e^{-a}}+0=-1.$$

При обчисленні границі скористались правилом Лопіталя.

Отже, даний невласний інтеграл збігається.

Приклад 5. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл I роду з нескінченними межами інтегрування, тому розкладемо його в суму двох невласних інтегралів. Візьмемо для зручності проміжну точку $c=-1$, в якій перетворюється в нуль вираз $x+1$, отриманий після виділення повного квадрату. За означенням дістанемо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-1}^{b} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2}\Bigg|_{a}^{-1} + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2}\Bigg|_{-1}^{b} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(arctg0 - arctg\frac{a+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(arctg\frac{b+1}{2} - arctg0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+3)^4}}$.

Розв'язання. Оцінимо підінтегральну функцію при $x\to+\infty$, дістанемо

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}, \quad 1 \le x < +\infty.$$

Інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ збігається як інтеграл Діріхле при $p=3>1$. Тому за ознакою порівняння даний невласний інтеграл теж є збіжним.

Приклад 7. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{3x-2}{x^3+4x^2+5}dx$.

Розв'язання. Дослідимо даний інтеграл за граничною ознакою порівняння. Оскільки $f(x) = \frac{3x-2}{x^3+4x^2+5} \underset{x\to\infty}{\approx} \frac{3x}{x^3} = \frac{3}{x^2}$, то для порівняння розглянемо функцію $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Маємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x-2}{x^3+4x^2+5}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-2x^2}{x^3+4x^2+5} = 3.$$

Відомо, що інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ збіжний (як інтеграл Діріхле при $p = 2 > 1$), тому даний інтеграл теж збіжний.

Приклад 8. Дослідити на збіжність інтеграли

а) $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \ \ (a > 0)$;   б) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos x dx \ \ (a > 0)$.

Розв'язання. а) Скористаємось ознакою Діріхле, розглянувши $f(x) = \sin x,$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Умови ознаки виконуються, оскільки $\left|\int\limits_{a}^{b} \sin x dx\right| = |\cos a - \cos b| \le 2$ і функція $\frac{1}{x^2}$ монотонно спадає, прямуючи до 0 при $x \to +\infty$. Тому даний інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ збіжний.

б) Дослідимо інтеграл за ознакою Абеля, взявши $f(x) = e^{-ax}$, $g(x) = \cos x$. Оскільки інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} dx$ збіжний, а функція $g(x)$ обмежена: $|\cos x| \le 1$, то даний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos x dx \ \ (a > 0)$ збіжний.

Приклад 9. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x-1}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл II роду від необмеженої функції , оскільки функція $f(x) = \frac{1}{x-1}$ має нескінченний розрив у точці $x = 1$ (нижня межа інтегрування). За означенням дістанемо

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|x-1|\right)\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln 1 - \ln|\varepsilon|\right) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln|\varepsilon| = +\infty,$$

тобто даний інтеграл є розбіжним.

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ або дослідити його на збіжність.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл II роду від необмеженої функції в точці $x = 1$. За означенням маємо

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^{e} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(\ln x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\ln x}\Big|_{1-\varepsilon}^{e} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\ln e} - \sqrt{\ln(1-\varepsilon)}\right) = 2(1-0) = 2.$$

Отже, даний інтеграл збігається і дорівнює 2.

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^4}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{x^4}$ має розрив II роду в точці $x = 0$, то маємо невласний інтеграл II роду (від необмеженої функції). За означенням маємо

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x^3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^3} - \frac{1}{3} = +\infty.$$

Отже, даний інтеграл розбігається.

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл II роду від необмеженої функції в точці $x = 2$ (верхня межа). За означенням дістанемо

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon} (2-x)^{-\frac{1}{3}} d(2-x) =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(2-x)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^{2-\varepsilon} = -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt[3]{(2-x)^2}\Big|_1^{2-\varepsilon} = -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt[3]{\varepsilon^2} - 1) = \frac{3}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Приклад 13. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ має нескінченний розрив у точці $x = 1$, яка належить проміжку інтегрування $[0; 3]$, то маємо невласний інтеграл II роду. За означенням дістанемо

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{3} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^{3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty + \infty = +\infty.$$

Отже, даний інтеграл є розбіжним.

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2-6x+8}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2-6x+8}=\frac{1}{(x-2)(x-4)}$ має нескінченний розрив у точці $x=2\in[1;3]$, тому маємо невласний інтеграл II роду. Даний інтеграл розкладається в суму двох невласних інтегралів і є збіжним тільки тоді, коли збігаються обидва інтеграли. Дістанемо

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)(x-4)}=\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)(x-4)}+\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-2)(x-4)}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)(x-4)}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^{3} \frac{dx}{(x-2)(x-4)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right)dx+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2+\varepsilon}^{3}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\Bigg|_0^{2-\varepsilon}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon}^{3}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{-\varepsilon-2}{-\varepsilon}\right|-\ln\left|\frac{-4}{-2}\right|\right)+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{-1}{1}\right|-\ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|1+\frac{2}{\varepsilon}\right|-\ln 2\right)+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1-\ln\left|1-\frac{2}{\varepsilon}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{\searrow+\infty}-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)}_{\searrow+\infty}.$$

Обидва невласні інтеграли, на які було розкладено даний інтеграл, є розбіжними (оскільки відповідні границі нескінченні). Тому даний інтеграл теж є розбіжним.

Приклад 15. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)=\frac{1}{x^3+\sqrt{x}}$ має нескінченний розрив у точці $x=0$, то маємо невласний інтеграл II роду. Дослідимо його за ознакою порівняння, розглянувши функцію $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки $\frac{1}{x^3+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$, а інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ є збіжним ($\alpha=\frac{1}{2}<1$), то даний інтеграл також є збіжним.

Приклад 16. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x}}dx$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. функція неперервна в усіх точках проміжку (0;1], а в точці $x=0$ має нескінченний розрив. Тому маємо невласний інтеграл ІІ роду, для якого спочатку знайдемо первісну, тобто розглянемо відповідний невизначений інтеграл

$$\int \frac{(2x+\cos x)dx}{\sqrt{x^2+\sin x}} = \int (x^2+\sin x)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+\sin x) = \begin{vmatrix} t = x^2+\sin x \\ dt = 2x+\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+\sin x} + C.$$

Даний невласний інтеграл ІІ роду знайдемо за означенням, дістанемо

$$\int\limits_0^1 \frac{(2x+\cos x)}{\sqrt{x^2+\sin x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{(2x+\cos x)}{\sqrt{x^2+\sin x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x^2+\sin x}\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1+\sin 1} - \sqrt{\varepsilon^2+\sin\varepsilon}\right) = 2\sqrt{1+\sin 1}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 17. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ має точку розриву ІІ роду x = 1, тому даний інтеграл є невласним інтегралом другого роду. Оскільки $\frac{\ln x}{x-1} \to 1$ при $x \to 1$, то функція $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ є нескінченно великою порядку $\lambda = 1$.

Отже, інтеграл розбіжний за ознакою Коші.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx$;

г) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^3}$; д) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; е) $\int\limits_5^{\infty} \frac{dx}{x^2-4}$;

ж) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+6}$; з) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+10}$; к) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність

а) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$; б) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{(x-2)^3}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x-1)^2}$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}\, x dx$; е) $\int\limits_0^2 \frac{\ln^4(2-x)dx}{2-x}$;

ж) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{x^2-5x+6}$; к) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x^2-x-2}$.

3. Дослідити на збіжність інтеграли

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 xdx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення первісної та невизначеного інтеграла.
2. Яка достатня умова існування невизначеного інтеграла?
3. Наведіть властивості невизначеного інтеграла.
4. Наведіть основні формули інтегрування (таблицю інтегралів).
5. Які методи інтегрування використовуються при обчисленні невизначеного інтеграла?
6. Опишіть метод заміни змінної у невизначеному інтегралі.
7. Наведіть формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
8. Як інтегруються елементарні раціональні дроби?
9. Як розкласти правильний раціональний дріб на елементарні дроби?
10. Наведіть алгоритм інтегрування дробово-раціональних функцій.
11. Опишіть основні випадки інтегрування тригонометричних функцій.
12. Що таке універсальна тригонометрична підстановка?
13. Опишіть основні випадки інтегрування ірраціональних виразів.
14. Які задачі приводять до поняття визначеного інтеграла?
15. Сформулюйте поняття визначеного інтеграла.
16. Наведіть властивості визначеного інтеграла.
17. Яка формула пов’язує визначений і невизначений інтеграли?
18. Як використовуються методи інтегрування у визначеному інтегралі?
19. Наведіть геометричні застосування визначеного інтеграла.
20. Сформулюйте поняття невласного інтеграла I роду.
21. Як дослідити на збіжність невласний інтеграл I роду?
22. Сформулюйте поняття невласного інтеграла II роду.

Розділ VII. Диференціальні рівняння

§ 26. Диференціальні рівняння першого порядку

При дослідженні різноманітних процесів та явищ часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, що встановлюють зв'язок між функцією та швидкістю її зміни. У таких рівняннях невідома функція міститься під знаком похідної або диференціала.

Рівняння, які пов'язують незалежні змінні, шукану функцію та похідні або диференціали цієї функції, називають *диференціальними*.

Якщо невідома функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*, а якщо невідома функція багатьох змінних, то маємо диференціальне *рівняння в частинних похідних*. Надалі ми розглядатимемо звичайні диференціальні рівняння.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну x, функцію $y(x)$, її похідну $y'(x)$ і має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 \tag{26.1}$$

Якщо рівняння (26.1) можна розв'язати відносно похідної y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \tag{26.2}$$

і називають *рівнянням, розв'язаним відносно похідної*.

Диференціальне рівняння першого порядку (26.2) можна записати також в диференціальній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{26.3}$$

де $P(x, y), Q(x, y)$ – відомі функції. Це рівняння зручне тим, що змінні $P(x, y), Q(x, y)$ в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію другої. Зауважимо, що від однієї форми запису диференціального рівняння можна перейти до іншого.

Розв'язком диференціального рівняння (26.2) на інтервалі $(a;b)$ називається диференційована на $(a;b)$ функція $y = \varphi(x)$, підстановка якої перетворює це рівняння в тотожність. Процес відшукання розв'язку диференціального рівняння називають його *інтегруванням.*

Для того, щоб з усієї множини розв'язків вибрати шуканий, потрібно розглянути додаткові умови.

Якщо при певному значенні $x = x_0$ функція $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння на $(a;b)$, набуває заданого значення y_0, то цей розв'язок задовольняє *початкову умову*, яку записують

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{або} \qquad y\big|_{x=x_0} = y_0, \qquad (26.4)$$

де $x_0 \in (a;b), y_0 \in R$.

Задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку називають задачу відшукання розв'язку даного рівняння, який задовольняє початкову умову (26.4).

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y = \varphi(x, C)$, $x \in (a;b)$, яка задовольняє такі умови

1) функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком даного рівняння при будь-якому допустимому фіксованому значенні C;

2) для будь-якої допустимої початкової умови (26.4) існує таке значення сталої $C = C_0$, при якому функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє цю початкову умову.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдений в неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то його називають *загальним інтегралом* даного диференціального рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають будь-яку функцію $y = \varphi(x, C_0)$, отриману із загального розв'язку цього рівняння при конкретному значенні $C = C_0$. Таким чином, частинний розв'язок рівняння задовольняє задану початкову умову (26.4).

Графік функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, називають *інтегральною кривою*.

З геометричної точки зору, загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ визначає сукупність всіх інтегральних кривих на площині, а частинний розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ – ту інтегральну криву, яка проходить через точку $(x_0; y_0)$.

Розглянемо *теорему Коші*, яка визначає умови, при яких диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ має розв'язок.

Теорема (*теорема про існування та єдиність розв'язку*). Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області D, то для довільної точки $(x_0; y_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (26.2), який задовольняє початкову умову (26.4).

Геометричний зміст теореми Коші полягає в тому, що при виконанні її умов через кожну точку $(x_0; y_0) \in D$ проходить єдина інтегральна крива.

Розглянемо основні типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи розв'язування.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Для розв'язання диференціального рівняння потрібно його проінтегрувати. Інтеграл можна знайти тільки тоді, коли під інтегралом функція і диференціал залежать тільки від однієї змінної. Оскільки в диференціальному рівнянні є дві змінні x та y, то їх потрібно відокремити.

Розглянемо найпростіше диференціальне рівняння першого порядку – *рівняння з відокремленими змінними*

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 . \qquad (26.5)$$

Зведемо його до вигляду $Q(y)dy = -P(x)dx$ і знайдемо інтеграли від обох його частин. Тоді загальний інтеграл рівняння (26.5) має вигляд

$$\int Q(y)dy + \int P(x)dx = C .$$

Розглянемо більш загальний випадок. Диференціальним *рівнянням з відокремлюваними змінними* називають рівняння вигляду

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 , \qquad (26.6)$$

або

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) . \qquad (26.7)$$

Ознакою рівняння з відокремлюваними змінними є те, що при диференціалах dx та dy в рівнянні (26.6) множниками є добутки двох функцій, одна з яких залежить тільки від змінної x, а друга – тільки від y.

У правій частині рівнянні (26.7) функція $f(x, y)$ є добутком функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної, тобто $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Для розв'язання диференціального рівняння (26.6) або (26.7) потрібно зробити такі перетворення, щоб при dx була функція, яка залежить тільки від x, а при dy – функція від y.

Якщо маємо диференціальне рівняння (26.6), то змінні відокремлюємо так. Запишемо рівняння у вигляді

$$Q_1(x)Q_2(y)dy = -P_1(x)P_2(y)dx.$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на $Q_1(x) \cdot P_2(y) \neq 0$. Отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx \qquad (26.8)$$

і знайдемо інтеграли від кожної частини отриманої рівності.

Зауважимо, що при діленні рівняння на $Q_1(x) \cdot P_2(y)$, можна втратити деякі розв'язки. Тому потрібно з умови $Q_1(x) \cdot P_2(y) = 0$ знайти ті розв'язки диференціального рівняння, які не можна отримати з його загального розв'язку.

Для розв'язання диференціального рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (26.7) спочатку перевіряємо виконання умови $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, після чого похідну записуємо у вигляді $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Тоді рівняння (26.7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Помножимо обидві частини рівності на dx і поділимо їх на $f_2(y) \neq 0$, тоді диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Знаходимо інтеграли від обох частин рівності

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx.$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Функція $f(x,y)$ називається *однорідною* функцією *к*-го виміру, якщо виконується умова

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y).$$

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку вигляду (26.3)

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Диференціальне рівняння (26.3) називається *однорідним,* якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є однорідними функціями одного виміру.

Розглянемо однорідне рівняння в іншому вигляді. Рівняння

$$y' = f(x,y), \tag{26.9}$$

називається *однорідним,* якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру. Таку функцію можна звести до функції вигляду $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, тоді рівняння (26.9) набуває вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{26.10}$$

Розв’язання однорідного диференціального рівняння зводиться до розв’язання рівняння з відокремленими змінними за допомогою заміни $z = \frac{y}{x}$, де $z = z(x)$ є функцією від змінної x. Тоді $y = zx,\ y' = z'x + z$, і рівняння (26.10) запишемо у вигляді

$$z'x + z = \varphi(z), \qquad z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}, x \neq 0,$$

тобто маємо рівняння з відокремлюваними змінними x і z. Розв’язавши це рівняння відносно z, знаходимо розв’язок однорідного рівняння $y = zx$.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним,* якщо воно має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (26.11)$$

тобто функція y та її похідна y' містяться в рівнянні в першому степені, де $p(x),\ q(x)$ – неперервні функції на проміжку $(a;b)$.

Якщо $q(x)=0$, то лінійне диференціальне рівняння (26.11) називається *однорідним,* а якщо $q(x)\neq 0$ – *неоднорідним*. Зауважимо, що лінійне однорідне рівняння $y' + p(x)y = 0$ є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Розглянемо методи розв'язання лінійного рівняння: метод Бернуллі та метод Лагранжа.

Метод Бернуллі

Розв'язок $y(x)$ лінійного диференціального рівняння (26.11) знаходять у вигляді добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$, на одну з яких можна накладати додаткові умови. Наведемо схему розв'язання лінійного рівняння цим методом.

Подамо функцію $y(x)$ у вигляді $y = u\cdot v$, тоді похідна $y' = u'v + uv'$. Підставивши функцію та її похідну в рівняння (11), дістанемо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \qquad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Накладемо на функцію $v(x)$ таку умову, щоб в останньому рівнянні вираз в дужках $v' + p(x)v$ дорівнював нулю, тобто

$$v' + p(x)v = 0. \qquad (26.12)$$

Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді

$$u'v = q(x). \qquad (26.13)$$

Дістали два рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши рівняння (26.12), знаходимо функцію $v(x)$ і підставляємо її в рівняння (26.13), з якого знаходимо функцію $v(x)$. Тоді розв'язок лінійного рівняння: $y = u(x)v(x)$.

Таким чином, розв'язання лінійного рівняння зводиться до розв'язання двох рівнянь (26.12) і (26.13) з відокремлюваними змінними.

Метод Лагранжа (*метод варіації довільної сталої*)

Для розв'язання лінійного диференціального рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ знайдемо спочатку розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' + p(x)y = 0. \qquad (26.14)$$

Дістаємо

$$y' = -p(x)y, \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|, \; C \neq 0, \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln e^{-\int p(x)dx},$$

звідки маємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \qquad (26.15)$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (26.11) знайдемо у вигляді (26.15), вважаючи, що $C = C(x)$ є функцією від x, тобто

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (26.16)$$

Знайдемо похідну

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx}.$$

Підставивши вирази y та y' в рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, дістанемо

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad C'(x)dx = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

звідки маємо

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$$

Підставивши знайдену функцію $C(x)$ у вираз (26.16), дістанемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx}, \qquad (26.17)$$

який можна записати в іншому вигляді

$$y = C_1 e^{-\int p(x)dx} + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Диференціальні рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називають рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = y^k q(x), \qquad (26.18)$$

де k – дійсне число, причому $k \neq 0, k \neq 1$.

Зазначимо, що у випадку $k = 0$ рівняння (26.18) є лінійним, а при $k = 1$ – рівнянням з відокремлюваними змінними.

Записавши рівняння Бернуллі у вигляді

$$\frac{y'}{y^k} + \frac{p(x)}{y^{k-1}} = q(x), \tag{26.19}$$

зведемо його до лінійного рівняння за допомогою підстановки

$$z = \frac{1}{y^{k-1}}. \tag{26.20}$$

Оскільки $z = y^{1-k} \Rightarrow z' = (1-k)y^{-k} \cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^k} = \frac{z'}{1-k}$, то рівняння (26.19) набуває вигляду $\frac{z'}{1-k} + p(x)z = q(x) \Rightarrow z' + (1-k)p(x)z = (1-k)q(x)$, тобто є лінійним диференціальним рівнянням за змінною z. Розв'язавши це рівняння, знайдемо функцію z і підставимо її у формулу (26.20), звідки знаходимо розв'язок рівняння Бернуллі $y = \frac{1}{\sqrt[k-1]{z}}$.

Зауважимо, що розв'язок рівняння Бернуллі можна шукати безпосередньо методом Бернуллі, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(1+y^2)dx + xydy = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними виду $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$, де $P_1(x) = 1$, $P_2(y) = 1 + y^2$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(y) = y$. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$xydy = -(1+y^2)dx.$$

Для розв'язання цього рівняння потрібно зробити так, щоб при dy була функція, яка залежить тільки від y, а при dx – функція від x. Поділимо обидві частини рівняння на $x(1+y^2), x \neq 0,$ дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{ydy}{1+y^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини цього рівняння

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = -\ln|x| + \ln|C_1|, \quad \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|,$$

де сталу для зручності записали у вигляді $\ln|C_1|, C_1 \neq 0$. Звідси дістаємо

$$\ln\left(1+y^2\right)=2\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|, \qquad \ln\left(1+y^2\right)=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|, \qquad 1+y^2=\frac{C}{x^2}.$$

Тоді загальний розв’язок (загальний інтеграл) даного рівняння має вигляд

$$x^2\left(1+y^2\right)=C.$$

Враховуючи, що $y^2=\dfrac{C-x^2}{x^2}$, дістанемо $y=\pm\dfrac{\sqrt{C-x^2}}{x}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $x\left(y^2-5\right)dx+ydy=0$.

Розв’язання. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Для його розв’язання залишимо зліва вираз, який залежить тільки від y, а справа – вираз, який залежить тільки від x

$$ydy=-x\left(y^2-5\right)dx.$$

Розділивши обидві частини рівняння на $y^2-5\neq 0$, дістанемо

$$\frac{ydy}{y^2-5}=-xdx.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівняння, знаходимо

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-5\right|=-\frac{x^2}{2}+C_1,\ \ln\left|y^2-5\right|=-x^2+\ln|C|,$$

$$y^2-5=Ce^{-x^2}.$$

Загальний розв’язок даного рівняння можна записати у вигляді

$$y=\pm\sqrt{Ce^{-x^2}+5}.$$

При розв’язанні рівняння ми припускали, що $y^2-5\neq 0$. Переконуємось, що ми не втратили при цьому розв’язків. Значення $y=\pm\sqrt{5}$ є розв’язками даного рівняння, які можна отримати із загального розв’язку при $C=0$.

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$$

Розв’язання. Покажемо, що дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, маємо

$$(x^2y+y)dy=\sqrt{4+y^2}dx, \qquad y(x^2+1)dy=\sqrt{4+y^2}dx.$$

Помноживши рівняння на функцію $\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{4+y^2}}$, дістанемо

$$\frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}}=\frac{dx}{x^2+1}.$$

Оскільки в лівій частині цього рівняння вираз залежить тільки від y, а справа – тільки від x, то це рівняння можна проінтегрувати. Маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}} = \int \frac{dx}{x^2+1}, \qquad \int \frac{d(4+y^2)}{2\sqrt{4+y^2}} = \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Тоді загальний розв’язок (інтеграл) даного рівняння має вигляд

$$\sqrt{4+y^2} = \mathrm{arctg}\,x + C \quad \text{або} \quad y = \pm\sqrt{(\mathrm{arctg}\,x + C)^2 - 4}\,.$$

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$y^2dx + x^2dy = x^2ydy - xy^2dx\,.$$

Розв’язання. Провівши перетворення, дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$(x^2 - x^2y)dy = (-y^2 - xy^2)dx, \qquad x^2(1-y)dy = -y^2(1+x)dx\,.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на вираз x^2y^2, припускаючи, що $x, y \neq 0$. Маємо

$$\frac{y-1}{y^2}dy = \frac{x+1}{x^2}dx\,.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо

$$\int \frac{y-1}{y^2}dy = \int \frac{x+1}{x^2}dx, \qquad \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx,$$

звідки маємо загальний розв’язок (загальний інтеграл) рівняння

$$\ln|y| + \frac{1}{y} = \ln|x| - \frac{1}{x} + C \quad \text{або} \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{x+y}{xy} = C\,.$$

У процесі розв’язання ми припустили, що $x, y \neq 0$. Виявляється, що $x = 0$ і $y = 0$ теж є розв’язками рівняння, які не можна отримати із загального інтеграла при жодному значенні C.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $(x + xy^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$.

Розв’язання. У даному рівнянні можна відокремити змінні, винісши за дужки спільні множники. Дістанемо

$$x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0\,.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де $P(x,y) = P_1(x)P_2(y) = x(1+y^2)$, $Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y) = (1+x^2)y$.

Запишемо це рівняння у вигляді $y(1+x^2)dy = x(1+y^2)dx$ і поділимо обидві частини рівняння на $(1+x^2)(1+y^2)$, при цьому $1+x^2 \neq 0, 1+y^2 \neq 0$.

Відокремивши змінні в рівнянні, дістанемо

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{1+x^2},$$

після чого можна проінтегрувати обидві частини рівняння

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{2ydy}{1+y^2} = \int \frac{2xdx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2},$$

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln C, C > 0, \quad 1+y^2 = C(1+x^2).$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = \pm\sqrt{C(1+x^2)-1}.$$

Приклад 6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = (2x+1)e^{-y}$ за умови, що $y(1) = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинний розв'язок рівняння, тобто розв'яжемо задачу Коші. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними виду $y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$, в якому $f_1(x) = 2x+1,\ f_2(y) = e^{-y}$

Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{e^y}$. Відокремлюємо змінні та інтегруємо одержане рівняння $e^y dy = (2x+1)dx$, дістаємо

$$\int e^y dy = \int (2x+1)dx, \qquad e^y = x^2 + x + C,$$

звідки $y = \ln(x^2 + x + C)$ – загальний розв'язок рівняння.

Використовуючи початкову умову $y(1) = 0$, знаходимо сталу C:

$$0 = \ln(1+1+C), \quad \ln(2+C) = 0, \quad 2+C = 1, \quad C = -1.$$

Дістаємо частинний розв'язок рівняння $y = \ln(x^2 + x - 1)$.

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $dy + y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0$ за умови, що $y(\pi) = 2$.

Розв'язання. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними, для якого розв'яжемо задачу Коші. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння, дістанемо

$$dy + y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0, \qquad dy = -y\,\mathrm{tg}\,x\,dx, \qquad \frac{dy}{y} = -\,\mathrm{tg}x\,dx,\ y \neq 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad \ln|y| = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \qquad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|,$$

звідки $y = C\cdot\cos x$ – загальний розв'язок рівняння.

Використовуючи початкову умову $y(\pi) = 2$, знаходимо сталу C

$$2 = C \cdot \cos\pi = -C, \qquad C = -2,$$
тоді частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = -2\cos x$.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \dfrac{y^2 + xy}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$, права частина якого $f(x, y) = \dfrac{y^2 + xy}{x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, тому що
$$f(tx, ty) = \frac{(ty)^2 + tx \cdot ty}{(tx)^2} = \frac{t^2(y^2 + xy)}{t^2 x^2} = \frac{y^2 + xy}{x^2} = f(x, y) = t^0 f(x, y).$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Використаємо підстановку $z = \dfrac{y}{x}$, тоді $y = zx,\ y' = z'x + z$, після чого задане диференціальне рівняння зведеться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дістанемо
$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}, \qquad z'x + z = z^2 + z, \qquad z'x = z^2,$$
$$x\frac{dz}{dx} = z^2, \qquad xdz = z^2 dx \left| \cdot \frac{1}{xz^2}, x \neq 0, z \neq 0, \right. \qquad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо
$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}, \qquad -\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln|C|, C \neq 0, \ z = -\frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Зробивши заміну $z = \dfrac{y}{x}$, дістанемо $\dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{\ln|Cx|}$, звідки маємо загальний розв'язок рівняння $y = -\dfrac{x}{\ln|Cx|}$.

Зауважимо, що $x \neq 0$ за умовою задачі. Оскільки в процесі розв'язання ми припускали, що $z \neq 0$, тобто $y \neq 0$, то могли загубити розв'язок. Підставивши $y = 0$ в задане рівняння, переконуємось, що $y = 0$ теж є розв'язком рівняння, який не можна отримати із загального розв'язку.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$.

Розв'язання. Функції $M(x, y) = x^2 + y^2$, $N(x, y) = xy$ є однорідними функціями виміру $k = 2$, оскільки
$$M(tx, ty) = t^2 x^2 + t^2 y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 M(x, y),$$

$$N(tx,ty)=tx\cdot ty=t^2xy=t^2N(x,y).$$

Отже, задане диференціальне рівняння є однорідним.

Використаємо підстановку $z=\dfrac{y}{x}$, звідки $y=zx,\ dy=zdx+xdz$, тоді дане диференціальне рівняння зведеться до рівняння з відокремлюваними змінними

$$(x^2+z^2x^2)dx+x\cdot zx(zdx+xdz)=0,$$

$$x^2(1+z^2)dx+x^2(z^2dx+xzdz)=0,\qquad dx+z^2dx+z^2dx+xzdz=0,$$

$$xzdz=-(1+2z^2)dx,\qquad \frac{zdz}{1+2z^2}=-\frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши рівняння, дістанемо

$$\int\frac{zdz}{1+2z^2}=-\int\frac{dx}{x},\qquad \frac{1}{4}\int\frac{d(1+2z^2)}{1+2z^2}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln(1+2z^2)=-\ln|x|+\ln|C_1|,\qquad \ln(1+2z^2)=4\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|,$$

$$1+2z^2=\frac{C}{x^4}\qquad z^2=\frac{C-x^4}{2x^4}.$$

Зробивши заміну $z=\dfrac{y}{x}$, дістанемо $y^2=\dfrac{C-x^4}{2x^2}$, звідки маємо загальний розв’язок рівняння $y=\pm\sqrt{\dfrac{C-x^4}{2x^2}}$.

Приклад 10. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

Розв’язання. Маємо однорідне диференціальне рівняння вигляду $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Зробимо заміну $z=\dfrac{y}{x}$, тоді $y=zx,\ y'=z'x+z$. Тоді задане рівняння набуває вигляду

$$z'x+z=\frac{1}{z}+z,\qquad z'x=\frac{1}{z}.$$

Відокремимо змінні та розв’яжемо останнє рівняння, дістанемо

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{1}{z},\quad zdz=\frac{dx}{x},\quad \int zdz=\int\frac{dx}{x},\quad \frac{z^2}{2}=\ln|x|+\ln|C|,\quad z^2=2\ln|Cx|.$$

Повернемося до змінної y, використавши заміну $z=\dfrac{y}{x}$. Дістанемо загальний розв’язок даного рівняння

$$y^2=2x^2\ln|Cx|\quad \text{або}\quad y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|},C\neq 0.$$

Приклад 11. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ за умови, що $y(3) = 4$.

Розв’язання. Розв’яжемо задане рівняння відносно похідної:

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}.$$

Дістали однорідне рівняння диференціальне вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Зробимо заміну $z = \frac{y}{x}$, тоді $y = zx,\ y' = z'x + z$. Тоді задане рівняння набуває вигляду

$$z'x + z = z + \sqrt{z^2 + 1},$$

звідки дістаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z'x = \sqrt{z^2 + 1}\ , \qquad \frac{dz}{dx}x = \sqrt{z^2 + 1}, \quad \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши рівняння, дістанемо

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|z + \sqrt{z^2 + 1}\right| = \ln|x| + \ln|C|, \quad z + \sqrt{z^2 + 1} = Cx.$$

Повернемося до змінної y, використавши заміну $z = \frac{y}{x}$. Дістанемо

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = Cx.$$

Тоді загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

Використаємо початкову умову $y(3) = 4$. Оскільки $4 + \sqrt{9 + 16} = 9C$, то $9C = 9$, звідки маємо $C = 1$. Отже, частинний розв’язок, який задовольняє задану початкову умову має вигляд

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2.$$

Приклад 12. Знайти загальний розв’язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$.

Розв’язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку (11), де $p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = \frac{\cos x}{x}$. Розв’яжемо його методом Бернуллі, тобто зробимо підстановку $y = u \cdot v$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставивши вирази y та y' в рівняння, дістанемо

$$u'v + uv' + \frac{1}{x} \cdot uv = \frac{\cos x}{x}, \qquad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\cos x}{x}.$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз в дужках $v' + \frac{v}{x} = 0$, тоді останнє рівняння набуває вигляду $u'v = \frac{\cos x}{x}$. Таким чином, дістали два рівняння з відокремленими змінними $v' + \frac{v}{x} = 0$ і $u'v = \frac{\cos x}{x}$. Розв'яжемо перше рівняння

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Зазначимо, що при знаходженні функції v вважаємо, що стала $C = 0$. Підставимо $v = \frac{1}{x}$ в друге рівняння, дістанемо

$$u'v = \frac{\cos x}{x}, \quad u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x}, \quad u' = \cos x, \quad u = \sin x + C.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння $y = uv = (\sin x + C)\frac{1}{x} = \frac{\sin x + C}{x}$.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} y = x\left(x^2+1\right)$.

Розв'язання. Розділивши обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x^2+1}$, який стоїть при y', дістанемо лінійне рівняння $y' - \frac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$ і розв'яжемо його методом Бернуллі. Зробимо підстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ і підставимо вирази y та y' в дане рівняння, дістанемо

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1} v\right) = x\sqrt{x^2+1}.$$

Поклавши в останньому рівнянні $v' - \frac{2x}{x^2+1} v = 0$, дістанемо $u'v = x\sqrt{x^2+1}$. Розв'яжемо перше з двох одержаних рівнянь, дістанемо

$$v' - \frac{2x}{x^2+1} v = 0, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{2x dx}{x^2+1}, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x dx}{x^2+1},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \qquad \ln|v| = \ln(x^2+1), \qquad v = x^2+1.$$

Підставивши функцію v в друге рівняння, розв'яжемо його

$$u'v = x\sqrt{x^2+1}, \qquad (x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}, \quad du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$u = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння $y = uv = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1)$.

Приклад 14. Розв'язати задачу Коші для рівняння $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ за умови, що $y(0) = -1$.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням виду. Розв'язок шукаємо методом Бернуллі, тобто у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Дістанемо

$$u'v + uv' + \cos x \cdot uv = \sin x \cos x, \quad u'v + u(v' + \cos x \cdot v) = \sin x \cos x.$$

Визначаємо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тоді з даного рівняння дістаємо два диференціальних рівняння з відокремлюваними змінними

$$v' + v\cos x = 0, \qquad u'v = \sin x \cos x.$$

Розв'яжемо перше рівняння

$$\frac{dv}{dx} = -v\cos x, \quad \frac{dv}{v} = -\cos x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x dx, \quad \ln|v| = -\sin x + C.$$

Оскільки $C = 0$, то $v = e^{-\sin x}$. Підставимо функцію $v(x)$ в друге рівняння і розв'яжемо його:

$$u'v = \sin x \cos x, \quad u'e^{-\sin x} = \sin x \cos x, \quad \frac{du}{dx} = \sin x \cos x e^{\sin x},$$

$$du = \sin x \cos x e^{\sin x} dx, \quad u = \int \sin x \cos x \, e^{\sin x} dx.$$

Нехай $z = \sin x, dz = \cos x dx$. Обчислимо інтеграл методом інтегрування частинами

$$\int ze^z dz = \begin{vmatrix} u_1 = z, & du_1 = dz, \\ dv_1 = e^z dz, v_1 = e^z \end{vmatrix} = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + C.$$

Враховуючи підстановку $z = \sin x$, запишемо функцію u

$$u = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

Оскільки $y = uv$, то маємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \left(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right)e^{-\sin x}, \quad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Використаємо початкову умову для знаходження сталої C. Маємо: $-1=\sin 0-1+Ce^{\sin 0}$, $C=0$. Таким чином, розв'язок задачі Коші для заданого рівняння має вигляд $y=\sin x-1$.

Приклад 15. Розв'язати задачу Коші за умови $y(0)=\ln 2$ для рівняння $dy-e^{-x}dx+ydx-xdy=xydx$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння, виділивши похідну шуканої функції, дістанемо

$$(1-x)dy=(xy-y+e^{-x})dx, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(x-1)+e^{-x}}{1-x}, \quad \frac{dy}{dx}+\frac{1-x}{1-x}y=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння $y'+y=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$, розв'язок якого знайдемо методом Бернуллі, тобто у вигляді $y=u(x)v(x)$. Оскільки $y'=u'v+uv'$, то

$$u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x}, \qquad u'v+u(v'+v)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Знайдемо функцію $v(x)$ з умови $v'+v=0$, маємо

$$\frac{dv}{dx}=-v, \quad \frac{dv}{v}=-dx, \quad \int\frac{dv}{v}=-\int dx, \quad \ln|v|=-x, \quad v=e^{-x}.$$

Підставимо функцію $v(x)$ у рівняння $u'v=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$, знайдемо $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x}, \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{1-x}, \quad du=\frac{dx}{1-x}, \quad \int du=\int\frac{dx}{1-x},$$

$$u=-\ln|1-x|+\ln C, \quad u=\ln\frac{C}{|1-x|}, C>0.$$

Тоді $y=uv=e^{-x}\ln\dfrac{C}{|1-x|}$ є загальним розв'язком даного рівняння. Враховуючи початкову умову $y(0)=\ln 2$, знайдемо сталу C

$$\ln 2=1\cdot\ln C, \; C=2.$$

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y=e^{-x}\ln\dfrac{2}{|1-x|}$.

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(2x-y)y'=1$.

Розв'язання. Задане рівняння не є лінійним по y тому, що воно містить добуток yy'. Воно не є ні однорідним, ні рівнянням з відокремлюваними змінними. Запишемо дане рівняння у вигляді $y'=\dfrac{1}{2x-y}$, $2x-y\neq 0$.

В останньому рівнянні розглянемо функцію $x = x(y)$. Оскільки $x' = \dfrac{1}{y'}$, то дане рівняння має вигляд $x' = 2x - y$, звідки дістаємо лінійне диференціальне рівняння відносно x:

$$x' - 2x = -y .$$

Розв'яжемо це рівняння відносно змінної y методом Бернуллі, тобто розв'язок подамо у вигляді функції $x = u \cdot v$, де $u = u(y), v = v(y)$. Тоді $x' = u'v + uv' = \dfrac{du}{dy}v + \dfrac{dv}{dy}u$. Дістанемо

$$u'v + uv' - 2uv = -y \ , \qquad u'v + u(v' - 2v) = -y .$$

Вибираємо функцію $v(y)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто $v' - 2v = 0$. Тоді задане рівняння матиме вигляд $u'v = -y$. Розв'язавши рівняння $v' - 2v = 0$, дістанемо функцію $v = v(y)$

$$\frac{dv}{dy} = 2v \ , \quad \frac{dv}{v} = 2dy , \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int dy , \quad \ln|v| = 2y \ , \qquad v = e^{2y} .$$

Підставимо знайдену функцію $v(y)$ в отримане рівняння $u'v = -y$. Маємо

$$u'e^{2y} = -y \ , \ \frac{du}{dy} = -ye^{-2y} \ , \qquad du = -ye^{-2y}dy \ , \quad u = -\int ye^{-2y}dy \ .$$

Обчислимо останній інтеграл методом інтегрування частинами

$$u = -\int ye^{-2y}dy = \left| \begin{matrix} u_1 = y, \ dv_1 = e^{-2y}dy, \\ du_1 = dy, v_1 = -\frac{1}{2}e^{-2y} \end{matrix} \right| = \frac{y}{2}e^{-2y} - \frac{1}{2}\int e^{-2y}dy =$$

$$= \frac{y}{2}e^{-2y} + \frac{1}{4}e^{-2y} + C = \frac{1}{4}e^{-2y}(2y+1) + C .$$

Підставивши знайдені функції $u = u(y), v = v(y)$ функцію $x = x(y)$, маємо

$$x = \left(\frac{1}{4}e^{-2y}(2y+1) + C \right) e^{2y} .$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$x = \frac{1}{4}(2y+1) + Ce^{2y} .$$

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = e^{x^2}$ методом Лагранжа. Розв'язати задачу Коші за умови, що $y(1) = e$.

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням виду $y' + p(x)y = q(x)$, оскільки $q(x) \not\equiv 0$. Розв'яжемо це рівняння методом Лагранжа (варіації довільної сталої), для цього спочатку знайдемо розв’язок відповідного однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$. Маємо

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \qquad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|.$$

Тоді загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $y = \frac{C}{x}$. Розв’язок даного неоднорідного рівняння знайдемо, вважаючи, що $C = C(x)$ є функцією від x, тобто $y = \frac{C(x)}{x}$. Знайдемо похідну

$$y' = \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Підставивши вирази y та y' в задане рівняння, дістанемо

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = e^{x^2}, \qquad C'(x) = xe^{x^2},$$

звідки маємо

$$C(x) = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{e^{x^2}}{2} + C_1.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у розв’язок неоднорідного рівняння $y = \frac{C(x)}{x}$, дістанемо загальний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{C_1}{x}.$$

Використаємо початкову умову $y(1) = e$ для знаходження сталої. Оскільки $e = \frac{e}{2} + C_1$, то $C_1 = \frac{e}{2}$. Таким чином, частинний розв’язок заданого рівняння має вигляд

$$y = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e}{2x} = \frac{e^{x^2} + e}{2x}.$$

Приклад 18. Знайти загальний розв’язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = xy^4$.

Розв’язання. Маємо рівняння Бернуллі, яке розв’яжемо методом Бернуллі. Зробимо підстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ і підставимо вирази y та y' в дане рівняння, дістанемо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = xu^4v^4, \qquad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = xu^4v^4.$$

Поклавши в останньому рівнянні $v' + \frac{v}{x} = 0$, дістанемо $u'v = xu^4v^4$. Розв'яжемо перше з двох одержаних рівнянь, дістанемо

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

Підставимо знайдену функцію v у друге рівняння, маємо

$$u'v = xu^4v^4 \Rightarrow u'\frac{1}{x} = x\frac{u^4}{x^4} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u^4}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{u^4} = \frac{dx}{x^2},$$

$$-\frac{1}{3u^3} = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow \frac{1}{u^3} = \frac{3(1-Cx)}{x} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{x}{3(1-Cx)}}.$$

Отже, розв'язок даного рівняння $y = uv = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{3(1-Cx)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3x^2(1-Cx)}}$.

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння $xy' - 2y - x^2\sqrt{y} = 0$.

Розв'язання. Поділивши рівняння на $x \neq 0$, дістанемо рівняння $y' - \frac{2}{x}y = x\sqrt{y}$. Це рівняння Бернуллі ($k = 1/2$). Розв'яжемо його методом Бернуллі, тобто розв'язок знайдемо у вигляді $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Маємо

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x\sqrt{uv}, \quad u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x\sqrt{uv}.$$

Покладемо $v' - \frac{2}{x}v = 0$, тоді останнє рівняння має вигляд $u'v = x\sqrt{uv}$.

Розв'яжемо перше рівняння:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2\ln|x| + C.$$

Оскільки $C = 0$, то $v = x^2$. Тоді друге рівняння набуває вигляду $u'x^2 = x\sqrt{ux^2}$. Розв'язавши це рівняння

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u}, \; \frac{du}{\sqrt{u}} = dx, \quad \int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int dx, \quad 2\sqrt{u} = x + C, \quad u = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2,$$

дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння $y = u \cdot v = \frac{x^2(x+C)^2}{4}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати диференціальні рівняння

а) $ydx + xdy = xydy - xydx$; б) $\sqrt{x}dx + xdy = xy^2dy - \sqrt{x}ydx$;

в) $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$; г) $\sqrt{5+y^2}dx + 4\left(x^2y+y\right)dy = 0$;

д) $x\sqrt{3+y^2}dx - y\sqrt{2+x^2}dy = 0$; е) $\left(2xy+3y\right)y' = 1-y^2$;

ж) $\left(y+xy\right)y' + (x-xy) = 0$; з) $\left(y^2+xy^2\right)y' + x^2 - yx^2 = 0$.

2. Розв'язати задачу Коші

а) $\sqrt{xy}dx + x^2ydy = 0,\ y(1) = 1$; б) $(1+e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1$;

в) $\dfrac{y}{x}y' + e^y = 0,\ y(1) = 0$; г) $y'\mathrm{tg}\,x = y+1,\ y(\pi/2) = 1$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

а) $xdy - ydx = ydy$; б) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$;

в) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$; г) $xy' = y - y\ln\dfrac{x}{y}$;

д) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$; е) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{2y}{x}$.

4. Розв'язати задачу Коші

а) $2y'\left(x^2+y^2\right) = \left(2x^2+y^2\right),\ y(1) = 1$; б) $2xy' = x + y,\ y(1) = 1$;

в) $y - 2x + y'\left(x+2y\right) = 0,\ y(1) = 2$; г) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x},\ y(1) = -1$.

5. Розв'язати диференціальні рівняння (методом Бернуллі)

а) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; б) $xy' + y = e^x$;

в) $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x-1)$; г) $y' = y\mathrm{tg}x + \cos x$;

д) $xy' - (x+1)y = x^2(1-x)$; е) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$;

ж) $y' + 2xy = 2x^3y^3$; з) $y' + y = x\sqrt{y}$.

6. Розв'язати диференціальні рівняння (методом Лагранжа)

а) $xy' + y = x\sin x$; б) $2xy' - y = 3x^2$.

7. Розв'язати задачу Коші

а) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2,\quad y(1) = 0$;

б) $y' - y\cos x = \sin 2x,\quad y(0) = -1$.

§ 27. Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння, що допускають пониження порядку

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння, що містить незалежну змінну x функцію $y(x)$, її похідні $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ і має вигляд

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (27.1)$$

При $n > 1$ маємо диференціальні рівняння вищих порядків.

Розв'язком диференціального рівняння (27.1) називається функція $y = \varphi(x)$, яка визначена і має n похідних на проміжку $(a;b)$, якщо при підстановці цієї функції та її похідних $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)$ у рівняння воно перетворюється на тотожність $F(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Початкові умови для диференціального рівняння (27.1) мають вигляд

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (27.2)$$

Задача Коші полягає в тому, що серед усіх розв'язків $y = \varphi(x)$ рівняння (27.1) потрібно знайти такий, що задовольняє початкові умови (27.2).

Якщо диференціальне рівняння (27.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, то воно набуває вигляду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (27.3)$$

Розглянемо диференціальне рівняння, розв'язане відносно старшої похідної.

Загальним розв'язком рівняння (27.3) називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (27.4)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі, яка задовольняє умови

1) $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ є розв'язком диференціального рівняння (27.3);

2) сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ визначаються однозначно із початкових умов (27.2).

За допомогою початкових умов знаходять значення сталих $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, тоді розв'язок $\varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ є *частинним розв'язком* рівняння (27.3).

Якщо розв'язок диференціального рівняння (27.1) або (27.3) знаходимо в неявному вигляді $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, то він називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

Розглянемо *диференціальне рівняння другого порядку*

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (27.5)$$

Початкові умови для такого рівняння мають вигляд

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0. \qquad (27.6)$$

Загальним розв'язком рівняння (27.5) називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{27.7}$$

яка задовольняє умови

1) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ є розв'язком даного рівняння при будь-якому допустимих значеннях C_1, C_2;

2) для будь-яких допустимих початкових умов (27.6) існують такі значення сталих $C_1 = C_1^{\,0}, C_2 = C_2^{\,0}$, при яких функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ задовольняє ці початкові умови.

Частинним розв'язком рівняння (27.5) є функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, графіком якої є інтегральна крива. З геометричної точки зору початкові умови визначають точку $(x_0; y_0)$ і напрям дотичної (кутовий коефіцієнт) y_0' в цій точці. *Задача Коші* для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що серед усіх інтегральних кривих потрібно знайти криву, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ і має заданий напрям дотичної y_0' в цій точці.

Розглянемо типи диференціальних рівнянь, які зводяться до диференціальних рівнянь нижчого порядку. Це диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку.

Диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку

1. Диференціальні рівняння, які не містять функцію y(x) та її похідні $y', y'', ..., y^{(n-1)}$.

Розглянемо рівняння (27.3) у вигляді

$$y^{(n)} = f(x). \tag{27.8}$$

Оскільки похідна n-го порядку – це похідна від похідної $(n-1)$-го порядку $y^{(n)} = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$, то рівняння (27.8) набуває вигляду $\dfrac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x),\ dy^{(n-1)} = f(x)dx$.

Проінтегруємо обидві частини рівняння $\int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx$, дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Порядок рівняння понизився на одиницю. Продовжуємо, враховуючи знайдене $y^{(n-1)}$, дістанемо

$$y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},\ dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx, \quad y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

Продовжуючи диференціювання, дістанемо загальний розв'язок рівняння (27.8) у вигляді

$$y=\int\ldots\int f(x)dx\cdots dx+\frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

Якщо потрібно знайти частинний розв'язок рівняння, то використовують початкові умови, враховуючи знайдені $y', y'',\ldots, y^{(n-1)}$ і розв'язуючи систему відносно $C_1, C_2,\ldots, C_n$. Зауважимо, що значення сталих можна знаходити поступово, використовуючи початкові умови.

2. Диференціальні рівняння, що не містять функцію y(x).

Розглянемо рівняння вигляду

$$F(x, y', y'',\ldots, y^{(n)})=0. \quad (27.9)$$

Понизити порядок такого рівняння можна, застосовуючи заміну

$$y'=p,\ y''=p',\ldots,\ y^{(n)}=p^{(n-1)},$$

де функція $p=p(x)$ має похідні до $(n-1)$-го порядку включно. Тоді рівняння (27.9) набуває вигляду

$$F(x, p, p',\ldots, p^{(n-1)})=0.$$

Це рівняння пов'язує незалежну змінну x, функцію $p(x)$ і похідні від неї до $(n-1)$-го порядку включно, тобто порядок рівняння понизився на одиницю.

Зокрема, диференціальне рівняння *другого порядку*, що не містить явно функцію $y(x)$, має вигляд

$$F(x, y', y'')=0. \quad (27.10)$$

Замінивши

$$y'=p,\ y''=p',\ p=p(x), \quad (27.11)$$

зведемо диференціальне рівняння другого порядку (27.10) до диференціального рівняння першого порядку

$$F(x, p, p')=0 \ \text{ або } \ F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0.$$

Знаходимо розв'язок цього рівняння $p=p(x, C_1)$. Враховуючи, що $p=\frac{dy}{dx}$, дістаємо рівняння з відокремлюваними змінними вигляду $\frac{dy}{dx}=p(x, C_1)$. Розв'язуючи його, знаходимо загальний розв'язок рівняння (27.10)

$$y=\int p(x, C_1)dx+C_2.$$

3. Диференціальні рівняння, що не містять незалежну змінну x.

Диференціальні рівняння такого типу мають вигляд

$$F(y, y', y'',\ldots, y^{(n)})=0.$$

Застосуємо заміну $y' = p(y)$, при цьому функція $p(y)$ є складною функцією від *x*. Тоді задане рівняння набуває вигляду

$$F(y, p, p'_y, ..., p_y^{(n-1)}) = 0.$$

Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить незалежної змінної *x*, має вигляд

$$F(y, y', y'') = 0. \qquad (27.12)$$

і зводиться до диференціального рівняння першого порядку за допомогою заміни

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y), \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \qquad (27.13)$$

тобто набуває вигляду

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0. \qquad (27.14)$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $p = p(y, C_1)$. Враховуючи , що $p = \dfrac{dy}{dx}$, дістаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Відокремивши змінні, знаходимо розв'язок рівняння у вигляді

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Зауваження. При заміні $y' = \dfrac{dy}{dx} = p(y), \; y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ у диференціальному рівнянні (27.14) можуть з'явитися окремі розв'язки, що не містяться у загальному розв'язку.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = e^{3x}.$$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку вигляду $y'' = f(x)$. Проінтегрувавши рівняння, дістанемо

$$\frac{dy'}{dx} = e^{3x}, \quad dy' = e^{3x}dx, \quad \int dy' = \int e^{3x}dx, \quad y' = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}e^{3x}+C_1, \quad dy=\left(\frac{1}{3}e^{3x}+C_1\right)dx, \quad \int dy=\frac{1}{3}\int e^{3x}dx+C_1\int dx.$$

Отже, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y=\frac{1}{9}e^{3x}+C_1x+C_2.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'''=\sin^2 x\cos x$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=1/9,\ y''(0)=0.$

Розв'язання. Задано диференціальне рівняння третього порядку, яке не містить функції y та її похідних y', y''. Понизимо порядок рівняння, маємо

$$\frac{dy''}{dx}=\sin^2 x\cos x, \quad dy''=\sin^2 x\cos x dx, \quad y''=\int\sin^2 x\, d(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}+C_1\ .$$

Враховуючи початкову умову $y''(0)=0$, знаходимо

$$0=\frac{\sin^3 0}{3}+C_1 \quad\Rightarrow\quad C_1=0 \quad\Rightarrow\quad y''=\frac{\sin^3 x}{3}.$$

Отримали диференціальне рівняння другого порядку, маємо

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{\sin^3 x}{3} \quad\Rightarrow\quad y'=\int\frac{\sin^3 x}{3}dx=\frac{1}{3}\int\sin^2 x\sin x dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int(\cos^2 x-1)d(\cos x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)+C_2=\frac{1}{9}\left(\cos^3 x-3\cos x\right)+C_2\,.$$

Оскільки $y'(0)=\frac{1}{9}$, то

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\left(\cos^3 0-3\cos 0\right)+C_2 \quad\Rightarrow\quad 1=-2+9C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=1/3\,.$$

Отримали диференціальне рівняння першого порядку

$$y'=\frac{1}{9}\left(\cos^3 x-3\cos x\right)+\frac{1}{3},$$

звідки маємо

$$y=\frac{1}{9}\int\cos^2 x\cos x dx-\frac{1}{3}\int\cos x dx+\frac{1}{3}\int dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}x+C_3=$$

$$=\frac{1}{9}\sin x-\frac{\sin^3 x}{27}-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}x+C_3==-\frac{2}{9}\sin x-\frac{1}{27}\sin^3 x+\frac{1}{3}x+C_3\,.$$

Враховуючи початкову умову $y(0)=1$, маємо

$$1=-\frac{2}{9}\sin 0-\frac{1}{27}\sin^3 0+0+C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3=1.$$

Отже, частинний розв'язок даного диференціального рівняння, який задовольняє дані початкові умови, має вигляд

$$y=-\frac{2}{9}\sin x-\frac{1}{27}\sin^3 x+\frac{1}{3}x+1.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння $y''+y'=2$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить функції y та змінної x. Зробимо заміну $y'=p,$ де $p=p(x),$ тоді $y''=p'$. Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$p'+p=2, \quad \frac{dp}{dx}=2-p, \quad \frac{dp}{p-2}=-dx, \quad p\neq 2,$$

$$\int\frac{dp}{p-2}=-\int dx, \quad \ln|p-2|=-x+\ln|C_1|,\ C_1\neq 0, \quad \ln|p-2|-\ln|C_1|=-x,$$

$$\ln\left|\frac{p-2}{C_1}\right|=-x, \qquad \frac{p-2}{C_1}=e^{-x}, \quad p=C_1e^{-x}+2.$$

Враховуючи, що $p=y'$, проінтегруємо останнє рівняння і знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y'=C_1e^{-x}+2, \quad y=\int(C_1e^{-x}+2)dx=-C_1e^{-x}+2x+C_2.$$

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші диференціального рівняння $y''x\ln x=y'$, що задовольняє початкові умови $y(e)=2, \quad y'(e)=3$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить y, тобто рівняння вигляду $F(x,y',y'')=0$. Зробимо заміну $y'=p,$ де $p=p(x),$ тоді $y''=p'$. Задане рівняння набуває вигляду

$$p'x\ln x=p, \quad \frac{dp}{dx}x\ln x=p.$$

Розв'яжемо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x\ln x},\ p\neq 0, x\neq 0, x\neq 1, \quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x\ln x}, \quad \ln|p|=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x},$$

$$\ln|p|=\ln|\ln x|+\ln|C_1|, C_1\neq 0, \qquad p=C_1\ln x.$$

Оскільки $p=y'$, то маємо рівняння $y'=C_1\ln x$. Використавши другу початкову умову $y'(e)=3$, дістанемо $3=C_1\ln e$, звідки $C_1=3$.

Розв'яжемо рівняння $y'=3\ln x$. Отже, $dy=3\ln x dx$, $\quad y=3\int\ln x dx$.

Інтеграл знаходимо методом інтегрування частинами. Нехай

$$u = \ln x,\ dv = dx,\ du = \frac{dx}{x},\ v = x,$$

тоді

$$y = 3\left(x\ln x - \int x\frac{dx}{x}\right) = 3\left(x\ln x - x\right) + C_2.$$

Використовуємо першу початкову умову $y(e) = 2$. Дістанемо

$$2 = 3(e\ln e - e) + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2.$$

Отже, маємо частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє дані початкові умови

$$y = 3(x\ln x - x) + 2.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''\mathrm{tg}\, y = 2(y')^2$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно змінної x, тобто рівняння виду $F\left(y, y', y''\right) = 0$. Зробимо заміну

$$y' = p(y),\quad y'' = p' \cdot p$$

Задане рівняння набуває вигляду:

$$\frac{dp}{dy}p\,\mathrm{tg}\, y = 2p^2,\qquad p\left(\frac{dp}{dy}\mathrm{tg}\, y - 2p\right) = 0.$$

Дістаємо два диференціальні рівняння:

$$p = 0,\qquad \frac{dp}{dy}\mathrm{tg}\, y - 2p = 0.$$

З першого рівняння дістаємо $y' = 0$, звідки $y = C$.

Друге рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, маємо.

$$\frac{dp}{dy}\mathrm{tg}\, y - 2p = 0,\quad \mathrm{tg}\, y\,dp = 2p\,dy,\quad \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{\mathrm{tg}\, y},\ y \neq \pi n,\ n \in Z,$$

$$\int\frac{dp}{p} = 2\int\frac{dy}{\mathrm{tg}\, y},\quad \ln|p| = 2\int\frac{\cos y\,dy}{\sin y},$$

$$\ln|p| = 2\int\frac{d(\sin y)}{\sin y},\quad \ln|p| = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1|,\quad p = C_1\sin^2 y.$$

Оскільки $p = y'$, то маємо диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = C_1\sin^2 y$.

Дістаємо

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx,\quad -\int\frac{dy}{\sin^2 y} = -C_1\int dx.$$

Отже, загальний інтеграл даного диференціального рівняння

$$\operatorname{ctg} y = -C_1 x + C_2 .$$

Зауважимо, що $y = \pi n, n \in Z$ теж є розв'язком даного рівняння, який не отримується із загального розв'язку.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $2yy'' - (y')^2 - 1 = 0$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно змінної x, тобто вигляду $F(y, y', y'') = 0$. Зробимо заміну $y' = p(y), \;\; y'' = p' \cdot p$. Задане рівняння набуває вигляду

$$2y\,p'p - p^2 - 1 = 0, \qquad 2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1, \qquad 2y\,pdp = (p^2+1)dy .$$

Розв'яжемо одержане рівняння з відокремлюваними змінними, маємо

$$\frac{2pdp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}, \quad \int \frac{2pdp}{p^2+1} = \int \frac{dy}{y}, \quad \ln\left|p^2+1\right| = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad p^2 + 1 = C_1 y.$$

$$p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}\,.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm\int dx\,,$$

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2, \quad \sqrt{C_1\, y - 1} = \frac{C_1}{2}\left(C_2 \pm x\right).$$

Отже, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = \frac{C_1}{4}\left(C_2 \pm x\right)^2 + \frac{1}{C_1}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

а) $y'' = \cos 2x + 2$; б) $y''' = e^{3x} - 6x + \dfrac{1}{x^3}$;

в) $y'' = \operatorname{arctg} x$; г) $y'' = xe^{2x}$;

д) $xy'' + y' + x = 0$; е) $xy'' + y' = x^2 + 1$;

ж) $y'^2 + 2yy'' = 0$; з) $y''(1+y) = (y')^2 + y'$.

2. Розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь

а) $y''' = 6/x^3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 5, \quad y''(1) = 1;$

б) $y''' = \cos 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 15/16, \quad y''(0) = 0;$

в) $y'' = x\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$

г) $y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

д) $2yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

е) $y''\mathrm{ctg}\, y = 2(y')^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 1;$

§ 28. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Лінійним диференціальним рівняння n-го порядку називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \qquad (28.1)$$

де функції $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x), f(x)$ – неперервні на проміжку $(a;b)$.

При $n = 1$ маємо лінійне рівняння першого порядку. Надалі будемо розглядати диференціальні рівняння вищих порядків, тобто при $n > 1$. Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то рівняння (28.1) називається лінійним *неоднорідним* диференціальним рівнянням n-го порядку.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (28.2)$$

називається лінійним *однорідним* диференціальним рівнянням n-го порядку.

Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються *лінійно залежними*, якщо умова

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \qquad (28.3)$$

виконується тільки тоді, коли серед сталих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є відмінні від нуля.

Якщо умова (28.3) виконується лише тоді, коли всі сталі дорівнюють нулю, то функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються *лінійно незалежними.*

Для перевірки лінійної залежності функцій використовують *визначник Вронського* (*вронскіан*). Нехай функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ мають похідні до $(n-1)$-го порядку включно для всіх $x \in (a;b)$.

Визначником Вронського називається визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (28.4)$$

Теорема 1. Для того, щоб n розв'язків лінійного однорідного рівняння $y_1, y_2, ..., y_n$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського $W(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a;b)$.

Теорема 2 (структура загального розв'язку лінійного однорідного рівняння). Якщо $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (28.2), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \qquad (28.5)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Метод Лагранжа

Теорема 3 (структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння). Загальний розв'язок y лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку (28.1) дорівнює сумі загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння (28.2) і частинного розв'язку $y_ч$ неоднорідного рівняння

$$y = y_0 + y_ч . \qquad (28.6)$$

При цьому $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, де $y_1, y_2, ..., y_n$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (28.2), $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі.

Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)

Частинний розв'язок $y_ч$ неоднорідного рівняння шукають у вигляді загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння, вважаючи, що сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ є функціями від x, тобто у вигляді

$$y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n .$$

Розглянемо суть методу Лагранжа (варіації довільних сталих) для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x). \qquad (28.7)$$

Якщо y_1, y_2 – лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного диференціального рівняння $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$, то $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв'язок цього рівняння. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо, вважаючи, що сталі C_1, C_2 є функціями від *x*, тобто

$$y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 , \qquad (28.8)$$

тоді $y_ч' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y_1' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2'$.

Оскільки розв’язок шукаємо у вигляді суми двох функцій $C_1(x), C_2(x)$, то на них можна накладати додаткові умови. Нехай

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \qquad (28.9)$$

тоді похідна $y_ч'$ набуває вигляду $y_ч' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$. Знаходимо другу похідну $y_ч'' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''$.

Підставивши $y_ч, y_ч', y_ч''$ в задане неоднорідне рівняння, маємо

$$\left(C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''\right) + p_1(x)(C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') +$$

$$+ p_2(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = f(x).$$

Оскільки y_1, y_2 є розв’язками однорідного рівняння, то згрупувавши доданки, дістанемо

$$C_1(x)\underbrace{\left(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\right)}_{=0} + C_2(x)\underbrace{\left(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\right)}_{=0} +$$

$$+ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Враховуючи умову (28.9), з останнього рівняння маємо систему

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (28.10)$$

Головний визначник цієї системи є визначником Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2.$$

Оскільки y_1, y_2 є лінійно незалежними розв’язками однорідного рівняння, то за теоремою 1 маємо: $W(x) \neq 0$. Тому система (28.10) має єдиний розв’язок, який знаходимо за формулами Крамера $C_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, C_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Знайдемо $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 \cdot f(x)$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = y_1 \cdot f(x)$, тоді

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx, \; C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx.$$

Тоді за теоремою 3 загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (28.7) має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1y_1 + C_2y_2 + C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним диференціальним рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (28.11)$$

де $a_1,...,a_{n-1},a_n$ – числа, функція $f(x)$ неперервна в проміжку $(a;b)$.

При $f(x)\neq 0$ рівняння (28.11) – *неоднорідне* лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Якщо $f(x)=0$, то рівняння

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (28.12)$$

називається *однорідним* лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Із теореми 2 відомо, що загальний розв’язок однорідного рівняння

$$y_0=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n, \qquad (28.13)$$

де $y_1,y_2,...,y_n$ – лінійно незалежні розв’язки цього рівняння.

Розв’язок рівняння (28.12) знаходять у вигляді $y=e^{kx}$, де k – деяке число. Підставимо в рівняння функцію y та її похідні $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx},...,y^{(n)}=k^ne^{kx}$, маємо $k^ne^{kx}+a_1k^{n-1}e^{kx}+...+a_{n-1}ke^{kx}+a_ne^{kx}=0$, звідки $(k^n+a_1k^{n-1}+...+a_n)e^{kx}=0$.

Враховуючи, що $e^{kx}\neq 0$, дістаємо рівняння

$$k^n+a_1k^{n-1}+...+a_{n-1}k+a_n=0, \qquad (28.14)$$

яке називається *характеристичним рівнянням* однорідного рівняння (28.12).

Отже, розв’язання однорідного рівняння (28.12) зводиться до розв’язання характеристичного рівняння (28.14). Розглянемо різні випадки коренів характеристичного рівняння для диференціальних рівнянь другого порядку.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y''+a_1y'+a_2y=0. \qquad (28.15)$$

Загальний розв’язок цього рівняння $y_0=C_1y_1+C_2y_2$, де y_1, y_2 – лінійно незалежні розв’язки. Їх знаходять з відповідного характеристичного рівняння, яке для диференціального рівняння (28.15) має вигляд

$$k^2+a_1k+a_2=0, \qquad (28.16)$$

яке дістають з рівняння (28.15) заміною y'' на k^2, y' на k, y на 1.

Корені характеристичного рівняння визначаються дискримінантом $D=a_1^2-4a_2$. Розглянемо три випадки загального розв’язку однорідного рівняння (28.15) в залежності від знака дискримінанта.

1. Нехай $D>0$. У цьому випадку корені характеристичного рівняння дійсні й різні: $k_1 \neq k_2$. Функції $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (28.11), оскільки

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{k_1 x} e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (28.11) має вигляд

$$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (28.17)$$

2. Нехай $D=0$. Тоді корені характеристичного рівняння однакові: $k_1 = k_2 = k$. Лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (28.11) є функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ ($W(x) \neq 0$). Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \qquad (28.18)$$

3. Нехай $D<0$. У цьому випадку характеристичне рівняння має комплексно спряжені корені $k_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm i\sqrt{|D|}}{2} = \alpha \pm \beta i$, де $i = \sqrt{-1}$.

Можна показати, що функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння ($W(x) \neq 0$). Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (28.19)$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами із правою частиною спеціального вигляду

Лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (28.20)$$

Загальний розв'язок y лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння (28.15) і частинного розв'язку $y_ч$ неоднорідного рівняння (28.20), тобто має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_ч.$$

У загальному випадку частинний розв'язок неоднорідного рівняння (28.20) можна знайти методом Лагранжа. Однак у багатьох випадках частинний розв'язок можна знайти простіше, а саме, за правою частиною рівняння $f(x)$. При цьому вигляд частинного розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння.

Нехай k_1 та k_2 – корені відповідного характеристичного рівняння (28.12).

Розглянемо *випадки спеціального вигляду правої частини* диференціального рівняння (28.16).

I. Права частина неоднорідного рівняння *є многочленом* n-го степеня, тобто має вигляд $f(x)=P_n(x)$.

а) Нехай 0 не є коренем характеристичного рівняння, тобто $k_1\neq 0, k_2\neq 0$. Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді многочлена n-го степеня

$$y_ч = A_1x^n + A_2x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n ,$$

де $A_i, i=\overline{1,n}$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити.

б) Одним із коренів характеристичного рівняння є нуль, тобто $k_1=0$. Тоді частинний розв'язок рівняння (28.16) шукають у вигляді

$$y_ч = x(A_1x^n + A_2x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n).$$

II. Права частина неоднорідного рівняння має вигляд

$$f(x)=e^{ax}P_n(x).$$

а) Якщо число a не є коренем характеристичного рівняння, тобто $a\neq k_1, a\neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_ч = e^{ax}(A_1x^n + A_2x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n).$$

б) Якщо число a є одним із коренів характеристичного рівняння, тобто $a=k_1, a\neq k_2$, то частинний розв'язок має вигляд

$$y_ч = xe^{ax}(A_1x^n + A_2x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n).$$

в) Якщо число a є коренем кратності 2 характеристичного рівняння, тобто $a=k_1=k_2$, то частинний розв'язок шукаємо так

$$y_ч = x^2e^{ax}(A_1x^n + A_2x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n).$$

III. Права частина неоднорідного рівняння має вигляд

$$f(x)=P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx.$$

де $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлени відповідно степеня n та m. Нехай $l=\max\{n,m\}$.

а) Якщо число bi не є коренем характеристичного рівняння $bi\neq k_1$, $bi\neq k_2$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_ч = (A_1x^l + ... + A_{l-1}x + A_l)\cos bx + (B_1x^n + ... + B_{l-1}x + B_l)\sin bx,$$

де $A_j, B_j,\ j=\overline{1,l}$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити.

б) Якщо число bi є коренем характеристичного рівняння $bi=k_1$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_ч = x\Big((A_1x^l + ... + A_{l-1}x + A_l)\cos bx + (B_1x^n + ... + B_{l-1}x + B_l)\sin bx\Big).$$

IV. Права частина неоднорідного рівняння має вигляд

$$f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx).$$

а) Якщо число $a+bi$ не є коренем характеристичного рівняння, тобто $a+bi \neq k_1, a+bi \neq k_2$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння такий

$$y_ч = e^{ax}\left((A_1x^l + \ldots + A_{l-1}x + A_l)\cos bx + (B_1x^n + \ldots + B_{l-1}x + B_l)\sin bx\right).$$

б) Якщо число $a+bi$ є коренем характеристичного рівняння, тобто $a+bi = k_1 = \alpha + \beta i$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_ч = xe^{ax}\left((A_1x^l + \ldots + A_{l-1}x + A_l)\cos bx + (B_1x^n + \ldots + B_{l-1}x + B_l)\sin bx\right).$$

Наведемо *схему знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами*.

1. Для лінійного неоднорідного рівняння (28.20) записати відповідне однорідне рівняння вигляду (28.15) і скласти його характеристичне рівняння (28.16).

2. Знайти корені характеристичного рівняння і записати загальний розв'язок однорідного рівняння відповідно у вигляді (28.17), (28.18) або (28.19).

3. Якщо права частина рівняння не є функцією спеціального вигляду, то частинний розв'язок рівняння (28.20) шукають методом Лагранжа.

4. Якщо права частина має спеціальний вигляд I–IV, то шукаємо частинний розв'язок $y_ч$ неоднорідного рівняння за однією із вказаних формул. Для визначення невідомих коефіцієнтів у цих виразах підставляємо функцію $y_ч$ та її похідні $y'_ч, y''_ч$ в неоднорідне рівняння (28.20) і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях *x* або при виразах, що містять e^{ax}, $\cos bx$, $\sin bx$.

5. Загальний розв'язок y неоднорідного рівняння (28.20) дорівнює сумі загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння (28.15) і знайденого частинного розв'язку $y_ч$ неоднорідного рівняння, тобто $y = y_0 + y_ч$.

Зауважимо, що для відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння при заданих початкових умовах спочатку знаходять його загальний розв'язок $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_ч$, а потім визначають сталі C_1, C_2 із цих умов.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' - 6y = 0$.

Розв'язання. Для даного лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами складемо характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ і знайдемо його корені (за теоремою Вієта). Маємо два дійсних різних кореня $k_1 = -2, k_2 = 3$ (випадок $D > 0$). Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його

$$k^2 - 3k = 0, \quad k(k-3) = 0, \quad k_1 = 0,\ k_2 = 3.$$

Маємо два дійсних різних кореня (випадок $D>0$). Тоді шуканий розв'язок має вигляд

$$y=C_1\,e^{0\cdot x}+C_2e^{3x} \quad \text{або} \quad y=C_1\;+C_2e^{3x}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+6y'+9y=0$.

Розв'язання. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$k^2+6k+9=0, \quad (k+3)^2=0, \quad k_1=k_2=-3.$$

Маємо два однакових кореня, тобто один корінь кратності 2 (випадок $D=0$). Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y=C_1\,e^{-3x}+C_2xe^{-3x}=e^{-3x}(C_1+C_2x).$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+2y'+10y=0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2+2k+10=0$ і розв'яжемо його. Оскільки $D=4-40=-36<0$, то рівняння має комплексні корені $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, де $i=\sqrt{-1}$.

Розв'яжемо характеристичне рівняння, дістанемо

$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6i}{2}=-1\pm 3i,$$

де $\alpha=-1,\ \beta=3$.

У цьому випадку ($D<0$) загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y''-2y'+5y=0$ за умови, що $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

Розв'язання. Для даного лінійного однорідного рівняння спочатку знайдемо загальний розв'язок. Складемо відповідне характеристичне рівняння $k^2-2k+5=0$. Оскільки $D=4-20=-16<0$, то рівняння має комплексні корені

$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4\sqrt{-1}}{2}=1\pm 2i,$$

де $\alpha=1, \beta=2$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Для знаходження частинного розв'язку рівняння визначимо сталі C_1, C_2, використавши початкові умови. Знайдемо похідну від функції

$$y'=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x).$$

Враховуючи початкові умови $y(0)=1, \ y'(0)=1$, маємо

$$1=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0) \ \Rightarrow \ C_1=1,$$

$$1=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0-2C_1\sin 0+2C_2\cos 0) \ \Rightarrow \ 1=1+2C_2, C_2=0.$$

Підставивши знайдені сталі у загальний розв'язок, знайдемо частинний розв'язок даного рівняння при заданих початкових умовах

$$y=e^x\cos 2x.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння $y'''-5y''+8y'-4y=0$.

Розв'язання. Для даного лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку складемо характеристичне рівняння

$$k^3-5k^2+8k-4=0.$$

Розв'язавши його, дістанемо

$$k^3-5k^2+8k-4=k^3-k^2-4k^2+4k+4k-4=$$
$$=k^2(k-1)-4k(k-1)+4(k-1)=(k-1)(k-2)^2.$$

Звідки маємо один простий корінь і корінь кратності 2, тобто $k_1=1, \ k_2=k_3=2$. Отже, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{2x}.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння $y'''+3y''+3y'+y=0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння для даного однорідного рівняння має вигляд $k^3+3k^2+3k+1=(k+1)^3=0$, звідки маємо $k=-1$ – корінь кратності 3. Тоді загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}.$$

Приклад 8. Розв'язати диференціальне рівняння $y^{IV}+8y''+16y=0.$

Розв'язання. Для заданого лінійного однорідного диференціального рівняння четвертого порядку складемо характеристичне рівняння $k^4+8k^2+16=0$ і запишемо його у вигляді

$$k^4+8k^2+16=(k^2+4)^2=\big((k-2i)(k+2i)\big)^2=(k-2i)^2(k+2i)^2.$$

Маємо два кореня $k_1=k_2=2i, \quad k_3=k_4=-2i$ кратності 2. Отже, задане рівняння має загальний розв'язок

$$y=C_1\cos 2x+C_2x\cos 2x+C_3\sin 2x+C_4x\sin 2x,$$
$$y=\left(C_1+C_2x\right)\cos 2x+\left(C_3+C_4x\right)\sin 2x.$$

Приклад 9. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Розв’язання. У заданому рівнянні права частина не є функцією спеціального вигляду, тому для його розв’язання скористаємось методом Лагранжа. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' - 2y' + y = 0$, характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корінь $k_{1,2} = 1$. Тоді загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Вважаючи сталі функціями, знайдемо частинний розв’язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y_ч = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Знайдемо похідну частинного розв’язку

$$y'_ч = C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x + C_2(x)(e^x + xe^x).$$

Згідно з методом Лагранжа маємо умову

$$C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0,$$

тоді похідна $y'_ч$ набуває вигляду

$$y'_ч = C_1(x)e^x + C_2(x)(e^x + xe^x).$$

Знайдемо похідну другого порядку

$$y''_ч = C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + C'_2(x)(e^x + xe^x) + C_2(x)(2e^x + xe^x).$$

Підставивши $y_ч$, $y'_ч$ і $y''_ч$ у задане рівняння, дістанемо

$$C'_1(x)e^x + C'_2(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}.$$

Складемо систему

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0, \\ C'_1(x)e^x + C'_2(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему, віднявши перше рівняння від другого і скоротивши обидва рівняння на $e^x \neq 0$, дістанемо

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0, \\ e^x C'_2(x) = \dfrac{e^x}{x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -C'_2(x)x, \\ C'_2(x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C'_1(x) = -1, \\ C'_2(x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x, \\ C_2(x) = \ln|x|. \end{cases}$$

Отримали частинний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y_ч = -xe^x + \ln|x|xe^x = xe^x(\ln|x|-1).$$

Тоді загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1e^x + C_2xe^x + xe^x(\ln|x|-1).$$

Приклад 10. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$ методом Лагранжа.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, права частина якого не є функцією спеціального вигляду. Розв'яжемо його методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих).

Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' + y = 0$, характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_1 = i, k_2 = -i$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

а частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_ч = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Знайдемо похідну

$$\begin{aligned} y'_ч &= C'_1(x)\cos x - C_1(x)\sin x + C'_2(x)\sin x + C_2(x)\cos x = \\ &= C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x - C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x. \end{aligned}$$

За методом Лагранжа накладемо умову

$$C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0,$$

тоді похідна $y'_ч$ набуває вигляду

$$y'_ч = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x.$$

Знайдемо похідну другого порядку

$$y''_ч = -C'_1(x)\sin x - C_1(x)\cos x + C'_2(x)\cos x - C_2(x)\sin x.$$

Підставивши $y_ч$ і $y''_ч$ у задане рівняння, дістанемо

$$-C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \operatorname{tg} x.$$

Враховуючи одержані рівняння, складемо систему

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0, \\ -C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо значення $C'_1(x)$, $C'_2(x)$

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0 \\ -C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \operatorname{tg} x \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot \sin x \\ \cdot \cos x \end{matrix} \right\rangle +$$

$$C'_2(x) = \operatorname{tg} x \cos x = \sin x, \qquad C'_1(x) = -C'_2(x)\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Проінтегрувавши останні рівності, знайдемо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_2(x) = -\cos x + C_4,$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - 1} d(\sin x) =$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int dt + \int \frac{dt}{t^2 - 1} = t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C_3 =$$

$$= \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C_3.$$

Поклавши $C_3 = C_4 = 0$, маємо частинний розв'язок даного рівняння

$$y_ч = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x =$$

$$= \sin x \cos x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \cos x - \cos x \sin x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \cos x.$$

Тоді загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \cos x.$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' = 6x^2$.

Розв'язання. Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння знаходимо у вигляді $y = y_0 + y_ч$, де y_0 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y_ч$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Запишемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 2y' = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 + 2k = 0$, корені якого є дійсні, різні $k_1 = 0, k_2 = -2$. Тоді розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Права частина даного неоднорідного рівняння має вигляд $f(x) = P_2(x) = 6x^2$. Оскільки число 0 є коренем характеристичного рівняння, а $6x^2$ – многочлен другого степеня, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо у вигляді

$$y_ч = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Обчисливши похідні від частинного розв'язку

$$y'_ч = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y''_ч = 6Ax + 2B,$$

підставимо вирази $y_ч, y'_ч, y''_ч$ в задане рівняння і зведемо подібні, маємо

$$6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 6x^2,$$

$$6Ax^2 + (6A + 4B)x + (2B + 2C) = 6x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

Для обчислення A, B, C застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в многочленах, які стоять в лівій і правій частині рівності, дістанемо

$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 6A + 4B = 0, \\ 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо

$$A = 1,\ B = -\frac{3}{2},\ C = \frac{3}{2},$$

звідки маємо частинний розв'язок даного рівняння

$$y_ч = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1 + C_2 e^{-2x} + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

Приклад 12. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння при заданих початкових умовах $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$; $y(0) = -1,\ y'(0) = 12.$

Розв'язання. Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку $y_ч$ неоднорідного рівняння.

Для однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ запишемо характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$, яке має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Тому $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння.

Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $f(x) = P_0(x)e^{ax} = 8e^{3x}$, причому $a = 3$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_ч = Ae^{3x}$, де A – невідомий коефіцієнт. Знайдемо похідні $y_ч' = 3Ae^{3x}, y_ч'' = 9Ae^{3x}$ і підставимо їх разом із функцією $y_ч = Ae^{3x}$ в рівняння; дістанемо

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 8e^{3x}, \qquad 2Ae^{3x} = 8e^{3x}, \qquad A = 4.$$

Тоді $y_ч = 4e^{3x}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Отже, загальний розв'язок даного рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 4e^{3x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(0) = -1,\ y'(0) = 12$.

Використавши першу умову $y(0) = -1$, маємо

$$-1 = C_1e^0 + C_2e^0 + 4e^0 = C_1 + C_2 + 4.$$

Знайдемо похідну від загального розв'язку і використаємо другу умову $y'(0) = 12$. Оскільки $y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 12e^{3x}$, то

$$12 = C_1e^0 + 2C_2e^0 + 12e^0 = C_1 + 2C_2 + 12.$$

Значення сталих C_1, C_2 визначаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = -1, \\ C_1 + 2C_2 + 12 = 12; \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -10, \\ C_2 = 5. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = -10e^x + 5e^{2x} + 4e^{3x}.$$

Приклад 13. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 5.$

Розв'язання. Для заданого неоднорідного диференціального рівняння відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' + 16y = 0$, тоді характеристичне рівняння $k^2 + 16 = 0$ має комплексні корені $k_{1,2} = \pm 4i,\ \alpha = 0, \beta = 4$. Загальний розв'язок однорідного рівняння знайдемо за формулою (15)

$$y_0 = e^{0\cdot x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Частинний розв'язок даного неоднорідного диференціального рівняння визначається правою частиною $f(x) = (34x + 13)e^{-x} = P_n(x)e^{ax}$. Оскільки $a = -1$ не є коренем характеристичного рівняння, то $y_ч = (Ax + B)e^{-x}$ (випадок II,а). Знайдемо $y'_ч = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}$, $y''_ч = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}$ і підставимо вирази $y_ч$, $y''_ч$ в задане рівняння. Дістанемо

$$-2A + Ax + B + 16Ax + 16B = 34x + 13 \quad \Rightarrow \quad A=2,\ B=1.$$

Тоді частинний розв'язок даного рівняння $y_ч = (2x + 1)e^{-x}$. Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (2x + 1)e^{-x}.$$

Враховуючи задані початкові умови $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 5.$ складаємо систему рівнянь для визначення C_1 і C_2. Оскільки

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + 2xe^{-x} + e^{-x},\ \ y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - 2xe^{-x} + e^{-x},$$

то
$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 1 = -1, \\ y'(0) = 4C_2 + 1 = 5, \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = -2, C_2 = 1.$$

Підставивши знайдені значення C_1 і C_2 в загальний розв'язок, дістаємо шуканий частинний розв'язок даного рівняння

$$y = \sin 4x - 2\cos 4x + (2x+1)e^{-x}.$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 74\sin x.$$

Розв'язання. Запишемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 0$$

і складемо для нього характеристичне рівняння

$$k^2 - 7k + 6 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $k_1 = 1, k_2 = 6$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}.$$

Оскільки права частина даного неоднорідного рівняння $f(x) = 74\sin x$, то $f(x) = P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx = 0\cdot\cos x + 74\sin x$. Маємо функцію $f(x)$ спеціального вигляду, де $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = 74$, $b = 1$, причому $bi = i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_ч = A\cos x + B\sin x$.

Знайдемо похідні $y_ч' = -A\sin x + B\cos x$, $y_ч'' = -A\cos x - B\sin x$ і підставимо їх в задане рівняння, дістанемо

$$-A\cos x - B\sin x + 7A\sin x - 7B\cos x + 6A\cos x + 6B\sin x = 74\sin x,$$

$$(5A - 7B)\cos x + (7A + 5B)\sin x = 0\cdot\cos x + 74\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$, маємо

$$5A - 7B = 0,\ 7A + 5B = 74 \quad\Rightarrow\quad B = \frac{5}{7}A,\ 7A + \frac{25}{7}A = \frac{49+25}{7}A = 74 \quad\Rightarrow$$

$$A = 7, B = 5,$$

тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_ч = 7\cos x + 5\sin x.$$

Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} + 7\cos x + 5\sin x.$$

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-x} - 4x^2.$$

Розв'язання. частина даного неоднорідного рівняння є сумою двох функцій, тому загальний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді суми розв'язків рівнянь $y'' + 4y' + 4y = e^{-x}$ і $y'' + 4y' + 4y = -4x^2$.

Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y''+4y'+4y=0$. Характеристичне рівняння $k^2+4k+4=(k+2)^2=0$ має корінь $k_{1,2}=-2$ кратності 2, тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_0=e^{-2x}(C_1+C_2x)$.

Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння знайдемо як суму частинних розв'язків рівнянь із правими частинами $f_1(x)=e^{-x}$, $f_2(x)=-4x^2$, дістанемо

$$y_ч=Ae^{-x}+(Bx^2+Cx+D),\quad y'_ч=-Ae^{-x}+2Bx+C,\quad y''_ч=Ae^{-x}+2B.$$

Підставивши $y_ч$, $y'_ч$ і $y''_ч$ у задане рівняння, дістанемо

$$Ae^{-x}+2B-4Ae^{-x}+8Bx+4C+4Ae^{-x}+4Bx^2+4Cx+4D=e^{-x}-4x^2,$$

$$Ae^{-x}+4Bx^2+(8B+4C)x+(2B+4C+4D)=e^{-x}-4x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при функції e^{-x} та при однакових степенях x в обох частинах рівняння, дістанемо

$$\begin{cases} A=1 \\ 4B=-4 \\ 8B+4C=0 \\ 2B+4C+4D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \\ D=-3/2 \end{cases}$$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y=y_0+y_ч=e^{-2x}(C_1+C_2x)+e^{-x}-x^2+2x-\frac{3}{2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

а) $y''-5y'+6y=0$; б) $y''+4y'=0$;

в) $y''-4y'+4y=0$; г) $y''+9y=0$;

д) $y''-2y'+10y=0$; е) $y''+4y'+5y=0$;

ж) $y'''-y'=0$; з) $y'''-6y''-9y'=0$;

к) $y^{\text{IV}}+3y'''-4y''=0$; л) $y^{\text{IV}}+3y''-4y=0$.

2. Розв'язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння

а) $2y''-y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$;

б) $y''-2y'=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=0$;

в) $y''+y=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

г) $y''-4y'+3y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=9$.

3. Розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння методом Лагранжа

а) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$; б) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

4. Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі спеціальною правою частиною

а) $y'' - 8y' + 16y = 2x - 4$; б) $y'' - 2y' = 2xe^{-x}$;

в) $y'' - 4y' + 5y = x^2 + 2$; г) $y'' + 4y' + 3y = xe^{2x}$;

д) $y'' + 16y = x^2$; е) $y'' - 2y' - 3y = xe^{4x}$;

ж) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$; з) $y'' + 4y = -\sin 2x$;

к) $y'' + y = -\cos x$; л) $y'' + 9y = 5\cos 3x$.

5. Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння

а) $y'' + 9y = 3x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' - y = 4e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - y' - 2y = 2xe^{4x}$, $y(0) = y'(0) = 1$;

г) $y'' + 4y' = -\sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Контрольні запитання

1. Дайте означення диференціального рівняння першого порядку.
2. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
3. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння?
4. Які типи диференціальних рівнянь першого порядку ви знаєте?
5. Як розв'язуються рівняння з відокремлюваними змінними?
6. Наведіть схему розв'язання однорідного диференціального рівняння першого порядку.
7. Як розв'язуються лінійні диференціальні рівняння першого порядку?
8. Дайте означення диференціальних рівнянь вищих порядків.
9. Наведіть типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що допускають пониження порядку, і вкажіть методи їх розв'язання.
10. Як визначаються лінійні диференціальні рівняння вищих порядків? Яка структура їх розв'язку?
11. Як розв'язуються лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
12. Наведіть алгоритм розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із правою частиною спеціального вигляду.

Розділ VIII. Кратні та криволінійні інтеграли

§ 29. Подвійний інтеграл та його застосування

Означення та властивості подвійного інтеграла

Розглянемо неперервну функцію $f(x,y)$ в замкненій області $D \subset Oxy$. Розіб'ємо область дугами на *n* частинних областей D_i, площа яких ΔS_i, $i=\overline{1,n}$.

У кожній області D_i виберемо довільну точку $P_i(\overline{x}_i;\overline{y}_i)$ і утворимо суму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta S_i$, яка називається *інтегральною сумою.* Позначимо через λ найбільший з діаметрів області D_i (див. рис. 29.1).

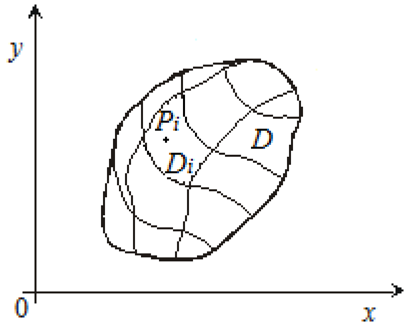


Рис. 29.1

Якщо існує границя $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття області *D* на частини D_i, ні від вибору точок $(\overline{x}_i;\overline{y}_i)\in D_i$, то ця границя називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x,y)$ по області D і позначається

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta S_i. \qquad (29.1)$$

Оскільки границя у рівності (29.1) не залежить від способу розбиття області D, то її можна розбити на області D_i прямими, паралельними осям координат (див. рис. 29.2).

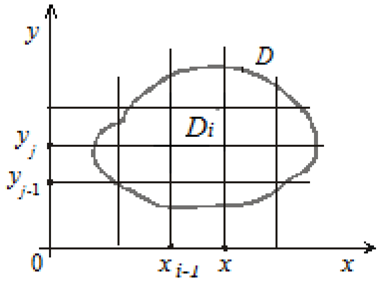


Рис. 29.2

Нехай D_i – прямокутник зі сторонами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, i=\overline{1,n}$, площа якого $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Тоді подвійний інтеграл можна записати у вигляді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta x_i \Delta y_i. \qquad (29.2)$$

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то вона є інтегровною в цій області, тобто існує подвійний інтеграл (29.2).

Розглянемо циліндричне тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$, знизу – областю D (проекцією поверхні на площину xOy), збоку – циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі Oz, та напрямною γ, яка є межею області D (див. рис. 29.3). Тоді об'єм циліндричного тіла визначається за формулою $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (*геометричний зміст подвійного інтеграла*).

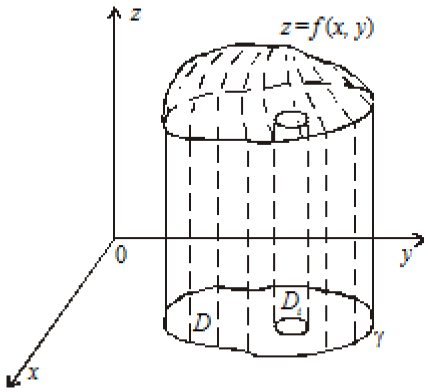


Рис. 29.3

Розглянемо *властивості подвійного інтеграла*.

1. Якщо функція $f(x,y)$ є неперервною в області D, то сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла, тобто

$$\iint\limits_D k f(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ k = \text{const}.$$

2. Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ є неперервними в області D, то

$$\iint\limits_D \big(f(x,y) + g(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

3. Нехай функція $f(x,y)$ є неперервною в області D, яка розбита на області D_1 і D_2, причому $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \gamma$ (див. рис. 29.4) тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

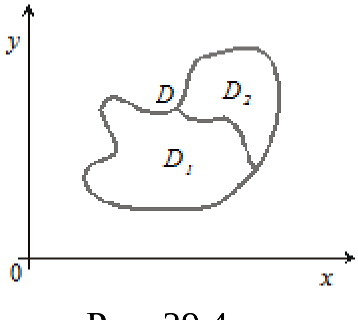


Рис. 29.4

4. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D і $f(x,y) \geq 0$ в усіх точках цієї області, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

5. Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ неперервні в області D, причому в усіх точках області D виконується нерівність $f(x,y) \geq g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

6. Якщо $f(x,y)=1$, то $\iint\limits_D dxdy = S$, де S – площа області D.

7. Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області D із площею S, причому m і M – найменше і найбільше значення функції в цій області. Тоді

$$m \cdot S \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot S.$$

8. *Теорема про середнє.* Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області D із площею S, тоді існує така точка $(x_0, y_0) \in D$, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S.$$

Обчислення подвійного інтеграла у декартових координатах

I. Випадок прямокутної області. Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області $D = \{(x,y) |\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, тобто область інтегрування є прямокутником зі сторонами, паралельними координатним осям (див. рис. 29.5).

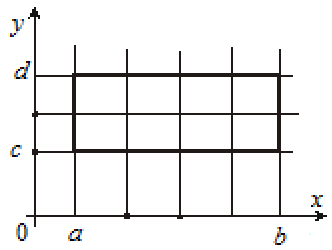


Рис. 29.5

Якщо зафіксувати змінну $y \in [c,d]$, то $f(x,y)$ буде неперервною функцією змінної x. Тоді існує інтеграл $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, який є неперервною функцією від змінної $y \in [c,d]$, тому для функції $F(y)$ можна знайти інтеграл на відрізку $[c,d]$. При інтегруванні дістанемо повторний інтеграл

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (29.3)$$

Розглянемо інтегрування в іншому порядку. Зафіксуємо змінну $x \in [a,b]$ і розглянемо функцію $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$, яку проінтегруємо на відрізку $[a,b]$. У результаті дістанемо повторний інтеграл:

$$\int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (29.4)$$

Отже, для неперервної в прямокутнику D функції $f(x,y)$, виконується рівність

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (29.5)$$

II. Випадок довільної області. Нехай замкнена область D лежить в площині xOy і обмежена кривою L.

Область D є *правильною в напрямку осі* Ox (Oy), якщо будь-яка пряма l, паралельна цій осі, перетинає межу області не більше ніж в двох точках. При цьому для будь-якої прямої $l \parallel Ox$ ($l \parallel Oy$) лінія входу в область повинна бути однією й тією самою, так само, як і лінія виходу.

Область D, зображена на рис. 29.6, є правильною в напрямку осі Oy, при цьому крива $AMPB$ є лінією входу в область D, а крива $AKLB$ – лінією виходу з цієї області. Зазначимо, що в напрямку осі Ox область D є неправильною.

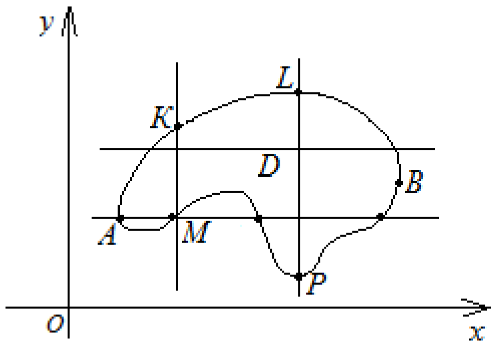


Рис. 29.6

Покажемо, що якщо область D – правильна в напрямку хоча б однієї з осей координат, то обчислення подвійного інтегралу $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ зводиться до обчислення повторного інтеграла, тобто до послідовного інтегрування функції за кожною із змінних.

Скористаємось геометричним змістом подвійного інтеграла, який визначає об’єм циліндричного тіла $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Застосуємо формулу обчислення об’єму тіла за відомими площами поперечних перерізів $S(x)$.

Нехай область D правильна в напрямку осі Oy. Спроектуємо цю область на вісь Ox, тоді $x \in [a,b]$. Точки A і B поділяють межу області D на дві лінії, а саме: AKB є лінією входу в область D, ANB – лінія виходу з області D. Перша лінія визначається функцією $y = y_1(x)$, а друга – функцією $y = y_2(x)$. Зафіксуємо точку $x \in [a,b]$ і проведемо перпендикулярно до осі Ox площину, яка перетне дане тіло по криволінійній трапеції PP_1Q_1Q (див. рис. 29.7).

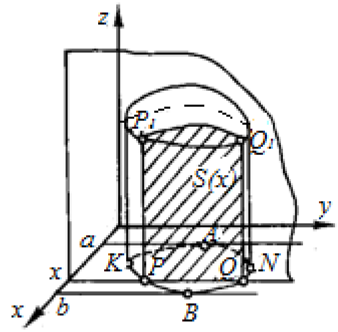


Рис. 29.7

Площу фігури PP_1Q_1Q можна знайти за допомогою визначеного інтеграла $S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. Тоді

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Отже,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (29.6)$$

У правій частині останньої рівності дістали повторний інтеграл, в якому числа a і b є межами зовнішнього інтеграла, а функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є межами внутрішнього інтеграла. Спочатку обчислюють внутрішній інтеграл за змінною y, в якому змінна x вважається сталою, після чого обчислюють зовнішній інтеграл (за змінною x).

Зауважимо, що порядок інтегрування можна змінити. Аналогічно маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (29.7)$$

Таким чином, для обчислення подвійного інтеграла потрібно перейти до повторного інтеграла. Для визначення меж інтегрування у зовнішньому та внутрішньому інтегралах потрібно зобразити область інтегрування на площині. Якщо область D правильна в напрямку осі Oy, то зовнішній інтеграл беруть за змінною x, а якщо область D правильна в напрямку Ox, то зовнішній інтеграл беруть за змінною y. Зауважимо, що межі у зовнішньому інтегралі завжди повинні бути сталими.

Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Нехай на площині xOy задана область D, обмежена лінією L. Виконаємо заміну змінних $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, вважаючи, що функції $x(u,v)$, $y(u,v)$ диференційовані в деякій області D^*.

Перехід до нових змінних у подвійному інтегралі здійснюють за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,|\,I\,|\,dudv, \qquad (29.8)$$

де I – *якобіан* (визначник Якобі) переходу до нових змінних, який визначають за формулою

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \qquad (29.9)$$

Поклавши $u = \rho,\ v = \varphi$, використаємо формули, які пов’язують полярні і декартові системи координат, тобто $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

Тоді якобіан переходу до полярних координат

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho.$$

Отже, з формули (29.8) випливає

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho. \qquad (29.10)$$

Таким чином, перехід до полярних координат у подвійному інтегралі здійснюють за формулою (29.10).

Зауважимо, що перехід до полярних координат зручно здійснювати тоді, коли область D є кругом або його частиною, або якщо підінтегральна функція містить вираз $x^2 + y^2$.

Застосування подвійного інтеграла

Розглянемо *геометричні та фізичні застосування* подвійного інтеграла.

1. Обчислення площі фігури.

Якщо функція $f(x,y)=1$, то подвійний інтеграл по області D дорівнює *площі області інтегрування* $S_D = \iint\limits_D dxdy$.

2. Обчислення об'єму тіла.

Якщо циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$, знизу – областю D (проекцією поверхні на площину Oxy), а збоку – циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі Oz, то об'єм тіла визначається за формулою

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Якщо тіло обмежено поверхнями $z = f_1(x,y)$, $z = f_2(x,y)$, причому $f_2(x,y) \geq f_1(x,y) \geq 0 \quad \forall(x;y) \in D$, і проектується в область $D \subset Oxy$, то його об'єм можна обчислити за формулою

$$V = \iint\limits_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y) \right) dxdy.$$

3. Обчислення площі поверхні тіла .

Якщо тіло обмежено поверхнею $z = f(x,y)$ і проектується в область $D \subset Oxy$, то площу поверхні тіла можна обчислити за формулою

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy.$$

4. Обчислення маси плоскої пластини.

Якщо пластина має форму області D, а $\gamma = \gamma(x,y)$ – густина пластини (матеріалу) в кожній її точці, то масу пластини можна обчислити за формулою

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy \cdot$$

5. Визначення статичних моментів пластини відносно осей координат.

Статичний момент пластини відносно осі Ox визначають за формулою

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x,y)dxdy,$$

а статичний момент пластини відносно осі Oy визначають так

$$M_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x,y)dxdy \cdot$$

6. Визначення центра мас пластини.

Координати центра мас $(x_c; y_c)$ пластини D з густиною $\gamma = \gamma(x,y)$ обчислюють за формулами

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x \cdot \gamma(x,y)dxdy, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint_D y \cdot \gamma(x,y)dxdy.$$

7. Визначення моментів інерції пластини.

Моменти інерції пластини D відносно координатних осей Ox і Oy знаходять за формулами

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат визначають так:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dxdy.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 2x^2y^3dxdy$, де D – прямокутник з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$.

Розв'язання. Область D є прямокутником і визначається нерівностями $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ (див. рис. 29.8), тому межі інтегрування за змінною x і за змінною y є сталими.

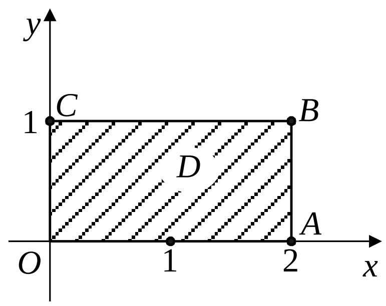


Рис. 29.8

Зведемо подвійний інтеграл до повторного за формулою і обчислимо його. За формулою $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ маємо

$$\iint_D 2x^2y^3dxdy = 2\int_0^2 x^2dx\int_0^1 y^3dy = 2\int_0^2 x^2\left(\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \left(3x^2y + 6xy^2\right)dxdy$, якщо $D = \left\{(x;y)\middle| 1 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\right\}$.

Розв'язання. Область D є прямокутником, тому межі інтегрування за змінною x і за змінною y є сталими. Зведемо подвійний інтеграл до повторного, причому внутрішній інтеграл візьмемо за змінною y, тоді змінна x вважається сталою. Дістанемо

$$\iint_D \left(3x^2y+6xy^2\right)dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{1}^{2}\left(3x^2y+6xy^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3y+3x^2y^2\right)\Big|_1^2 dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(8y+3\cdot 4y^2-y-3y^2\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(9y^2+7y\right)dy=$$

$$=\left(3y^3+\frac{7}{2}y^2\right)\Bigg|_{-1}^{1}=3\cdot 1+\frac{7}{2}\cdot 1-3\cdot(-1)-\frac{7}{2}\cdot 1=6.$$

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, де D – трикутник з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$.

Розв'язання. Областю інтегрування є трикутник OAB (див. рис. 29.9).

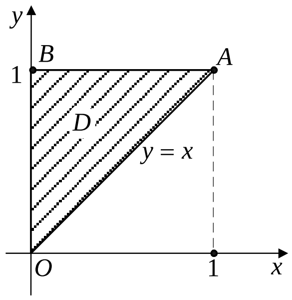


Рис. 29.9

Область D є правильною як вздовж осі Ox, так і вздовж осі Oy. Спроектуємо цю область на вісь Ox у відрізок [0;1], тоді зовнішні межі інтегрування визначаються нерівністю $0\le x\le 1$. Пряма, паралельна осі Oy, перетинає область знизу по прямій $y=x$, а зверху – по прямій $y=1$, звідки знаходимо внутрішні межі інтегрування.

За формулою $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ дістанемо

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^1 xdx\int_x^1 dy=\int_0^1 x\,dx\left(y\Big|_x^1\right)=$$

$$=\int_0^1 x(1-x)dx=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, якщо область D обмежена прямими $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

Розв'язання. Зобразимо область D (див. рис. 29.10).

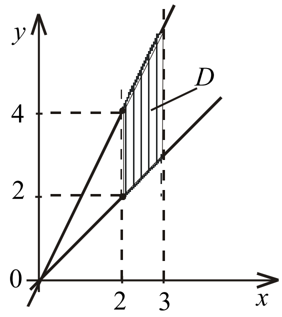


Рис. 29.10

Спроектуємо область D на вісь Ox у відрізок [2;3]. Будь-яка пряма, паралельна осі Oy, заходить в область через пряму $y = x$, а виходить через пряму $y = 2x$, тому область D є правильною вздовж осі Oy. Зазначимо, що область не є правильною вздовж осі Ox, тому зовнішній інтеграл візьмемо за змінною x, дістанемо

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y)\,dy = \int_2^3 \left(xy + y^2\right)\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \int_2^3 \left(2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2\right) dx = 4\int_2^3 x^2 dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = 36 - \frac{32}{3} = \frac{76}{3}.$$

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $I = \iint_D \sqrt{x}\, y\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2,\ y = 2 - x^2,\ x \ge 0$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування, обмежену заданими кривими та віссю *Oy* (див. рис. 29.11).

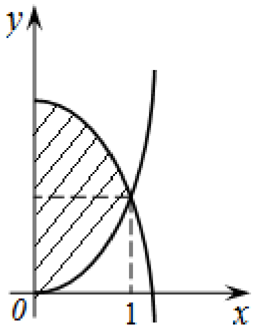


Рис. 29.11

Задана область D є правильною вздовж осі Oy, оскільки будь-яка пряма, паралельна цій осі, заходить в область через криву $y = x^2$, а виходить – через криву $y = 2 - x^2$. Спроектувавши область D на вісь Ox, маємо: $0 \le x \le 1$.

Скориставшись формулою $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$, дістанемо

$$\iint\limits_D \sqrt{x}\,ydxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2}\sqrt{x}\,ydy=\int\limits_0^1\sqrt{x}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2-x^2}dx=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}}{2}\left((2-x^2)^2-x^4\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2\sqrt{x}-2x^2\sqrt{x}\right)dx=\left(\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{4}{7}x^{7/2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}-\frac{4}{7}=4\left(\frac{7-3}{21}\right)=\frac{16}{21}.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, якщо область D обмежена прямими $y=2$, $y=x$, $y=\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (див. рис. 29.12).

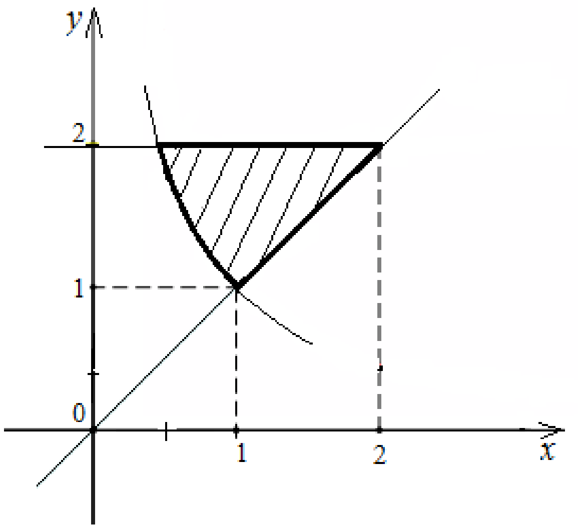


Рис. 29.12.

Зазначимо, що область D не є правильною вздовж осі Oy, але є правильною вздовж осі Ox, тому зовнішній інтеграл візьмемо за змінною y. Спроектувавши область D на вісь Oy, дістанемо $1\le y\le 2$. Будь-яка пряма, паралельна осі Ox, заходить в область через криву $x=\dfrac{1}{y}$, а виходить через пряму $x=y$.

Застосуємо формулу $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$. Отже,

$$\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_1^2 ydy\int\limits_{\frac{1}{y}}^{y}xdx=\int\limits_1^2 ydy\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{y}\right)=\int\limits_1^2 y\left(\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2y^2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^2\frac{y^3}{2}dy-\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{1}{y}dy=\frac{y^4}{8}\Bigg|_1^2-\frac{1}{2}\ln|y|\Bigg|_1^2=2-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 1=\frac{15}{8}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Приклад 7. Змінити порядок інтегрування в інтегралі $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D. Враховуючи межі інтегрування в повторному інтегралі, знайдемо рівняння ліній, що обмежують цю область. Спочатку побудуємо лінії, які визначаються внутрішніми межами інтегрування $y = x^2$, $y = 4$. Оскільки парабола і пряма перетинаються в точках $A(-2;\,4)$, $B(2;4)$, то дістаємо область OAB, в якій $x=-2$, $x=2$ є зовнішніми межами інтегрування (див. рис. 29.13).

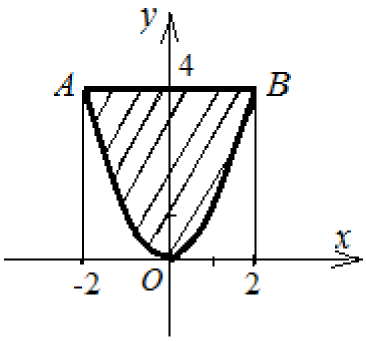


Рис. 29.13

Змінимо порядок інтегрування в інтегралі, розглянувши зовнішній інтеграл за змінною y, а внутрішній – за змінною x. Спроектувавши область OAB на вісь Oy у відрізок [0;4], дістанемо межі зовнішнього інтеграла $y=0$, $y=4$. Межі внутрішнього інтеграла знайдемо, провівши пряму, паралельну осі Ox, яка входить в область через ліву гілку параболи, а виходить – через праву. Розв'язавши рівняння $y = x^2$ відносно x, маємо $x = -\sqrt{y}$, $x = \sqrt{y}$. Отже,

$$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

Приклад 8. Змінити порядок інтегрування і обчислити повторний інтеграл $I = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2x} \left(x^2 + y\right) dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{3-x} \left(x^2 + y\right) dy$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D, яка обмежена лініями $y = 2x$, $y = 3 - x$ та віссю Ox (див. рис. 29.14).

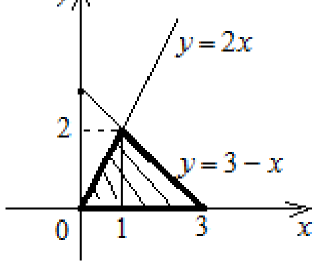


Рис. 29.14

Спроектуємо область D на вісь Oy у відрізок $[0;2]$, при цьому змінна x змінюється від $x=\frac{y}{2}$ до $x=3-y$. Дістанемо

$$I=\int_0^2 dy\int_{y/2}^{3-y}\left(x^2+y\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}+yx\right)\Bigg|_{y/2}^{3-y}dy=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{(3-y)^3}{3}+y(3-y)-\frac{y^3}{24}-\frac{y^2}{2}\right)dy=\int_0^2\left(-\frac{(y-3)^3}{3}+3y-\frac{y^3}{24}-\frac{3y^2}{2}\right)dy=$$

$$=\left(-\frac{(y-3)^4}{12}+\frac{3}{2}y^2-\frac{y^4}{96}-\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^2=-\frac{1}{12}+6-\frac{1}{6}-4+\frac{81}{12}=\frac{17}{2}.$$

Приклад 9. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $I=\int_{-3}^{1}dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x^2-2y)dy$ та обчислити його.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування, яка визначається нерівностями $D=\left\{-3\le x\le 1,\ 2x-1\le y\le 2-x^2\right\}$, тобто обмежена прямою $y=2x-1$ і параболою $y=2-x^2$ (див. рис. 29.15).

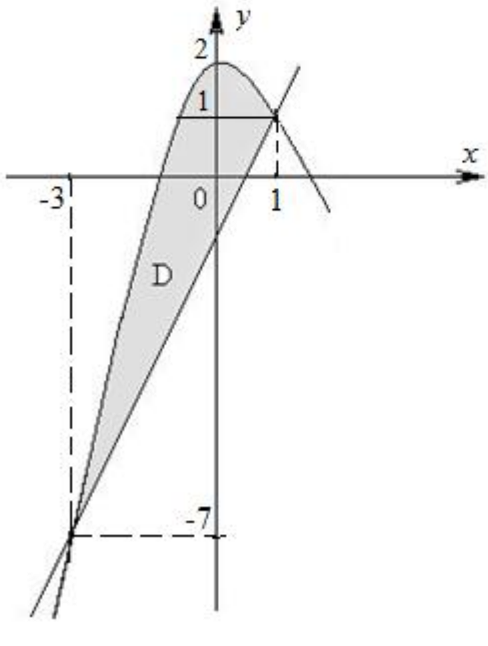


Рис. 29.15

Змінимо порядок інтегрування, тобто перейдемо до повторного інтеграла, в якому внутрішній інтеграл береться за змінною x, а зовнішній – за змінною y. Область D необхідно розбити на дві частини D_1 і D_2, оскільки пряма, паралельна осі Ox, виходить з області через лінію, яка задається двома різними функціями. Маємо

$$D_1=\left\{-7\le y\le 1,\ -\sqrt{2-y}\le x\le \frac{y+1}{2}\right\},\ D_2=\left\{1\le y\le 2,\ -\sqrt{2-y}\le x\le \sqrt{2-y}\right\}.$$

Змінивши порядок інтегрування в даному інтегралі, дістанемо

$$\int_{-3}^{1}dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x^2-2y)dy=\int_{-7}^{1}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{y+1}{2}}(x^2-2y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}(x^2-2y)dx\,.$$

Очевидно, що обчислювати даний інтеграл простіше в початковому вигляді. Спочатку знайдемо внутрішній інтеграл за змінною y, при цьому x вважаємо сталою, маємо

$$\int_{2x-1}^{2-x^2}(x^2-2y)dy=(x^2y-y^2)\Big|_{2x-1}^{2-x^2}=x^2(2-x^2)-(2-x^2)^2-x^2(2x-1)+(2x-1)^2=$$

$$=-2x^4-2x^3+11x^2-4x-3\,.$$

Тоді заданий інтеграл дорівнює

$$I=\int_{-3}^{1}dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x^2-2y)dy=\int_{-3}^{1}(-2x^4-2x^3+11x^2-4x-3)dx=$$

$$=\left(-\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3-2x^2-3x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{11}{3}-5-\frac{486}{5}+\frac{81}{2}+108=49\frac{1}{15}\,.$$

Приклад 10. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, де область D визначається нерівностями $x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування D (див. рис. 29.16).

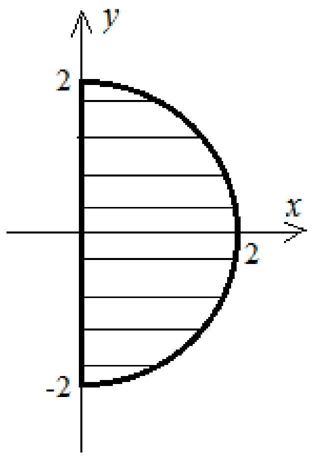


Рис. 29.16

Оскільки область є правою половиною круга радіуса $R=2$ з центром в початку координат, то перейдемо до полярних координат. Тоді область D визначається нерівностями $0\le\rho\le 2, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Застосувавши формулу $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$, дістанемо

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint\limits_{D^*}\rho^2\cdot\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{0}^{2}\rho^3 d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2\right) = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 4\cdot\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\pi.$$

Приклад 11. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, де $D=\left\{(x;y)\in R^2 \,\middle|\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування D (див. рис. 29.17).

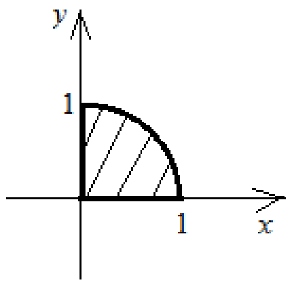


Рис. 29.17

Оскільки область інтегрування є чвертю круга $x^2+y^2\le 1$, а підінтегральна функція містить вираз $1-x^2-y^2$, то для обчислення даного інтеграла перейдемо до полярних координат.

Враховуючи, що $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, застосуємо формулу

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Оскільки $x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 1$, то

$$\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D^*}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-\rho^2}\,(-2\rho d\rho)\right) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{0}^{1}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(1-\rho^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\frac{2}{3}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}(0-1)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Приклад 12. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{3}{2}x,\ y=4-\left(x-1\right)^2,\ x=0\,(x\ge 0)$.

Розв'язання. Побудуємо задану фігуру (див. рис. 29.18). Спроектувавши її на вісь *Ox*, дістанемо відрізок [0,2].

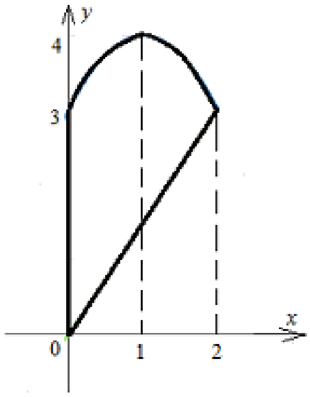


Рис. 29.18

Площу фігури обчислимо за формулою $S_D=\iint\limits_D dxdy$. Тоді

$$S_D=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} dy=\int\limits_0^2\left(4-\left(x-1\right)^2-\frac{3}{2}x\right)dx=$$

$$=\left(4x-\frac{\left(x-1\right)^3}{3}-\frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_0^2=8-\frac{1}{3}-3-\frac{1}{3}=\frac{13}{3}.$$

Приклад 13. Знайти об'єм тіла, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=3,\ x+y+z=6$.

Розв'язання. Побудуємо тіло (див. рис. 29.19). Спроектувавши його на площину Oxy, дістанемо область $D=\left\{\left(x;y\right)\middle|\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3\right\}$.

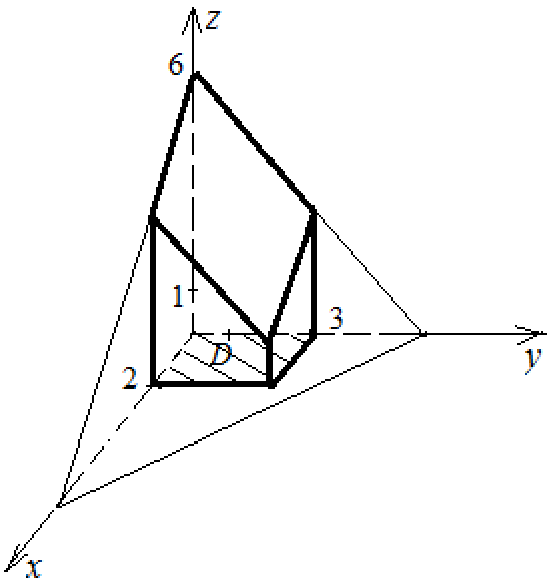


Рис. 29.19

Обчислимо об'єм тіла, обмеженого зверху площиною $z=6-x-y$, дістанемо

$$V=\iint_D (6-x-y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^3 (6-x-y)dy=\int_0^2 dx\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\int_0^2\left(18-3x-\frac{9}{2}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{27}{2}-3x\right)dx=\left(\frac{27}{2}x-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=21.$$

Приклад 14. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$.

Розв'язання. Дане тіло обмежене параболоїдом $z=x^2+y^2$, циліндром $x^2+y^2=4$ та площиною $z=0$. Лінією перетину параболоїда і циліндра є коло $x^2+y^2=4$, яке лежить у площині $z=4$ (див. рис. 29.20). Тоді тіло, обмежене зверху параболоїдом $z=x^2+y^2$, а знизу – площиною $z=0$, проектується в круг $x^2+y^2=4$ (область D).

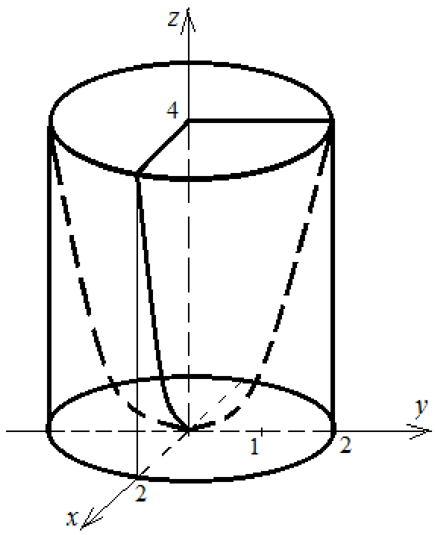


Рис. 29.20

Для обчислення об'єму тіла зручно перейти до полярних координат, тоді область D визначається нерівностями $0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Дістанемо

$$V=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\iint_{D^*}\rho^2\rho\, d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3 d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2=4\int_0^{2\pi}d\varphi=4\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=8\pi.$$

Приклад 15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

Розв'язання. Дане тіло обмежене параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$, параболічним циліндром $y=x^2$, твірні якого паралельні осі Oz, та площинами

$y=1$ і $z=0$ (див. рис. 29.21). Проекцією цього тіла на площину Oxy буде область $D=\left\{-1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\right\}$ (див. рис. 29.22).

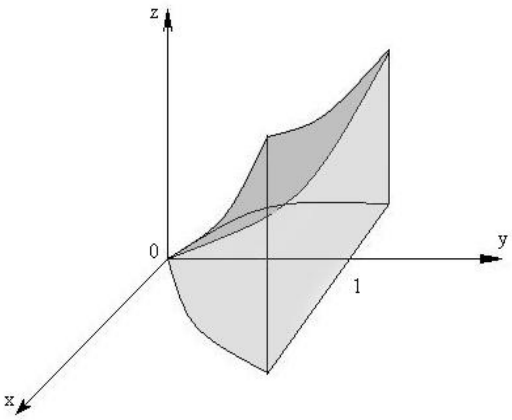


Рис. 29.21

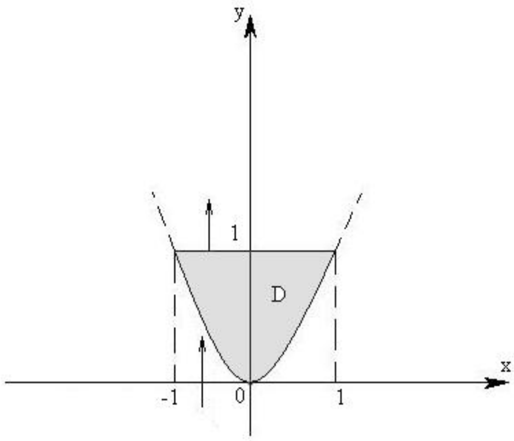


Рис. 29.22

Обчислимо об'єм тіла

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=$$

$$=2\int_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=2\int_0^1(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{1}{3}x^6)dx=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{88}{105}.$$

Приклад 16. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=6-x^2-y^2$ і $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Дане тіло обмежене параболоїдом обертання $z=6-x^2-y^2$ і конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Визначимо лінію перетину цих поверхонь, дістанемо

$$6-(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \left(x^2+y^2\right)+\sqrt{x^2+y^2}-6=0,$$

$$t=\sqrt{x^2+y^2},\quad t^2+t-6=0,\quad t=-3,\ t=2,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\ne -3,\quad \sqrt{x^2+y^2}=2,\quad x^2+y^2=4.$$

Отже, перетином даних поверхонь є коло, яке лежить у площині $z=2$.

Зобразимо утворене тіло і спроектуємо його на площину Oxy. Область D є кругом з центром у початку координат і радіусом $R=2$ (див. рис. 29.23).

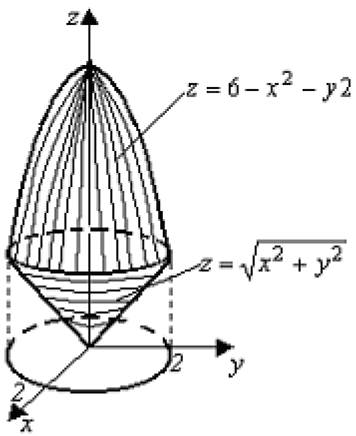


Рис. 29.23

Об'єм даного тіла знаходимо за допомогою подвійного інтеграла

$$V=\iint\limits_{D}\left(f_2(x,y)-f_1(x,y)\right)dxdy=\iint\limits_{D}\left(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Оскільки підінтегральна функція містить вираз x^2+y^2, а область D є кругом, то для обчислення інтеграла перейдемо до полярних координат, скориставшись формулою $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi$.

Область $D=\{0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$. Оскільки $x^2+y^2=\rho^2$, то

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(6-\rho^2-\rho\right)\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(6\rho-\rho^3-\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{32}{3}\pi\ .$$

Приклад 17. Знайти площу поверхні $z=3\sqrt{x^2+y^2}$, де $y\ge x^2$, $y\le 1$.

Розв'язання. Задана поверхня є частиною конуса, що відтинається параболічним циліндром $y=x^2$ і площиною $y=1$. Площу поверхні знайдемо за формулою

$$P=\iint\limits_{D}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy.$$

Визначимо частинні похідні функції z, дістанемо

$$z_x'=\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y'=\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

тоді

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\frac{9x^2}{x^2+y^2}+\frac{9y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+9x^2+9y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{10}\,.$$

Вказана поверхня проектується на площину Oxy в область D, обмежену лініями $y=x^2$, $y=1$ (див. рис. 29.24).

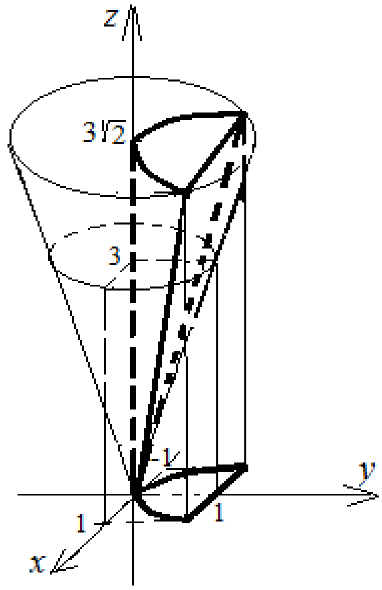


Рис. 29.24

Отже, площа заданої поверхні

$$P=\iint\limits_{D}\sqrt{10}dxdy=\sqrt{10}\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy=\sqrt{10}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=$$

$$=\sqrt{10}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\sqrt{10}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\sqrt{10}}{3}.$$

Приклад 18. Знайти масу пластини D, обмеженої лініями: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0\ (x\geq 0, y\geq 0)$, якщо густина пластини в кожній точці дорівнює $\gamma(x,y)=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Область D є частиною кільця, обмеженого двома колами $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25$ радіусів відповідно $r=2,\ R=5$ з центром в точці $O(0,0)$, яке лежить в I чверті (див. рис. 29.25).

Маса пластини (області D) обчислюється за формулою

$$m=\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy=\iint\limits_{D}\frac{2x+3y}{x^2+y^2}dxdy.$$

Оскільки область інтегрування D є частиною кільця, то перейдемо до полярних координат, при цьому $D=\left\{2\leq\rho\leq 5,\ 0\leq\varphi\leq\pi/2\right\}$. Скориставшись формулою $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi$, дістанемо

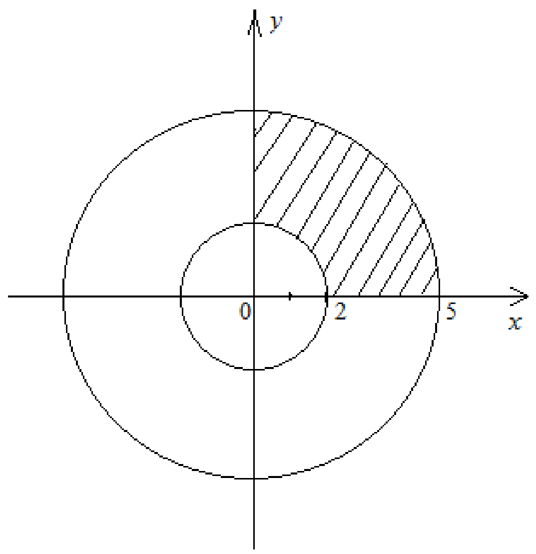


Рис. 29.25

$$m=\iint_D \frac{2\rho\cos\varphi+3\rho\sin\varphi}{\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int_0^{\pi/2}(2\cos\varphi+3\sin\varphi)d\varphi\int_2^5 d\rho=\left(2\sin\varphi-3\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}\rho\Big|_2^5=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{2}-3\cos\frac{\pi}{2}-2\sin 0+3\cos 0\right)(5-2)=5\cdot 3=15.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити подвійні інтеграли в області D, обмеженій лініями

а) $\iint_D (x+y)dxdy, \quad D:\ x=0,\ x=1,\ y=1,\ y=2;$

б) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy, \quad D:\ x=2,\ \ y=x,\ \ xy=1.$

2. Змінити порядок інтегрування в інтегралах

а) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy;$ б) $\int_{-6}^{2} dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.$

3. Обчислити подвійні інтеграли в області D, обмеженій лініями, перейшовши до полярних координат

а) $\iint_D xydxdy,\ D=\left\{(x;y)\in R^2:\ x^2+y^2\le 4\right\};$

б) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D=\left\{(x;y)\in R^2:\ x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0\right\};$

в) $\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy,$ де область D – верхнє півкільце між колами з радіусами e та e^2 і центром в початку координат.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y; \quad x + y = 0.$

5. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 0, z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого площинами $2x + y + z = 1, \quad x = 0,$ $y = 0, \ z = 0$.

7. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2, \ x + y = 1$ та координатними площинами.

8. Знайти масу кільця, обмеженого колами $x^2 + y^2 = 1, \ x^2 + y^2 = 4$, якщо в кожній його точці густина $\gamma(x, y)$ обернено пропорційна квадрату відстані до центра кільця (k – коефіцієнт пропорційності).

9. Знайти координати центра маси однорідної пластини ($\gamma(x, y) = 1$), обмеженої лініями $y = x^2 + 1, x - y + 3 = 0$.

§ 30. Потрійний інтеграл та його застосування

Означення та властивості потрійного інтеграла

Потрійний інтеграл є узагальненням подвійного інтеграла на випадок області, заданої у тривимірному просторі. Тому основні поняття та властивості потрійного інтеграла аналогічні тим, що вивчались для подвійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області $G \subset R_3$. Розіб’ємо область (тіло) G сіткою поверхонь на n частин G_i, об’єми яких відповідно дорівнюють $\Delta V_i, i = \overline{1, n}$. У кожній області G_i візьмемо довільну точку $P_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ і утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta V_i, \qquad (30.1)$$

яка називається *інтегральною сумою* для функції $u = f(x, y, z)$ по області G.

Нехай λ – найбільший із діаметрів областей G_i. Дамо означення потрійного інтеграла.

Якщо інтегральна сума (30.1) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини G_i, ні від вибору в них точок P_i, то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x, y, z)$ по області (тілу) G і позначається

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)\Delta V_i\ . \qquad (30.2)$$

Потрійний інтеграл найчастіше записують у вигляді $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$,

де $f(x,y,z)$ – підінтегральна функція, G – область інтегрування; x,y,z – змінні інтегрування; $dV = dxdydz$ – елемент об'єму.

Якщо $f(x,y,z)=1$, то з рівності (30.2) випливає формула обчислення об'єму тіла G, яка визначає *геометричний зміст потрійного інтеграла*

$$V = \iiint\limits_G dxdydz\,. \qquad (30.3)$$

Якщо в кожній точці $(x;y;z)$ тіла (області) G відома густина $\gamma = \gamma(x,y,z)$, то маса цього тіла знаходиться за формулою

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz\,, \qquad (30.4)$$

яка визначає *фізичний зміст потрійного інтеграла*, коли функція $\gamma = \gamma(x,y,z) \ge 0$ в області G.

Теорема (*достатня умова інтегровності функції*). Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області $G \subset R_3$, то вона в цій області інтегровна, тобто існує потрійний інтеграл (30.2).

Розглянемо *властивості потрійного інтеграла*.

1. Сталий множник можна виносити за знак потрійного інтеграла

$$\iiint\limits_G Cf(x,y,z)dxdydz = C\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz\,.$$

2. Потрійний інтеграл від суми двох неперервних в області G функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від цих функцій

$$\iiint\limits_G (f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_G g(x,y,z)dxdydz.$$

3. Якщо в області інтегрування $f(x,y,z) \ge 0$, то $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \ge 0.$

4. Якщо функції $f(x,y,z)$ та $g(x,y,z)$ – неперервні в області G, причому $f(x,y,z) \ge g(x,y,z)$, то $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \ge \iiint\limits_G g(x,y,z)dxdydz.$

5. (*властивість адитивності*). Якщо область інтегрування G розбити на дві області G_1 і G_2, причому $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = L$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

6. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об’єм V, то

$$mV \le \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \le MV$$

де m і M – найменше і найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області G.

7 (*Теорема про середнє*). Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в області G, яка має об’єм V, то в цій області існує така точка $(x_0;y_0;z_0)$, що

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V .$$

Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення інтегралів за кожною із змінних x,y,z окремо.

Нехай просторове тіло (область) G обмежене знизу і зверху поверхнями $z=z_1(x,y)$ і $z=z_2(x,y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Спроектувавши тіло G на площину Oxy, дістанемо область D. Нехай функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$ неперервні в області D (див. рис. 30.1).

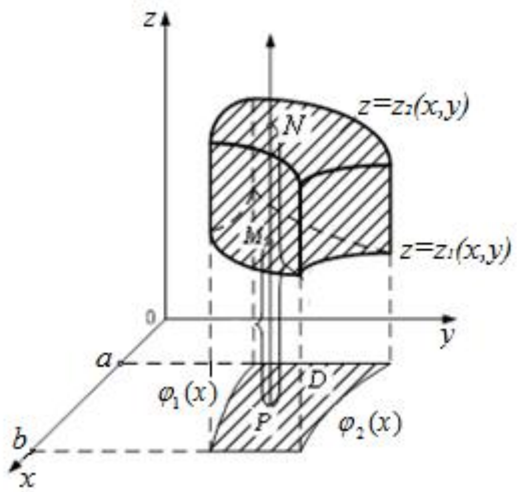


Рис. 30.1

Розглянута область G є правильною в напрямку осі Oz. Через кожну точку $P(x;y)\in D$ проведемо пряму паралельно осі Oz, яка перетинає поверхні $z=z_1(x,y)$ і $z=z_2(x,y)$ (межі області G) відповідно у точках M і N. Точку $M(x,y,z_1)$ назвемо *точкою входу* в область G, а точку $N(x,y,z_2)$ – *точкою виходу* з цієї області. Тоді для будь-якої неперервної в області G функції $f(x,y,z)$ можна застосувати формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\left(x,y,z\right)dz . \qquad (30.5)$$

Таким чином, для обчислення потрійного інтеграла потрібно спочатку обчислити внутрішній інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = I(x,y)$ за змінною z, вважаючи x і y сталими. Внаслідок інтегрування дістанемо функцію $I(x,y)$ від змінних x і y.

Нехай область D правильна в напрямку осі Oy і обмежена лініями $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$, де функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – неперервні на відрізку $[a;b]$.

Тоді область G визначається нерівностями:

$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b.$$

Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_D I(x,y)dxdy$, перейшовши до повторного. Дістанемо формулу обчислення потрійного інтеграла

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (30.6)$$

яка зводить потрійний інтеграл до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Порядок інтегрування у потрійному інтегралі може бути іншим, тобто інтеграли по змінних x,y,z у правій частині формули (30.6) можна міняти місцями. При цьому зовнішній інтеграл завжди має сталі межі інтегрування.

Зокрема, якщо область G правильна в напрямку осі Ox і проектується на площину Oyz, то вона визначається нерівностями

$$G=\left\{x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z),\quad \varphi_1(y) \le z \le \varphi_2(y),\quad c \le y \le d\right\}.$$

Тоді потрійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx.$$

Якщо областю інтегрування є паралелепіпед

$$G=\left\{a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ m \le z \le n\right\},$$

то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz. \qquad (30.7)$$

У цьому випадку інтегрувати можна в будь-якому порядку, оскільки область G правильна у напрямку кожної з координатних осей Ox, Oy, Oz.

Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних та сферичних координатах

При обчисленні потрійних інтегралів у деяких випадках виникає потреба зробити заміну змінних. Нехай функція $f(x,y,z)$ – неперервна в обмеженій замкненій області G, яка взаємно однозначно відображається на область G^* за допомогою функцій $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, неперервних зі своїми частинними похідними, причому в області G^* якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді заміну змінних в потрійному інтегралі виконують за формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\cdot |J|\, du\, dv\, dw.$$

Найчастіше при обчисленні потрійних інтегралів використовують циліндричні та сферичні координати.

При переході від прямокутних координат x, y, z до циліндричних ρ, φ, z (див. рис. 30.2а), пов’язаних з x, y, z співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z,$$

$$0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ -\infty < z < +\infty,$$

якобіан переходу до циліндричних координат має вигляд

$$J = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

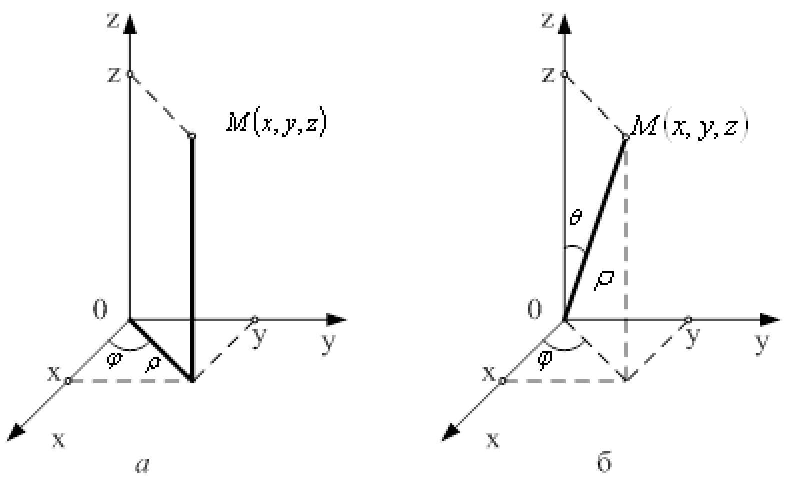


Рис. 30.2

Тоді *перехід до циліндричних координат* у потрійному інтегралі здійснюється за формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, x)\rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz\,. \qquad (30.8)$$

При переході від прямокутних координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ (див. рис. 30.2б), пов'язаних з x, y, z співвідношеннями

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = \rho\cos\theta,$$
$$0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi,$$

якобіан переходу до сферичних координат має вигляд

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta\,.$$

Тоді *перехід до сферичних координат* у потрійному інтегралі здійснюється за формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho\,. \quad (30.9)$$

При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних або сферичних координатах межі інтегрування знаходять із області G, користуючись геометричним змістом нових координат. При цьому рівняння поверхонь $z_1(x, y)$ та $z_2(x, y)$, які обмежують область G, записують у нових координатах.

Питання про доцільність переходу у потрійному інтегралі до нових координат залежить і від області інтегрування, і від підінтегральної функції. Зокрема, якщо область G обмежена циліндричною або конічною поверхнею, або підінтегральна функція f містить вираз $x^2 + y^2$, то потрійний інтеграл по цій області обчислюють за допомогою циліндричних координат. У випадку, коли область G обмежена сферою або її частиною, або підінтегральна функція f містить вираз $x^2 + y^2 + z^2$, то потрійний інтеграл обчислюють, перейшовши до сферичних координат.

Нехай область G обмежена циліндром $x^2 + y^2 = r^2$, рівняння якого у циліндричних координатах має вигляд $\rho = r$, та площинами $z = a, z = b,\ a < b$. Тоді всі межі інтегрування в циліндричній системі координат є сталими і не залежать від порядку інтегрування, тобто

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^r \rho d\rho \int\limits_a^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz\,.$$

Якщо G – куля, обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=R^2$, рівняння якої у сферичних координатах має вигляд

$$\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta = R^2 \quad \Rightarrow$$

$$\rho^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \rho^2\cos^2\theta = R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = R.$$

Тоді потрійний інтеграл у сферичній системі координат має сталі межі інтегрування, причому

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho \cdot$$

Застосування потрійного інтеграла

Розглянемо *геометричні та фізичні застосування* потрійного інтеграла.

I. Обчислення об’єму тіла. Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G у просторі, то його об’єм обчислюють за формулою

$$V = \iiint\limits_G dxdydz\,. \tag{30.10}$$

II. Обчислення маси тіла. Нехай G є просторовим тілом з густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ в кожній його точці, тоді масу цього тіла визначають за формулою

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz\,. \tag{30.11}$$

III. Обчислення статичних моментів тіла. Статичні моменти тіла G з густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ відносно координатних площин *Oxy, Oxz, Oyz* обчислюють відповідно за формулами

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,\ M_{xz} = \iiint\limits_G y\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_G x\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

IV. Обчислення центра маси тіла.

Координати центра маси $(x_c; y_c; z_c)$ тіла G з густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ обчислюють за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz},$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_G z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz}.$$

V. Обчислення моментів інерції тіла. Моменти інерції тіла з густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ відносно координатних площин *Oxy, Oxz, Oyz* обчислюють відповідно за формулами

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2 \cdot \gamma(x,y,z)dxdydz,\ I_{xz} = \iiint\limits_G y^2 \cdot \gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_G x^2 \cdot \gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Моменти інерції тіла *G* з густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ відносно координатних осей *Ox, Oy, Oz* відповідно дорівнюють

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz,\ I_y = \iiint\limits_G (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_G (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

а момент інерції тіла відносно початку координат дорівнює

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz$, де область $G = \{(x;y;z) |\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$.

Розв’язання. Областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед (див. рис. 30.3). Тоді за формулою (30.7) дістанемо

$$\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x+y+z)dz = \int_0^1 dx \int_0^2 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^3 dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3x + 3y + \frac{9}{2} \right) dy = \int_0^1 \left(3xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{2}y \right) \Bigg|_0^2 dx = \int_0^1 (6x+6+9)dx =$$

$$= \int_0^1 (6x+15)dx = \left(3x^2+15x\right)\Big|_0^1 = 3+15 = 18.$$

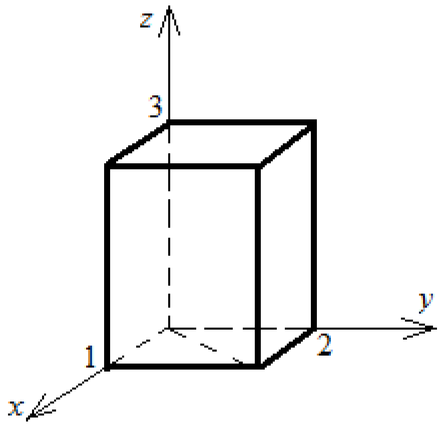


Рис. 30.3

Приклад 2. Обчисліть $\iiint\limits_G xdxdydz$, якщо область G обмежена координатними площинами $x=0, y=0, z=0$ і площинами $y=3, x+z=2$.

Розв'язання. Побудуємо область G, обмежену заданими площинами (див. рис. 30.4).

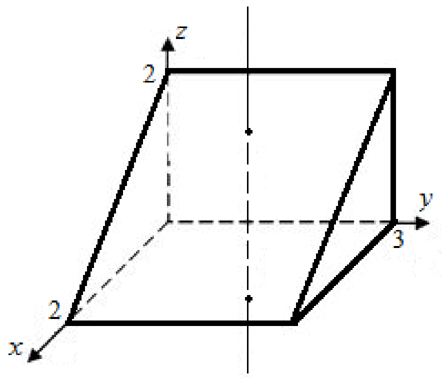


Рис. 30.4

Область G проектується на площину Oxy в прямокутник $D=\{0\le x\le 2; 0\le y\le 3\}$. Будь-яка пряма, паралельна осі Ox, заходить в область через площину $z=0$, а виходить через площину $z=2-x$, тому

$$\iiint\limits_G xdxdydz=\int_0^2 dx\int_0^3 dy\int_0^{2-x} xdz=\int_0^2 xdx\int_0^3 dy\left(z\Big|_0^{2-x}\right)=\int_0^2 x(2-x)dx\int_0^3 dy=$$

$$=\int_0^2 x(2-x)dx\left(y\Big|_0^3\right)=3\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=3\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=3\left(4-\frac{8}{3}\right)=4.$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x-y)dxdydz$, де тіло G обмежене поверхнями: $y=x^2,\ x+y+z-2=0,\ y=1,\ z=0$.

Розв'язання. Маємо циліндричне тіло G обмежене зверху площиною $z=2-x-y$, знизу площиною $z=0$, а збоку – параболічним циліндром $y=x^2$ і площиною $y=1$ (див. рис. 30.5), тому $G=\left\{-1\le x\le 1,\, x^2\le y\le 1,\, 0\le z\le 2-x-y\right\}$.

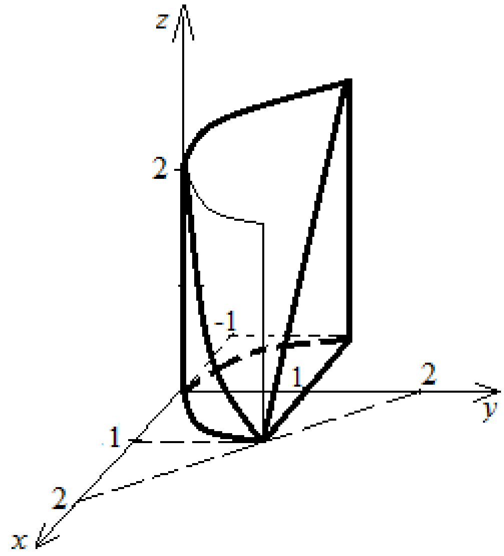


Рис. 30.5.

Обчислимо потрійний інтеграл, користуючись формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\,.$$

Дістанемо

$$\iiint\limits_G (x-y)dxdydz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_0^{2-x-y}(x-y)dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(x-y)z\Big|_0^{2-x-y}dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(2x-2y-x^2+y^2)dy==\int\limits_{-1}^{1}\left(2xy-y^2-x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(2x-\frac{2}{3}-x^2-2x^3+2x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{2}{5}x^5-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{136}{105}.$$

Приклад 4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

Розв'язання. Оскільки тіло G обмежене поверхнею $x^2+y^2=z^2$, яка зверху зрізана площиною $z=1$, то розглядаємо верхню частину конічної поверхні, рівняння якої має вигляд $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Перетином поверхні та площини є коло $x^2+y^2=1$, тому проекцією D тіла на площину Oxy є круг $x^2+y^2\le 1$ (див. рис. 30.6).

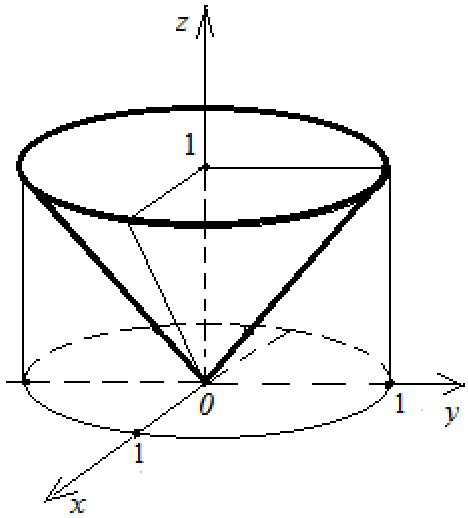


Рис. 30.6.

Перейдемо до циліндричних координат (ρ,φ,z) у потрійному інтегралі. Враховуючи, що $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$, скористаємось формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,x)\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)dz.$$

Оскільки в циліндричній системі координат $x^2+y^2=\rho^2$, то рівняння конуса і кола матимуть вигляд $z=\rho$ і $\rho=1$. Тоді область інтегрування $G^*=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ \rho\le z\le 1\}$. Обчислимо потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\iiint\limits_{G^*} z\sqrt{\rho^2}\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2 d\rho\int\limits_\rho^1 zdz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\left.\frac{z^2}{2}\right|_\rho^1 d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho^2-\rho^4)d\rho=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\left.\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right)\right|_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\pi}{15}.$$

Приклад 5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де область G обмежена поверхнею $x^2+y^2+z^2=2z$.

Розв'язання. Оскільки рівняння $x^2+y^2+z^2=2z$ визначає сферу $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, то областю інтегрування G є куля з центром у точці $C(0;0;1)$ і радіусом $R=1$ (див. рис. 30.7).

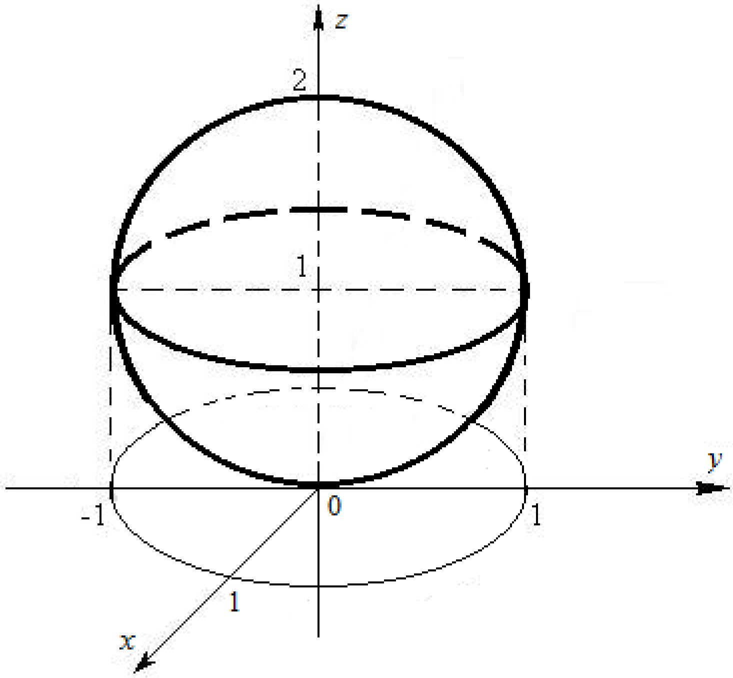


Рис. 30.7.

Перейдемо до сферичних координат (ρ,φ,θ) Враховуючи, що $x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta$, скористаємось формулою

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{G^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho .$$

Оскільки

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=$$

$$=\rho^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2,$$

то рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=2z$ матиме вигляд $\rho^2=2\rho\cos\theta$, тобто $\rho=2\cos\theta$. Тоді область інтегрування визначається нерівностями $G^*=\left\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2\cos\theta\right\}$. Обчислимо потрійний інтеграл, перейшовши до сферичних координат,

$$\iiint_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\iiint_{G^*}\rho\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\cos\theta}\right)d\theta=$$

$$=4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta d\theta=-4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d(\cos\theta)=-4\varphi\Big|_0^{2\pi}\left.\frac{\cos^5\theta}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\pi}{5}.$$

Приклад 6. Знайти об'єм тіла, обмеженого площинами $x+y+z=4$, $2x+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання. Побудуємо задане тіло (див. рис. 30.8) і знайдемо його об'єм за допомогою потрійного інтеграла, для чого визначимо межі інтегрування.

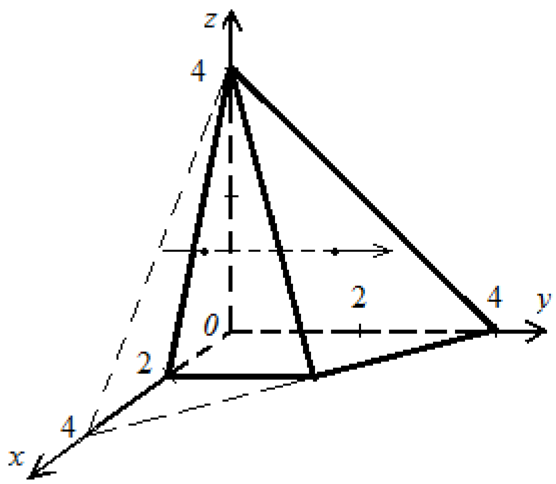


Рис. 30.8

Можна помітити, що краще спроектувати тіло на площину Oxz, при цьому дістанемо трикутник, обмежений прямими $x=0, z=0,\ 2x+z=4$. Тоді $G=\{0\le x\le 2,\ 0\le z\le 4-2x,\ 0\le y\le 4-x-z\}$, тобто внутрішній інтеграл візьмемо за змінною z. Обчислимо об'єм тіла

$$V=\iiint\limits_G dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}dz\int\limits_0^{4-x-z}dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}\left(y\Big|_0^{4-x-z}\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x}(4-x-z)dz=\int\limits_0^2\left((4-x)z-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{4-2x}dx=\int\limits_0^2\left((4-x)(4-2x)-\frac{(4-2x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(16-4x-8x+2x^2-8+8x-2x^2\right)dx==\left(8x-2x^2\right)\Big|_0^2=16-8=8.$$

Приклад 7. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z=x^2+y^2$, площиною $x+y=1$ та координатними площинами.

Розв'язання. Задане тіло обмежене параболоїдом обертання з віссю Oz, площиною $x+y=1$, паралельною осі Oz, та координатними площинами. Таким чином, тіло розміщене між параболоїдом та площинами $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ і $z=0$ (див. рис. 30.9). Проекцією тіла на площину Oxy є трикутник, обмежений осями і прямою $y=1-x$ (область D). Отже, тіло визначається нерівностями

$$G=\left\{(x,y,z):0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le x^2+y^2\right\}.$$

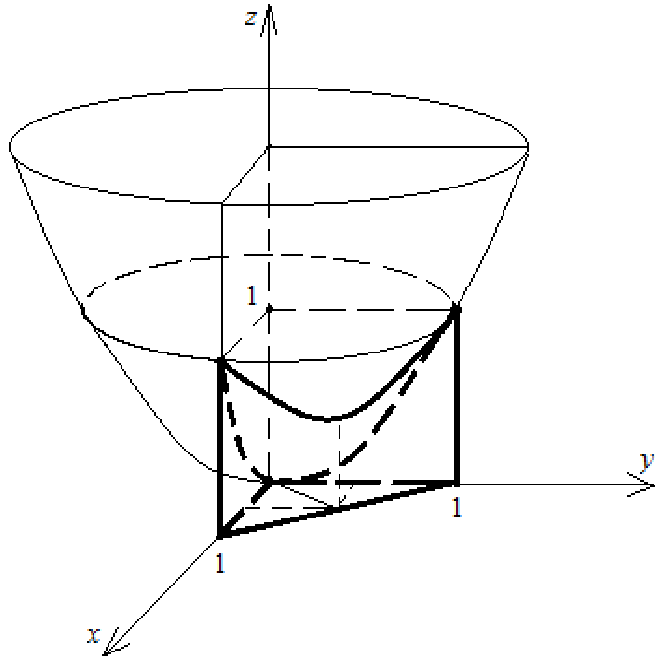


Рис. 30.9

Для обчислення об’єму тіла застосуємо формулу $V = \iiint\limits_G dxdydz$, дістанемо

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(z \Big|_0^{x^2+y^2} \right) dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2+y^2) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Bigg|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 (1-x) + \frac{1}{3} (1-x)^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \left(3x^2 - 3x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \right) dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \left(1 - 3x + 6x^2 - 4x^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2} x^2 + 2x^3 - x^4 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} + 2 - 1 \right) = \frac{1}{6}.$$

Приклад 8. Обчислити масу верхньої частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0$, якщо її густина $\gamma(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Розв’язання. Оскільки тіло є частиною кулі (див. рис. 30.10), то для обчислення маси знайдемо потрійний інтеграл, перейшовши до сферичних координат. Скористаємось формулою

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z) dxdydz = \iiint\limits_{G^*} \gamma \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \gamma \rho^2 d\rho.$$

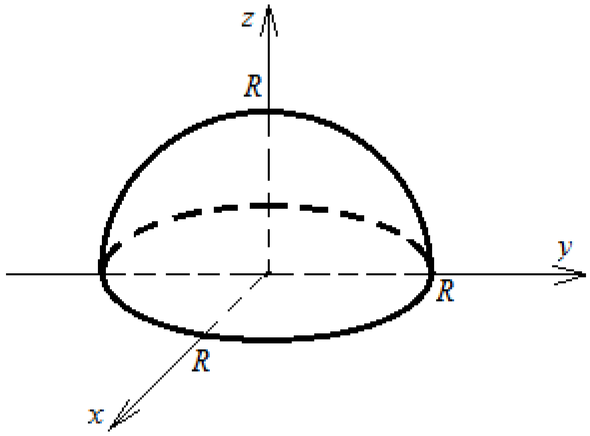


Рис. 30.10

Враховуючи, що $x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$, маємо $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, тому рівняння сфери, яка обмежує задане тіло, має вигляд $\rho = R$. Густина визначається функцією $\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{\rho\cos\theta}{\rho} = \cos\theta$.

Верхня півкуля визначається нерівностями $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le R$. Дістаємо

$$\iiint\limits_G \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz = \iiint\limits_{G^*} \cos\theta \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^R \right) =$$

$$= \frac{R^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d(\sin\theta) = \frac{R^3}{3} \varphi\Big|_0^{2\pi} \left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi R^3}{3}.$$

Приклад 9. Знайти координати центра маси тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$, якщо густина в кожній точці тіла дорівнює $\gamma(x, y, z) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Дане тіло обмежене конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і параболоїдом обертання $z = 2 - x^2 - y^2$. Визначимо лінію перетину цих поверхонь. Оскільки $z = 2 - (x^2 + y^2),\ \ z = 2 - z^2,\ \ z^2 + z - 2 = 0,\ \ z = 1\ (z \ne -2)$, то перетином даних поверхонь є коло $x^2 + y^2 = 1$, яке лежить у площині $z = 1$ (див. рис. 30.11).

Координати центра маси $(x_c; y_c; z_c)$ тіла обчислюють за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

де M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} – статичні моменти тіла відносно координатних площин.

Оскільки задане тіло симетричне відносно осей *Ox* і *Oy*, то $x_c = y_c = 0$. Визначимо $z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$, де маса і статичний момент тіла знайдемо за формулою

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z)dxdydz, \quad M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

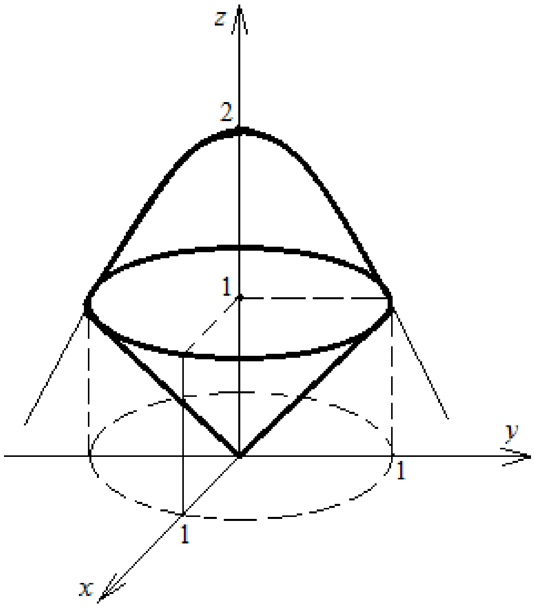


Рис. 30.11

Оскільки проекцією тіла на площину *Oxy* є круг, а підінтегральна функція містить вираз $x^2 + y^2$, то при обчисленні потрійних інтегралів доцільно перейти до циліндричних координат $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$. Тоді круг $x^2 + y^2 \le 1$ визначається нерівностями $0 \le \rho \le 1,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$. Рівняння поверхонь, які обмежують тіло, набувають вигляду $z = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \rho,$ $z = 2 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = 2 - \rho^2$, тому змінна z змінюється від поверхні $z = \rho$ до поверхні $z = 2 - \rho^2$. Отже, задане тіло визначається нерівностями $G^* = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1,\ \rho \le z \le 2 - \rho^2\right\}$, а його густина визначається функцією

$$\gamma(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^2} = \cos^2\varphi.$$

Масу тіла обчислимо, перейшовши до циліндричних координат, дістанемо

$$m=\iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz=\iiint_{G^*}\gamma(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^{2-\rho^2}dz=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho d\rho\cdot z\Big|_\rho^{2-\rho^2}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho)d\rho=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1(2\rho-\rho^3-\rho^2)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\cos^2\varphi d\varphi=\frac{5}{12}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{5}{24}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi=\frac{5}{24}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{5}{24}\cdot2\pi=\frac{5\pi}{12}.$$

Обчислимо статичний момент M_{xy} тіла

$$M_{xy}=\iiint_G z\gamma(x,y,z)dxdydz=\iiint_{G^*}z\gamma(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^{2-\rho^2}zdz=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho d\rho\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_\rho^{2-\rho^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho((2-\rho^2)^2-\rho^2)d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1(4\rho-5\rho^3+\rho^5)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\left(2\rho^2-\frac{5\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\right)\cos^2\varphi d\varphi=\frac{11}{24}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{11}{48}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi=\frac{11}{48}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{11}{48}\cdot2\pi=\frac{11\pi}{24}.$$

Тоді $z_c=\dfrac{M_{xy}}{m}=\dfrac{11\pi}{24}\cdot\dfrac{12}{5\pi}=\dfrac{11}{10}=1{,}1.$

Отже, центр маси тіла має координати $(0;\,0;\,1{,}1)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_G\left(x+y+z^2\right)dxdydz$, якщо область $G=\left\{\left(x;y;z\right):-1\le x\le0,\ 0\le y\le1,\ 2\le z\le3\right\}$.

2. Знайти потрійний інтеграл $\iiint_G\dfrac{dxdydz}{\left(1+x+y+z\right)^3}$, де область G обмежена поверхнями: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

3. Знайти потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (8y+12z)\,dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $x=1,\ y=x,\ z=3x^2+2y^2,\ y=0,\ z=0$.

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $x^2+y^2-z=1$ і площиною $z=0$.

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1,\ z=2-x-y$ при $z\ge 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x+y=2,\ z=x^2+y^2$ за умови $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

7. Знайти масу кулі $x^2+y^2+z^2\le 6z$ із заданою густиною $\gamma(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

§ 31. Криволінійні інтеграли першого і другого роду

Криволінійний інтеграл першого роду

Означення криволінійного інтеграла I роду та його властивості

Нехай на площині Oxy задано гладку криву $L=AB$, в усіх точках якої визначено неперервну функцію $z=f(x,y)$. Криву L довільно розіб'ємо на n елементарних дуг L_i завдовжки Δl_i, i=1, 2, ..., n; позначимо $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$ (див. рис. 31.1).

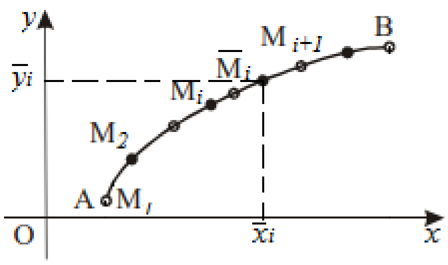


Рис. 31.1

На кожній кривій L_i виберемо довільну точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i;\bar{y}_i)$ і утворимо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\Delta l_i. \qquad (31.1)$$

Якщо існує границя від інтегральної суми (31.1) при $\lambda\to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої, ні від вибору точок $(\bar{x}_i;\bar{y}_i)$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом I роду* вздовж кривої L від функції $f(x,y)$ і позначається $\int\limits_L f(x,y)dl$.

Отже, за означенням

$$\int_L f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta l_i\,, \qquad (31.2)$$

де $f(x,y)$ – підінтегральна функція, dl – диференціал дуги кривої.

Якщо $L = AB$, то криволінійний інтеграл I роду позначають $\int_{AB} f(x,y)dl$.

Твердження. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в кожній точці кривої *AB*, то вона інтегрована вздовж цієї кривої, тобто існує криволінійний інтеграл першого роду $\int_{AB} f(x,y)dl$.

Розглянемо *властивості криволінійного інтеграла I роду*.

1. Значення криволінійного інтеграла першого роду не залежить від напряму руху вздовж кривої AB, тобто $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$.

2. Сталий множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла

$$\int_{AB} k\cdot f(x,y)dl = k\int_{AB} f(x,y)dl\,.$$

3. Криволінійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі криволінійних інтегралів від цих функцій:

$$\int_{AB} (f(x,y)+g(x,y))dl = \int_{AB} f(x,y)dl + \int_{AB} g(x,y)dl$$

4. Якщо криву AB розбити на дві дуги AC і CB, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{AC} f(x,y)dl + \int_{CB} f(x,y)dl\,.$$

5. Якщо функція $f(x,y)\ge 0$ вздовж кривої AB, то $\int_{AB} f(x,y)dl \ge 0$.

6. Якщо в кожній точці кривої AB виконується нерівність $f(x,y)\le g(x,y)$, то $\int_{AB} f(x,y)dl \le \int_{AB} g(x,y)dl$.

7. Якщо функція $f(x,y)=1$ кожній точці кривої, то $\int_L f(x,y)dl = \int_L dl = l$, тобто криволінійний інтеграл дорівнює довжині дуги кривої.

8. *Теорема про середнє.* Якщо функція $f(x,y)$ неперервна вздовж кривої L, то існує така точка $(x_0;y_0)\in L$, для якої виконується рівність

$$\int_L f(x,y)dl = f(x_0,y_0)\cdot l\,,$$

де l – довжина дуги кривої L.

Зауваження. Аналогічно розглядають поняття криволінійного інтеграла першого роду для функції $u = f(x, y, z)$, неперервної вздовж просторової кривої $L \in Oxyz$. У цьому випадку розглянуті властивості також виконуються.

Обчислення криволінійного інтеграла І роду

Обчислення криволінійного інтеграла І роду залежить від того, як задано криву L. При цьому використовують відповідні вирази для функції $f(x, y)$ і диференціала дуги кривої dl, що дозволяє перейти до обчислення визначеного інтеграла. Розглянемо основні випадки задання кривої L.

І. Нехай плоска крива L задана у вигляді функції $y = y(x)$, яка неперервна разом зі своєю похідною на $[a;b]$. У цьому випадку диференціал дуги кривої визначається так

$$dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

а підінтегральна функція набуває вигляду $f\left(x, y\right) = f\left(x, y(x)\right)$.

Тоді обчислення криволінійного інтеграла вздовж кривої $L = AB$ зводиться до обчислення визначеного інтеграла на відрізку $[a;b]$, який є проекцією AB на вісь Ox, тобто $A(a;\varphi(a)), B(b;\varphi(b))$. Маємо

$$\int\limits_{AB} f\left(x, y\right)dl = \int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (31.3)$$

Якщо криву AB задано функцією $x = x(y),\ y \in \left[c;d\right]$, то криволінійний інтеграл обчислюють так

$$\int\limits_{AB} f\left(x, y\right)dl = \int\limits_c^d f\left(x(y), y\right)\sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2}\,dy. \qquad (31.4)$$

ІІ. Нехай плоска крива AB задана параметрично $\begin{cases} x = x\left(t\right), \\ y = y\left(t\right), \end{cases}$ $t \in \left[\alpha, \beta\right]$, причому функції $x = x\left(t\right), y = y\left(t\right)$ – неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $\left[\alpha, \beta\right]$. Тоді диференціал дуги кривої визначається так

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$

а підінтегральна функція набуває вигляду $f\left(x, y\right) = f\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$.

Тоді криволінійний інтеграл обчислюють за формулою:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \qquad (31.5)$$

Аналогічно розглядають випадок, коли криву AB задано параметрично у просторі, тобто $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$. Тоді

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}, \quad f(x,y,z) = f(x(t), y(t), z(t)).$$

Тоді криволінійний інтеграл для функції $u = f(x,y,z)$, неперервної вздовж просторової кривої AB, обчислюють за формулою

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \qquad (31.6)$$

III. Нехай плоска крива AB задано в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, причому функція $\rho(\varphi)$ неперервна разом зі своєю похідною на $[\alpha, \beta]$. У цьому випадку маємо

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi, \quad f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Тоді криволінійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi. \qquad (31.7)$$

Застосування криволінійного інтеграла I роду

Розглянемо *геометричні та фізичні застосування* криволінійного інтеграла першого роду.

1. Довжина дуги кривої.

Довжина дуги кривої L обчислюється за формулою

$$l = \int_L dl.$$

Залежно від того, як задано криву, використовують відповідні формули для обчислення її довжини.

Якщо плоска крива задана функцією $y = y(x),\ x \in [a, b]$, то її довжина обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx. \qquad (31.8)$$

Якщо плоску криву задано в параметричному вигляді, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \qquad (31.9)$$

Для просторової кривої, заданої параметрично, маємо

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

У полярній системі координат довжина дуги кривої обчислюється так

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (31.10)$$

2. Площа циліндричної поверхні.

Розглянемо циліндричну поверхню, яка має напрямну – криву L, що лежить в площині Oxy, а твірна якої паралельна осі Oz (див. рис. 31.2).

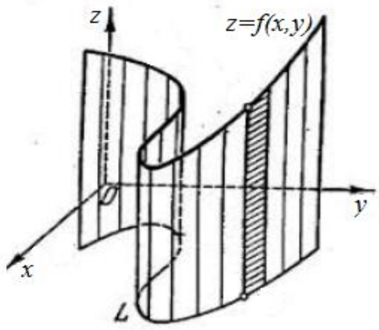


Рис. 31.2

Тоді площа цієї поверхні, зрізаної зверху поверхнею $z=f(x,y)$, визначається за формулою

$$S=\int_L f\left(x,y\right)dl.$$

3. Маса кривої.

Якщо $\gamma=\gamma\left(x,y\right)$ – густина плоскої кривої L, то маса кривої дорівнює

$$m=\int_L \gamma\left(x,y\right)dl.$$

Для просторової кривої маса визначається аналогічно

$$m=\int_L \gamma\left(x,y,z\right)dl.$$

Залежно від того, як задано криву L, використовують відповідні формули для обчислення її маси, а саме

$$m=\int_a^b \gamma(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$$

$$m=\int_{\alpha}^{\beta} \gamma(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt,$$

$$m=\int_{\alpha}^{\beta} \gamma(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

4. Статичні моменти.

Статичні моменти S_x, S_y кривої L відносно координатних осей Ox, Oy обчислюють за формулами

$$S_x=\int_L y\gamma\left(x,y\right)dl, \qquad S_y=\int_L x\gamma\left(x,y\right)dl.$$

5. Координати центра маси.

Координати центра маси $\left(x_0; y_0\right)$ плоскої кривої L визначають як відношення відповідних статичних моментів відносно осей до маси цієї кривої, тобто

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\gamma\left(x, y\right)dl, \qquad y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\gamma\left(x, y\right)dl.$$

Аналогічно обчислюють координати $\left(x_0; y_0; z_0\right)$ центра маси для просторової кривої

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\gamma\left(x, y, z\right)dl, \quad y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\gamma\left(x, y, z\right)dl, \quad z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\gamma\left(x, y, z\right)dl.$$

6. Моменти інерції.

Моменти інерції I_x, I_y кривої L відносно координатних осей Ox, Oy і момент інерції I_0 відносно початку координат визначають так

$$I_x = \int_L y^2\gamma\left(x, y\right)dl, \quad I_y = \int_L x^2\gamma\left(x, y\right)dl, \quad I_0 = \int_L \left(x^2 + y^2\right)\gamma\left(x, y\right)dl.$$

Криволінійний інтеграл другого роду

Означення криволінійного інтеграла II роду та його властивості

Нехай на площині Oxy задано гладку криву $L = AB$, в кожній точці якої визначено неперервні функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. Розіб'ємо криву точками $A = M_1, M_2, ..., M_n, B$ на n елементарних дуг $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ довжиною Δl_i, i=1,2, ..., n і позначимо $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Розглянемо $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – проекцію дуги $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ на вісь Ox, а $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – її проекцію на вісь Oy (див. рис. 31.3).

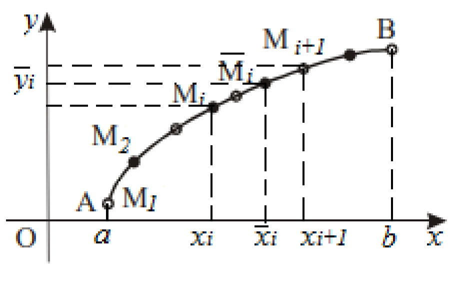


Рис. 31.3

На кожній дузі $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ виберемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i; \overline{y}_i)$ і утворимо інтегральну суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} P(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta y_i. \qquad (31.11)$$

Якщо існує границя від інтегральної суми (31.11) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої, ні від вибору точок $(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом II роду* вздовж кривої AB від функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$ і позначається

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (31.12)$$

Зауваження. Можна розглядати окремо *криволінійний інтеграл за координатою x* від функції $P(x,y)$ та *криволінійний інтеграл за координатою y* від функції $Q(x,y)$, тобто інтеграли $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ та $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$. Тоді *криволінійний інтеграл II роду загального вигляду* можна записати так

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$$

Твердження. Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – неперервні в кожній точці кривої AB, то існує криволінійний інтеграл другого роду (12).

Для зручності криволінійний інтеграл другого роду можна розглядати у вигляді $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$, вважаючи, що $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$.

Розглянемо *властивості криволінійного інтеграла другого роду*.

1. Криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак при зміні напряму руху вздовж кривої AB, тобто

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{AB} k(Pdx + Qdy) = k\int\limits_{AB} Pdx + Qdy.$$

3. Криволінійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі криволінійних інтегралів від цих функцій

$$\int\limits_{AB} (P_1 + P_2)dx + (Q_1 + Q_2)dy = \int\limits_{AB} P_1dx + Q_1dy + \int\limits_{AB} P_2dx + Q_2dy.$$

4. Якщо криву AB розбити на дві дуги AC і CB, то

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy$$

5. Якщо крива AB лежить у площині, перпендикулярній до осі Ox, то криволінійний інтеграл за координатою x дорівнює нулю, тобто $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = 0$. У випадку, коли крива лежить у площині, перпендикулярній до осі Oy, то $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = 0$.

6. Криволінійний інтеграл другого роду вздовж замкненої кривої L (по замкнутому контуру) не залежить від вибору початкової точки, а залежить тільки від напряму обходу кривої. Позначають такий інтеграл

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Отже, при обчисленні криволінійного інтеграла по замкнутому контуру за початкову точку можна взяти будь-яку точку кривої, а рух вздовж замкненої кривої здійснюють *проти годинникової стрілки*. При цьому область, яка лежить всередині контуру, залишається зліва від точки, що рухається по контуру. Такий напрям обходу кривої називають *додатним*.

Зауваження. Аналогічно розглядають поняття і властивості криволінійного інтеграла другого роду вздовж просторової кривої AB, при цьому функції $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ і $R = R(x,y,z)$ неперервні в кожній точці кривої. У цьому випадку криволінійний інтеграл має вигляд

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy + \int_{AB} Rdz.$$

Обчислення та застосування криволінійного інтеграла II роду

Обчислення криволінійного інтеграла II роду залежить від того, як задано криву L. Розглянемо основні випадки.

I. Нехай плоска крива AB задана параметрично $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. При цьому точки $A(x(\alpha), y(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta))$, а функції $x = x(t), y = y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[\alpha, \beta]$. Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні в кожній точці кривої AB, то криволінійний інтеграл другого роду дорівнює

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right) dt. \quad (31.13)$$

Аналогічно розглядають випадок, коли криву AB задано параметрично у просторі, тобто $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$. Якщо функції $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ і $R = R(x,y,z)$ неперервні в кожній точці кривої, то криволінійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta \left(Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t) \right) dt.$$

II. Нехай плоска крива AB задана в явному вигляді $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, причому $A(a;\varphi(a)), B(b;\varphi(b))$, а функція $y = \varphi(x)$ має неперервну похідну на відрізку $[a,b]$. Тоді криволінійний інтеграл вздовж кривої AB визначається так

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big)dx. \quad (31.14)$$

Розглянемо *застосування криволінійного інтеграла II роду*.

1. Площа плоскої фігури

Площу S площу плоскої фігури, розміщеної на площині Oxy і обмеженої замкненою кривою L, можна знайти за формулою

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx. \quad (31.15)$$

2. Робота змінної сили

Нехай матеріальна точка переміщується вздовж кривої $L = BC$ із точки B до точки C під дією змінної сили $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$. Тоді робота по переміщенню точки під дією сили визначається за формулою

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \quad (31.16)$$

Формула Гріна та її застосування

Розглянемо область D, розміщену на площині Oxy і обмежену замкненою кривою L. Нехай область D є однозв'язною, тобто для будь-якої замкненої кривої $\Gamma \subset D$ обмежена нею частина площини повністю належить області D. Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по області D та криволінійним інтегралом II роду по межі цієї області.

Теорема 1. Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладкою кривою L. Тоді криволінійний інтеграл вздовж межі L області D обчислюють за формулою

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \quad (31.17)$$

де обхід кривої L здійснюють в додатному напрямі (проти годинникової стрілки).

Рівність (31.17) називається *формулою Гріна (Остроградського – Гріна),* яка пов'язує криволінійний інтеграл другого роду по замкнутому контуру з подвійним інтегралом по області, яка обмежена цим контуром.

Умови незалежності криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування

Криволінійний інтеграл II роду вздовж кривої AB не залежить від шляху інтегрування, якщо він має однакові значення вздовж всіх кривих, які з'єднують початкову точку A і кінцеву точку B. У цьому випадку для обчислення інтеграла достатньо знати тільки точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

Розглянемо умови незалежності криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування.

Теорема 2. Для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежав від шляху інтегрування у замкненій однозв'язній області D, в якій функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, необхідно й достатньо, щоб в кожній точці цієї області виконувалась умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{31.18}$$

Наведемо інші умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування, еквівалентні рівності (31.18).

Твердження. Якщо за умов теореми 2 виконується рівність (31.18), то для будь-якого замкнутого кусково-гладкого контуру L, розміщеного в області D, справедлива рівність

$$\oint\limits_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{31.19}$$

Отже, при виконанні умови (19) криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування, якщо A і B – довільні точки області D.

Твердження. Якщо за умов теореми 2 виконується рівність (31.18), то в області D існує така функція $u = u(x, y)$, для якої вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є її повним диференціалом, тобто

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{31.20}$$

Таким чином, якщо виконується умова (31.18), і точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ належить області D, то виконується рівність

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} du(x, y) =$$

$$= u(x, y)\Big|_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1). \tag{31.21}$$

Формулу (21) називають *узагальненою формулою Ньютона – Лейбніца.*

Отже, криволінійний інтеграл II роду вздовж кривої AB не залежить від шляху інтегрування, якщо виконується одна із умов (31.18), (31.19) або (31.20). У цьому випадку криволінійний інтеграл можна записати у вигляді

$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тоді для його обчислення можна вибрати довільну криву, яка з'єднує точки $A(x_1;\, y_1)$ і $B(x_2;\, y_2)$ і лежить в області D. Криву AB зручно розглядати у вигляді ламаної, яка складається з двох відрізків, паралельних осям координат.

Зауваження. Функцію $u(x,y)$ з умови (31.20) можна знайти за формулою $u(x,y) = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C$, де інтеграл у правій частині береться вздовж довільної кривої AB, що належить області D і з'єднує будь-яку фіксовану точку $A(x_0, y_0)$ з точкою $B(x,y)$ (C – довільна стала).

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{x}{y} dl$, де L – дуга кривої $y = \sqrt{x}$ між точками $A(1;\ 1)$ та $B(4;\ 2)$.

Розв'язання. Оскільки крива L задана функцією $y = y(x)$, обчислимо даний інтеграл за формулою $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$.

Знайдемо диференціал дуги dl для кривої $y = \sqrt{x}$, маємо

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx.$$

Тоді заданий інтеграл

$$\int\limits_L \frac{x}{y} dl = \int\limits_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx = \int\limits_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{4x+1}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(4x+1\right)^{3/2}\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{(4x+1)^3}\Big|_1^4 = \frac{(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})}{12}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками A(0; –2) та B(4; 0).

Розв'язання. Для обчислення даного інтеграла застосуємо формулу $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$, дістанемо

$$\int_L \frac{dl}{x-y} = \int_0^4 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 \frac{dx}{\frac{1}{2}x+2} = \sqrt{5}\int_0^4 \frac{dx}{x+4} =$$

$$= \sqrt{5}\ln|x+4|\Big|_0^4 = \sqrt{5}(\ln 8 - \ln 4) = \sqrt{5}\ln 2.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, де L – відрізок прямої, яка сполучає точки $O(0;0)$ і $A(1;3)$.

Розв'язання. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), має вигляд $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Тоді для даної прямої OA рівняння $\frac{x}{1} = \frac{y}{3}$, або $y = 3x$. Звідси $y' = 3,\ dl = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{10}dx$. За формулою $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ маємо

$$\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{10}}} = \ln\left| x+\sqrt{x^2+\frac{1}{10}}\right|\Bigg|_0^1 =$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{\frac{11}{10}}\right) - \ln\frac{1}{\sqrt{10}} = \ln\frac{\sqrt{10}+\sqrt{11}}{\sqrt{10}} - \ln\frac{1}{\sqrt{10}} = \ln(\sqrt{10}+\sqrt{11}).$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \sqrt{2y}dl$, де L – дуга циклоїди $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо циклоїду (див. рис. 31.4) і застосуємо формулу $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2+y'(t))^2}dt$.

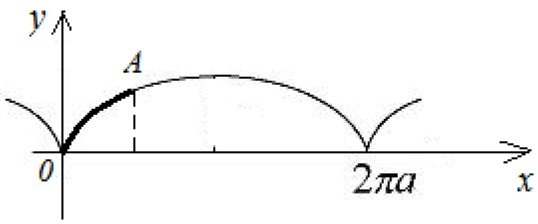


Рис. 31.4

Знайдемо похідні та диференціал дуги кривої: $x'_t = a(1-\cos t),\ y'_t = a\sin t$, $dl = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}dt.$ Тоді

$$\int_L \sqrt{2y}dl = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2a\left(1-\cos t\right)} \cdot a\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}dt = 2a\sqrt{a}\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos t\right)dt =$$

$$= 2a\sqrt{a}\left(t-\sin t\right)\Big|_0^{\pi/2} = a\sqrt{a}(\pi-2).$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$ між точками $A\left(-1;0\right)$ і $B\left(0;1\right)$ а) вздовж прямої *AB*; б) вздовж дуги астроїди $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$.

Розв'язання. а) Запишемо рівняння лінії інтегрування – прямої *AB*, яка проходить через задані точки

$$\frac{x+1}{0+1}=\frac{y-0}{1-0}, \qquad \frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{1}, \qquad y=x+1,$$

тоді $y'=1,\ dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{2}dx$.

Застосувавши формулу $\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, маємо

$$\int\limits_{AB}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl=\int\limits_{-1}^{0}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1}\right)\sqrt{2}dx=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{0}4x^{1/3}dx-3\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{0}\left(x+1\right)^{1/2}d\left(x+1\right)=3\sqrt{2}x^{4/3}\Big|_{-1}^{0}-2\sqrt{2}\left(x+1\right)^{3/2}\Big|_{-1}^{0}=-5\sqrt{2}.$$

б) Побудуємо астроїду $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ (див. рис. 31.5). Оскільки криву задано в параметричному вигляді, то для обчислення криволінійного інтеграла використаємо формулу $\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+y'(t))^2}dt$.

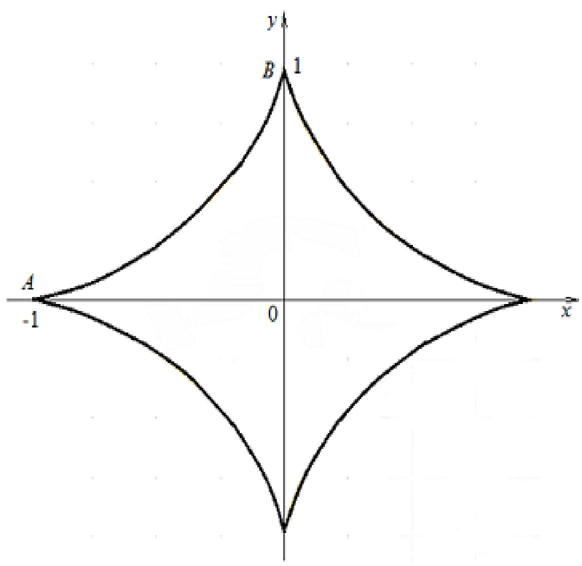


Рис. 31.5

Інтеграл розглядається вздовж дуги астроїди між точками $A(-1;0)$ і $B(0;1)$, тому $t\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$. Оскільки $x'(t)=-3\cos^2 t\sin t$, $y'(t)=3\sin^2 t\cos t$, то

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+y'(t))^2}dt=\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}=$$
$$=3\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}=3\left|\sin t\cos t\right|=-3\sin t\cos t.$$

Тоді даний інтеграл

$$\int\limits_{AB}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl=\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\left(4\sqrt[3]{\cos^3 t}-3\sqrt{\sin^3 t}\right)(-3\sin t\cos t)dt=$$
$$=-12\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\cos^2 t\sin t dt+9\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\sin^{\frac{5}{2}} t\cos t dt=12\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\cos^2 t d\left(\cos t\right)\ +9\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\sin^{\frac{5}{2}} t d\left(\sin t\right)=$$
$$=4\cos^3 t\Big|_{\pi}^{\pi/2}+\frac{18}{7}\sin^{\frac{7}{2}} t\Bigg|_{\pi}^{\pi/2}=4+\frac{18}{7}=\frac{46}{7}.$$

Приклад 6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x-y)dl$, де L – коло $x^2+y^2=2x$.

Розв'язання. Побудуємо коло, записавши його рівняння у вигляді $(x-1)^2+y^2=1$ (див. рис. 31.6).

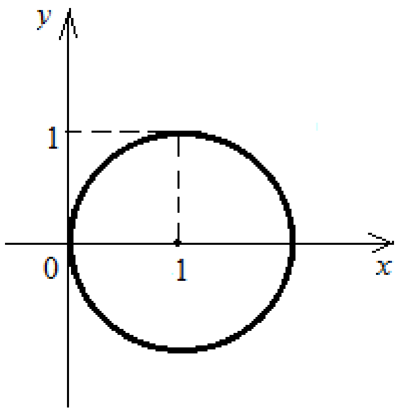


Рис. 31.6

Для обчислення криволінійного інтеграла зручніше перейти до полярних координат. Оскільки $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$, то рівняння кола набуває вигляду $\rho=2\cos\varphi$, де $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$. Застосуємо формулу

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Оскільки $\rho=2\cos\varphi$, то $\rho'=-2\sin\varphi$, то

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi=\sqrt{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}d\varphi=2d\varphi.$$

Враховуючи, що $x=2\cos\varphi\cos\varphi=2\cos^2\varphi,\quad y=2\cos\varphi\sin\varphi$, маємо

$$\int_L (x-y)dl=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin\varphi\right)\cdot 2d\varphi=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\ d\varphi+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\ d\left(\cos\varphi\right)=$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2\varphi\right)\ d\varphi+4\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi.$$

Приклад 7. Знайти масу кривої L: $y=1-x^2,\ 0\le x\le 3/2$, якщо густина в кожній точці цієї кривої дорівнює $\gamma(x,y)=x$.

Розв'язання. Оскільки криву задано в явному вигляді $y=y(x)$, то масу кривої знайдемо за формулою

$$m=\int_L \gamma\left(x,y\right)dl=\int_a^b \gamma(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

За умовою $0\le x\le 3/2$, $y=1-x^2$, тому $y'=-2x$. Дістаємо

$$m=\int_0^{3/2} x\sqrt{1+(-2x)^2}dx=\int_0^{3/2} x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^{3/2}(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)=$$

$$=\frac{2(1+4x^2)^{3/2}}{8\cdot 3}\Bigg|_0^{3/2}=\frac{\sqrt{(1+4x^2)^3}}{12}\Bigg|_0^{3/2}=\frac{10\sqrt{10}-1}{12}.$$

Приклад 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_{\mathrm{L}}\left(8x+4y\right)dx+(8y+2)dy$, де L – відрізок прямої між точками O(0; 0) і A(3; 6).

Розв'язання. Знаходимо рівняння прямої, що проходить через дві точки O(0; 0) і A(3; 6), дістанемо $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{6}$, тобто $y=2x$, $y'=2$, $x\in[0;3]$ Тоді за формулою

$$\int_{AB} P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=\int_a^b\left(P\left(x,y(x)\right)+Q\left(x,y(x)\right)y'(x)\right)dx$$

дістанемо

$$\int_{\mathrm{L}}\left(8x+4y\right)dx+(8y+2)dy=\int_0^3\left((8x+4\cdot 2x)+(8\cdot 2x+2)\cdot 2\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(48x+4\right)dx=(24x^2+4x)\Big|_0^3=24\cdot 9+12=228.$$

Приклад 9. Знайти криволінійний інтеграл $\int_L y\left(x-y\right)dx+xdy$, де L – дуга параболи $y=2x^2$, яка обмежена точками A(0;0) та B(1;2).

Розв'язання. Оскільки $y = 2x^2,\ dy = 4xdx,\ 0 \le x \le 1,$, то криволінійний інтеграл другого роду обчислимо за формулою

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big)dx,$$

дістанемо

$$\int\limits_{\mathrm{L}} y(x-y)dx + xdy = \int\limits_0^1 \Big(2x^2\left(x-2x^2\right) + x\cdot 4x\Big)dx = \int\limits_0^1 \left(2x^3 - 4x^4 + 4x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{2} - 4\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{31}{30}.$$

Приклад 10. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x+y)dx - xdy$ вздовж ламаної OAB, де $O(0;0),\ A(2;0)$ і $B(4;2)$.

Розв'язання. Вздовж ламаної OAB на ділянці OA маємо $y=0$ і $dy=0$, а на ділянці AB: $y = x-2,\ dy = dx$. Тому

$$\int\limits_L (x+y)dx - xdy = \int\limits_{OA} (x+y)dx - xdy + \int\limits_{AB} (x+y)dx - xdy =$$

$$= \int\limits_0^2 xdx + \int\limits_2^4 (x+x-2-x)dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^4 = 2+2 = 4.$$

Приклад 11. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydx + (x+y)dy$, якщо лінія L визначає

а) відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0;0)$ і $A(1;1)$;

б) дугу параболи $y = x^2$, що з'єднує точки $O(0;0)$ і $A(1;1)$;

в) ламану OBA, де $B(1;0)$.

Розв'язання. Обчислимо даний криволінійний інтеграл другого роду залежно від того, якою є лінія інтегрування (див. рис. 31.7).

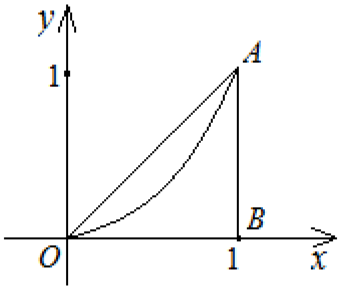


Рис. 31.7

а) Рівняння прямої, що з'єднує точки $O(0;0)$ і $A(1;1)$, має вигляд $y = x$, тому $dy = dx$. Дістаємо

$$\int_L xydx+(x+y)dy=\int_0^1(x^2+2x)\ dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}.$$

б) Крива інтегрування є параболою $y=x^2$, тоді $dy=2xdx$. Маємо

$$\int_L xydx+(x+y)dy=\int_0^1(x^3+(x+x^2)2x)dx=\frac{17}{12}.$$

в) Лінія інтегрування є ламаною, яку розіб'ємо на дві ділянки. На ділянці OB маємо $y=0$ і $dy=0$, а на ділянці BA маємо $x=1$ і $dx=0$. Тому

$$\int_L xydx+(x+y)dy=\int_{OB}0\cdot dx+\int_{BA}(1+y)dy=\int_0^1(1+y)dy=\frac{(1+y)^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}.$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int_L(x+y)dx+(x-y)dy$, де L – частина кола $x^2+y^2=4$, що лежить у I чверті.

Розв'язання. Запишемо параметричне рівняння даного кола: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, причому $0\le t\le\pi/2$. Обчислимо інтеграл, скориставшись формулою

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\big)dt.$$

Враховуючи, що $x'(t)=-2\sin t$, $y'(t)=2\cos t$, дістаємо

$$\int_0^{\pi/2}\big((2\cos t+2\sin t)(-2\sin t)+(2\cos t-2\sin t)2\cos t\big)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(-4\sin^2 t-8\sin t\cos t+4\cos^2 t\right)dt=\int_0^{\pi/2}\left(4\cos 2t-4\sin 2t\right)dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\cos 2tdt-4\int_0^{\pi/2}\sin 2tdt=2\int_0^{\pi/2}\cos 2td(2t)-2\int_0^{\pi/2}\sin 2td(2t)=$$

$$=2\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}+2\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=-4.$$

Приклад 13. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L xdy-ydx$, де L – дуга циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ від точки $A(2\pi a;0)$ до точки $B(0;0)$.

Розв'язання. Рівняння циклоїди задано в параметричному вигляді, причому точці $A(2\pi a;0)$ відповідає значення параметра $t=2\pi$, а точці $B(0;0)$ – значення $t=0$ (див. рис. 31.8).

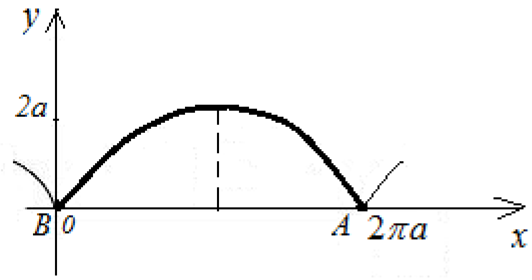


Рис. 31.8

Оскільки $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$, то за формулою

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\big)dt$$

маємо

$$\int\limits_L xdy-ydx=\int\limits_{2\pi}^{0}\left(a^2(t-\sin t)\sin t-a^2(1-\cos t)^2\right)dt=$$

$$=a^2\int\limits_{2\pi}^{0}\left(t\sin t-\sin^2 t-1+2\cos t-\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\left(\int\limits_{2\pi}^{0}t\sin t dt-2\int\limits_{2\pi}^{0}(1-\cos t)\right)dt=\begin{vmatrix} u=t,\ du=dt, \\ dv=\sin t dt, \\ v=\int\sin t dt=-\cos t\end{vmatrix}=$$

$$=a^2\left((-t\cos t)\Big|_{2\pi}^{0}+\int\limits_{2\pi}^{0}\cos t dt-2(t-\sin t)\Big|_{2\pi}^{0}\right)=a^2\left(2\pi+\sin t\Big|_{2\pi}^{0}+2\cdot 2\pi\right)=6a^2\pi.$$

Приклад 14. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L x^2dx+2xydy$, де L – коло $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

Розв'язання. Заданий криволінійний інтеграл береться по замкненому контуру L Запишемо рівняння кола в параметричному вигляді. Оскільки $(x-1)^2+(y-2)^2=R^2$, то $x-1=R\cos t$, $y-2=R\sin t$, звідки дістаємо

$$x=1+\cos t,\ y=2+\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$$

Враховуючи, що $x'(t)=-\sin t$, $y'(t)=\cos t$, скористаємось формулою

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\big)dt,$$

дістанемо

$$\oint\limits_L x^2dx+2xydy=\int\limits_0^{2\pi}\Big((1+\cos t)^2(-\sin t)+2(1+\cos t)(2+\sin t)\cos t\Big)dt=$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t - 2\cos t \sin t - \cos^2 t \sin t + 4\cos t + 4\cos^2 t + 2\sin t \cos t + 2\cos^2 t \sin t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t + 4\cos t + 4\cos^2 t + \cos^2 t \sin t\right)dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin t dt + 4\int_0^{2\pi} \cos t dt + 2\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t d(\cos t) =$$

$$= \cos t \Big|_0^{2\pi} + 4\sin t \Big|_0^{2\pi} + 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi} = 2\cdot 2\pi = 4\pi .$$

Приклад 15. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t,$ $y = b\sin t.$

Розв'язання. Знайдемо площу фігури за формулою (31.15). Оскільки $x_t' = -a\sin t,\ y_t' = b\cos t$, то

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t\right)dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Приклад 16. Визначити роботу, яку виконує сила $\overrightarrow{F} = \left(x+2y\right)\vec{i} + \left(x^2+y\right)\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж дуги кривої $y = x^2 + 3x$ точки (0;0) до точки (1;4).

Розв'язання. Робота по переміщенню тіла визначається за формулою (31.16). Оскільки $y = x^2 + 3x,\ dy = (2x+3)dx,\ 0 \le x \le 1,$ то

$$A = \int_L \left(x+2y\right)dx + \left(x^2+y\right)dy = \int_0^1 \left((x + 2x^2 + 6x) + (x^2 + x^2 + 3x)(2x+3)\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(4x^3 + 14x^2 + 16x\right)dx = \left(x^4 + \frac{14x^3}{3} + 8x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{41}{3}.$$

Приклад 17. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L \left(1-x^2\right)ydx + \left(1+y^2\right)xdy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2.$

Розв'язання. Оскільки криволінійний інтеграл береться по замкненому контуру L, то можна скористатись формулою Гріна

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy .$$

Оскільки $P(x,y)=(1-x^2)y,\ Q(x,y)=(1+y^2)x,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+y^2,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=1-x^2,$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$, то

$$\oint\limits_{L}\left(1-x^2\right)ydx+\left(1+y^2\right)xdy=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

де область D – круг, обмежений колом L: $x^2+y^2=R^2$.

У подвійному інтегралі перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, дістанемо

$$\oint\limits_{L}\left(1-x^2\right)ydx+\left(1+y^2\right)xdy=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\rho^3d\rho=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB}\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy$ від точки $A(2;3)$ до точки $B(3;4)$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умови $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Оскільки

$$P=6xy^2+4x^3,\ Q=6x^2y+3y^2,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=12xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy,$$

то даний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(2;3)$ та $B(3;4)$. Маємо $\dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y-3}{4-3}$, $y=x+1,\ dy=dx$. Тоді

$$\int\limits_{AB}\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy=\int\limits_2^3\left(6x\left(x+1\right)^2+4x^36x^2\left(x+1\right)+3\left(x+1\right)^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_2^3\left(16x^3+21x^2+12x+3\right)dx=426.$$

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;2)}\left(x^2+3xy\right)dx+\left(\dfrac{3}{2}x^2+y\right)dy$.

Розв'язання. Для функцій $P=x^2+3xy,\ Q=\dfrac{3}{2}x^2+y$ знаходимо частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x$. Оскільки виконується рівність $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Для зручності розглянемо ламану OAB, яка з'єднує точки $O(0;0)$ і $B(1;2)$, причому точку $A(1;0)$ вибираємо так, щоб ділянки були паралельні осям. Тоді на ділянці $OA\colon y=0, dy=0, 0\le x\le 1$, а на ділянці $AB: x=1, dx=0, 0\le y\le 2$. Отже,

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;2)}\left(x^2+3xy\right)dx+\left(\frac{3}{2}x^2+y\right)dy=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}=\int\limits_0^1(x^2+3x\cdot 0)dx+\int\limits_0^2(\frac{3}{2}\cdot 1^2+y)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_0^2(\frac{3}{2}+y)dy=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+\left(\frac{3}{2}y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{3}+3+2=\frac{16}{3}.$$

Приклад 20. Переконатись, що вираз $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

Розв'язання. Для того, щоб заданий вираз був повним диференціалом $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ деякої функції $u(x,y)$, повинна виконуватись рівність $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. З умови випливає, що функції $P(x,y)=x^2+2xy-y^2$, $Q(x,y)=x^2-2xy-y^2$, тому $\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y$. Оскільки вказана рівність виконується, то існує така функція $u(x,y)$, для якої $du=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$.

Функцію визначимо за формулою $u(x,y)=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C$. Інтеграл в правій частині обчислимо вздовж кривої L, яка з'єднує точку $A(0,0)$ з точкою $B(x,y)$. Для зручності розглянемо ламану $L=L_1\cup L_2$, яка складається з двох відрізків, паралельних осям координат. На відрізку L_1 маємо $y=0$, тому $dy=0$; а на відрізку L_2 маємо $x=const$, тому $dx=0$. Таким чином,

$$u(x,y)=\int\limits_{L_1}P(x,0)dx+\int\limits_{L_2}Q(x,y)dy+C=\int\limits_0^x x^2dx+\int\limits_0^y(x^2-2xy-y^2)dy+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

а) $\int\limits_L\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L – відрізок прямої від точки $A\left(0;-2\right)$ до точки $B(4;0)$;

б) $\int\limits_L xydl$, де L – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\ge 0, y\ge 0)$.

2. Знайти довжину дуги кривої $y=1-\ln\cos x, 0\le x\le \pi/4$.

3. Знайти масу дуги кривої $x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le \pi/2$, якщо задана густина $\gamma(x,y)=y$.

4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

а) $\int\limits_{L}\left(x+y^2\right)dx+ydy$, де L – відрізок прямої $y=x-1$ від точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(-1;\ -2)$;

б) $\oint\limits_{L} xdy$, де L – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $3x+2y-6=0$;

в) $\int\limits_{(1;1)}^{(2;3)}(x+3y)dx+(3x+y)dy$.

5. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $y=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$.

6. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=(2xy+y)\vec{i}+(3x^2-1)\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки із положення $B(1;4)$ в точку $C(2;\ 14)$ вздовж дуги параболи $y=3x^2+x$.

Контрольні запитання

1. Дайте означення подвійного інтеграла, сформулюйте його властивості.
2. Як обчислюється подвійний інтеграл в декартових координатах?
3. Наведіть формулу переходу до полярних координат в подвійному інтегралі. У яких випадках її використовують?
4. Як застосовується подвійний інтеграл?
5. Дайте означення потрійного інтеграла, сформулюйте його властивості.
6. Як обчислюється потрійний інтеграл в декартових координатах?
7. У яких випадках потрійний інтеграл обчислюють у циліндричних та сферичних координатах? Наведіть відповідні формули.
8. Дайте означення криволінійного інтеграла I роду.
9. Як обчислюють криволінійний інтеграл I роду залежно від способу задання кривої?
10. Наведіть приклади застосування криволінійного інтеграла I роду.
11. Дайте означення криволінійного інтеграла II роду.
12. Як обчислюють криволінійний інтеграл II роду?
13. Яка формула встановлює звя’зок між криволінійним інтегралом II роду по замкненому контуру та подвійним інтегралом по області?
14. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування.
15. Наведіть приклади застосування криволінійного інтеграла II роду.

Розділ IX. Ряди

§ 32. Числові ряди. Знакододатні ряди

Нехай задано деяку нескінченну послідовність

$$u_1, u_1, u_3, ..., u_n, ... \qquad (32.1)$$

Вираз вигляду

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (32.2)$$

називається *рядом.* Члени послідовності (32.1) називаються *членами ряду.* При цьому u_n називають *загальним* або *n-м членом ряду.*

Якщо члени ряду $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ є числами, то ряд називається *числовим.* Якщо ж члени ряду – функції, то ряд називається *функціональним.*

Сума n перших членів ряду називається *n-ю частковою сумою ряду.* Розглянемо послідовність часткових сум ряду (32.2)

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, \dots$$

Сумою S числового ряду (32.2) називається границя n-ї часткової суми ряду при $n \to \infty$, якщо ця границя існує, тобто

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \qquad (32.3)$$

Якщо границя n-ї часткової суми ряду скінчена, то ряд називається *збіжним.* В цьому випадку говорять, що ряд збігається, а S – його сума, тобто

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Якщо границя $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ або не існує, ряд називається *розбіжним.*

Розглянемо деякі *властивості збіжних рядів*, які дають змогу оперувати з цими рядами як із скінченими сумами.

1. Якщо ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається і його сума дорівнює S, то ряд $Cu_1 + Cu_2 + ... + Cu_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ $(C = const)$ також збігається, і його сума дорівнює $C \cdot S$.

2. Збіжні ряди можна почленно додавати і віднімати, причому їх суми відповідно додаються і віднімаються. Якщо $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_1 + S_2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_1 - S_2.$$

Якщо в ряді (32.2) відкинути перші k членів, то одержимо ряд

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+m}+\ldots=\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n\,, \qquad (32.4)$$

який називається k-м *залишком ряду* (32.2).

Теорема. Числовий ряд (32.2) збігається тоді й тільки тоді, коли збігається k-й залишок ряду (32.4).

З теореми випливає, що на збіжність ряду не впливає відкидання скінченої кількості його членів. Отже, ряди $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ і $\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Розглянемо необхідну умову збіжності ряду.

Теорема (*необхідна умова збіжності ряду*). Якщо ряд збігається, то його n-й член прямує до нуля при $n\to\infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0\,. \qquad (32.5)$$

Якщо необхідна умова (32.5) не виконується, тобто $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд є розбіжним.

Підкреслимо, що розглянута умова збіжності ряду є тільки необхідною, але не є достатньою. Якщо виконується умова (32.5), то ряд може бути розбіжним.

Розглянемо ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

який називається *гармонічним рядом.* Можна показати, що цей ряд розбіжний, хоча необхідна умова збіжності для цього ряду виконується $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\,.$

Знакододатні числові ряди

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, всі члени якого є додатними числами, називають *знакододатним рядом*.

При дослідженні знакододатних рядів на збіжність використовують *еталонні ряди*, для яких відомо, що вони збіжні або розбіжні. Розглянемо такі еталонні ряди.

1) *Гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним.

2) *Узагальнений гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ (α – довільне дійсне число). Зазначимо, що при $\alpha > 1$ узагальнений гармонічний ряд збігається, а при $\alpha \le 1$ – розбігається. Це буде показано пізніше.

3) *Геометричний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ..., a \neq 0,$, який збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \ge 1$. Оскільки при $|q| < 1$ маємо $q^n \to 0, n \to \infty,$ то сума ряду є сумою нескінченої геометричної прогресії

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Якщо $|q| \ge 1$, то геометричний ряд є розбіжним, оскільки в цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} aq^{n-1} \neq 0$.

Ознаки порівняння знакододатних числових рядів

Перша ознака порівняння. Розглянемо знакододатні числові ряди

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{32.6}$$

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{32.7}$$

Нехай для членів цих рядів виконується нерівність

$$u_n \le v_n, \ n \in N, \tag{32.8}$$

тоді якщо ряд (32.7) збігається, то збігається і ряд (32.6). Якщо ж ряд (32.6) розбігається, то розбігається і ряд (32.7).

Друга (гранична) ознака порівняння. Якщо для знакододатних числових рядів (32.6), (32.7) існує скінчена, відмінна від нуля, границя

$$\Gamma = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} \neq 0, \tag{32.9}$$

то ці ряди одночасно збігаються або розбігаються.

Ознака Даламбера. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}, \tag{32.10}$$

то при $D<1$ ряд збіжний, а при $D>1$ – розбіжний. Якщо $D=1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ряд потрібно досліджувати за допомогою інших ознак збіжності.

Радикальна ознака Коші. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}\,, \tag{32.11}$$

то при $K<1$ ряд збіжний, а при $K>1$ – розбіжний. Якщо $K=1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ряд потрібно досліджувати за допомогою інших ознак збіжності.

Інтегральна ознака Коші. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ додатні, причому $u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots$, а функція $f(x)$ неперервна, незростаюча на проміжку $[1,+\infty)$ і $f(n)=u_n$, $n\geq 1$. Якщо збігається невласний інтеграл

$$I=\int_{1}^{+\infty} f(x)dx, \tag{32.12}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збігається, а якщо цей невласний інтеграл розбігається, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж розбігається. Отже, невласний інтеграл (32.12) і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ і знайти його суму.

Розв’язання. Загальний член ряду можна записати так:

$$u_n=\frac{3^n+2^n}{6^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Тому даний ряд можна записати у вигляді суми двох збіжних геометричних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Оскільки сума геометричного ряду (нескінченої геометричної прогресії) $S=\frac{b_1}{1-q}$, то ці ряди мають відповідно суми $S_1 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ і $S_2 = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$. Отже, даний ряд збігається, і його сума S дорівнює: $S = S_1 + S_2 = \dfrac{3}{2}$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 9} + \ldots$.

Розв'язання. Чисельник кожного члена ряду дорівнює одиниці, а знаменник є добутком двох послідовних непарних натуральних чисел. Оскільки $u_1 = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{1\cdot 3}, u_2 = \dfrac{1}{3\cdot 5}, u_3 = \dfrac{1}{5\cdot 7}, \ldots$ то $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Загальний член ряду можна розкласти на дроби методом невизначених коефіцієнтів, тобто

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} - \frac{B}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Тоді частинна сума ряду S_n має вигляд

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Отже, ряд збігається, і його сума $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{6}$.

Приклад 3. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n-2}$ на збіжність.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Оскільки необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+n}$.

Розв'язання. Дослідимо даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+n}$ на збіжність за ознакою порівняння. Розглянемо узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$, який збігається при $\alpha = 3 > 1$. Оскільки $\frac{1}{n^3+n} < \frac{1}{n^3}$ $\forall n \in N$, то за першою ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$ збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член ряду $u_n = \frac{n}{n^2+2}$. Для дослідження даного знакододатного ряду на збіжність потрібно знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, щоб використати ознаку порівняння.

Оскільки при $n \to \infty$ можна відкинути 2 у загальному члені даного ряду, тобто $u_n = \frac{n}{n^2+2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = v_n$, то для порівняння розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} = 1 \neq 0.$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним, то за граничною ознакою порівняння даний ряд теж є розбіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{2^n}{n!}$, тоді $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Застосуємо ознаку Даламбера, дістанемо

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже, даний ряд збігається.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Оскільки загальний член ряду має вигляд $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, то для дослідження ряду на збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші. Враховуючи другу важливу границю, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Отже, даний ряд розбігається.

Приклад 8. Дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною ознакою Коші. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, яка при $x>0$ спадна і $f(x)>0$. Тому збіжність даного ряду рівносильна збіжності невласного інтегралу

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b.$$

Якщо $\alpha\neq 1$, то $\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b=\frac{1}{-\alpha+1}\lim_{b\to\infty}\left(b^{-\alpha+1}-1^{-\alpha+1}\right)=\begin{cases}\frac{-1}{1-\alpha}, \text{ якщо } \alpha>1,\\ \infty, \text{ якщо } \alpha<1.\end{cases}$

Якщо $\alpha=1$, то $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1=)\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$.

Отже, ряд збіжний, якщо $\alpha>1$ та розбіжний при $\alpha\le 1$.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots$.

Розв'язання. Загальний член даного ряду має вигляд $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, яка є додатною і спадною при $x>0$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл, дістанемо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int_1^{\infty}\frac{d\left(\ln(x+1)\right)}{\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\Big|_1^{\infty}=\infty.$$

Оскільки цей інтеграл розбігається, то даний ряд теж є розбіжним.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти суму ряду

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$.

2. Дослідити ряд на збіжність

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n^5+4n^3+3n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)!}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{6^n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\ !}{2^n\cdot n!}$; м) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n-3}\right)^{\frac{n}{2}}$; н) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

п) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; р) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

§ 33. Знакозмінні числові ряди

Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца

Розглянемо *знакопочережний ряд*, у якого знаки членів чергуються, тобто сусідні члени мають різні знаки,

$$u_1-u_2+u_3-...+(-1)^n u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\,,\quad u_n>0, n\in N\,. \qquad (33.1)$$

Цей ряд досліджують на збіжність за допомогою ознаки Лейбніца. Розглянемо відповідну теорему.

Теорема Лейбніца. Якщо в знакопочережному ряді (33.1) абсолютні величини членів ряду спадають

$$u_1>u_2>u_3>...>u_n>u_{n+1}>... \qquad (33.2)$$

і загальний член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0\,, \qquad (33.3)$$

то ряд (33.1) збігається, його сума S додатна і не перевищує першого члена

$$0<S\le u_1\,.$$

Наведемо важливий наслідок з теореми Лейбніца. Розглянемо n-й залишок ряду (33.1) і позначимо через R_n суму цього залишку

$$R_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3})\,,$$

де знак R_n залежить від парності n. Із теореми випливає $|R_n|\le u_{n+1}$. Оскільки $R_n=S-S_n$, то

$$|S-S_n|\le u_{n+1}.$$

Наслідок. Абсолютна похибка, яка одержується при заміні суми знакопочережного ряду (33.1) його n-ю частковою сумою, не перевищує абсолютної величини першого з відкинутих членів ряду.

Цей наслідок має важливе значення в практичних застосуваннях.

Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Числовий ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{33.4}$$

називається *знакозмінним*, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні. Члени такого ряду можуть мати довільний знак. Знакопочережний ряд є частинним випадком *знакозмінного ряду.*

Зауважимо, що для знакозмінних рядів (як і для будь-яких числових рядів) виконується необхідна умова збіжності ряду: *якщо ряд збігається, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Цю умову зручно використовувати для доведення розбіжності ряду у випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Теорема. Якщо для знакозмінного ряду (33.4) ряд, складений з абсолютних величин його членів

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{33.5}$$

збігається, то й даний знакозмінний ряд також збігається.

Ця теорема є лише достатньою ознакою збіжності знакозмінного ряду, але не є необхідною. Існують такі знакозмінні ряди, які збігаються, і в той же час ряди, складені з абсолютних величин їх членів, розбігаються.

Знакозмінний ряд (33.4) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд (33.5), складений з абсолютних величин його членів.

Якщо ж знакозмінний ряд (33.4) збігається, а ряд (33.5) розбігається, то даний знакозмінний ряд називається *умовно* збіжним рядом.

Отже, з теореми випливає, що *будь-який абсолютно збіжний знакозмінний ряд збігається*. Це твердження дозволяє використовувати ознаки збіжності знакододатних рядів для дослідження збіжності знакозмінних рядів.

Наведемо деякі властивості *абсолютно збіжних і умовно збіжних рядів*.

1. Якщо ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при будь-якій перестановці його членів. При цьому сума ряду не залежить від порядку його членів.

2. Якщо ряд збігається умовно, то для будь-якого наперед заданого числа A можна так переставити члени цього ряду, що утворений після такої перестановки ряд матиме своєю сумою це число A. Більше того, можна так переставити члени умовно збіжного ряду, що ряд, утворений після перестановки, буде розбіжним.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Розв'язання. Даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots$ є знакопочережним, дослідимо його на збіжність за ознакою Лейбніца. Перевіримо умови (33.2) і (33.3).

Члени знакозмінного ряду спадають за абсолютною величиною

$$1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(n+1)^2}>\ldots$$

Границя загального члена ряду $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Оскільки умови ознаки Лейбніца виконуються, то даний ряд є збіжним.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{2}$.

Розв'язання. Оскільки члени ряду можуть бути як додатними, так і від'ємними (залежно від n), то даний ряд є знакозмінним. Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності ряду. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{2}$ не існує, то необхідна умова не виконується, тому даний ряд розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$.

Розв'язання. Даний ряд є знакопочережним. Для дослідження даного ряду на збіжність розглянемо ряд із абсолютних величин членів цього ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$. Дослідимо одержаний знакододатний ряд на збіжність за допомогою ознаки Даламбера. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду, збігається. Отже, даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$ збігається абсолютно.

Приклад 4. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$.

Розв'язання. Даний ряд є знакозмінним, оскільки загальний член ряду $u_n=\frac{\sin n}{n^3}$ може бути як додатним, так і від'ємним залежно від n. Побудуємо ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду, тобто $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}$. Цей ряд є знакододатним, оскільки $|u_n|=\frac{|\sin n|}{n^3}>0$, тому для його дослідження можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів.

Скористаємось ознакою порівняння для рядів. Оскільки $|u_n|=\frac{|\sin n|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}=v_n$, то за еталонний ряд візьмемо ряд $v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, який збігається як узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha=3>1$. Тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}$ теж збігається. Отже, даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$ збігається абсолютно.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, в якому $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, є розбіжним як узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha=\frac{1}{2}<1$.

Для дослідження даного знакопочережного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ застосуємо ознаку Лейбніца. Оскільки $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, тобто умови виконуються, то даний ряд збігається. Але ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду, розбігається. Тому заданий ряд є умовно збіжним.

Приклад 6. Знайти суму ряду $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+...$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. Дійсно, виконуються обидві умови ознаки

$$u_{n+1}=\frac{n+1}{10^{n+1}}\le\frac{2n}{10\cdot10^n}=\frac{n}{5\cdot10^n}<\frac{n}{10^n}=u_n,\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n\ln10}=0.$$

Похибка при наближеному обчисленні суми збіжного знакопочережного ряду не перевищує абсолютного значення першого відкинутого члена ряду. Оскільки $u_1=\frac{1}{10}=0{,}1>0{,}001$, $u_2=\frac{2}{10^2}=0{,}02>0{,}001$, $u_3=\frac{3}{10^3}=0{,}003>0{,}001$, $u_4=\frac{4}{10^4}=0{,}0004<0{,}001$, то $|R_3|=|S-S_3|<u_4<0{,}001$, тому при наближеному обчисленні суми обмежимось трьома членами ряду. Тоді сума ряду $S\approx\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}=0{,}983$ знайдена з точністю до 0,001.

Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)^3}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{4^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n2^n}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{(\ln5)^n}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{2^n}$;

м) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$; н) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(n+1)^{2n}}$.

2. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{3^n}$ з точністю до 0,01. Скільки членів цього ряду треба залишити, щоб обчислити його суму із вказаною точністю?

§ 34. Функціональні ряди

Степеневі ряди та їх застосування

Розглянемо нескінченну послідовність функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ..., які мають спільну область визначення X_0.

Вираз вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (34.1)$$

називається *функціональним рядом*. Функції $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... називаються *членами ряду* (34.1), $u_n(x)$ – n-м або загальним членом цього ряду.

Якщо взяти довільне число $x_0 \in X$ і в ряді (34.1) покласти $x = x_0$, то дістанемо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots \qquad (34.2)$$

Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо ряд (34.2) є збіжним, то точка x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду (34.1). Якщо ряд (34.2) розбіжний, то x_0 називається точкою розбіжності функціонального ряду (34.1).

Областю збіжності функціонального ряду (34.1) називається множина всіх значень аргументу x, при яких відповідний числовий ряд збігається.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ збігається в точці $x = \frac{1}{2}$, оскільки відповідний геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$ є збіжним.

Областю збіжності функціонального ряду може бути довільний проміжок числової осі.

Наприклад, ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ збігається на інтервалі (–1;1), оскільки при будь-якому значенні x із цього інтервалу відповідний числовий ряд є геометричним рядом, а при $|x| \geq 1$ цей ряд розбіжний.

Функція $S(x)$, визначена в області X_0 збіжності ряду (34.1) рівністю

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad (34.3)$$

називається *сумою функціонального ряду* (1).

Сума $S_n(x)$ перших n членів ряду (34.1) називається *n-ю частковою сумою* цього ряду, а різниця $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$, $x \in X_0$, називається n-м залишком функціонального ряду (34.1).

Для кожного x з області збіжності ряду (1) виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \qquad (34.4)$$

При знаходженні області збіжності функціонального ряду застосовуються ознаки, аналогічні ознакам збіжності числових рядів.

Узагальнена ознака Даламбера

Функціональний ряд (34.1) збігається абсолютно для всіх x, що задовольняють умову

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1. \qquad (34.5)$$

Узагальнена ознака Коші

Функціональний ряд (34.1) збігається абсолютно для всіх x, що задовольняють умову

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1. \qquad (34.6)$$

Функціональний ряд (34.1) називається рівномірно збіжним в деякій області D, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число N_ε, залежне від ε, що для всіх $n > N_\varepsilon$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Теорема (ознака Вейєрштрасса). Функціональний ряд (34.1) *збігається абсолютно і рівномірно* в області D, якщо існує збіжний знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ такий, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність

$$|u_n(x)| \le c_n \quad (n = 1,2,\ldots). \qquad (34.7)$$

Степеневі ряди. Теорема Абеля

Функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (34.8)$$

або

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (34.9)$$

називається *степеневим,* а сталі a_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ – коефіцієнтами ряду.

Зауважимо, що степеневий ряд вигляду (34.9) зводиться до ряду (34.8) за допомогою заміни $x - x_0 = t$.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (34.8) збігається при деякому значенні $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо ряд (34.8) розбіжний при деякому значенні x_1, то він розбіжний для всіх x таких, що $|x| > |x_1|$.

Радіусом збіжності степеневого ряду (34.8) називається таке число R>0, що для всіх x, які задовольняють умову

$$|x| < R,$$

степеневий ряд (34.8) збігається, а для всіх x таких, що

$$|x| > R,$$

ряд (34.8) розбіжний.

Радіус збіжності R знаходять за формулами

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{34.10}$$

або

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{34.11}$$

Інтервал $(-R;R)$, де R – радіус збіжності степеневого ряду (34.8), називається *інтервалом збіжності* цього ряду.

Зауваження 1. Питання про збіжність чи розбіжність степеневого ряду (34.8) на кінцях інтервалу збіжності (тобто при $x = \pm R$) вирішується окремо завдяки дослідженню на збіжність числових рядів $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$. Таким чином, *область збіжності* степеневого ряду (34.1) може відрізнятись від інтервалу $(-R;R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 2. У деяких степеневих рядів (34.8) інтервал збіжності вироджується в точку $x = 0$, у інших охоплює всю числову вісь $(-\infty,+\infty)$. Для таких рядів вважають відповідно, що $R = 0$ і $R = \infty$.

Зауваження 3. Радіус збіжності R степеневого ряду (34.9) знаходять за формулами (34.10) або (34.11). Інтервал збіжності цього ряду визначають з нерівності $|x - x_0| < R$. Він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневих рядів (34.8), (34.9) можна знаходити безпосередньо, користуючись узагальненими ознаками Даламбера і Коші.

Розглянемо *основні властивості степеневих рядів.*

1. Степеневий ряд (34.8) абсолютно і рівномірно збіжний до своєї суми $S(x)$ на будь-якому відрізку $[-r, r]$, що міститься в інтервалі збіжності $(-R; R)$.

2. Сума $S(x)$ степеневого ряду (34.8) неперервна всередині його інтервалу збіжності.

3. Степеневий ряд (34.8) можна почленно інтегрувати на будь-якому проміжку $[\alpha, \beta]$, що лежить всередині інтервалу збіжності $(-R; R)$. Зокрема, якщо $-R < x < R$, то

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (34.12)$$

причому отриманий в результаті інтегрування степеневий ряд (34.12) має той самий інтервал збіжності $(-R; R)$.

4. Степеневий ряд (34.8) можна почленно диференціювати в кожній точці його інтервалу збіжності, тобто

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}. \qquad (34.13)$$

причому утворений в результаті диференціювання степеневий ряд (34.13) має той самий інтервал збіжності $(-R; R)$.

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Вважаємо, що на області X задано функцію, і визначимо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд.

Якщо функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (34.14)$$

в деякому околі точки $x_0 \in X$, то кажуть, що функція $f(x)$ розвинена в цьому околі в степеневий ряд за степенями $x - x_0$.

Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 похідні будь-якого порядку.

Рядом Тейлора функції $f(x)$ називається степеневий ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (34.15)$$

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називається степеневий ряд за степенями x, який одержується з ряду Тейлора при $x_0 = 0$

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (34.16)$$

Формально складений степеневий ряд (34.15) може бути в околі точки x_0 як збіжним, так і розбіжним, причому у випадку збіжності його сума не обов'язково дорівнює функції $f(x)$. Наступні теореми встановлюють умови можливості розвинення функції в степеневий ряд і єдиності такого розвинення.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$ можна розвинути в степеневий ряд (34.14), то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^n(x_0)}{n!},\ \ldots$$

Теорема 2. Для того щоб ряд Тейлора (34.15) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$, тобто при $x\in(x_0-R;x_0+R)$ мала місце рівність

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (34.17)$$

необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків, і залишковий член її формули Тейлора

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1, \qquad (34.18)$$

прямував до нуля при $n\to\infty$ для всіх x з цього інтервалу:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in(x_0-R;x_0+R) \qquad (34.19)$$

Таким чином, функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$ тоді і тільки тоді, коли вона має похідні всіх порядків, і залишковий член формули Тейлора (34.19) прямує до нуля при $n\to\infty$ і всі $x\in$ $(x_0-R;x_0+R)$.

Безпосередня перевірка цих умов нерідко виявляється непростою задачею. Наступна теорема дає досить прості достатні умови розвинення функції в ряд Тейлора.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ має в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$ похідні всіх порядків і існує таке число $M>0$, що $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, $x\in(x_0-R;x_0+R)$, $n=0,1,2,\ldots$, де $f^{(0)}(x)=f(x)$, то функцію $f(x)$ можна розвинути в ряд Тейлора в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$.

Розвинення функцій у ряд Тейлора (Маклорена).

Для розвинення функції $f(x)$ в ряд Тейлора потрібно:

1) знайти похідні функції $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...;

2) обчислити значення функції і її похідних в точці x_0;

3) записати ряд Тейлора (34.15) для даної функції і знайти інтервал його збіжності;

4) визначити інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$, в якому виконується умова (34.19).

Якщо такий інтервал існує, то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Тейлора збігаються і виконується рівність (34.17).

Розвинення функції $f(x)$ в ряд Маклорена (34.16) виконується аналогічно.

Розглянемо розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена, які часто використовуються у наближених обчисленнях.

Розклади основних елементарних функцій в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in (-\infty; +\infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n, \quad m \in R, \; x \in (-1;1),$$

причому цей ряд збіжний до функції $(1+x)^m$ при $m \geq 0$, якщо $x \in [-1;1]$, при $-1 < m < 0$, якщо $x \in (-1;1]$, при $m \leq -1$, якщо $x \in (-1;1)$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \; x \in (-1;1);$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1;1);$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in (-1;1);$$

$$arctg\; x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1;1).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти область збіжності та суму функціонального ряду $1+x+x^2+...+x^n+...$

Розв'язання. При будь-якому значенні x заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ є числовим геометричним рядом із знаменником $q=x$. Цей ряд збігається на проміжку $(-1;1)$, оскільки $|q|=|x|<1$. При цьому сума ряду $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$.

Зазначимо, що при $|x|\geq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ є розбіжним.

Приклад 2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=3.$$

Отже, $(-3;3)$ – інтервал збіжності даного степеневого ряду.

При $x=-3$ маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца. Отже, $x=-3$ – точка збіжності ряду.

При $x=3$ маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Отже, $x=3$ є точкою розбіжності степеневого ряду.

Отже, $[-3;3)$ – область збіжності степеневого ряду.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}x^n$.

Розв'язання. Для обчислення радіуса збіжності ряду застосуємо формулу $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$. Враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, маємо

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt[n]{n}}}=\frac{1}{4}.$$

Оскільки радіус збіжності $R=\frac{1}{4}$, то ряд збіжний при $|x|<\frac{1}{4}$ і розбіжний при $|x|>\frac{1}{4}$. Дослідимо ряд на збіжність у точках $x=-\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{4}$.

При $x=-\frac{1}{4}$ маємо знакопочережний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца. Якщо $x=\frac{1}{4}$, то маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду є проміжок $\left[-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$.

Приклад 4. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n}$.

Розв'язання. Скористаємось узагальненою ознакою Даламбера, маємо

$$|u_n(x)|=\frac{|x+3|^n}{n},\ |u_{n+1}(x)|=\frac{|x+3|^{n+1}}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|^{n+1}n}{|x+3|^n(n+1)}=|x+3|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x+3|.$$

За ознакою ряд є абсолютно збіжним, якщо $|x+3|<1$ або $-4<x<-2$. Таким чином, маємо інтервал збіжності $(-4;-2)$ і радіус збіжності $R=1$. Дослідимо цей ряд на збіжність на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=-4$ дістанемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца. При $x=-2$ маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Отже, областю збіжності заданого ряду є проміжок $[-4;-2)$.

Приклад 5. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$.

Розв'язання. Використаємо відомий розклад

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ x\in R$ і замінимо x на $\frac{3x}{2}$.

$$\sin\left(\frac{3x}{2}\right)=\frac{3x}{2}-\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=1{,}5x+\frac{(1{,}5)^3}{3!}x^3+$$

$$+\frac{(1{,}5)^5}{5!}x^5-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(1{,}5)^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1}+\ldots.$$

За допомогою ознаки Даламбера можна показати, що областю збіжності цього ряду є $(-\infty;+\infty)$, тобто знайдений розклад справедливий при $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 6. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x)=\ln(3+2x)$ за степенями $(x+1)$.

Розв'язання. Подамо функцію $f(x)$ у вигляді

$$\ln(3+2x)=\ln(1+(2+2x))=\ln(1+2(x+1)),$$

скористаємося відомим розкладом

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ -1<x\le 1$$

і замінимо x на $2(x+1)$. Дістанемо:

$$2(x+1)-\frac{(2(x+1))^2}{2}+\frac{(2(x+1))^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2(x+1))^n}{n}+\ldots=$$

$$=2(x+1)-\frac{2^2}{2}(x+1)^2+\frac{2^3}{3}(x+1)^3-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n}{n}\cdot(x+1)^n+\ldots.$$

Область збіжності цього ряду можна знайти, застосовуючи ознаку Даламбера для одержаного степеневого ряду. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x+1)^{n+1}n}{(n+1)2^n(x+1)^n}\right|=2|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=2|x+1|<1,$$

звідки дістаємо $-\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2},\quad -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$.

При $x=-\frac{3}{2}$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним, а при $x=-\frac{1}{2}$ знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є збіжним за ознакою Лейбніца. Отже, область збіжності ряду $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$.

Отже, при $x\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$ функція $f(x)=\ln(3+2x)$ розкладається в ряд

$$\ln(3+2x)=2(x+1)-\frac{2^2}{2}(x+1)^2+\frac{2^3}{3}(x+1)^3-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n}{n}(x+1)^n+\ldots,$$

Приклад 7. За допомогою степеневого ряду наближено обчислити $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ з точністю до 0,00001.

Розв'язання. Для обчислення наближеного значення скористаємося розкладом функції $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$. Тоді при $x=-\frac{1}{5}$ маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot 5^n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. При цьому похибка наближеного обчислення суми ряду за абсолютною величиною не перевищує першого відкинутого члена ряду. Оскільки $\frac{1}{5!\cdot 5^5}<0,00001$, то

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}-\frac{1}{3!\cdot 5^3}+\frac{1}{4!\cdot 5^4}...\approx 0,81873.$$

Приклад 8. За допомогою степеневого ряду обчислити наближено $\sin 17^\circ$ з точністю до 0,0001

Розв'язання. Для обчислення наближеного значення $\sin 17^\circ$ скористаємося розкладом в ряд Маклорена функції $\sin x$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки $17^0=\frac{17\pi}{180}$(радіан), то, підставивши це значення в ряд Маклорена, дістанемо

$$\sin 17^0=\sin\frac{17\pi}{180}=\frac{17\pi}{180}-\left(\frac{17\pi}{180}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}+\left(\frac{17\pi}{180}\right)^5\cdot\frac{1}{5!}-...$$

Одержаний числовий ряд є збіжним знакопочережним рядом, тому похибка при наближеному обчисленні суми збіжного знакопочережного ряду не перевищує абсолютного значення першого відкинутого члена ряду. Оскільки $\left(\frac{17\pi}{180}\right)^5\cdot\frac{1}{5!}\approx 0,000019<0,0001$, то для обчислення із заданою точністю можна обмежитись двома членами ряду. Дістанемо

$$\sin 17^0\approx 0,2967-0,00435\approx 0,2924.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{1}{3}}e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена і проінтегруємо

$$\int_0^{\frac{1}{3}}e^{-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{81}+\frac{1}{2430}-\ldots\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{81}=\frac{26}{81}\approx 0,321,$$

оскільки $\frac{1}{3}>0,001$, $\frac{1}{81}>0,001$, $\frac{1}{2430}<0,001$.

Приклад 10. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в ряд розв'язку рівняння $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = -1$.

Розв'язання. Розв'язок диференціального рівняння можна одержати наближено за допомогою розкладу функції в ряд Тейлора.

Запишемо розв'язок рівняння у вигляді ряду

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots.$$

Оскільки $y(1) = -1$, то для диференціального рівняння $y' = x^2 + y^3$ маємо

$$y'(1) = 1^2 + (-1)^3 = 0,$$

$$y'' = 2x + 3y^2 y', \qquad y''(1) = 2\cdot 1 + 3\cdot(-1)^2\cdot 0 = 2,$$

$$y''' = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2 y'', \qquad y'''(1) = 8.$$

Отже, для розв'язку даного диференціального рівняння маємо три перших члени (відмінних від нуля) розкладу в ряд

$$y(x) = -1 + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 \approx -1 + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область збіжності степеневого ряду

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{n-1}}{n!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n\,5^n}$.

2. Розкласти функцію в ряд Тейлора (Маклорена) в околі точки x=0, користуючись відомими розкладами функцій

а) $y = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$;. б) $y = \sin^2 x$; в) $y = x\ln(x+1)$;

г) $y = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$; д) $y = \frac{\mathrm{arctg}x}{x}$; е) $y = \sqrt{x^2+1}$.

3. За допомогою степеневого ряду наближено обчислити $\frac{1}{e^2}$ з точністю до 0,0001.

4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{arctg}x}{1-\cos 2x}$, використовуючи розклад функцій в ряд Маклорена.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x^2dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=y^2+xe^y$, $y(0)=0$.

§ 35. Ряди Фур'є. Розвинення функцій в ряд Фур'є

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+$$

$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (35.1)$$

називається *тригонометричним рядом,* а дійсні числа a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$ – *коефіцієнтами ряду*.

Розглянемо періодичну функцію $f(x)$ з періодом 2π, інтегровну на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Рядом Фур'є функції $f(x)$ називається тригонометричний ряд (35.1), коефіцієнти якого визначаються за формулами Фур'є

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, \quad n=1,2,\ldots, \qquad (35.2)$$

числа a_n, b_n називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$.

Якщо функції $f(x)$ відповідає ряд Фур'є, то

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Для того, щоб ряд Фур'є, формально побудований для функції $f(x)$, був збіжним до функції $f(x)$, вона повинна задовольняти певні умови.

Теорема Діріхле. Нехай періодична функція $f(x)$ з періодом 2π на відрізку $[-\pi,\pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду, причому відрізок $[-\pi,\pi]$ можна розбити на скінченне число відрізків так, що всередині кожного з них функція $f(x)$ була монотонною. Тоді ряд Фур'є є збіжним до функції $f(x)$ на всій числовій осі. Сума $S(x)$ цього ряду дорівнює значенню функції $f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$; а якщо x_0 – точка розриву функції $f(x)$, то $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Таким чином, сума ряду Фур'є в точці розриву дорівнює середньому арифметичному лівої і правої границь функції $f(x)$ в цій точці; в кінцевих точках відрізка $[-\pi;\pi]$ сума ряду Фур'є набуває значень

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Умови, які повинна задовольняти функція $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ за теоремою Діріхле, називаються *умовами Діріхле.*

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле, то її можна розвинути в ряд Фур'є

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (35.3)$$

де коефіцієнти a_0, a_n, $b_n(n=1,2,...)$ обчислюються за формулами (35.2).

Якщо для довільної інтегровної періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π виконується рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{a}^{a+2\pi}f(x)dx, \qquad (35.4)$$

де a – будь-яке дійсне число. Тоді для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є можна застосувати формули

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)dx, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,...). \qquad (35.5)$$

Якщо функція $f(x)$ допускає розвинення в ряд Фур'є, то часткові суми $S_n(x)$ цього ряду дають змогу знайти наближення функції $f(x)$

$$f(x)\approx S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Якщо функція $f(x)$ є парною або непарною, то розвинення функції в ряд Фур'є значно спрощується.

Якщо $f(x)$ – *парна функція* з періодом 2π, яка задовольняє умови Діріхле, то її ряд Фур’є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \qquad (35.6)$$

де

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad (n=1,2,...). \qquad (35.7)$$

Таким чином, парна функція розкладається в ряд Фур’є *за косинусами*.

Якщо $f(x)$ – *непарна функція* з періодом 2π, яка задовольняє умови Діріхле, то її ряд Фур’є має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \qquad (35.8)$$

де

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,...). \qquad (35.9)$$

Отже, непарна функція розкладається в ряд Фур’є *за синусами*.

Розвинення в ряд Фур’є 2l-періодичної функції

Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом $2l$ (l – довільне додатне число), яка на відрізку $[-l,l]$ задовольняє умови Діріхле. Тоді функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур’є

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (35.10)$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,...). \qquad (35.11)$$

Якщо $f(x)$ – парна функція з періодом $2l$, то її ряд Фур’є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (35.12)$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)dx, \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,...). \qquad (35.13)$$

Ряд Фур’є для непарної $2l$-періодичної функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{35.14}$$

де

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,...). \tag{35.15}$$

Розвинення в ряд Фур’є неперіодичної функції

Для розвинення в ряд Фур’є неперіодичної функції $f(x)$, яка визначена на відрізку $[a,b]$ і задовольняє на цьому відрізку умовам Діріхле, спочатку будують допоміжну періодичну функцію $F(x)$, яка задовольняє на проміжку – періоді умовам Діріхле, причому $F(x)= f(x)$ при $x\in[a,b]$. Розклад в ряд Фур’є функції $F(x)$ буде одночасно і розкладом функції $f(x)$ в ряд Фур’є на $[a,b]$.

Наведемо *основні випадки* розкладу в ряд Фур’є неперіодичних функцій.

I. Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l,l]$ і задовольняє на цьому відрізку умовам Діріхле. Розглянемо періодичну функцію $F(x)$ з періодом $T=2l$, яка на відрізку $[-l,l]$ збігається із заданою функцією $f(x)$. Функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле, тому її можна розвинути в ряд Фур’є вигляду

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{35.16}$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,...). \tag{35.17}$$

На відрізку $[-l,l]$ цей ряд буде зображати задану функцію $f(x)$.

Отже, розклад в ряд Фур’є функції $f(x)$, заданої на проміжку, симетричному відносно початку координат, можна знайти, розвинувши в ряд Фур’є відповідну періодичну функцію $F(x)$ з періодом, що дорівнює довжині цього проміжка.

II. Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0,l]$ і задовольняє на цьому відрізку умовам Діріхле.

Функцію $f(x)$ можна продовжити довільним способом на відрізок $[-l,0]$, а потім – періодично на всю числову вісь так, щоб функція $F(x)$ задовольняла умови теореми Діріхле. Розвинувши функцію $F(x)$ в ряд Фур'є вигляду (1) при $x \in [0,l]$ дістанемо розклад в ряд Фур'є функції $f(x)$.

Функцію $f(x)$ можна продовжити парним способом на відрізок $[-l,0]$ (див. рис. 35.1). Тоді функція $F(x)$ буде парною, а її ряд Фур'є матиме вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (35.18)$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad (n=1,2,...), \qquad (35.19)$$

У цьому випадку маємо розклад функції $f(x)$ на відрізку $[0,l]$ в ряд Фур'є за *косинусами*.

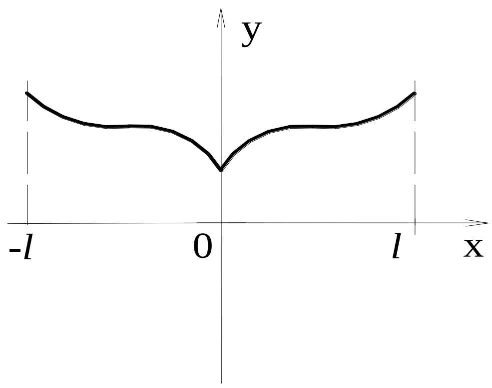


Рис. 35.1

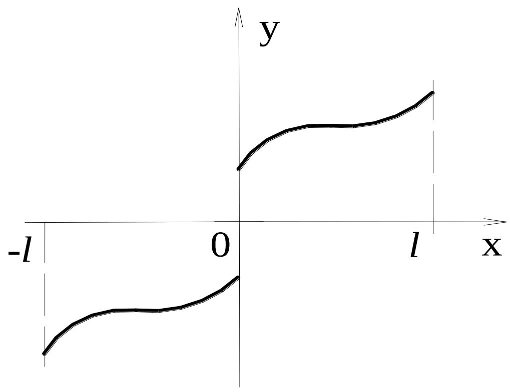


Рис. 35.2

Якщо функцію $f(x)$ продовжити на відрізок $[-l,0]$ *непарним способом* (див. рис. 35.2), то маємо розклад функції на $[0,l]$ в ряд Фур'є за *синусами.*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (35.20)$$

де

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad (n=1,2,...). \qquad (35.21)$$

Зауважимо, що найчастіше застосовують розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є за синусами або за косинусами.

III. Нехай функція $f(x)$ визначена на довільному відрізку $[a,b]$ і задовольняє на ньому умови Діріхле. Для визначеності покладемо $0<a<b$. Розглянемо кілька способів розвинення функції в ряд Фур'є.

1. Продовжити функцію $f(x)$ деяким способом на проміжок $[0,a]$ і далі діяти, як у попередньому випадку II, поклавши $l=b$.

2. Виконати заміну змінної $x = t + a$, після чого функцію $f_1(t) = f(t + a)$, визначену на відрізку $t \in [0, l]$, де $l = b - a$, розвинути в ряд Фур'є (випадок II) і повернутись до початкової змінної x.

3. Періодично продовжити функцію $f(x)$ на всю числову вісь, вважаючи періодом відрізок $[a, b]$ $\left(T = 2l = b - a,\ \ l = \dfrac{b-a}{2}\right)$. Дістанемо розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є на відрізку $[a, b]$ у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right),$$

де

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\ \ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx \ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$, якщо $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{при} \quad -\pi < x < 0; \\ 3, & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Розв'язання. Графік даної періодичної функції подано на рис. 35.3.

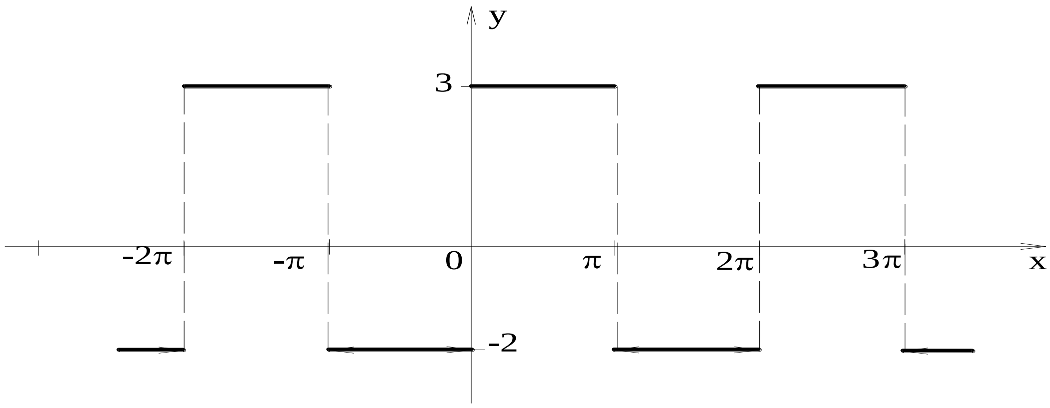


Рис. 35.3

Задана функція задовольняє умови Діріхле, оскільки на відрізку $[-\pi, \pi]$ функція має розриви першого роду в точках $x = -\pi$, $x = 0$, а в усіх інших точках цього відрізка вона неперервна. Отже, її можна розкласти на $(-\pi; \pi)$ в ряд Фур'є за формулою

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

де коефіцієнти Фур'є знаходять за формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n=1,2,...$$

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)dx+\int_{0}^{\pi}3dx\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-2x\Big|_{-\pi}^{0}+3x\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(-2\pi+3\pi)=1;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}3\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{3\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}3\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{3\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}(2-2\cos(-n\pi)-3\cos n\pi+3)=$$

$$=\frac{5}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{10}{n\pi}, & \textit{якщо } n-\textit{непарне},\\ 0, & \textit{якщо } n-\textit{парне}.\end{cases}$$

Таким чином, розклад заданої функції в ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{10}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+...\right),\ x\in(-\pi;\pi).$$

Приклад 2. Розвинути функцію $f(x)=x$ на відрізку [0;1] в ряд Фур'є за синусами.

Розв'язання. Продовжимо функцію $f(x)$ непарним способом на проміжок $[-1;0]$, а потім побудовану функцію продовжимо періодично на всю числову вісь (див. рис. 35.4). Одержану непарну періодичну функцію $(T=2l=2,\ l=1)$ розвинемо в ряд Фур'є вигляду

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюємо при $l=1$ за формулами

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,...$$

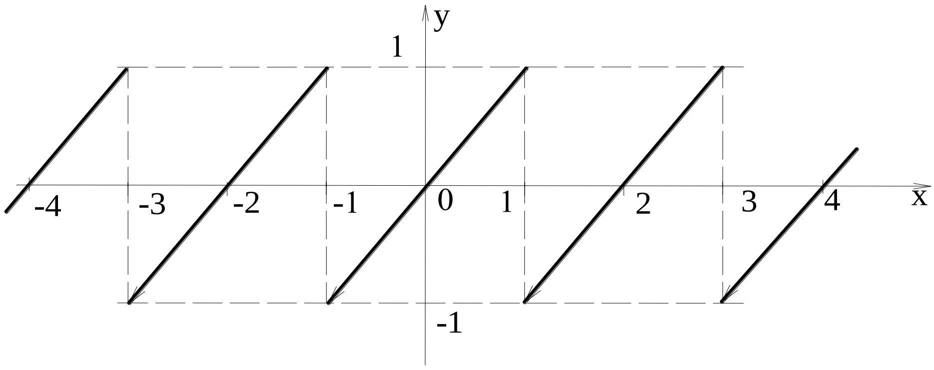


Рис. 35.4

Маємо

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx = 2\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \begin{vmatrix} u = x; du = dx; \\ dv = \sin n\pi x dx; \\ v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx \right) = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n - \textit{непарне}, \\ -\dfrac{2}{n\pi}, & n - \textit{парне}. \end{cases}$$

Таким чином, розвинення даної функції на відрізку $[0;1]$ в ряд Фур'є за синусами має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x - \frac{1}{4}\sin 4\pi x + \ldots \right).$$

Приклад 3. Розкласти функцію $f(x) = 2x - 3$ на відрізку $[1;3]$ в ряд Фур'є за косинусами.

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 35.5. Довизначимо задану функцію на відрізку $[0;1]$, поклавши $f_1(x) = 2x - 3$, $x \in [0;3]$, а потім одержану функцію продовжимо парним способом на відрізок $[-3;0]$ і періодично на всю числову вісь ($T = 2l = 6$, $l = 3$) (див. рис. 35.6). Дістали парну періодичну функцію, яка задовольняє умови теореми Діріхле.

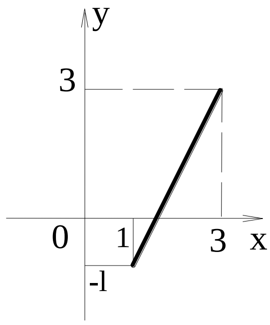


Рис. 35.5

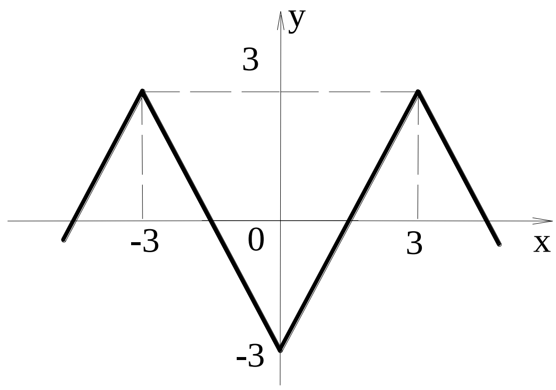


Рис. 35.6

Розкладемо функцію в ряд Фур'є, обчисливши коефіцієнти Фур'є

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f_1(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 (2x-3)dx = \frac{2}{3}\left(x^2-3x\right)\Big|_0^3 = 0\,;$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f_1(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 (2x-3)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \left|\begin{array}{c} u = 2x-3; du = 2dx; \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{3}dx; \\ v = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}(2x-3)\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 - \frac{6}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right) =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{12}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{12}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{12}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{24}{n^2\pi^2}, & \textit{якщо } n - \textit{непарне}, \\ 0, & \textit{якщо } n - \textit{парне}. \end{cases}$$

Отже, розклад заданої функції на відрізку $[1;3]$ в ряд Фур'є за косинусами має вигляд

$$f(x) = -\frac{24}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{3} + \ldots\right).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$, якщо
$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\pi;0), \\ -1, & x \in (0;\pi). \end{cases}$

2. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad -\pi<x<0,\\ x, & \text{при} \quad 0\le x\le \pi.\end{cases}$

3. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in(-\pi;0),\\ 3, & x\in[0;\pi).\end{cases}$

4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x+\pi$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$, якщо $f(x+2\pi)=f(x)$.

5. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ на проміжку $(0;2\pi)$.

6. Розвинути функцію $f(x)=2-3x$ в ряд Фур'є за синусами на проміжку $(0;2)$.

7. Розкласти функцію $f(x)=\pi-x$ в ряд Фур'є за косинусами на проміжку $(0;\pi)$.

8. Розвинути функцію $f(x)=|x|$ в ряд Фур'є на інтервалі $x\in(-2;2)$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-3;-1),\\ 2x, & x\in[-1;3).\end{cases}$

Контрольні запитання

1. Дайте означення числового ряду.
2. Який числовий ряд називають збіжним?
3. Наведіть необхідну умову збіжності ряду.
4. Сформулюйте ознаки збіжності знакододатних числових рядів.
5. Що таке знакозмінний ряд; знакопочережний ряд?
6. Сформулюйте ознаку Лейбніца для знакопочережного ряду.
7. Який знакозмінний ряд називають абсолютно; умовно збіжним?
8. Який ряд називають функціональним; степеневим?
9. Сформулюйте теорему Абеля для степеневого ряду.
10. Дайте означення радіуса та інтервала збіжності степеневого ряду.
11. Що називають рядом Тейлора; рядом Маклорена?
12. Наведіть умови розкладу функції в ряд Тейлора.
13. Як застосовують степеневі ряди у наближених обчисленнях?
14. Дайте означення ряду Фур'є.
15. Сформулюйте умови розвинення функції в ряд Фур'є.
16. Як розвинути в ряд Фур'є парну; непарну функцію?

Рекомендована література

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1972. – 416 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: в 3 ч. Ч. 1 / М. О. Давидов. – К. : Вища школа, 1990. – 383 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: в 3 ч. Ч. 2 / М. О. Давидов. – К. : Вища школа, 1991. – 366 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособ. для студентов втузов. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1986. – 304 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособ. для студентов втузов. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1986. – 415 с.
6. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб. Ч. 2 / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – К. : Книжк. вид-во Нац. авіац. ун-ту, 2005. – 276 с.
7. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб. Ч. 3 / В. П. Денисюк, В. К. Репета, К. А. Гаєва. – К. : Книжк. вид-во Нац. авіац. ун-ту, 2005. – 444 с.
8. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2003. – 648 с.
9. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2004. – 480 с.
10. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі. Посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Видав. центр «Академія», 2003. – 624 с.
11. Дюженкова О. Ю. Методичні вказівки з вищої математики для студентів інженерних спеціальностей / О. Ю. Дюженкова. – К. : Компринт, 2017. – 192 с.
12. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1966. – 464 с.
13. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Б. М. Лисицын, В. М. Михайленко. – К. : Вища школа, 1989. – 679 с.
14. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2007. – 608 с.