

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

М. В. Грисенко

Вища математика для економістів

Підручник



УДК 51(075.8)
Г82

Рецензенти:

д-р екон. наук, проф. О.І. Шнирков
д-р екон. наук проф. О.А. Приятельчук
канд. фіз.-мат. наук С.В. Кушніренко

*Рекомендовано до друку вченою радою ННІ міжнародних відносин
(протокол №8 від 25 січня 2022 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 3-23 від 30 березня 2023 року)*

Грисенко М. В.

Г82 Вища математика для економістів : підручник
/ М. В. Грисенко. – К. : ВПЦ "Київський університет",
2022. – 687 с.

ISBN 978-966-933-192-2

Системно викладено основні базові математичні поняття, твердження, методи та моделі, що застосовують в економічних дослідженнях.

Призначено для студентів, аспірантів і викладачів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також для самоосвіти економістів-практиків. Він також може бути корисний для широкої економічної аудиторії – наукових співробітників, керівників різного рівня, бізнесменів, менеджерів, фінансистів.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-966-933-192-2

© Грисенко М. В., 2022

© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2022

ПЕРЕДМОВА

Запровадження математичних методів і моделей до економічної науки, управління економічними процесами держави стало значним науковим досягненням і має широке застосування у різних практичних аналітичних дослідженнях. Існує тісний зв'язок між потребами теорії та практики, тому фундаментальна математична підготовка майбутніх фахівців, яка б давала можливості застосовування математичних інструментів для широкого кола потреб в економічній діяльності, спрямована на кінцевий результат – формування компетенцій фахівця, який не тільки набув певних знань, а й здатний ефективно застосовувати їх у професійній діяльності.

Підручник "Вища математика для економістів" – результат авторського багаторічного досвіду викладання математичних дисциплін у Навчально-науковому інституті міжнародних відносин та на економічному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Підручник створений із врахуванням сучасних вимог до підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки фахівців, посилення її прикладної спрямованості та покликаний допомогти майбутнім економістам оволодіти математичними методами й базовими економіко-математичними моделями.

Матеріал підручника охоплює такі розділи математики: методи і моделі лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії множин, граничного аналізу, диференціального числення функцій однієї та багатьох змінних, інтегрального числення та елементів теорії диференціальних рівнянь. Усі теоретичні твердження доведено чітко та аргументовано, але без надмірної строгості, і викладено в стислій формі. Там, де можливо, розкрито економічний зміст математичних понять.

Теми, що включено до підручника, подано за єдиним методичним принципом: спочатку – основні означення, формулювання й доведення теорем, далі – економіко-матема-

тичні моделі та прикладні задачі економічного змісту із докладними розв'язаннями.

Загальновідомо, що новий навчальний матеріал засвоїти значно легше, якщо його супроводжує достатня кількість прикладів із детальними розв'язками. Тому прикладну спрямованість підручника підсилено добірками математичних та економічних задач до кожного розділу (різного рівня складності), які ілюструють застосування відповідних теоретичних методів і моделей. При підготовці задач використано матеріали різних підручників і посібників, частину задач складено спеціально для цього підручника.

Наприкінці підручника вміщено завдання для самостійної роботи. Кожна робота має чотири варіанти тематично скомпонованих завдань, які можна використовувати для індивідуальних і контрольних робіт, що дозволяє здійснювати контроль знань за модульно-рейтинговою системою.

Авторка звертає увагу читача на те, що вивчати матеріал цього підручника треба послідовно з обов'язковим розв'язуванням задач. Завдання доцільно виконувати після ознайомлення з теоретичним матеріалом та прикладами, які наведено у підручнику.

Підручник за побудовою, змістом і логікою викладення матеріалу має допомогти студентам під час вивчення курсу дисципліни "Вища математика для економістів" вирішити такі основні завдання: навчитися застосовувати математичні знання у процесі розв'язання економічних задач, під час побудови економіко-математичних моделей, розвинути аналітичне мислення та здібності до самоосвіти.

Основні принципи, яким керувалась авторка при написанні підручника, – підвищення рівня фундаментальної підготовки із посиленням її прикладної економічної спрямованості.

ВСТУП

Навчальна дисципліна "Вища математика для економістів" є фундаментальною основою математичної підготовки економістів у різних сферах, зокрема в міжнародних економічних відносинах, міжнародному бізнесі, економічній аналітиці, яка є нормативною дисципліною природничо-наукового циклу, що передбачена освітньою професійною програмою підготовки бакалаврів з економічних спеціальностей.

Сучасну міжнародну економіку як науку про об'єктивні закономірності функціонування та розвитку суспільства, характеризує широке застосування математичних методів і моделей, які стали складовою частиною економічної теорії. Їх використання, разом зі змістовним економічним аналізом, відкриває нові перспективи для економічної науки та практики. Головним інструментом дослідження та прогнозування економічних об'єктів та явищ стала економіко-математична модель. Ідеться не просто про оволодіння студентами економічних спеціальностей математичними методами, а й про вміння самостійно застосовувати ці знання для побудови економіко-математичних моделей.

Економіко-математична модель – внутрішньо несуперечлива замкнена система математичних відношень, що призначена для відтворення певних властивостей досліджуваного явища чи процесу. Прикладами можуть служити моделі споживчого вибору, економічного зростання, рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках тощо. Будуючи моделі, економісти виявляють суттєві фактори, які визначають досліджуване явище й відкидають деталі, що не є суттєвими для розв'язання певної проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дає змогу оцінити можливі наслідки дії на них і використувати такі оцінки в управлінні.

Економіко-математичну модель, що описує економічне явище або об'єкт, будують таким чином:

- спочатку формують предмет і мету дослідження;

•у досліджуваній економічній системі виділяють структурні та функціональні елементи, які відповідають поставленій меті, виявляють найважливіші якісні характеристики цих елементів;

•словесно, якісно описують взаємозв'язки між елементами;

•вводять символічні позначення для характеристики економічного об'єкта або явища та формалізують (наскільки це можливо) взаємозв'язки між ними, і таким чином формують економіко-математичну модель;

•проводять розрахунки за економіко-математичною моделлю та аналізують отриманий розв'язок. Якщо із певних причин цей розв'язок неможливо застосувати на практиці, то процес побудови економіко-математичної моделі повторюють: аналізують постановку задачі й здобутий розв'язок, перевіряють урахування всіх початкових даних і порядок їхнього групування, взаємозв'язок величин тощо. Після аналізу модель змінюють.

Розрахунки в економіці ґрунтуються на певних математичних моделях. Тому економісти мають володіти мовою математичних понять; уміти здійснювати математичні операції над числами, символами, множинами, функціями; оперувати рівняннями та нерівностями; володіти основними розрахунковими математичними інструментами; уміти ставити проблеми, розв'язувати їх та аналізувати здобуті результати.

Завдяки сучасним комп'ютерним технологіям можливості математичного моделювання практично безмежні, але скористатися ними повною мірою вдається лише тим фахівцям, які вільно володіють математичними інструментами.

Підручник призначено насамперед для підготовки студентів економічних спеціальностей. Він також може задовольнити потреби широкої економічної аудиторії –аспірантів, наукових співробітників, викладачів економіки, керівників різного рівня, бізнесменів, менеджерів, фінансистів у дефіцитних на сьогодні підручниках такого роду.

Автор висловлює щиру подяку своїм колегам за цінні зауваження, які були враховані при підготовці підручника.

Розділ 1

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Основні відомості про матриці

Поняття **матриці** та розділ математики **алгебра матриць** мають дуже важливе значення для економістів, оскільки значну частину математичних моделей економічних об'єктів і процесів записують у простій, а головне – компактній матричній формі.

Означення. Матрицею розміром

m на n називають прямокутну таблицю $m \times n$ чисел (елементів матриці) a_{ij} $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, які розташовані у m рядках і n стовпцях; її позначають:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

У скороченому вигляді матрицю записують так:

$$A = (a_{ij}); i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Числа a_{ij} називають **елементами** матриці. Перший індекс i вказує номер **рядка**, другий j – номер **стовпця**, на перетині яких розташований елемент a_{ij} .

Означення. Дві матриці вважають **рівними**, якщо вони мають однакові розміри, а елементи, що розташовані на відповідних місцях, є рівними.

Матриці бувають кількох типів:

1. **Матриця-стовпець** – це матриця, що складена лише з одного стовпця; її позначають:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

2. **Матриця-рядок** – це матриця, що складена лише з одного рядка; її позначають:

$$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n});$$

3. **Нульова матриця** – це матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю; її позначають:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Прямокутна матриця** – це матриця розміром m на n ($m \neq n$).

5. **Квадратна матриця** – це матриця, в якій число рядків m дорівнює числу стовпців n , тобто $m = n$; її позначають:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють її **головну діагональ**, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – **побічну діагональ**. Число n називають **порядком** матриці.

6. **Діагональна матриця** – це квадратна матриця, в якій всі елементи, що розміщені не на головній діагоналі, дорівнюють нулю; її позначають:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

7. **Одинична матриця** – це діагональна матриця, в якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці; її позначають:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

8. **Трикутна матриця** – це квадратна матриця, в якій всі елементи, які розміщені над (під) головною діагоналлю, дорівнюють нулю. Розрізняють верхню та нижню трикутну матриці; їх позначають, відповідно:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.2. Операції над матрицями

З матрицями, як і з числами, можна виконувати певні операції. **Лінійними операціями** над матрицями є операції додавання, віднімання матриць і множення їх на число.

Операції додавання та віднімання матриць визначені лише для матриць однакового розміру.

1.2.1. Додавання та віднімання матриць

Означення. Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ розміром $m \times n$, називають таку матрицю $C = (c_{ij})$ розміром $m \times n$, елементи якої визначено рівністю $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Застосовують запис: $C = A + B$.

Означення. Різницею двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ розміром $m \times n$, називають таку матрицю $D = (d_{ij})$ розміром $m \times n$, елементи якої визначає рівність $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Застосовують запис: $D = A - B$.

Приклад 1.1. Знайти суму та різницю матриць: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

Маємо: $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 1 & 9 & -10 \end{pmatrix}$.

1.2.2. Множення матриці на число

Означення. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число α називають матрицю $B = (b_{ij})$, елементи якої визначає рівність $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Застосовують запис: $B = A\alpha$ або $B = \alpha A$.

Означення. Матрицю $(-1)A$ називають *протилежною* до матриці A й позначають $(-A)$.

Різницю двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ розміром $m \times n$ можна розглядати як суму матриць A та $(-B)$. Застосовують запис: $D = A - B$.

Під *лінійною комбінацією матриць* A та B однакового розміру $m \times n$ із коефіцієнтами α та β розуміють матрицю $\alpha A + \beta B$.

Властивості лінійних операцій над матрицями:

Для довільних матриць $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ і $C = (c_{ij})$ розміром $m \times n$ та чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливі тотожності:

1. $A + B = B + A$

(комутативність додавання матриць)

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

(асоціативність додавання матриць)

3. $A + O = A$

(властивість нульової матриці)

4. $A + (-A) = O$

(властивість протилежної матриці)

$$5. \mathbf{1 \cdot A = A}$$

(властивість поглинання
одиниці)

$$7. \alpha(\mathbf{A + B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

(дистрибутивність множення
матриці на число щодо
додавання матриць)

$$6. \alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$$

(асоціативність множення
матриці на число)

$$8. (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$$

(дистрибутивність множення
матриці на число щодо
додавання чисел)

1.2.3. Множення матриць

Дію множення матриць вводять лише для узгоджених матриць. Матрицю **A** називають *узгодженою* із матрицею **B**, якщо кількість стовпців матриці **A** дорівнює кількості рядків матриці **B**.

Нехай матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ має розмір $m \times n$, а матриця $\mathbf{B} = (b_{ij})$ $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$ має розмір $n \times p$.

Означення. Добутком матриці **A** розміром $m \times n$ на матрицю **B** розміром $n \times p$ називають матрицю $\mathbf{C} = (c_{ij})$ розміром $m \times p$, елементи якої визначає рівність:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Таким чином, щоб дістати елемент c_{ij} матриці **C**, слід знайти суму добутків елементів i -ого рядка матриці **A** на відповідні елементи j -ого стовпця матриці **B**. Очевидно, що матриця $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ матиме при цьому m рядків і p стовпців.

Приклад 1.2. Знайти добуток матриць: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

У результаті множення матриць дістанемо: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що множення матриць – операція не комутативна. Іншими словами, якщо існує добуток $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, то може не існувати добуток $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, але, навіть коли існують обидва, то вони можуть бути нерівними. У загальному випадку $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, зокрема, у прикладі 1.2:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Означення. Якщо $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, то матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ називають *комутативними*.

Властивості операції множення матриць:

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$; 2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$;
3. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$; 4. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$;
5. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$; 6. $\alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{B})$.

Приклад 1.3. Розглянемо спрощену модель фінансової тематики, яку умовно назвемо *портфельними інвестиціями*.

У реальному житті одним із багатьох джерел фінансування є міжнародні інвестиції. Країна може отримувати та надавати міжнародні займи, приймати та інвестувати за кордон капітал. Продаж активів у будь-якій формі (права власності, цінні папери, золото тощо) означає приплив капіталу до країни. Серед інших інвестицій існують також портфельні – вкладення капіталу в іноземні цінні папери, які не дають інвестору права реального контролю над об'єктом інвестування. Такі інвестиції базуються переважно на приватному капіталі.

Припустимо, що інвестори можуть вкладати гроші в активи: *облігації* (дають точний фіксований прибуток), *акції* (дають прибуток, що може змінюватись), *земля*. Наприклад, у певній країні існують дві політичні партії $\mathbf{P}_1$ і $\mathbf{P}_2$, кожна з яких після виборів може прийти до влади. Зрозуміло, що прибуток інвесторів від капіталовкладень залежатиме від того, яким буде державний устрій країни.

Наприклад, уряд партії $\mathbf{P}_1$ може збільшити ціну на землю та зменшити ціну акцій, а уряд партії $\mathbf{P}_2$ – навпаки. Дохід від кожного активу подано у табл. 1.1. див. с. 40

Таблиця 1.1

Активи	Партія $\mathbf{P}_1$	Партія $\mathbf{P}_2$
земля	1,25	0,95
облігації	1,05	1,05
акції	0,90	1,15

Дані таблиці можна записати у вигляді матриці:

$$\mathbf{R} = (r_{ij}), \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,2}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1,25 & 0,95 \\ 1,05 & 1,05 \\ 0,90 & 1,15 \end{pmatrix}.$$

розміром 3×2 , що визначає дохід від кожного активу:

Нехай інвестори прийняли рішення вкласти 5000 ум. гр. од. у придбання землі, 1000 ум. гр. од. – в облігації і 4000 ум. гр. од. – в акції. Одержимо матрицю-рядок розміром 1×3 , яка характеризує портфельні інвестиції: $\mathbf{P} = (5000 \quad 1000 \quad 4000)$.

Добутком матриць $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$ буде матриця розміром 1×2 , яка характеризує можливі доходи інвесторів від вкладених інвестицій, залежно від того, яка партія переможе на виборах – Π_1 чи Π_2 . Отже,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} = (5000 \quad 1000 \quad 4000) \begin{pmatrix} 1,25 & 0,95 \\ 1,05 & 1,05 \\ 0,90 & 1,15 \end{pmatrix} = (10900 \quad 10400).$$

Можна дійти такого висновку: якщо на виборах переможе партія Π_1 , то дохід інвесторів становитиме 10900 ум. гр. од., а якщо переможе партія Π_2 – 10400 ум. гр. од.

У загальному випадку можна розглянути m активів і n партій у країні, тоді добуток матриці $\mathbf{P} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m)$ розміром $1 \times m$, що характеризує портфельні інвестиції, на матрицю доходів від кожного активу $\mathbf{R} = (r_{ij}) \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}$, що виражає дохід на портфельні інвестиції $\mathbf{P}$, буде матриця $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$ розміром $1 \times n$, де j -та компонента якої характеризує дохід від портфельних інвестицій $\mathbf{P}$, якщо до влади прийде партія Π_j , $j = \overline{1,n}$.

1.2.4. Піднесення матриць до степеня

Операцію піднесення до степеня визначено тільки для квадратних матриць.

Означення. Цілим додатним степенем $\mathbf{A}^n$ ($n > 1$) квадратної матриці $\mathbf{A}$ називають добуток n матриць, рівних $\mathbf{A}$, тобто:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ разів}}.$$

За означенням $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$. Легко показати, що:

$$\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}, (\mathbf{A}^n)^m = \mathbf{A}^{n \cdot m}.$$

Приклад 1.4. Знайти $\mathbf{A}^2$, якщо $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Маємо:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо: із рівності $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$ не випливає, що $\mathbf{A}$ – нульова матриця.

Якщо $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то **многочленом** $f(\mathbf{A})$ від матриці $\mathbf{A}$ (**матричним многочленом**) називають вираз:

$$f(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{A}^k + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0.$$

1.2.5. Транспонування матриць

Заміну рядків матриці на її стовпці, а стовпців – на рядки називають транспонуванням матриці. Для кожної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})$ розміром $m \times n$ можна побудувати матрицю $\mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)$ розміром $n \times m$, елементи якої визначає рівність $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Матрицю $\mathbf{A}^T$ називають **транспонованою** до матриці $\mathbf{A}$. Її можна дістати, якщо в матриці $\mathbf{A}$ рядки та стовпці поміняти місцями. Застосовують запис:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5. Для матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ транспонованою

буде матриця $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Отже, після транспонування стовпці (рядки) матриці A розміром 2×3 перетворились на рядки (стовпці) матриці A^T розміром 3×2 .

Властивості операції транспонування матриць:

Для матриць A та B і дійсного числа α справедливі тотожності:

$$1. (A^T)^T = A;$$

$$2. (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3. (\alpha A)^T = \alpha A^T;$$

$$4. (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

1.2.6. Обернена матриця

Ділення для матриць не застосовують, але для квадратних матриць можна побудувати аналог ділення – множення на обернену матрицю.

Означення. *Оберненою матрицею* для квадратної матриці A називають таку матрицю A^{-1} , для якої:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

З'ясування умови існування та знаходження оберненої матриці потребує вивчення важливих числових характеристик матриці таких, як визначник і ранг матриці.

1.3. Визначники квадратних матриць

1.3.1. Індуктивне означення визначника

Матриці використовують при побудові економіко-математичних моделей. Для оперування економічною інформацією, що записана у вигляді матриці, вводять числову характеристику матриці – **визначник** (або **детермінант** від англ. *determinant*). Поняття визначника вводять тільки для квадратної матриці.

Розглянемо квадратну матрицю A n -го порядку. Із кожною такою матрицею пов'яжемо цілком певну числову характеристику – її визначник.

Поняття визначника цієї матриці введемо індуктивно за порядком матриці. Визначник квадратної матриці n -го порядку позначають:

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення. *Визначником квадратної матриці n -го порядку називають числову функцію $\det \mathbf{A}$, тобто число, що обчислюють за правилом:*

1) при $n = 1$ матриця $\mathbf{A} = (a_{11})$, і *визначником матриці першого порядку називають число a_{11} .*

2) при $n > 1$ *визначником матриці n -го порядку називають число:*

$$\det \mathbf{A} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}, \quad (1.1)$$

де $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ – елементи першого стовпця матриці $\mathbf{A}$; M_{i1} – визначник матриці $(n-1)$ -го порядку, яку дістають із $\mathbf{A}$ вилученням її i -го рядка та першого стовпця (**мінор** елемента a_{i1}).

1.3.2. Формули обчислення визначників 2-го та 3-го порядків

Сформульоване означення (1.1) дозволяє обчислювати визначник при $n \geq 2$. Для матриці другого порядку

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ маємо:}$$

$$M_{11} = \det(a_{22}) = a_{22}, \quad M_{21} = \det(a_{12}) = a_{12}.$$

Отже, *визначник матриці другого порядку обчислюють так:*

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1.2)$$

Корисно запам'ятати наступну схему:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Рис. 1.1

Приклад 1.6. Обчислити визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 6 = 44.$$

Для матриці третього порядку:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи означення (1.1), дістанемо:

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, M_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, M_{31} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Отже, **визначник матриці третього порядку** обчислюють так:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}). \quad (1.3)$$

Зауважимо, що кожний доданок алгебраїчної суми в останній формулі є добутком (із відповідним знаком) елементів матриці, які взято лише по одному із кожного рядка та кожного стовпця. Для запам'ятовування знаку добутку корисно знати **правило трикутників**:

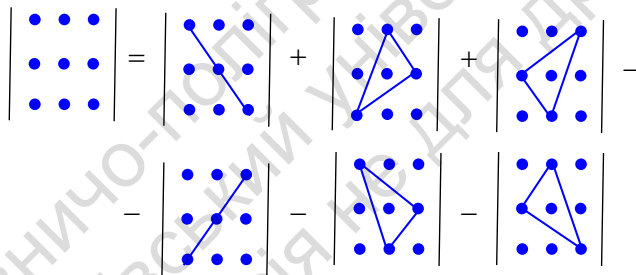


Рис. 1.2

Приклад 1.7. Обчислити визначник третього порядку із застосуванням правила трикутників:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 7 - 7 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 6 \cdot (-1) =$$

$$= 60 - 6 + 84 - 28 - 60 + 18 = 68.$$

На практиці при обчисленні визначників вищих порядків використовують інші формули.

1.3.3. Розкладання визначника за рядком (стовпцем)

Надалі під елементами, рядками та стовпцями визначника розумітимемо елементи, рядки та стовпці відповідної матриці. Розглянемо визначник матриці $\mathbf{A}$ n -го порядку. Виділимо в ньому елемент a_{ij} .

Означення. *Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називають визначник матриці $(n - 1)$ -го порядку, що отримана із матриці $\mathbf{A}$ вилученням її i -го рядка та j -го стовпця.* Наприклад, мінор елемента a_{23} матриці $\mathbf{A}$ третього порядку:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Означення. *Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називають його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.4)$$

тобто алгебраїчне доповнення збігається з мінором, якщо сума номерів рядка та стовпця $(i + j)$ – парне число, і відрізняється від мінору знаком, якщо $(i + j)$ – непарне число, наприклад:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}; A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}.$$

Важливе значення для обчислення визначників має теорема, яка дає змогу звести обчислення визначника матриці n -го порядку до обчислення визначника матриці $(n-1)$ -го порядку.

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Визначник квадратної матриці n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення

$$\det \mathbf{A} = a_{i1} \mathbf{A}_{i1} + a_{i2} \mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{in} \mathbf{A}_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{A}_{ij} \quad (1.5)$$

(розкладання визначника за елементами i -го рядка; $i = \overline{1, n}$),

$$\det \mathbf{A} = a_{1j} \mathbf{A}_{1j} + a_{2j} \mathbf{A}_{2j} + \dots + a_{nj} \mathbf{A}_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{A}_{ij}, \quad (1.6)$$

(розкладання визначника за елементами j -го стовпця; $j = \overline{1, n}$),

Приклад 1.8. Обчислити визначник верхньої трикутної матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (1.6), дістанемо $\det A = a_{11} \cdot M_{11}$, де M_{11} – визначник матриці, яку дістають із A вилученням її перших рядка та стовпця. Продовжуючи далі обчислення, дістанемо:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Аналогічна відповідь має місце й для визначника нижньої трикутної матриці.

Ми переконались, що **визначник трикутної матриці** (очевидно, і **діагональної**) **дорівнює добутку елементів головної діагоналі**.

1.3.4. Обчислення визначника за допомогою властивостей

Означення. *Елементарними перетвореннями матриці* називають:

- 1) перестановку рядків (стовпців);
- 2) множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;
- 3) додавання до рядка (стовпця) іншого рядка (стовпця), що помножений на деяке число.

Означення. Матриці A та B називають **еквівалентними**, якщо одну з них одержано з іншої скінченної кількості елементарних перетворень; їх позначають $A \sim B$.

Метод зведення визначника до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень полягає в перетворенні визначника до вигляду, коли всі елементи, що розташовані по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Цей метод використовують при обчисленнях властивості визначників.

Властивості визначників:

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.
2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то й визначник дорівнює нулю.

3. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний.

4. Спільний множник усіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.

5. Визначник, який має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

6. Якщо i -й рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i -го рядка (стовпця) матриці A та i -го рядка (стовпця) матриці B , а всі інші рядки (стовпці) матриць A , B , C відповідно дорівнюють один одному, то $\det C = \det A + \det B$.

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів його одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число, що відмінне від нуля.

8. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

9. Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.

Приклад 1.9. Обчислити визначник у три способи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

- 1) за правилом трикутників;
- 2) розкладання визначника за елементами першого рядка;
- 3) використовуючи властивості визначника.

Після відповідних обчислень маємо:

$$1) \Delta = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -12;$$

$$2) \Delta = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = -12;$$

3) переставимо місцями перший і третій рядки та винесемо з останнього спільний множник:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі помножимо перший рядок на 2 і додамо до другого, помножимо перший рядок на (-3) і додамо до третього:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Помножимо, нарешті, другий рядок на 2 і додамо до третього та дістанемо:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12.$$

(як визначник верхньої трикутної матриці)

Зауважимо, що саме третій спосіб широко використовують при спрощенні обчислень визначників матриць порядку $n \geq 3$.

Приклад 1.10. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Спочатку додаємо до першого рядка всі інші рядки, а потім винесемо спільний множник 10 із першого рядка за знак визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Помножимо перший рядок послідовно на (-2) , (-3) , (-4) і додамо до другого, третього та четвертого рядків, відповідно, а потім, за теоремою Лапласа, розкладемо визначник за елементами першого стовпчика:

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Знову помножимо перший рядок спочатку на (-1) , а потім – на 3 і додамо до другого й третього рядків, відповідно:

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього та дістанемо:

$$\Delta = 10 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 16 = 160.$$

Алгоритм обчислення визначника n -го порядку:

Крок 1. Перевірити, чи містить визначник:

- 1) нульовий рядок (стовпець);
- 2) однакові або пропорційні рядки (стовпці).

Якщо такі рядки (стовпці) є, то визначник дорівнює нулю.

Крок 2. Вибрати рядок (стовпець), який містить найбільше число нулів, і для зручності поміняти місцями з першим рядком (стовпцем) (це не є обов'язковим).

Якщо у вибраному рядку (стовпці) є елемент, який дорівнює одиниці, то перейти до кроку 3, якщо немає, то поділимо цей рядок (стовпець) на число, відмінне від нуля, щоб утворити одиницю та винести за знак визначника це число у вигляді множника.

Якщо рядка (стовпця) з нульовими елементами немає, необхідно знайти рядок (стовпець), у якому є одиниця та перейти до кроку 3.

Якщо рядків (стовпців) з нулями та одиницями немає, потрібно утворити замість елемента a_{11} одиницю, поділивши весь рядок (стовпець) на цей елемент, винести відповідний множник за знак визначника та перейти до кроку 3.

Крок 3. У вибраному рядку (стовпці) за допомогою елементарних перетворень з відповідними елементами, використовуючи властивості 2, 3, 4 визначників, отримати максимально можливе число нулів (при цьому визначник не змінюється), і перейти до кроку 4.

Крок 4. Розкласти визначник за теоремою Лапласа за тим рядком (стовпцем), який містить найбільше число нулів, і перейти до обчислення визначника $(n-1)$ -го порядку.

Якщо порядок $(n = 2, n = 3)$ отриманого визначника дає таку можливість, потрібно знайти його за відомими формулами. За необхідності повторити кроки 2–4 один або кілька разів.

Крок 5. Записати відповідь.

Приклади обчислення визначників за алгоритмом наведено наприкінці цього розділу.

1.3.5. Знаходження оберненої матриці за допомогою визначників

З'ясуймо умову існування оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$ до квадратної матриці $\mathbf{A}$ порядку n -го, тобто такої матриці $\mathbf{A}^{-1}$, для якої виконується співвідношення $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Означення. Квадратну матрицю називають *невиродженою* або *неособливою*, якщо визначник матриці відмінний від нуля ($\det \mathbf{A} \neq 0$); у протилежному випадку (при $\det \mathbf{A} = 0$) матрицю називають *виродженою*, або *особливою*.

Не кожна квадратна матриця має обернену.

ТЕОРЕМА

(необхідна та достатня умова існування оберненої матриці)

Обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$ існує та єдина тоді й тільки тоді, коли матриця $\mathbf{A}$ не вироджена.

Означення. Матрицю $\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}_{ij})^T$ називають *приєднаною* до матриці $\mathbf{A}$.

Приєднана матриця $\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}_{ij})^T$ є транспонованою до матриці, що складена з алгебраїчних доповнень $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ до елементів a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Обернену матрицю обчислюють за формулою:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \mathbf{A}^* \text{ або } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} , Δ – визначник матриці $\mathbf{A}$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

Крок 1. Знайти визначник заданої матриці:

1) якщо $\det \mathbf{A} = 0$, то матриця $\mathbf{A}$ – вироджена, і для неї не існує оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$;

2) якщо $\det \mathbf{A} \neq 0$, то матриця $\mathbf{A}$ – не вироджена, і для неї існує обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$.

Крок 2. Знайти алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ елементів a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Крок 3. Записати приєднану матрицю:

$$\mathbf{A}^* = (A_{ij})^T.$$

Крок 4. Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ за формулою (1.7).

Крок 5. Перевірити, чи правильно обчислена обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$, згідно з означенням (пункт не є обов'язковим).

Приклад 1.11. Знайти матрицю, обернену для матриці:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Крок 1. Обчислимо спочатку визначник заданої матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Отже, матриця $\mathbf{A}$ – невироджена, і в неї існує обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$.

Крок 2. Послідовно обчислимо алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

Крок 3. Приєднана матриця $\mathbf{A}^* = (A_{ij})^T$ буде такою:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Дістанемо за (1.7):

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Крок 5. Перевіримо, чи вірно обчислено обернену матрицю A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, згідно з означенням, виконується співвідношення:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

тому обернену матрицю знайдено вірно.

Властивості обернених матриць:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$;
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

1.3.6. Ранг матриці

Для дослідження та розв'язання багатьох задач важливе значення має поняття рангу матриці. Якщо в матриці A розміром $m \times n$ виділити будь-які k рядки та k стовпці, то можна виділити квадратні підматриці k -го порядку, де $k \leq \min(m; n)$.

Означення. Визначник k -го порядку, що складений з елементів, які перебувають на перетині виділених k рядків та k стовпців, називають **мінором k -го порядку матриці A** .

Наприклад, із матриці A розміром 3×4 можна отримати мінори першого, другого й третього порядків.

Означення. **Рангом матриці A** називають найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Ранг матриці A позначають $\text{rang } A$ або $r(A)$.

Із означення випливає, що:

- ранг матриці A розміром $m \times n$ такий, що $r(A) \leq \min(m; n)$;
- $r(A) = 0$ тоді й тільки тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю;
- для квадратної матриці n -го порядку $r(A) = n$ тоді й тільки тоді, коли матриця A не вироджена.

Для обчислення ранга матриці використовують наступні елементарні перетворення матриці:

- відкидання нульового рядка матриці;
- множення всіх елементів рядка матриці на число, яке не дорівнює нулю;
- перестановку місцями рядків матриці;
- додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на будь-яке число;
- транспонування матриці.

ТЕОРЕМА

Ранг матриці не змінюється
при застосуванні елементарних перетворень матриці.

Для ранга матриці справедливі наступні співвідношення:

1. $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;
2. $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \geq |r(\mathbf{A}) - r(\mathbf{B})|$;
3. $r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$;
4. $r(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min\{r(\mathbf{A}); r(\mathbf{B})\}$;
5. $r(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \geq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n$, де n – число стовпців матриці $\mathbf{A}$ або рядків матриці $\mathbf{B}$.
6. $r(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$, якщо $\mathbf{B}$ – квадратна матриця і $\det \mathbf{B} \neq 0$.

Приклад 1.12. Знайти ранг матриці:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Серед підматриць 2-го порядку є невинроджена підматриця, тобто існує мінор матриці $\mathbf{A}$ другого порядку, що є відмінним від нуля, наприклад:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Іноді виявляється непотрібним подальше обчислення всіх можливих мінорів третього порядку. Якщо трапиться так, що лише ті мінори третього порядку, що містять Δ_1 як мінор, дорівнюють 0, то ранг матриці $\mathbf{A}$ дорівнюватиме 2. У нашому прикладі мінори:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

що легко підрахувати. Отже, $r = 2$.

$$\text{Матриця } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{є розширеною} \\ \text{матрицею системи.} \end{array}$$

Позначимо через $\mathbf{X}$ та $\mathbf{B}$ матриці-стовпці:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

що складені з невідомих і вільних членів.

Тоді (1.8) набуде вигляду:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}. \quad (1.9)$$

Такий запис системи називають **матричним**.

Розв'язуючи ту чи іншу систему рівнянь, зазвичай насамперед з'ясовують, чи сумісна вона, і потім уже знаходять усі її розв'язки.

1.4.2. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь

Нехай число рівнянь СЛАР (1.8) дорівнює числу невідомих, тобто $m = n$. Тоді основна матриця системи буде квадратною, а її визначник $\Delta = \det \mathbf{A}$ називають **основним визначником системи**.

Припустимо, що матриця $\mathbf{A}$ не вироджена, тобто її визначник $\Delta \neq 0$. У цьому випадку існує обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$, і СЛАР (1.8) записують у матричному вигляді (1.9):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Помножимо зліва обидві частини рівності на матрицю $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Оскільки $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$, то розв'язком системи буде матриця-стовпець:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Алгоритм розв'язання СЛАР у матричний спосіб:

Крок 1. Записати: основну матрицю СЛАР – $\mathbf{A}$, матрицю-стовпець невідомих $\mathbf{X}$ і матрицю-стовпець вільних членів $\mathbf{B}$.

Крок 2. Обчислити визначник матриці $\mathbf{A}$:

1) якщо $\det \mathbf{A} = 0$, записати у відповідь: систему матричним методом розв'язати неможливо;

2) якщо ж $\det \mathbf{A} \neq 0$, то переходимо до наступного кроку.

Крок 3. Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$.

Крок 4. Знайти добуток матриць $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Записати відповідь за (1.10): $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Бажано зробити перевірку.

Приклад 1.13. Розв'язати СЛАР у матричний метод:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Крок 1. У нашому випадку:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Обчислимо визначник матриці $\mathbf{A}$: $\Delta = -16 \neq 0$.

Отже, матриця $\mathbf{A}$ – невироджена, і для неї існує єдина обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$.

Крок 3. Ураховуючи результат із прикладу 1.11, де обчислено обернену матрицю до матриці $\mathbf{A}$, маємо за (1.10):

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, система має розв'язок:

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 2.$$

Крок 4. Підставивши отримані значення невідомих до рівнянь заданої системи (зробивши перевірку) переконуємось, що всі рівняння перетворюються на тотожності.

1.4.3. Формули Крамера

Формули Крамера для розв'язання СЛАР (1.8) використовують тоді й лише тоді, коли основна матриця **A** – квадратна невинроджена матриця (число рівнянь системи m (1.8) дорівнює числу невідомих n та її визначник $\Delta \neq 0$).

ТЕОРЕМА Крамера

Система n лінійних рівнянь з n невідомими, основний визначник якої Δ відмінний від нуля, завжди сумісна та має єдиний розв'язок, що визначають за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (1.11)$$

де $\Delta_j, j=1, \dots, n$ – визначник, який отримують із визначника Δ заміною j -го стовпця на стовпець вільних членів.

Зауваження: якщо $\Delta = 0$, а серед Δ_j є визначники, відмінні від нуля, то система (1.8) при $m = n$ несумісна.

У випадку однорідної системи при $\Delta \neq 0$ система має лише нульовий розв'язок; якщо ж $\Delta = 0$, то, крім нульового, така система має також й інші розв'язки, тобто буде невизначена.

Алгоритм розв'язання СЛАР

за допомогою визначників (метод Крамера):

Крок 1. Записати основну матрицю системи **A**.

Крок 2. Обчислити визначник Δ матриці **A**:

1) якщо $\Delta = 0$, то записати відповідь: методом Крамера систему розв'язати неможливо;

2) якщо $\Delta \neq 0$, то переходимо до наступного кроку.

Крок 3. Записати та обчислити визначники:

$$\Delta_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Крок 4. Знайти невідомі за (1.11):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Приклад 1.14. Розв'язати СЛАР за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ -9x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Обчислимо основний визначник Δ , а також визначники $\Delta_j, j = 1, 2, 3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & 2 \\ -9 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -9 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 7 & -5 & 0 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

За формулами Крамера (1.11) дістанемо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Після знаходження розв'язку системи варто зробити перевірку, підставивши знайдені значення змінних до рівняння системи, і переконатися в тому, що вони перетворюються на тотожності.

Недоліком розв'язання систем n лінійних рівнянь з n змінними за формулами Крамера та у матричний спосіб є їх велика трудомісткість, що пов'язана з обчисленням визначників і знаходженням оберненої матриці, у випадку $n \geq 3$.

1.4.4. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь

Розглянемо СЛАР (1.8) m лінійних рівнянь з n невідомими у загальному випадку. Оскільки як метод оберненої матриці, так і метод Крамера є дуже трудомісткими, то їх не часто застосовують для розв'язання реальних економічних задач. Існують простіші методи розв'язування СЛАР, що базуються на попередньому перетворенні розширеної матриці системи до спеціального виду. Одним з таких методів є метод Гаусса.

Метод Гаусса – метод послідовного виключення невідомих – полягає в тому, що за допомогою елементарних перетво-

рень систему рівнянь зводять до рівносильної системи, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходять усі інші змінні.

До елементарних перетворень системи належать:

- 1) множення рівняння системи на число, відмінне від нуля;
- 2) додавання до одного рівняння системи іншого, що помножене на будь-яке число;
- 3) перестановка місцями двох рівнянь системи.

Елементарні перетворення СЛАР приводять до відповідних елементарних перетворень рядків матриці та розширеної матриці системи.

Означення. Системи лінійних алгебричних рівнянь, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають **еквівалентними**. Еквівалентні СЛАР рівносильні.

Алгоритм розв'язання СЛАР методом Гаусса:

Крок 1. Припустимо, для визначеності, що $a_{11} \neq 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то можна перестановкою рівнянь досягти цього).

Помножимо перше рівняння на $-(a_{21}/a_{11})$ і додамо до другого рівняння цієї системи. Дістанемо друге рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 дорівнює нулю. Помножимо перше рівняння на $-(a_{31}/a_{11})$ і, додавши до третього, дістанемо третє рівняння, яке також не містить змінної x_1 . Проведемо аналогічні дії над усіма іншими рівняннями – помножимо послідовно на відповідні числа: $-(a_{41}/a_{11}), \dots, -(a_{m1}/a_{11})$ і, додаючи до четвертого, ..., m -го рівняння, виключимо x_1 з цих рівнянь і дістанемо систему, що еквівалентна (1.8):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m1}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array} \right.,$$

де $a_{22}^{(1)}, \dots, a_{2n}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, \dots, a_{3n}^{(1)}, a_{m1}^{(1)}, \dots, a_{mn}^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_m^{(1)}$ – нові коефіцієнти та вільні члени. Індекс у дужках означає, що нові коефіцієнти отримані після першого кроку.

Крок 2. На другому кроці, припускаючи для визначеності, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$ і зберігаючи перші два рівняння останньої системи, перетворимо її так, щоб в усіх інших рівняннях коефіцієнти при x_2 перетворилися на нуль.

Крок 3. Продовжуючи цей процес послідовного виключення невідомих аналогічним чином (коли на третьому кроці перетворюють рядки з четвертого до останнього, на четвертому кроці – з п'ятого до останнього і т. д.) до моменту, доки не дійдемо до останнього рядка. Після деякого кроку початкову СЛАР (1.8) можна звести до однієї системи із трьох:

1) системи виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots, \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases}$$

Така система, як і початкова, має єдиний розв'язок, що знаходять так: значення x_n – з останнього рівняння, x_{n-1} – із попереднього й т. д. з першого рівняння значення x_1 ;

2) системи виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(1)}x_k + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots, \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}, \end{cases}$$

де $k < n$. Така система має нескінченне число розв'язків. Залишаємо члени із першими k невідомими на своїх місцях, а решту – переносимо праворуч, надаючи їм довільних значень. Дістанемо систему k рівнянь із k невідомими трикутного вигляду. Її легко розв'язати послідовно: з останнього рівняння знаходять значення x_k і так далі з першого значення x_1 , причому довільному набору невідомих $x_{k+1}, \dots, x_n$ відповідає певний набір $x_1, x_2, \dots, x_k$. Зважаючи на те, що наборів $x_{k+1}, \dots, x_n$ існує безліч, дістанемо, що початкова система невизначена;

3) системи виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(1)}x_k = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots, \\ 0 \cdot x_k = b_k^{(k-1)}, \end{array} \right.$$

де $k \leq n$. Така система несумісна, оскільки жодні значення невідомих не можуть задовольнити її останнє рівняння.

Крок 4. Записати відповідь і зробити перевірку.

Перехід від заданої системи до однієї з трьох останніх систем, що рівносильні їй, називають **прямим ходом методу Гаусса**, а знаходження невідомих з останньої системи – **зворотним ходом**.

Метод Гауса успішно застосовують для будь-якої СЛАР (1.8), причому елементарні перетворення виконують не над рівняннями цієї системи, а над рядками розширеної матриці $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Покажемо на прикладах як це зручно робити для використання методу.

Приклад 1.15. Розв'язати СЛАР за методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю системи $(A|B)$ і виконаємо елементарні перетворення над її рядками:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \end{array} \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Виконано такі елементарні перетворення над рядками матриці:

- перший рядок матриці помножено на (-2) , (-1) , (-3) і додано до другого, третього й четвертого рядків, відповідно;
- другий і третій рядки поміняно місцями, а четвертий – помножено на $(-1/4)$;
- другий рядок послідовно помножено на (-3) та 1 і додано до третього й четвертого;
- четвертий і третій рядки поміняно місцями;
- третій рядок помножено на 5 і додано до четвертого;
- четвертий рядок поділено на 3.

Отриманій розширеній матриці відповідає трикутна СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_4 = -2, \\ x_3 - 2x_4 = -5, \\ x_4 = 4, \end{cases}$$

розв'язок якої легко знайти:

$$x_4 = 4, x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1.$$

Отже, початкова система має розв'язок $(1; 2; 3; 4)$.

Підставивши отримані значення до рівняння початкової системи, переконуємось, що вони перетворюються на тотожності.

Приклад 1.16. Розв'язати СЛАР методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю $(A|B)$ і виконаємо над її рядками необхідні елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & | & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & | & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & | & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_3 - 5x_4 = -8 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 + x_4, \\ 2x_2 + x_3 = 1 + x_4, \\ 2x_3 = 5x_4 - 8. \end{cases}$$

Її легко розв'язати так: з останнього рівняння знаходимо змінну x_3 , з другого – змінну x_2 , із першого – змінну x_1 . Маємо:

$$x_3 = \frac{5}{2} \cdot x_4 - 4, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} \cdot x_4, \quad x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} \cdot x_4,$$

де x_4 набуває довільних значень. Отже, початкова СЛАР має розв'язки:

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4} \cdot x_4; \frac{5}{2} - \frac{3}{4} \cdot x_4; \frac{5}{2} \cdot x_4 - 4; x_4 \right), \text{ де } x_4 - \text{довільне число.}$$

Приклад 1.17. За методом Гаусса розв'язати СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю $(A|B)$ системи та виконаємо над її рядками необхідні елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ 1 & 9 & -6 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -7 & 5 & | & 4 \\ 0 & 7 & -5 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -7 & 5 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{pmatrix}.$$

Система, яка відповідає останній матриці, несумісна, оскільки її останній рядок відповідає рівнянню, в якому всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля.

Процедуру перетворення розширеної матриці системи прямим ходом методу Гаусса до зведеного східчастого вигляду, можливе відкидання нульових рядків, і подальше перетворення розширеної матриці до одиничної матриці зворотним ходом методу Гаусса, називають *методом повного виключення невідомих* або *методом Гаусса-Жордана*.

1.4.5. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса

Метод Гаусса є універсальним при розв'язанні СЛАР. Його можна застосовувати для обчислення оберненої матриці.

Алгоритм знаходження

оберненої матриці методом Гаусса:

Крок 1. Якщо до матриці **A** праворуч через риску дописати одиничну матрицю **E**, то отримаємо матрицю **(A|E)**;

Крок 2. Шляхом елементарних перетворень над рядками матриці **(A|E)**, матрицю **A** звести до одиничної матриці **E**.

Після закінчення цього процесу на місці матриці **A** буде сформована одинична матриця, а на місці поданої праворуч одиничної матриці **E** – обернена матриця **A⁻¹**, тобто замість матриці **(A|E)** у результаті отримаємо матрицю **(E|A⁻¹)**.

Крок 3. Записати у відповідь обернену матрицю **A⁻¹**.

Приклад 1.18. Знайти матрицю, що обернена до поданої:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Крок 1. До матриці **A** праворуч допишемо одиничну матрицю **E**.

Крок 2. За допомогою елементарних перетворень над рядками матриці **(A|E)** матрицю **A** зводять до одиничної матриці:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Крок 3. Отже, отримано обернену матрицю:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко безпосередньо перевірити правильність виконаних обчислень за означенням $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

1.4.6. Дослідження та розв'язання загальних СЛАР

У загальному випадку розв'язати СЛАР означає:

- 1) з'ясувати, є система сумісною чи несумісною;
- 2) якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

Нехай задано СЛАР загального вигляду (1.8), в якій число невідомих n не менше від числа рівнянь m . Розглянемо основну матрицю $\mathbf{A}$ та розширену матрицю $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ системи. Питання про сумісність системи m лінійних рівнянь з n невідомими розв'язує наступна теорема.

ТЕОРЕМА (Кронекера–Капеллі)

Система лінійних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг $r(\mathbf{A})$ основної матриці системи дорівнює рангу $r(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ розширеної матриці цієї системи.

За цією теоремою, якщо ранги основної і розширеної матриць не рівні, то система несумісна й немає сенсу її розв'язувати.

Якщо ранги матриць рівні, то система сумісна. Для сумісних систем лінійних рівнянь справедливі такі випадки:

1. Якщо ранг матриці сумісної системи дорівнює числу невідомих, тобто $r = n$, то система (1.8) має єдиний розв'язок. У цьому випадку основна матриця системи (1.8) – квадратна матриця порядку r і є невиродженою. За теоремою Крамера існує єдиний розв'язок цієї системи, тобто система визначена.

2. Якщо ранг матриці сумісної системи менше числа невідомих, тобто $r < n$, то система невизначена та має нескінченну кількість розв'язків.

Нехай $r < n$, тоді невідомі $x_1, x_2, \dots, x_r$ називають **основними** або **базисними**, якщо визначник матриці з коефіцієнтів при

цих невідомих (тобто базисний мінор) відмінний від нуля. Останні $n - r$ невідомі називають **неосновними** або **вільними**.

Можна показати, що базисні невідомі $x_1, x_2, \dots, x_r$ лінійно виражають через вільні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати довільних значень, то в цьому випадку система буде невизначеною.

Розв'язок системи (1.8), де всі $(n - r)$ неосновних невідомих дорівнюють нулю, називають **базисним**.

Приклад 1.19. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишемо основну $\mathbf{A}$ та розширену $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ матриці системи:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Їх ранги: $r(\mathbf{A}) = 2, r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$. Отже, система несумісна.

Алгоритм розв'язування СЛАР методом Гаусса–Жордана:

Крок 1. Записують розширену матрицю системи $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

Крок 2. Зводять розширену матрицю до східчастого вигляду $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ (прямий хід методу Гаусса).

Крок 3. Досліджують систему на сумісність (теорема Кронекера–Капеллі).

Крок 4. За сумісності перетворюють східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду (зворотний хід методу Гаусса).

Крок 5. Знаходять розв'язки одержаної системи. Можливі випадки, за яких:

- 1) кількість змінних дорівнює рангу матриці системи $n = r$;
- 2) кількість змінних n більша від кількості рівнянь r ($n > r$);
- 3) кількість змінних n менша від кількості рівнянь r ($n < r$).

Крок 6. Записують загальний розв'язок системи.

Приклад 1.20. Розв'язати СЛАР методом Гаусса–Жордана:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \end{cases}$$

Крок 1. Записуємо розширену матрицю системи:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Крок 2. Зводимо елементарними перетвореннями рядків розширену матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right).$$

Крок 3. Оскільки $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$ (східчастий вигляд як матриці системи $\mathbf{A}$, так і розширеної матриці системи $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ містить два ненульові рядки), то система сумісна.

Крок 4. Продовжуючи перетворення, зводимо матрицю до зведеного східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Крок 5. Отже, x_1 та x_3 – базисні змінні, а x_2, x_4, x_5 – вільні змінні, яким можна надати довільних значень. Випишемо систему, яка відповідає перетвореній розширеній матриці, і виражаємо з неї базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_4 = 1, \\ x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 + \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = \frac{2}{3}x_4 - x_5. \end{cases}$$

Крок 6. Записуємо загальний розв'язок системи:

$$\left(1 - 2x_2 + \frac{1}{3}x_4, x_2, \frac{2}{3}x_4 - x_5, x_4, x_5 \right), \quad x_2, x_4, x_5 \in R.$$

1.5. Лінійні економічні моделі

1.5.1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз)

Розглянемо спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу. Зв'язок між галузями зазвичай відображають у таблицях міжгалузевого балансу. Математичну модель, яка дозволяє аналізувати таблиці, розроблено американським економістом В. Леонтьєвим 1936 року.

Припустимо, що весь виробничий комплекс поділено на n "чистих" галузей. Чисті галузі є економічною абстракцією (тобто умовними), кожна з яких об'єднує все виробництво певного виду продукції. Вважатимемо, що кожна із галузей випускає лише певний продукт, причому різні галузі випускають різні продукти. У процесі виробництва кожна із галузей має потребу у продукції, що вироблена в інших галузях.

Мета балансового аналізу – дати відповідь на запитання, яке виникає в макроекономіці та пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної із галузей для задоволення всіх потреб у продукції цієї галузі та інших галузей? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції.

Основні припущення моделі, яку надалі називатимемо *моделлю Леонтьєва*:

- в економічній системі виробляють, купують, споживають та інвестують n видів продукції, які позначимо індексами $i = 1, 2, \dots, n$;

- кожна галузь виробляє лише один вид продукції, тобто спільне виробництво різних продуктів виключено. Різні галузі виробляють різні продукти, тому галузь, що виробляє продукцію виду i , позначатимемо тим самим індексом;

- під виробничим процесом у кожній галузі розумітимемо перетворення деяких (можливо всіх) видів продукції у певних обсягах, на деякий обсяг продукції того чи іншого виду. При цьому припускаємо, що співвідношення витраченої і випущеної продукції є сталим.

Нехай економіко-виробнича система містить n галузей, тобто виробляє n продуктів. Міжгалузовий баланс у вартісній формі подано у табл. 1.2, де вказано основні показники та зв'язки виробництва за певний період часу (зазвичай рік).

Введемо позначення:

X_i – обсяг загальної (валової) продукції i -ої галузі ($i = 1, 2, \dots, n$) за одиницю часу (напр., за рік);

x_{ij} – обсяг продукції i -ої галузі, що потребує j -та галузь у процесі виробництва ($i, j = 1, 2, \dots, n$);

Y_i – обсяг кінцевої продукції i -ої галузі для невикористаного споживання.

Використовуючи дані табл. 1.2, запишемо квадратну матрицю n -го порядку (за умовою рівності поданих у балансі галузей виробництва та споживачів продукції).

Таблиця 1.2

Галузі виробництва	Розподіл випуску продукції у галузях виробництва							Обсяг продукції	
	1	2	...	j	...	n	Усього	кінцевої	валової
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	$\sum_{j=1}^n x_{1j}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	$\sum_{j=1}^n x_{2j}$	Y_2	X_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	$\sum_{j=1}^n x_{ij}$	Y_i	X_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	$\sum_{j=1}^n x_{nj}$	Y_n	X_n
Разом	$\sum_{i=1}^n x_{i1}$	$\sum_{i=1}^n x_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^n x_{ij}$	...	$\sum_{i=1}^n x_{in}$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$	Y	X

Кожен елемент матриці x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ характеризує обсяг поставки продукції з i -ої галузі, що використовують на виробниче споживання в j -й галузі. Якщо підсумувати міжгалузеві поставки продукції i -ої галузі за всіма галузями-споживачами, то одержимо загальну величину проміжного продукту i -ої галузі:

$$X'_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Сума проміжних продуктів всіх галузей виробників становить загальну величину проміжного продукту:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} = X'.$$

За економічним змістом обсяг проміжної продукції – це та частина обсягу валової продукції, яка залишилася після виключення кінцевого продукту та спрямована на відшкодування поточних матеріальних витрат у межах певного періоду часу, який розглядають.

Оскільки валовий обсяг будь-якої i -ої галузі дорівнює сукупному обсягу продукції, що споживають n галузей, і кінцевого продукту, то:

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + Y_1, \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + Y_2, \\ \dots, \\ X_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + Y_i, \\ \dots, \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + Y_n, \end{cases} \quad (1.12)$$

або у скороченій формі:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.13)$$

Рівняння (1.12)–(1.13) називають **співвідношеннями балансу**.

Розглянемо **міжгалузовий баланс у вартісній формі**, коли всі величини, що входять до (1.12), виражають вартість. Особливостями системи (1.12) є те, що змінні в ній містяться у першому степені, тому залежність між обсягом валового виробництва та розподілом продукції кожної галузі лінійна.

Зауважимо, що величини x_{ij} , X_i , Y_i можна виражати у натуральних одиницях виміру (штуки, літри тощо). Тоді йдеться про **міжгалузовий баланс у натуральній формі**.

При побудові та практичних застосуваннях економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу використовують

коефіцієнти прямих матеріальних витрат. Якщо обсяг міжгалузевих поставок i -ої галузі до j -ої поділити на обсяг валової продукції j -ої галузі, то одержимо шуканий норматив:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad (1.14)$$

де a_{ij} – **коефіцієнт прямих витрат** продукції i -ої галузі на одиницю валового випуску j -ої галузі ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$). Ці коефіцієнти утворюють квадратну **матрицю коефіцієнтів прямих витрат**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку інколи називають **матрицею технологічних коефіцієнтів** (або **технологічною матрицею**). Матриця A містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, які існують у певній економіко-виробничій системі технології виробництва. Із рівності (1.14) випливає, що:

$$x_{ij} = a_{ij}X_j. \quad (1.15)$$

Підставимо (1.15) до (1.13) і дістанемо систему:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j + Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.16)$$

Запишемо (1.16) у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{або}$$

$$X = AX + Y. \quad (1.17)$$

Співвідношення (1.17) є **рівнянням лінійного міжгалузевого балансу**. Це рівняння із вказаними позначеннями та припущеннями ще називають **моделлю Леонтьєва**.

Основна задача міжгалузевого балансу – знаходження такої матриці обсягів валової продукції X , яка за відомої мат-

риці прямих витрат **A** забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції **Y**.

Перепишемо (1.17) у вигляді:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y}. \quad (1.18)$$

Якщо матриця $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ не вироджена, то:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Y}. \quad (1.19)$$

Матрицю $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ називають *матрицею повних витрат*.

Економічний зміст елементів матриці повних витрат **B** такий: кожен елемент b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) матриці **B** є обсягом валової продукції i -ої галузі, що необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j -ої галузі.

За економічним змістом задачі величини X_i мають бути невід'ємними за невід'ємних значень $Y_i \geq 0$ та $a_{ij} \geq 0$.

Міркування про сумісність системи (1.17) зводиться до питання про існування оберненої матриці $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, що складена із невід'ємних чисел.

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках. У першому (простішому) випадку, коли відомо матрицю валової продукції **X**, потрібно розрахувати матрицю обсягів кінцевої продукції **Y**.

Приклад 1.21. Нехай матриця обсягу валової продукції галузі та матриця коефіцієнтів прямих витрат відповідно мають вигляд:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (1.18) і правило множення матриць, одержимо матрицю обсягів кінцевого продукту, що призначений для реалізації:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Означення. Матрицю **A**, усі елементи якої невід'ємні, називають *продуктивною*, якщо для довільної матриці **Y** з невід'ємними елементами існує розв'язок рівняння (1.17) – матриця **X**, усі елементи якої невід'ємні. У такому випадку модель Леонтьєва називають *продуктивною*.

Існує кілька критеріїв продуктивності матриці **A**.

Користуватимемося таким критерієм продуктивності.

Критерій продуктивності: матриця **A** з невід'ємними елементами продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому принаймні для одного зі стовпців сума елементів строго менша від одиниці, тобто матриця **A** продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для довільних $i, j = 1, 2, \dots, n$ та:

$$\max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1 \text{ та існує номер } j \text{ такий, що } \sum_{i=1}^n a_{ij} < 1.$$

У другому випадку рівняння міжгалузевого балансу використовують для планування.

Приклад 1.22. Розглянемо умовну виробничу систему, яка складається із трьох галузей. Коефіцієнти прямих витрат одиниць продукції i -ої галузі, які використовують для випуску одиниць j -ої галузі, та обсяги кінцевої продукції задано у табл. 1.3 (в ум. гр. од.). Визначити:

- коефіцієнти повних витрат;
- матрицю валового випуску **X** і план кожної галузі;
- коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Таблиця 1.3

Галузі виробництва	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	1	2	3	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Позначимо **X** – матрицю обсягів валової продукції, яка визначає виробничу програму галузей:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, X_1, X_2, X_3 - \text{планові обсяги валової продукції галузей.}$$

У нашому прикладі матриці технологічних коефіцієнтів та обсягів кінцевої продукції:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Виробничі зв'язки галузей задовольняють умовам:

$$\begin{cases} X_1 - (0 \cdot X_1 + 0,2 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3) = 200, \\ X_2 - (0,2 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0,1 \cdot X_3) = 100, \\ X_3 - (0 \cdot X_1 + 0,1 \cdot X_2 + 0,2 \cdot X_3) = 300, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 - 0,2X_2 = 200, \\ -0,2X_1 + X_2 - 0,1X_3 = 100, \\ -0,1X_2 + 0,8X_3 = 300. \end{cases}$$

Запишемо систему у матричному вигляді $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Тоді матриця:

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, для чого обчислимо визначник матриці $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,76.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$\begin{aligned} B_{11} &= 0,79, & B_{21} &= 0,16, & B_{31} &= 0,02, \\ B_{12} &= 0,16, & B_{22} &= 0,8, & B_{32} &= 0,1, \\ B_{13} &= 0,02, & B_{23} &= 0,1, & B_{33} &= 0,96. \end{aligned}$$

Обернена матриця має вигляд:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \approx \frac{1}{0,76} \cdot \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,16 & 0,8 & 0,1 \\ 0,02 & 0,1 & 0,96 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Y} \approx \frac{1}{0,76} \cdot \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 0,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 236,84 \\ 186,84 \\ 397,39 \end{pmatrix}.$$

При обчисленні оберненої матриці всі числа округлено до сотих. Маємо плани валового випуску продукції для галузей $X_1 = 236,84$, $X_2 = 186,84$, $X_3 = 397,39$ ум. гр. од., відповідно.

Визначимо виробничу програму кожної галузі, використовуючи коефіцієнти a_{ij} :

$$\begin{aligned}x_{11} &= a_{11}X_1 = 0 \cdot 236,84 = 0, & x_{23} &= a_{23}X_3 = 0,1 \cdot 397,39 = 39,74, \\x_{12} &= a_{12}X_2 = 0,2 \cdot 186,84 = 37,37, & x_{31} &= a_{31}X_1 = 0 \cdot 236,84 = 0, \\x_{13} &= a_{13}X_3 = 0 \cdot 397,39 = 0, & x_{32} &= a_{32}X_2 = 0,1 \cdot 186,84 = 18,68, \\x_{21} &= a_{21}X_1 = 0,2 \cdot 236,84 = 47,37, & x_{33} &= a_{33}X_3 = 0,2 \cdot 397,39 = 79,47. \\x_{22} &= a_{22}X_2 = 0 \cdot 186,84 = 0,\end{aligned}$$

Коефіцієнти непрямих (*посередницьких*) витрат c_{ij} матриці **C** визначають як різницю внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці **B**) і прямих витрат (елементи матриці **A**).

У матричному вигляді матриця коефіцієнтів непрямих витрат:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,01 & 0,03 \\ 0,01 & 1,05 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 1,07 \end{pmatrix}.$$

1.5.2. Модель рівноважних цін

Розглянемо тепер балансову модель, яку називають *моделлю рівноважних цін*. Нехай задано матриці:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

де **A** – матриця прямих витрат, **X** – матриця обсягів валової продукції, **P** – матриця цін, i -й елемент якої дорівнює ціні одиниці продукції i -ої галузі, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тоді, наприклад, перша галузь одержить доход, який дорівнює p_1x_1 . Частину свого доходу ця галузь витратить на закупівлю продукції інших галузей. Для випуску одиниці продукції їй необхідна продукція першої галузі в обсязі a_{11} , дру-

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n.$$

Отже, для випуску продукції в обсязі x_1 першої галузі необхідно витратити на закупку продукції інших галузей суму:

Частину доходу, що залишилась, позначимо V_1 (її називають **доданою вартістю**, що йде на виплату заробітної плати, податків, на підприємницький прибуток та інвестиції). Таким чином, має місце така рівність:

Поділимо її на x_1 і дістанемо $p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_n) + W_1$,

Аналогічно запишемо рівності для інших галузей, дістанемо систему:

Отриману СЛАР можна записати у матричній формі:

Тут A^T – транспонована матриця до матриці A , W – матриця норм доданої вартості, де $W_i = V_i / x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Бачимо, що (1.21) дуже схожі на рівняння моделі Леонтьєва. Відрізняються вони тим, що матрицю обсягів валової продукції $\mathbf{X}$ замінено на матрицю цін $\mathbf{P}$, матрицю обсягів кінцевої продукції $\mathbf{Y}$ – на матрицю додаткової вартості $\mathbf{W}$, матрицю $\mathbf{A}$ – на $\mathbf{A}^T$.

Модель рівноважних цін дозволяє за відомих величин норм доданої вартості прогнозувати ціни на продукцію галузей, зміни цін та інфляцію, що є наслідком зміни ціни в одній із галузей.

Приклад 1.23. Розглянемо тригалузеву економічну систему, (видобування та переробка вугілля, виробництво електро-

енергії та машинобудування). Нехай задано транспоновану матрицю прямих витрат A^T і матрицю додаткової вартості W :

$$A^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Визначимо рівноважні ціни. Для цього скористаємося (1.21):

$$P = A^T \cdot P + W \text{ або } (E - A^T)P = W,$$

звідки $P = (E - A^T)^{-1} W$, де $B = (E - A^T)^{-1}$ – транспонована матриця повних витрат. Після необхідних обчислень дістанемо:

$$B = \frac{1}{0,45} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}, \text{ тоді } P = B \cdot W = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

1.5.3. Лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянемо *лінійну модель обміну*, яку часто інтерпретують як *модель міжнародної торгівлі*, що дозволяє визначити торгові доходи країн (або їх співвідношення) для збалансованої торгівлі. Нехай існує група з n країн $K_1, K_2, \dots, K_n$, які здійснюють торговельні відносини. Позначимо торговий дохід j -ої країни через X_j , $j = \overline{1, n}$, який формується із продажу власних товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках. Структуру торговельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частина q_{ij} торгового доходу X_j , яку j -ої країна витрачає на покупку товарів i -ої країни є сталою.

Розглянемо матрицю, яку називають *структурною матрицею торгівлі*:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

Вважатимемо, що весь торговий дохід витрачають або на закупку товарів на території своєї країни, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпчика матриці Q дорівнює одиниці:

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.22)$$

Для країни K_i дохід від внутрішньої і зовнішньої торгівлі:

$$X_i = q_{i1}X_1 + q_{i2}X_2 + \dots + q_{in}X_n, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для збалансованої торгівлі необхідно знайти таку матрицю торгових доходів:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

щоб виконувалась матрична рівність

$$\mathbf{QX} = \mathbf{X}. \quad (1.23)$$

Приклад 1.24. Розглянемо три країни – учасниці торгових відносин із торговими доходами X_1, X_2, X_3 , які умовно назовемо США, Німеччина та Кувейт. Вважатимемо, що весь торговий дохід кожної країни витрачають на закупку товарів на території своєї країни або на імпорт з інших країн. Припустимо, що США витрачають половину свого доходу на закупку товарів на своїй території, $1/4$ доходу – на товари із Німеччини та $1/4$ доходу – на товари із Кувейту. Німеччина витрачає порівну свій дохід на закупівлю товарів у США, на своїй території і в Кувейті. Кувейт, у свою чергу, витрачає половину доходу на закупку товарів зі США, половину – із Німеччини та нічого не закупає на території своєї країни.

Запишемо структурну матрицю торгівлі:

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{США} & \text{Німеччина} & \text{Кувейт} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Нехай q_{ij} – частина доходу, яку j -та країна витрачає на закупку товарів i -ої країни.

Зазначимо, що сума елементів матриці $\mathbf{Q}$ у кожному стовпці дорівнює одиниці.

Після підведення підсумків торгівлі за рік країна за номером i отримує прибуток $p_i = q_{i1}X_1 + q_{i2}X_2 + q_{i3}X_3$, $i = 1, 2, 3$.

Запишемо систему рівнянь для знаходження $\mathbf{X}$: $\mathbf{QX} = \mathbf{X}$ або $(\mathbf{Q} - \mathbf{E})\mathbf{X} = 0$. У нашому прикладі:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & -2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи $X_1 = 2X_3$, $X_2 = (3/2) \cdot X_3$, $X_3 \in R$.

Отриманий результат означає, що збалансованості торгівлі ці країни досягають за співвідношення їх торгових доходів $2 : 3/2 : 1$. Якщо потрібно визначити доходи країн, які задовольняють збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що суму доходів задано в умовних грошових одиницях:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 9000,$$

то підстановка до цієї рівності значення:

$$X_1 = 2C, X_2 = (3/2) \cdot C, X_3 = C,$$

де $C = \text{const}$, дає $2C + (3/2)C + C = 9000$. Звідси $C = 2000$.

Отже,

$$X_1 = 4000, X_2 = 3000, X_3 = 2000 \text{ (ум. гр. од.)}.$$

Зазначимо, що тут наведено спрощені варіанти моделей міжгалузевого балансу та міжнародної торгівлі.

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Що називають матрицею? Які види матриць ви знаєте?
2. Які операції над матрицями називають лінійними?
3. Яку матрицю називають сумою матриць?
4. Яку матрицю називають різницею матриць?

Приклад 1. Знайти суму матриць:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Яку матрицю називають добутком матриці на число?

Приклад 2. Знайти матрицю $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
 $2\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$, якщо:

$$2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}; 5\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}; 2\mathbf{A} + 5\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

6. Для яких матриць визначають дію множення матриць?

7. Яку матрицю називають добутком матриць?

8. Які властивості множення матриць ви знаєте?

Приклад 3. Знайти добуток матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ та $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, якщо: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти добуток матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+8-3 \\ 0-4+9 \\ 4+12-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти добуток матриць $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ і $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, якщо:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти значення матричного многочлена:

$$f(\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 5\mathbf{E},$$

де дано матриці $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$2\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$5\mathbf{E} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } f(\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

9. Як обчислюють визначник квадратної матриці 2-го, 3-го, ... n -го порядків?

10. Які властивості визначників ви знаєте?

Приклад 7. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Маємо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 16 = -1.$$

Приклад 8. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \cdot 3 = -20.$$

Приклад 9. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Оскільки спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника, то виносимо спочатку із першого та другого рядків 2, а потім – із третього стовпця 2 та обчислюємо визначник за правилом трикутників:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \cdot (3 - 4) = 8.$$

Приклад 10. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Від елементів першого стовпця відні-
 мемо елементи третього, помножені на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

До елементів другого стовпця додає-
 мо елементи третього стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) - 7 \cdot 7 = 3 - 49 = -46.$$

$$(-1) \cdot (-3) - 7 \cdot 7 = 3 - 49 = -46.$$

Приклад 11. Обчислити визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

Виконаємо такі дії:

- від елементів першого рядка віднімемо елементи друго-
 го, що помножені на 3;
- до елементів третього рядка додамо подвоєні елементи
 другого;
- від елементів четвертого рядка віднімемо елементи
 другого.

Після виконання цих дій, дістанемо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Додаючи до елементів першого рядка елементи третього та віднімаючи від елементів другого рядка елементи третього, дістанемо:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -70.$$

Приклад 12. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 3 & -3 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{8} & -\frac{2}{2} & 7 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 7 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Виконаємо такі дії:

- винесемо за знак визначника спільні множники рядків: із першого – $(-3/2)$, із другого – $(-1/3)$, із третього – $(-1/3)$, із четвертого – (-1) ;

- до елементів другого стовпця додамо елементи першого, що помножені на 3;

- до елементів третього стовпця додамо елементи першого;

- до елементів четвертого стовпця додамо подвоєні елементи першого:

$$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -1 & -6 \\ -7 & -13 & -3 & -9 \end{vmatrix};$$

- розкладемо визначник за першим рядом;

- винесемо спільні множники (-1) із першого, третього стовпців, а із третього – (-3) :

$$\Delta = \frac{3}{6} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 13 & 3 & 3 \end{vmatrix};$$

- від елементів другого рядка віднімо елементи першого;
- від елементів третього рядка віднімо елементи першого:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (7 \cdot (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + +3 \cdot 6 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) \cdot 1 - 0 \cdot 7 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 2) = 1.$$

Приклад 13. Обчислити
визначник n -го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

Віднімо перший рядок
від усіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} 2$$

До першого стовпця додамо суму всіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5+3(n-1) & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (3n+2) \cdot 2^{n-1}.$$

Приклад 14. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Додамо перший рядок до всіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

Приклад 15. Обчислити визначник n -го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Відніmemo перший рядок від усіх інших:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

11. Що називають рангом матриці?

12. Які перетворення матриці називають елементарними?

Приклад 16. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Відніmemo:

- від елементів другого рядка елементи першого, помножені на 3;
- від елементів третього рядка – елементи другого;
- від елементів четвертого рядка – елементи першого.

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Відкинемо четвертий рядок, оскільки він дорівнює сумі другого та третього:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Ранг матриці $r = 3$, оскільки визначник трикутної матриці, що складена із перших трьох стовпців, не дорівнює 0.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 17. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Віднімаємо від елементів четвертого, третього стовпців, а потім відкинемо четвертий:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, то ранг матриці $r = 3$.

Приклад 18. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Якщо елемент $a_{11} = 0$, то, міняючи місцями рядки або стовпці, добиваємось, щоб $a_{11} \neq 0$. У прикладі $a_{11} = 1 \neq 0$.

2) Якщо $a_{11} \neq 0$, то, застосовуючи елементарні перетворення матриці, домагаємось, щоб усі елементи першого стовпця (крім a_{11}) дорівнювали нулю. У нашому прикладі помножимо елементи першого рядка послідовно на (-2) , (-3) , (-4) і, додавши до одержаних чисел елементи другого, третього та четвертого рядків, відповідно, дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

3) Якщо в одержаній матриці $a_{22} \neq 0$ (у нас $a_{22} = -4 \neq 0$), то за допомогою елементарних перетворень (множення другого рядка на (-2) і додавання до елементів третього, а потім четвертого рядка) добиваємось того, щоб елементи другого стовпця (крім a_{12}, a_{22}) дорівнювали нулю.

Якщо у процесі перетворення отримаємо рядки (або стовпці), усі елементи яких дорівнюють нулю (як у цьому прикладі), то відкинемо їх:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця містить мінори третього порядку, які не дорівнюють нулю, наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Тому ранг отриманої матриці, отже й шуканої матриці $\mathbf{A}$, дорівнює 3, тобто $r(\mathbf{A}) = 3$.

13. *Що таке обернена матриця?*

14. *Які методи обчислення матриці, оберненої до даної, ви знаєте?*

Приклад 19. Знайти невідому матрицю $\mathbf{X}$ із рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Тоді це рівняння матиме вигляд:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Помножимо зліва рівняння на $\mathbf{A}^{-1}$:

$$(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Отже, для того, щоб знайти невідому матрицю $\mathbf{X}$, потрібно знайти матрицю, обернену до матриці $\mathbf{A}$, а потім помножити її зліва на матрицю $\mathbf{B}$.

Обчислимо визначник матриці $\mathbf{A}$ та алгебраїчні доповнення до її елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 + 9 + 12 - 4 = 1.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця $\mathbf{A}$ – особлива, тобто $\Delta = 0$, то матриці $\mathbf{A}^{-1}$ не існує, і вказаний вище спосіб неприйнятний. Матричне рівняння у цьому випадку матиме або безліч розв'язків, або жодного.

Приклад 20. Знайти невідому матрицю $\mathbf{X}$ із рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Нехай $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тоді:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{або}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} - 3x_{21} & 2x_{12} - 3x_{22} \\ 4x_{11} - 6x_{21} & 4x_{12} - 6x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} 2x_{11} - 3x_{21} = 2 \\ 4x_{11} - 6x_{21} = 4 \\ 2x_{12} - 3x_{22} = 3 \\ 4x_{12} - 6x_{22} = 6 \end{cases} \Rightarrow x_{11} = \frac{2+3x_{21}}{2}, x_{12} = \frac{3+3x_{22}}{2}, x_{21} = a, x_{22} = b,$$

де a та b – довільні числа.

Отже, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{2+3a}{2} & \frac{3+3b}{2} \\ a & b \end{pmatrix}$, де a та b – довільні дійсні числа.

Приклад 21. Знайти невідому матрицю $\mathbf{X}$ із рівняння:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, то позначимо $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тоді:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} 4x_{11} + 6x_{21} = 1, \\ 6x_{11} + 9x_{21} = 1, \\ 4x_{12} + 6x_{22} = 1, \\ 6x_{12} + 9x_{22} = 1. \end{cases}$$

Система несумісна, отже розв'язку у неї не існує.

15. Яку систему рівнянь називають сумісною?
16. Яку систему рівнянь називають несумісною?
17. Яку систему рівнянь називають визначеною?
18. Яку систему рівнянь називають невизначеною?
19. У чому полягає метод Гаусса?

Приклад 22. Розв'язати СЛАР за методом Гаусса–Жордана:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи, і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до діагонального вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Таким чином, система набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 6, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи: $x_1 = 8, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 2$.

Приклад 23. Розв'язати систему лінійних рівнянь за методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 21 & 13 & 3 \end{array} \right).$$

Додамо до елементів четвертого рядка елементи другого та віднімо суму елементів першого й третього:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Отже, система несумісна.

Приклад 24. Розв'язати систему лінійних рівнянь за методом Гаусса:

$$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 18 & 20 & -21 & 32 & 41 & 9 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array} \right).$$

Додамо до елементів третього рядка елементи четвертого та віднімо суму двох перших. Потім відкинемо третій рядок і віднімо від першого рядка останній, дістанемо:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 6 & 10 & 3 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

Отже, маємо систему:
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 2x_2 - 21x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -1, \\ -9x_3 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Ця система невизначена. Нехай x_4, x_5 – вільні невідомі. Із третього рівняння маємо $x_3 = 2/9 \cdot x_5 - 1/9$. Підставляючи x_3 до другого рівняння, дістанемо: $x_2 = -5/2 \cdot x_4 + 5/6 \cdot x_5 - 5/3$.

Із першого рівняння:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2(1 - 2(-5/2 \cdot x_4 + 5/6 \cdot x_5 - 5/3) - (2/9 \cdot x_5 - 1/9) - 3x_4 - 4x_5) = \\ &= x_4 - 53/18 \cdot x_5 + 20/9. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок системи можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}x_1 &= a - 53/18 \cdot b + 20/9; & x_2 &= -5/2 \cdot a + 5/6 \cdot b - 5/3; \\x_3 &= 2/9 \cdot b - 1/9; & x_4 &= a; \quad x_5 = b,\end{aligned}$$

де a та b – довільні числа.

20. У чому сенс матричного методу розв'язання системи лінійних рівнянь?

21. В якому випадку можна користуватися матричним методом?

Приклад 25. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Перепишемо систему у матричному вигляді $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння має вигляд: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Знайдемо $\mathbf{A}^{-1}$.

Обчислимо основний визначник системи та алгебраїчні доповнення елементів визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Запишемо обернену матрицю: $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\text{Тоді: } \mathbf{X} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ -18+14+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо розв'язок системи: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$.

22. Коли можна застосувати формули Крамера для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь?

23. Якими є формули Крамера?

Приклад 26. Використовуючи формули Крамера, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Обчислимо основний визначник системи Δ та визначники Δ_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42.$$

За формулами Крамера (1.11), дістанемо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

Приклад 27. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9. \end{cases}$$

Обчислимо основний визначник системи, віднявши від кожного стовпця перший стовпець:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Обчислимо визначники системи: Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$. При обчисленні виконаємо такі перетворення:

- від усіх рядків віднімемо п'ятий рядок;
- винесемо із першого рядка 4, із другого – 3, із третього – 2;
- від п'ятого рядка віднімемо суму всіх інших:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 15 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24 \cdot 5.$$

Аналогічно можна обчислити визначники:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 15 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 13 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 14 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 \cdot 4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 13 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 \cdot 3;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 15 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 14 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -8 \cdot 6 = 24 \cdot (-2);$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24.$$

За формулами Крамера (1.11) дістанемо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 24 \cdot \frac{5}{24} = 5; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 24 \cdot \frac{4}{24} = 4; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 24 \cdot \frac{3}{24} = 3;$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 24 \cdot \frac{-2}{24} = -2; \quad x_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = 24 \cdot \frac{-1}{24} = -1.$$

Приклад 28. Визначити, за яких значень параметра λ система лінійних рівнянь буде: визначена, невизначена, не-сумісна. Знайти загальний розв'язок системи, залежно від значень λ :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

Обчислимо основний та інші визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 + 1 - \lambda - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 + 1 - \lambda - 1 - \lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

1) якщо визначник $\Delta \neq 0$ (у прикладі $\lambda \neq 1$ або $\lambda \neq -2$), то система визначена та має єдиний розв'язок:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2};$$

2) якщо визначник $\Delta = 0$, то можливі варіанти.

При $\lambda = 1$ система не визначена – має нескінченну кількість розв'язків. Дійсно, у цьому випадку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, тому $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, де x_2, x_3 – довільні дійсні числа.

При $\lambda = -2$ система має вигляд:
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Додамо всі три рівняння системи, дістанемо $0 = 3$, тобто система несумісна, отже, розв'язків не має.

Приклад 29. У табл. 1.3 подано дані виконання балансу за звітний період (в ум. гр. од.)

Таблиця 1.3

Галузь виробництва	Споживання		Обсяг продукції	
	1	2	кінцевої	валової
1	9	25	66	100
2	8	27	165	200

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі на наступний рік, якщо обсяг кінцевого споживання продукції першої галузі збільшиться вдвічі, а другої – не зміниться.

За умовою задачі матриця валового випуску $\mathbf{X}$ і матриця кінцевої продукції $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (1.14), знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = \frac{9}{100} = 0,09, a_{12} = \frac{25}{200} = 0,125, a_{21} = \frac{8}{100} = 0,08, a_{22} = \frac{27}{200} = 0,135.$$

Матриця прямих витрат $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,125 \\ 0,08 & 0,135 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи та задовольняє критерій продуктивності:

$$\max\{0,09 + 0,08; 0,125 + 0,135\} = \max\{0,17; 0,26\} = 0,26 < 1.$$

Тому можна знайти необхідний обсяг валового випуску $\mathbf{X}$ за (1.19) $\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Y}$.

Знайдемо матрицю повних витрат $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,09 & 0,125 \\ 0,08 & 0,135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,91 & -0,125 \\ -0,08 & 0,865 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det|\mathbf{E} - \mathbf{A}| \approx 0,78 \neq 0$, то

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \approx \frac{1}{0,78} \cdot \begin{pmatrix} 0,865 & 0,125 \\ 0,08 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця валового випуску:

$$\mathbf{X} \approx \frac{1}{0,78} \begin{pmatrix} 0,865 & 0,125 \\ 0,08 & 0,91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 172,83 \\ 206,04 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, валовий випуск у першій галузі необхідно збільшити до 172,83 ум. гр. од., а в другій – до 206,04 ум. гр. од.

Приклад 30. Розглянемо тригалузеву економічну систему, яка включає вугледобувну, енергетичну й транспортну промисловості. Припустимо, що на виробництво вугілля на 1 грн необхідно виробництво електроенергії на 0,25 грн і на 0,25 грн – транспортних витрат.

На виробництво на 1 грн електроенергії необхідно виробити на 0,65 грн запасів вугілля, на 0,05 грн – електроенергії і на 0,05 грн – транспортних витрат. Забезпечення на 1 грн транспортних перевезень потребує виробництва на 0,55 грн запасів вугілля і на 0,10 грн – електроенергії. Кожного тижня зовнішні потреби економічної системи становлять на 50 тис. грн запаса-

сів вугілля та на 25 тис. грн – запасів електроенергії. Який обсяг щотижневих витрат варто спланувати для кожної галузі?

Нехай X_1 – обсяг виробництва запасів вугілля (грн), X_2 – обсяг електроенергії, X_3 – транспортні витрати. Тоді загальні потреби для кожної із трьох галузей задовольняють систему:

$$\begin{cases} X_1 = 50000 + 0,65X_2 + 0,55X_3, \\ X_2 = 25000 + 0,25X_1 + 0,05X_2 + 0,10X_3, \\ X_3 = 0,25X_1 + 0,05X_2. \end{cases}$$

Отже,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y}.$$

Розв'язуючи це рівняння, маємо:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \text{ та } \mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}.$$

Можна обчислити матрицю повних витрат:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,50298 & 1,07753 & 0,934392 \\ 0,437376 & 1,37177 & 0,377733 \\ 0,397614 & 0,337972 & 1,25248 \end{pmatrix}.$$

Тоді за (1.19):

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 102087 \\ 56163 \\ 28330 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, обсяг щотижневих витрат потрібно спланувати для кожної галузі таким чином: необхідний обсяг виробництва запасів вугілля – 102087 ум. гр. од., електроенергії – 56163 ум. гр. од., транспортні витрати – 28330 ум. гр. од.

Розділ 2

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Вектори на площині та у просторі

2.1.1. Поняття вектора

Розгляньмо впорядковану пару точок A та B простору. Ця пара визначає напрямлений відрізок (точка A є першою, точка B – другою), напрям якого на рисунку вказують стрілкою (рис. 2.1).

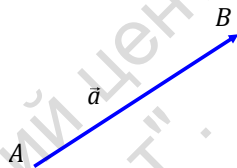


Рис. 2.1

Означення. *Вектором* у геометрії (геометричним вектором) називають напрямлений відрізок. Першу точку направленого відрізка називають *початком вектора*, а другу – *кінцем* вектора.

Якщо A та B – дві точки, то вектор $\overrightarrow{AB}$ (напрямок від A до B ; A – початок, B – кінець вектора) відрізняється від вектора $\overrightarrow{BA}$ (напрямок від B до A та B – початок, A – кінець вектора).

Вектори позначають символами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ тощо. Якщо необхідно підкреслити, що точка A – початок, а точка B – кінець вектора, то пишуть $\overrightarrow{AB}$. Вектор зображують відрізком зі стрілкою (див. рис. 2.1).

Означення. Відстань між початком вектора та його кінцем називають *довжиною* (або *модулем*) *вектора*.

Довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають $|\overrightarrow{AB}|$. Якщо вектор позначено $\vec{a}$, то його довжину позначають символом $|\vec{a}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають *нульовим* і позначають $\vec{0}$. Можна вважати, що нульовий вектор має довільний, наперед вибраний напрямок. Довжина нульового вектора (і лише його) дорівнює нулю. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одичним*.

Означення. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають *рівними*, якщо вони мають однакову довжину та напрямок; позначають $\vec{a} = \vec{b}$.

Означення. Колінеарними називають вектори, які розміщені на одній прямій або на паралельних прямих.

Колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають як $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору. Колінеарні ненульові вектори можуть бути **однаково напрямленими** (позначають $\vec{a} \uparrow \vec{b}$) або **протилежно напрямленими** (позначають $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$).

Означення. Компланарними називають вектори, які лежать в одній площині.

Вектори, які мають однакові напрямки та довжини, але розміщені у різних частинах простору, не розрізняють. Іншими словами, вектор можна переносити паралельно самому собі, розміщуючи його початок у будь-якій точці простору за умови збереження його довжини та напрямку. Такі вектори називають **вільними**.

Означення. Ортом заданого вектора $\vec{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрямок збігається із напрямком заданого вектора $\vec{a}$. Орт позначають $\vec{a}_0$. Тоді $|\vec{a}_0| = 1$ та $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$.

2.1.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами є операції додавання та множення векторів на дійсні числа.

Означення. Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називають вектор $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, довжина якого $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$, напрямок збігається із напрямком вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$ (вектори однаково напрямлені), і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$ (вектори протилежно напрямлені) (рис. 2.2).

Якщо $\alpha = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$.

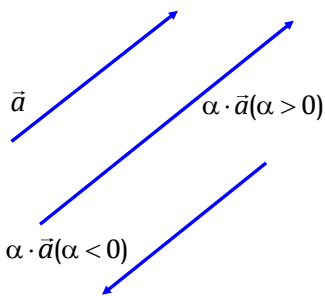


Рис. 2.2

Означення. *Протилежним вектором* $(-\vec{a})$ називають добуток вектора $\vec{a}$ на число (-1) , тобто $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$.

Означення. *Сумою* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який напрямлений від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, якщо відкласти вектор $\vec{b}$ від кінця вектора $\vec{a}$ (*правило трикутника*, рис. 2.3).

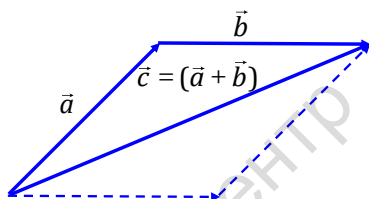


Рис. 2.3

Якщо відкласти вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ від спільної точки O та побудувати на них як на сторонах паралелограм, то сумою цих векторів є вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (*правило паралелограма*).

Суму векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ можна знайти послідовно: спочатку додають вектори $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$, потім до їх суми $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ додають вектор $\vec{a}_3$ і так далі.

Означення. *Сумою кількох векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ є вектор $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$, що з'єднує початок першого та кінець останнього вектора за умови, що початок кожного наступного вектора збігається із кінцем попереднього (*правило многокутника*, рис. 2.4).

Означення. *Сумою трьох векторів* $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, які відкладені від однієї точки простору, називають вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, який буде діагоналлю паралелепіпеда, що побудований на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, які не лежать в одній або у паралельних площинах (*правило паралелепіпеда*, рис. 2.5).

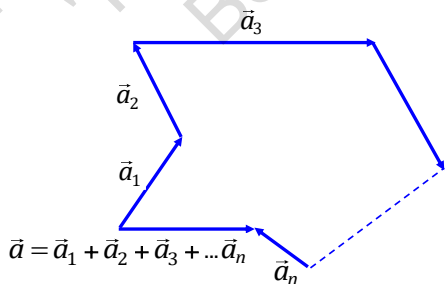


Рис. 2.4

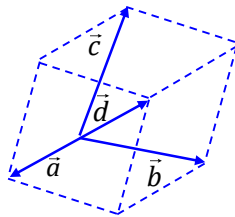


Рис. 2.5

Означення. Різницею двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $(-\vec{b})$, що є протилежним до $\vec{b}$ (рис. 2.6).

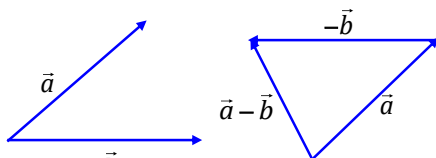


Рис. 2.6

Легко переконатися, що у паралелограмі, який побудовано на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, одна діагональ є сумою цих векторів, а інша – їх різницею. Наприклад, на рис. 2.7 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$.

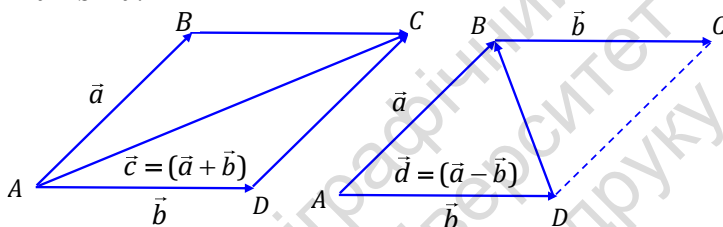


Рис. 2.7

Властивості лінійних операцій над векторами:

Для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, чисел $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
комутативна властивість додавання векторів.
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
асоціативна властивість додавання векторів.
- Існує (єдиний) нульовий вектор $\vec{0}$, такий що $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
властивість нульового вектора.
- Існує (єдиний) вектор $(-\vec{a})$ такий, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
властивість протилежного вектора.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
- $\alpha \cdot (\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot \vec{a}$
асоціативність множення вектора на число.
- $(\alpha + \lambda) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{a}$
дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання чисел.
- $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$
дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання векторів.

Зауваження. Властивості лінійних операцій над векторами 1–8 дозволяють виконувати звичні перетворення в лінійних діях над векторами: міняти доданки місцями, брати вирази в дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

ТЕОРЕМА

(критерій колінеарності векторів)

Два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, де α – деяке дійсне число.

2.1.3. Координати вектора

Нехай задано два вектори $\vec{OA}$ та $\vec{OB}$.

Означення. *Кутом φ між векторами $\vec{OA}$ та $\vec{OB}$* називають кут AOB , на який потрібно повернути один із векторів так, щоб його напрямок збігався із напрямком іншого вектора. Вважають, що $0 \leq \varphi \leq \pi$. Якщо початки векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не збігаються, то кутом між ними називають кут між векторами $\vec{OA}$ та $\vec{OB}$, де $\vec{a} = \vec{OA}$ та $\vec{b} = \vec{OB}$.

Нехай вектор $\vec{a} = \vec{AB}$. Проведемо через точки A та B перпендикулярні прямі до вектора $\vec{b}$. Позначимо точки перетину цих прямих A_1 та B_1 (рис. 2.8).

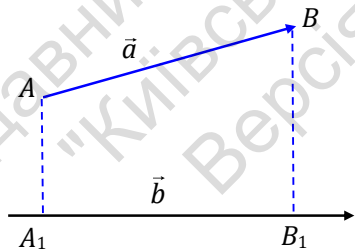


Рис. 2.8

Означення. *Проекцією вектора $\vec{a} = \vec{AB}$ на напрям вектора $\vec{b}$* називають число, яке дорівнює довжині вектора $\vec{AB}$, що помножена на косинус кута φ між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ та обчислюють

$$np_{\vec{b}} \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi.$$

Припустимо, що у просторі задано систему координат $OXYZ$ і довільний вектор $\vec{a}$. Розглянемо проєкції вектора на координатні осі. Нехай $x = np_{Ox} \vec{a}$, $y = np_{Oy} \vec{a}$ та $z = np_{Oz} \vec{a}$.

Проекції x, y, z вектора $\vec{a}$ на осі координат називають його **координатами**. При цьому пишуть $\vec{a} = (x; y; z)$.

Вважатимемо, що вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ виходить із початку координат і не лежить у жодній координатній площині. Проведемо через точку A площини, що перпендикулярні осям. Разом із координатними площинами вони утворюють прямокутний паралелепіпед, діагоналлю якого є відрізок OA (рис. 2.9).

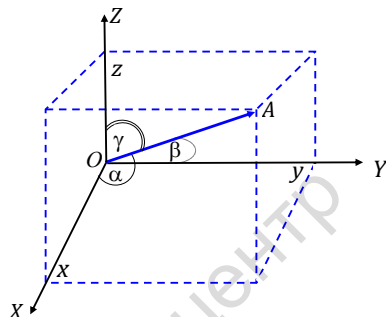


Рис. 2.9

Оскільки квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його сторін, то

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ тобто } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Позначимо через α, β, γ кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат, тоді координати вектора:

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

Означення. *Напрямними косинусами вектора $\vec{a}$* називають косинуси кутів між вектором $\vec{a}$ та осями координат. Їх обчислюють за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Піднесемо до квадрату ліву та праву частини кожної рівності та додамо їх, дістанемо тотожність:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

2.2. n -вимірні вектори та дії над ними

Означення. *n -вимірним вектором* називають впорядковану сукупність n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Позначають: *вектором-стовпцем*

або *вектором-рядком*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Означення. Числа $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ називають *координатами вектора* або його *компонентами*.

Означення. Вектор, усі компоненти якого дорівнюють нулю, називають **нульовим** і позначають $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Означення. **Рівними** називають два n -вимірні вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, у яких їх відповідні компоненти рівні: $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$.

2.2.1. Правила додавання n -вимірних векторів

Означення. **Сумою** двох n -вимірних векторів називають вектор, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент векторів-доданків:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n). \quad (2.1)$$

Властивості дії додавання векторів:

1. Для будь-яких двох n -вимірних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ виконується рівність:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (2.2)$$

комутативна властивість додавання

2. Для будь-яких трьох $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ n -вимірних векторів справедлива рівність:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (2.3)$$

асоціативна властивість додавання

3. Існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad (2.4)$$

властивість нульового вектора

для довільного n -вимірного вектора $\vec{a}$.

4. Для довільного n -вимірного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $(-\vec{a})$, такий, що:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}. \quad (2.5)$$

властивість протилежного вектора

Ураховуючи останню властивість, різницю двох векторів можна записати як $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Отже, у випадку алгебраїчної суми, наприклад для трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, їх алгебраїчну суму $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ можна знайти за формулою:

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (a_1 - b_1 + c_1, a_2 - b_2 + c_2, \dots, a_n - b_n + c_n).$$

2.2.2. Множення n -вимірного вектора на число

Означення. Добутком вектора $\vec{a} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ на дійсне число α називають вектор $\alpha \cdot \vec{a}$, компоненти якого дорівнюють добуткам числа α на відповідні компоненти вектора $\vec{a}$:

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1; \alpha \cdot a_2; \dots; \alpha \cdot a_n). \quad (2.6)$$

Введені дії додавання та множення на число пов'язані властивостями:

1. Для довільних двох n -вимірних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дійсного числа α має місце рівність:

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}. \quad (2.7)$$

дистрибутивна властивість щодо суми векторів

2. Для довільних дійсних чисел α та β та n -вимірного вектора $\vec{a}$ має місце рівність:

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}. \quad (2.8)$$

дистрибутивна властивість щодо суми числових множників

3. Для довільних дійсних чисел α , β і n -вимірного вектора $\vec{a}$:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}. \quad (2.9)$$

асоціативна властивість щодо числового множника

4. Для довільного n -вимірного вектора $\vec{a}$ виконуються рівності:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}. \quad (2.10)$$

Означення. Множину n -вимірних векторів із дійсними компонентами, в якій визначено операції додавання векторів і множення вектора на число, які мають властивості (2.2)–(2.5) та (2.7)–(2.10), називають **векторним простором**.

Позначають цей простір R^n . Зауважимо, що елементи простору R^n можна розглядати не тільки як вектори, але й як елементи (об'єкти) довільної природи. У цьому випадку відповідну множину елементів називають **лінійним простором**.

Векторні простори R^1, R^2, R^3 можна розглядати як: множину векторів на прямій R^1 (множину дійсних чисел); R^2 – множину векторів на площині; R^3 – множину векторів у просторі.

Поняття n -вимірного вектора широко застосовують в економічних задачах. Наприклад, деякий набір товарів обсягами $x_1, x_2, \dots, x_n$ можна охарактеризувати вектором $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, а відповідні їм ціни $p_1, p_2, \dots, p_n$ – вектором цін $\vec{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n)$.

2.2.3. Лінійна залежність і лінійна незалежність векторів

Нехай задано m векторів векторного простору R^n : $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$. Ці вектори в сукупності утворюють *систему m векторів*.

Означення. Вектор $\vec{a}$ називають *лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$* , якщо для деяких дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ має місце рівність:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m. \quad (2.11)$$

При цьому кажуть, що вектор $\vec{a}$ *лінійно виражається* через вектори $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_m$ (його розкладено за векторами $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_m$).

Якщо всі коефіцієнти лінійної комбінації (числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$) дорівнюють нулю, то її називають *тривіальною*. У протилежному випадку лінійну комбінацію називають *нетривіальною*.

Означення. Систему векторів $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_m$ векторного простору R^n називають *лінійно залежною*, якщо існують такі не всі одночасно рівні нулю числа $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$, що виконується рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = 0. \quad (2.12)$$

Вектори називають *лінійно незалежними*, якщо рівність (2.12) виконується тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$.

ТЕОРЕМА

(критерій лінійної залежності векторів)

Система векторів лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли принаймні один із них є лінійною комбінацією інших.

Доведення. Необхідність. Якщо система векторів $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_m$ лінійно залежна, то щонайменше один із коефіцієнтів у (2.12) відмінний від нуля. Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Тоді

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \vec{a}_3 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \vec{a}_m,$$

тобто вектор $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших векторів.

Достатність. Якщо який-небудь вектор, наприклад $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших векторів, то виконується рівність:

$$\vec{a}_1 = \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m.$$

Перепишемо її у вигляді:

$$\vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2 - \alpha_3 \vec{a}_3 - \dots - \alpha_m \vec{a}_m = 0.$$

Отже, нетривіальна лінійна комбінація цих векторів дорівнює нулю, тобто система векторів лінійно залежна.

Приклад 2.1. Показати, що три компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ у просторі $\mathbf{R}^3$ лінійно залежні.

Нехай задано ненульові компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Якщо будь-які два з них колінеарні, наприклад $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$. Тоді $\alpha \cdot \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = 0$, а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні.

Нехай тепер серед векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ немає колінеарних. Оскільки ці вектори компланарні, то вони лежать в одній площині. Відкладемо їх від однієї точки O (рис. 2.10).

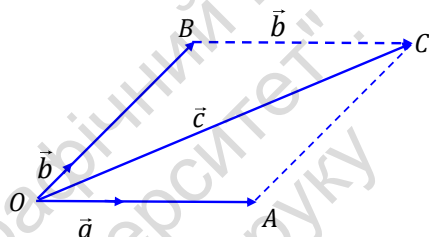


Рис. 2.10

Через кінець вектора $\vec{c}$ проведемо прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що перетинають прямі, на яких лежать вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у точках A та B. Тоді $\vec{c} = \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

Але вектори $\vec{OA}$ та $\vec{OB}$ колінеарні векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тому $\vec{OA} = \alpha \cdot \vec{a}$ та $\vec{OB} = \beta \cdot \vec{b}$. Таким чином, $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

А це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні.

Приклад 2.2. Показати, що два неколінеарні вектори на площині лінійно незалежні.

Нехай задано два ненульові неколінеарні вектори $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ у просторі $\mathbf{R}^2$. Припустимо, що вони лінійно залежні. Це означає, що рівність $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = 0$ виконується тоді й тільки тоді, коли α_1 або α_2 , чи обидва одночасно не дорівнюють нулю. Припустимо, що $\alpha_1 \neq 0$, тоді $\vec{a}_1 = -(\alpha_2/\alpha_1) \cdot \vec{a}_2$. А це означає, що вектори $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ колінеарні. Ми дійшли суперечності. Отже, вектори $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ лінійно незалежні.

Приклад 2.3. З'ясувати, чи будуть вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{a}_2 = (2; 1; 1; 3)$ та $\vec{a}_3 = (2; -1; 1; 3)$ лінійно залежними у просторі R^4 ?

Запишемо векторну рівність $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$ – лінійну комбінацію векторів і перепишемо її у вигляді:

$$\alpha_1(1; 2; 3; 4) + \alpha_2(2; 1; 1; 3) + \alpha_3(2; -1; 1; 3) = (0; 0; 0; 0).$$

Ця рівність еквівалентна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Таким чином, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Це означає, що рівність $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$ можлива тільки у випадку, за якого $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, вектори лінійно незалежні.

2.2.4. Геометричне тлумачення лінійної залежності векторів

Розглянемо таку задачу: скільки та яких векторів на прямій, на площині й у просторі треба задати, щоб через них лінійно виразити будь-який вектор на прямій, на площині й у просторі?

Твердження

1. На прямій R існує ненульовий вектор $\vec{e}$. Будь-який вектор $\vec{a}$, колінеарний ненульовому вектору $\vec{e}$, можна єдиним чином лінійно виразити через цей вектор $\vec{a} = x \cdot \vec{e}$.

2. На площині існують два неколінеарні вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$. Будь-який вектор $\vec{a}$ простору R^2 , компланарний з векторами $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, єдиним чином лінійно можна виразити через них: $\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$.

3. У просторі існують три некомпланарні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$. Будь-який вектор $\vec{a}$ простору R^3 єдиним чином лінійно можна виразити через некомпланарні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3.$$

Означення. Базисом векторного простору R^n називають довільну систему n лінійно незалежних векторів. Вектори, які утворюють базис простору, називають **базисними**. Кількість векторів базису простору називають його **розмірністю**.

У прикладі 2.2 було встановлено фундаментальну властивість множини векторів площини, яку можна сформулювати так: **будь-які два неколінеарні вектори площини утворюють базис у множині векторів цієї площини.**

Означення. Векторний простір R^n називають **n -вимірним**, якщо в ньому існує система n лінійно незалежних векторів, а будь-які з $(n+1)$ векторів є лінійно залежними.

Число n – **розмірність** простору R^n .

Іншими словами, розмірність простору – це максимальне число лінійно незалежних векторів, що містяться в ньому.

ТЕОРЕМА

(розкладання вектора за базисом)

Будь-який вектор $\vec{a}$ векторного простору R^n можна представити, причому у єдиний спосіб, у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

Доведення. Нехай задано довільний базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ простору R^n . Виберемо довільний вектор $\vec{a} \in R^n$. Тоді система векторів $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n, \vec{a}$ є лінійно залежною, тобто існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha$, які не всі одночасно дорівнюють нулю, такі, що виконується рівність $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n + \alpha \vec{a} = 0$, причому $\alpha \neq 0$. Якщо б у протилежному випадку $\alpha = 0$, то щонайменше одне із чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не дорівнює нулю. А це означало б, що вектори $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n$ були б лінійно залежними.

$$\text{Отже, } \vec{a} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} \vec{e}_2 \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} \vec{e}_n.$$

$$\text{Позначимо } a_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha}, a_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha}, \dots, a_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha}, \text{ тоді}$$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n. \quad (2.13)$$

Доведення єдиності (2.13) здійснимо від супротивного.

Припустимо, що вектор можна записати у вигляді:

$$\vec{a} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + \dots + b_n \vec{e}_n, \quad (2.14)$$

причому $a_i \neq b_i, i = 1, \dots, n$. Віднімемо рівності (2.13) і (2.14):

$$(a_1 - b_1) \vec{e}_1 + (a_2 - b_2) \vec{e}_2 + \dots + (a_n - b_n) \vec{e}_n = \vec{0}.$$

Оскільки вектори лінійно незалежні, то коефіцієнти лінійної комбінації $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$, тобто $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Рівність (2.13) називають **розкладанням вектора $\vec{a}$ за базисом векторів $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n$** , а числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ – **координатами вектора $\vec{a}$ у цьому базисі**.

Приклад 2.4. Перевірити, чи буде система векторів $\vec{e}_1 = (1; 0; \dots; 0), \vec{e}_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, \vec{e}_n = (0; 0; \dots; 1)$ базисом у R^n ?

Ці вектори лінійно незалежні, і будь-який вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$, очевидно, можна подати у вигляді $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$, тобто як лінійну комбінацію векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Отже, вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ утворюють базис.

Таким чином, *система векторів із простору R^n утворює базис, якщо ці вектори лінійно незалежні, і будь-який вектор з R^n є лінійною комбінацією векторів цієї системи.*

Приклад 2.5. У базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_3$ простору R^3 задано вектори:

$$\vec{a} = (2; 0; 1), \quad \vec{b} = (1; -1; 2), \quad \vec{c} = (3; 1; 1), \quad \vec{d} = (1; 1; 1).$$

Показати, що вектори $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ утворюють базис простору R^3 . Знайти координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис простору R^3 , якщо вони лінійно незалежні. Запишемо векторну рівність:

$$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = 0.$$

Перепишемо її у вигляді:

$$\alpha_1(2; 0; 1) + \alpha_2(1; -1; 2) + \alpha_3(3; 1; 1) = (0; 0; 0).$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки основний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

то однорідна СЛАР має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

А це означає, що вектори $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базис.

Позначимо координати вектора $\vec{d} = (x; y; z)$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тоді має місце векторна рівність: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, яка рівносильна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1, \\ -y + z = 1, \\ x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

Оскільки основний визначник системи $\Delta = -2 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера: $x = -3, y = 1, z = 2$.

Отже, вектор $\vec{d} = (-3; 1; 2)$ у базисі векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.

2.3. Множення векторів

2.3.1. Скалярний добуток двох векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів n -вимірних $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ та $\vec{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ називають число:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n. \quad (2.15)$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків відповідних компонент цих векторів.

Властивості скалярного добутку

Для довільних трьох векторів $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ і довільного дійсного числа α мають місце наступні рівності:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
комутативна властивість
2. $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.
сполучна властивість щодо числового множника
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
асоціативна властивість
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$,

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\vec{a} = 0$.

Указані властивості легко довести, тому пропонуємо зробити це самостійно.

Означення. Якщо у n -вимірному просторі визначено скалярний добуток двох векторів за (2.15) із властивостями 1–4, то цей простір називають **евклідовим**.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ належать простору R^2 або R^3 , то можна дати інше означення скалярного добутку двох векторів.

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (2.16)$$

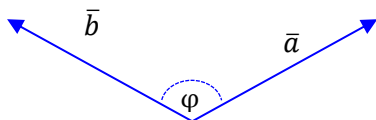


Рис. 2.11

Із означення скалярного добутку випливає: якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то кут $\varphi = 0^\circ$ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а $\cos 0^\circ = 1$, тому $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

або $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Таким чином, якщо вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ n -вимірні, то використовуючи (2.16), узагальнимо формулу для знаходження довжини вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (2.17)$$

Означення. Два вектори називають **ортогональними**, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю; позначають $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Зауваження. Для векторів із просторів R^2 і R^3 поняття ортогональності та перпендикулярності збігаються.

ТЕОРЕМА

(критерій ортогональності двох векторів)

Ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно ортогональні тоді й тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Доведення. Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Достатність. Нехай $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Якщо один із векторів нульовий, то оскільки напрям нульового вектора не визначено, його можна вважати перпендикулярним до іншого вектора. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$, то із рівності $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ та (2.16) випливає, що $\cos \varphi = 0$, тобто $\varphi = 90^\circ$.

Використовуючи означення скалярного добутку двох векторів і (2.16), запишемо важливу формулу для знаходження кута між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у n -вимірному просторі R^n :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (2.18)$$

Цей кут φ існує та $0 \leq \varphi \leq \pi$. Оскільки $|\vec{a}| \neq 0$ та $|\vec{b}| \neq 0$, то:

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1.$$

Якщо $\cos \varphi = 1$, то вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні й однаково напрямлені. Якщо $\cos \varphi = -1$, то вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні й протилежно напрямлені.

Застосуємо (2.15) і (2.17), тоді формулу (2.18) можна записати у вигляді:

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, \quad (2.19)$$

де вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ та $\vec{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ n -вимірні.

Приклад 2.6. Визначити кут між векторами $\vec{a} = (2; 1; 3; 2)$ та $\vec{b} = (1; 2; -2; 1)$ у просторі R^4 .

За (2.19) знаходимо косинус кута φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 0.$$

Оскільки $\cos \varphi = 0$, то $\varphi = \pi / 2$. Отже, вектори ортогональні.

Очевидно, що нульовий вектор ортогональний до будь-якого іншого вектора. Із означення випливає: якщо два ненульові вектори ортогональні, то кут між ними дорівнює $\pi / 2$ (оскільки $\cos(\pi / 2) = 0$).

Означення. Вектори $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n$ n -вимірного простору R^n утворюють **ортонормований базис**, якщо вони попарно ортогональні й довжина кожного з них дорівнює одиниці, тобто якщо $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ при $i \neq j$ та $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \Rightarrow |\vec{e}_i| = 1$ при $i = j; i, j = \overline{1, n}$.

Приклад 2.7. Розглянемо простір R^3 . Виберемо в ньому одиничні вектори $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Як відомо, вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ колінеарні осям OX , OY , OZ .

Знайдемо їх скалярні добутки:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \\ \vec{j} \cdot \vec{i} &= 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \\ \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, вектори $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ утворюють ортонормований базис, оскільки $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ і вектори $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ ортогональні.

Цей базис називають **стандартним базисом простору R^3** .

ТЕОРЕМА

Будь-який вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ простору R^3 можна записати в єдиний спосіб у вигляді:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (2.20)$$

Координати вектора $\vec{a}$ в ортонормованому базисі $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ називають його **прямокутними координатами**, а рівність (2.20) – **розкладанням вектора** $\vec{a}$ у стандартному базисі простору R^3 .

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ задані своїми координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то скалярний добуток дорівнює сумі добутків довжин однойменних координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3. \quad (2.21)$$

Довжина вектора та **косинус кута** між двома ненульовими векторами визначають за формулами:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (2.22)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (2.23)$$

Як наслідок з останньої формули отримаємо **критерій ортогональності векторів у координатній формі**:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0. \quad (2.24)$$

Критерієм колінеарності векторів, які задані в координатній формі, є пропорційність їх координат:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda. \quad (2.25)$$

2.3.2. Векторний добуток двох векторів

Як визначають орієнтацію у геометричних просторах? Щоб запровадити орієнтацію на прямій, площині, у просторі треба скористатись певними фізичними міркуваннями. Наприклад, на прямій, що зображує горизонтальна лінія, можна вибрати напрям "зліва направо" і назвати його додатним напрямом ("додатною орієнтацією"). Однак, треба розуміти, що фіксація

цього напрямку залежить від того, з якого боку дивитись на рисунок. Якщо перевернути його "догори ногами", то додатний напрям перейде у від'ємний. На вертикальних прямих за додатний зазвичай вважають напрям знизу догори. Орієнтацію площини вважаємо додатною, якщо "найкоротший поворот" від першого вектора до другого відбувається проти руху годинникової стрілки, у протилежному разі – від'ємною.

Надалі, розглядаючи системи координат, припускати-мемо, що **базисні вектори задають додатну орієнтацію**.

1. У просторі R^1 – на прямій – фіксують який-небудь базис. Якщо цей простір зображують горизонтальною прямою, то додатним напрямом на ній вважають напрям зліва направо.

2. У просторі R^2 – на площині – базис векторів $\vec{e}_1; \vec{e}_2$ задає праву (**додатну орієнтацію**), якщо найкоротший поворот від $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$ відбувається проти руху годинникової стрілки, і ліву (**від'ємну орієнтацію**), – якщо найкоротший перехід відбувається за рухом годинникової стрілки (лише тому, що ми так домовились).

3. У просторі R^3 базис $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3$ задає **праву орієнтацію**, яку вважатимемо **додатною**, якщо найкоротший поворот від вектора $\vec{e}_1$ до вектора $\vec{e}_2$ відбувається проти руху годинникової стрілки, якщо дивитись на них з кінця вектора $\vec{e}_3$, а від'ємною – ліву, де найкоротший поворот відбувається за рухом годинникової стрілки. Вектори $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3$ правого базису утворюють праву трійку, а вектори лівого базису – ліву трійку (правило правої та лівої руки).

Означення. Векторним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ простору R^3 є **вектор** $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє умови:

1. Довжина вектора $\vec{s}$ чисельно дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними $|\vec{s}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, тобто довжина вектора $\vec{s}$ дорівнює площі паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах.

2. $\vec{s} \perp \vec{a}, \vec{s} \perp \vec{b}$ і напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ спостерігається з кінця вектора $\vec{s}$ проти руху годинникової стрілки (рис. 2.12), тобто трійка векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{s}$ права.

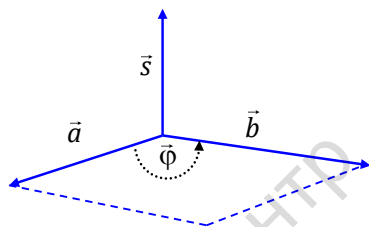


Рис. 2.12

Властивості векторного добутку:

Для довільних трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ та довільного дійсного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ мають місце наступні властивості:

$$1. \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}). \quad (2.26)$$

антикомутативність векторного множення

$$2. \quad \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}). \quad (2.27)$$

асоціативна властивість щодо скалярного множника

$$3. \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad (2.28)$$

дистрибутивна властивість векторного множення

ТЕОРЕМА

(критерій колінеарності векторів)

Два ненульові вектори колінеарні тоді й тільки тоді, коли векторний добуток дорівнює нульовому вектору

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}, \quad (2.29)$$

де λ – деяке дійсне число.

Приклад 2.8. Розглянемо простір $\mathbb{R}^3$ та одиничні вектори $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Знайдемо їх векторні добутки:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Векторний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, які задані своїми координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, визначають за формулою:

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2.30)$$

При обчисленні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ у (2.30) вважають елементами першого рядка визначника 3-го порядку та обчислюють визначник.

Приклад 2.9. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a} = (1; -2; 1)$ і $\vec{b} = (0; 2; -3)$ простору R^3 .

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{k} - 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} = 4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}.$$

Отже, вектор $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} = (4; 3; 2)$. Модуль векторного добутку $|\vec{s}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ визначає площу паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

2.3.3. Мішаний добуток трьох векторів

Означення. *Мішаним добутком* трьох ненульових векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ простору R^3 називають векторний добуток двох із них, помножений скалярно на третій вектор.

Мішаний добуток позначають $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$, тут вважають два вектори пов'язані векторним добутком, а вектор, який є результатом векторного добутку, множать на третій вектор скалярно. Очевидно, що результатом мішаного добутку є число.

Геометрична інтерпретація мішаного добутку. Якщо вектори $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ некомпланарні, то можна побудувати на цих векторах, як на ребрах, паралелепіпед (рис. 2.13). Оскільки довжина вектора $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а цей паралелограм є основою паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, то вектор $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$ є перпендикулярним площині основи паралелепіпеда.

Скалярний добуток $\vec{s} \cdot \vec{c}$ можна представити як добуток довжини вектора $\vec{s}$ і проєкції вектора $\vec{c}$ на вісь, яку визначає вектор $\vec{s}$, тому:

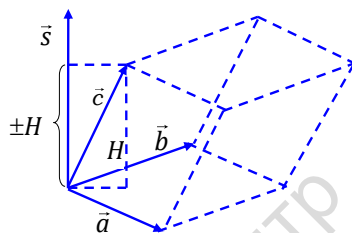


Рис. 2.13

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{s} \cdot \vec{c} = |\vec{s}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{s}, \vec{c}) = |\vec{s}| \cdot \text{pr}_{\vec{s}} \vec{c}. \quad (2.31)$$

Проекція вектора $\vec{c}$ на вісь, яку визначає вектор $\vec{s}$, $\text{pr}_{\vec{s}} \vec{c} = \pm H$, причому:

- $\text{pr}_{\vec{s}} \vec{c} = +H$, якщо кут між векторами $\vec{s}$ і $\vec{c}$ гострий;
- $\text{pr}_{\vec{s}} \vec{c} = -H$, якщо кут між векторами $\vec{s}$ і $\vec{c}$ тупий.

Властивості мішаного добутку:

Для довільних трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ простору R^3 і довільного дійсного числа α мають місце наступні властивості.

1. Мішаний добуток довільних трьох ненульових неколінеарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ простору R^3 чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, що побудований на цих векторах:

$$|(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{s}| \cdot |H| = V. \quad (2.32)$$

2. Мішаний добуток довільних трьох ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю, якщо щонайменше два серед трьох векторів колінеарні або всі три – компланарні.

3. Мішаний добуток $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) > 0$, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ права, і $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) < 0$, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ ліва.

4. Циклічна перестановка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ у мішаному добутку співмножників не змінює мішаного добутку:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) = (\vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}).$$

5. Сусідня перестановка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ у мішаному добутку співмножників змінює знак мішаного добутку на протилежний:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = -(\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}) = -(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = -(\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}).$$

Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$, що задані в координатній формі $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ і $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ виначають за формулою:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.33)$$

ТЕОРЕМА

(критерій компланарності векторів)

Три ненульові вектори компланарні тоді й тільки тоді, коли мішаний добуток дорівнює нулю.

Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні: $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

За допомогою мішаного добутку векторів легко визначити, чи лежать чотири точки A, B, C, D на одній площині. Для цього необхідно перевірити виконання умови про те, що, наприклад, вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ компланарні.

Приклад 2.10. Визначити за якого значення параметра λ точки $A = (1; 1; 0)$, $B = (2; 3; 1)$, $C = (1; -1; 2)$, $D = (3; 2; \lambda)$ лежать в одній площині?

Запишемо координати векторів:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (1; 2; 1), \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (0; -2; 2), \vec{c} = \overrightarrow{AD} = (2; 1; \lambda)$$

та обчислимо їх мішаний добуток векторів:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 10 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 5.$$

2.4. Простір товарів. Вектор цін

Під **товаром** загалом розуміють деяку продукцію або послугу, що поступає на ринок для продажу. Вважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг i -го товару позначимо через x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у

вигляді вектора $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, де $\vec{x}$ – n -вимірний вектор. З економічних міркувань розглядатимемо тільки такі набори товарів, в яких компоненти $x_i \geq 0$ для довільного $i = 1, 2, \dots, n$.

Множину всіх наборів товарів називають **простором товарів C** . Ця множина є простором, оскільки в ній можна додати довільні два набори товарів і множити будь-який із них на довільні невід'ємні числа.

Вважатимемо, що кожен товар має певну **ціну**. Усі ціни строго додатні. Нехай ціною одиниці i -го товару є p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, тоді вектор $\vec{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n)$ називають **вектором цін**.

Для набору товарів $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $\vec{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n)$. Скалярним добутком цих векторів $\vec{p} \cdot \vec{x} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n$ є число, що визначає **ціну** набору товарів $c(\vec{x})$.

Приклад 2.11. Витрати фірми на ресурси, які використовують на виготовлення одиниці продукції, задано табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Ресурси (x_i)	Кількість	Ціна (p_i)
Сировина першого виду (x_1)	200	3 грн/кг
Сировина другого виду (x_2)	500	5 грн/м ²
Трудові витрати (x_3)	0,65	10 грн/людино-год.
Обладнання (x_4)	0,7	15 грн/машино-год.

Визначити ціну всіх ресурсів, які використовують для виготовлення одиниці продукції.

Введемо вектор витрат на одиницю продукції $\vec{x} = (200; 500; 0,65; 0,7)$ і вектор цін одиниці відповідного ресурсу $\vec{p} = (3; 5; 10; 15)$. Ціна всіх ресурсів, які використовують для виготовлення одиниці продукції, буде скалярним добутком векторів $\vec{x}$ та $\vec{p}$. Тому:

$$c(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{p} = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4.$$

$$\vec{x} \cdot \vec{p} = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0,65 \cdot 10 + 0,7 \cdot 15 = 3117 \text{ грн.}$$

Приклад 2.12. Комерційний банк, що бере участь у будівництві багатоповерхових будинків, отримав кредити від

трьох комерційних банків: B_1, B_2, B_3 , кожен із яких надав кредити у сумі 200, 300, 400 тис. грн, відповідно, під річну відсоткову ставку 40, 25 і 30 %, відповідно. Яку суму необхідно сплатити за кредити наприкінці року?

Розглянемо вектори кредитів $\vec{x} = (200; 300; 400)$ і відсоткових ставок $\vec{p} = (1,40; 1,25; 1,30)$. Використовуючи простий розрахунок, керівник комерційного банку може визначити суму, яку необхідно сплатити наприкінці року за кредити, що взяті у банків:

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = 200 \cdot 1,4 + 300 \cdot 1,25 + 400 \cdot 1,3 = 1175 \text{ тис. грн.}$$

Приклад 2.13. Одним зі способів визначення індексу цін і рівня інфляції є розрахунок вартості "споживчого кошика", який складається із 300 видів товарів і послуг, що отримують споживачі. У табл. 2.2 подано умовний приклад обчислення індексів цін для певного місяця.

Таблиця 2.2

Вид товару	Кількість	Поточний місяць		Попередній місяць	
		ціна одиниці товару	витрати	ціна одиниці товару	витрати
A	3	4000	12000	3500	10500
B	10	2000	20000	1800	18000
C	2	4000	8000	4500	9000
Загальні витрати	–	–	40000	–	37500

Розрахунок індексу цін: $40000 : 37500 \cdot 100 = 106,7 \%$.

Таким чином, індекс інфляції становить 6,7 %. Введемо позначення: $\vec{q} = (3; 10; 2)$ – вектор обсягу споживчих товарів; $\vec{c} = (4000; 2000; 4000)$ – вектор цін у поточному місяці; $\vec{c}_n = (3500; 1800; 4500)$ – вектор цін у попередньому місяці.

Тоді індекс ціни обчислюють за формулою:

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_n \cdot \vec{q}} \cdot 100 \%,$$

звідки:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \vec{c} \cdot \vec{q} &= p \cdot \vec{c}_n \cdot \vec{q}, \\ \text{або } (100 \cdot \vec{c} - p \cdot \vec{c}_n) \cdot \vec{q} &= 0, \\ \text{або } (100 \cdot \vec{c} - p \cdot \vec{c}_n) \cdot \vec{q} &= 0, \end{aligned}$$

тобто індекс можна визначити як числовий коефіцієнт p , який робить вектор $\vec{q}$ перпендикулярним до вектора $(100 \cdot \vec{c} - p \cdot \vec{c}_n)$.

Індекс інфляції розраховують за формулою:

$$i = p - 100 = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\vec{c}_n \cdot \vec{q}} \cdot 100 - 100 = \frac{(\vec{c} - \vec{c}_n) \cdot \vec{q}}{\vec{c}_n \cdot \vec{q}} \cdot 100.$$

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Що таке вектор?
2. Як позначають та зображують вектор?
3. Що називають довжиною вектора?
4. Який вектор називають нульовим?
5. Які вектори називають рівними?
6. Як визначають операції додавання векторів і множення вектора на число. Які властивості мають ці операції?

Приклад 1. У трикутнику ABC проведено медіани AD , BE , CK (рис. 2.14). Довести, що $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CK} = \vec{0}$.

Розглянемо вектори $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$. Очевидно, що $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$.

Оскільки точки D , E , K ділять відповідні сторони трикутника ABC навпіл, то:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}; \quad \vec{BE} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}; \quad \vec{CK} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}.$$

Додамо ліві та праві частини цих рівностей:

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CK} = 3/2(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{0},$$

що й треба було довести.

Приклад 2. На векторах $\vec{OA} = (5; 10; 15)$ та $\vec{OB} = (0; 10; 5)$ побудувати трикутник AOB . Точка M ділить сторону AB у відношенні $2 : 3$. Знайти координати вектора $\vec{OM}$.

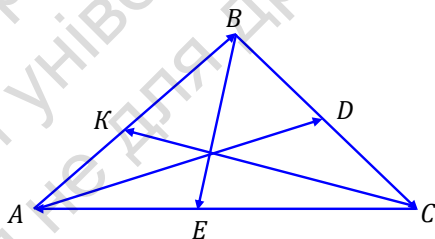


Рис. 2.14

На рис. 2.15 подано трикутник AOB . Із рисунку видно, що:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0; 10; 5) - (5; 10; 15) = (-5; 0; -10).$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + 2/5 \overrightarrow{AB} = (5; 10; 15) + 2/5(-5; 0; -10) = \\ &= (5; 10; 15) + (-2; 0; -4) = (3; 10; 11).\end{aligned}$$

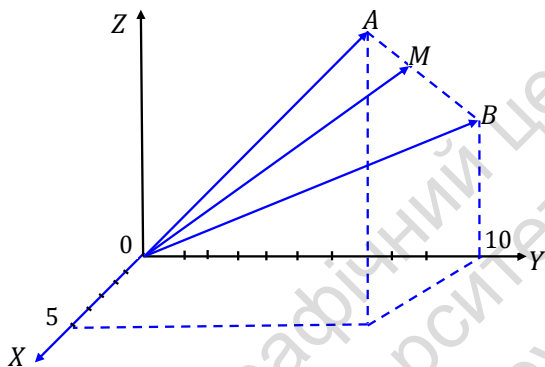


Рис. 2.15

Приклад 3. Задано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 20$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$ є діагоналями паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах (рис. 2.16).

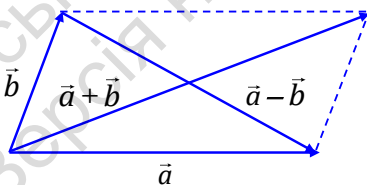


Рис. 2.16

Відомо, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його чотирьох сторін, тому

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2 \cdot (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2),$$

звідки випливає, що:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2} = \sqrt{2(11^2 + 23^2) - 20^2} = 30.$$

7. Що називають лінійною комбінацією векторів?
8. Яку лінійну комбінацію називають тривіальною?
9. Яку систему векторів називають лінійно залежною, а яку – лінійно незалежною?
10. Якою є необхідна й достатня умова лінійної залежності системи векторів?
11. Як виконують лінійні операції над векторами, що задані своїми координатами?

Приклад 4. Записати лінійну комбінацію $3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ векторів $\vec{a}_1 = (4; 1; 3; -2)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; -3; 2)$, $\vec{a}_3 = (16; 9; 1; -3)$.

Застосовуючи правила виконання лінійних операцій над векторами, що задані своїми координатами, дістанемо:

$$\begin{aligned} 3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3 &= 3(4; 1; 3; -2) + 5(1; 2; -3; 2) - (16; 9; 1; -3) = \\ &= (12; 3; 9; -6) + (5; 10; -15; 10) - (16; 9; 1; -3) = (1; 4; -7; 7). \end{aligned}$$

12. Які вектори називають колінеарними?
13. Якою є необхідна й достатня умова колінеарності двох векторів?

Приклад 5. Задано точки:

$$A(-1; 5; -10), B(5; -7; 8), C(2; 2; -7), D(5; -4; 2).$$

Перевірити, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні.

Запишемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (5 + 1; -7 - 5; 8 + 10) = (6; -12; 18),$$

$$\overrightarrow{CD} = (5 - 2; -4 - 2; 2 + 7) = (3; -6; 9).$$

Колінеарні вектори мають пропорційні координати, тому

$$6/3 = -12/-6 = 18/9 = 2.$$

Отже, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.

Приклад 6. За яких значень параметрів l і m вектори $\vec{a} = (l; -2; 5)$ і $\vec{b} = (1; m; -3)$ колінеарні?

Запишемо умову колінеарності двох векторів: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Для цих векторів умову можна записати як $(l; -2; 5) = \lambda(1; m; -3)$.

Використовуючи умови рівності двох векторів, отримаємо $l = \lambda$, $-2 = \lambda m$, $5 = -3\lambda$. Із останньої рівності знаходимо $\lambda = -5/3$. Підставимо значення λ до першої і другої рівностей, отримаємо $l = -5/3$, $m = 6/5$.

Приклад 7. Показати, що вектори:

$$\vec{x}_1 = (1; 2; 1; 2), \vec{x}_2 = (-1; 3; 2; 1), \vec{x}_3 = (-13; -1; 2; -11)$$

лінійно залежні.

Запишемо лінійну комбінацію векторів:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0},$$

$$\alpha_1(1; 2; 1; 2) + \alpha_2(-1; 3; 2; 1) + \alpha_3(-13; -1; 2; -11) = (0; 0; 0; 0),$$

яка еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 13\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 11\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до діагонального виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 13\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Отже, $\alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_2 = -5\alpha_3, \alpha_1 = 8\alpha_3$. Тому лінійна комбінація векторів $\vec{x}_1; \vec{x}_2; \vec{x}_3$ матиме вигляд $8\vec{x}_1 - 5\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{0}$. Це означає, що вектори $\vec{x}_1; \vec{x}_2; \vec{x}_3$ лінійно залежні.

Приклад 8. Показати, що вектори $\vec{a} = (-2; 0; 1), \vec{b} = (1; -1; -2), \vec{c} = (3; 1; -1)$ лінійно незалежні.

Покажемо, що $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = \vec{0}$ лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Перепишемо лінійну комбінацію векторів у вигляді $\alpha_1(-2; 0; 1) + \alpha_2(1; -1; -2) + \alpha_3(3; 1; -1) = (0; 0; 0)$, яка еквівалентна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки її основний визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

то однорідна система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно незалежні.

14. Які вектори утворюють базис?

Приклад 9. У базисі векторів попередньої задачі знайти координати вектора $\vec{d} = (1; 1; 1)$.

Позначимо x ; y ; z координати вектора $\vec{d} = (x; y; z)$ у базисі $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. Тоді $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + 3z = 1, \\ -y + z = 1, \\ x - 2y - z = 1. \end{cases}$

Оскільки визначник цієї системи $\Delta = -2 \neq 0$, то вона має єдиний розв'язок, який можна знайти (напр., за формулами Крамера): $x = -1$, $y = -1$, $z = 0$.

Отже, вектор $\vec{d} = (-1; -1; 0)$ у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

15. За якими формулами у прямокутних координатах обчислюють довжину, проєкції на координатній осі, напрямні косинуси вектора?

Приклад 10. Знайти довжину та напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (1; -2; 2)$.

За формулами маємо: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$,

$$\cos \alpha = 1/3, \cos \beta = -2/3, \cos \gamma = 2/3.$$

Приклад 11. Знайти вектор, довжина якого дорівнює 1, напрямком збігається із напрямком вектора $\vec{a} = (3; 4; -12)$, а також його напрямні косинуси.

Фактично потрібно знайти орт $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$. Для цього знаходимо довжину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13$. Тоді:

$$\vec{a}_0 = \vec{a}/|\vec{a}| = (3/13; 4/13; -12/13).$$

Вектор $\vec{a}_0$ має довжину 1. Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ є координатами вектора $\vec{a}_0$:

$$\cos\alpha = 3/13, \cos\beta = 4/13, \cos\gamma = -12/13.$$

16. Яким є означення скалярного добутку векторів?

17. Які властивості має скалярний добуток?

Приклад 12. Задано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які утворюють кут 60° .

Обчислити значення виразу $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$.

Обчислимо значення виразу $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$, використовуючи властивості скалярного добутку:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b}) &= 3\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = \\ &= 3\vec{a} \cdot \vec{a} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 4\vec{b} \cdot \vec{b} = 3|\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ - 4|\vec{b}|^2 = \\ &= 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 - 4 \cdot 4 = 23. \end{aligned}$$

18. Якою є необхідна й достатня умова перпендикулярності векторів?

19. Як записують умову перпендикулярності векторів, що задані своїми координатами?

Приклад 13. Визначити, за якого значення параметра α вектори $\vec{a} = (\alpha; -3; 2)$ та $\vec{b} = (1; 2; -\alpha)$ взаємно перпендикулярні.

Запишемо умову перпендикулярності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. В умовах задачі $\alpha \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-\alpha) = 0$, $-6 - \alpha = 0$.

Отже, $\alpha = -6$.

Приклад 14. Задано вектори $\vec{a} = (3; -2; 1)$ і $\vec{b} = (-1; 1; -2)$. Знайти вектор $\vec{c} = (x, y, z)$, що перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, і має довжину $\sqrt{35}$.

Запишемо умови перпендикулярності векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ і } \vec{b} \cdot \vec{c} = 0,$$

перепишемо їх у вигляді рівностей:

$$3x - 2y + z = 0, -x + y - 2z = 0.$$

За умовою довжина вектора $|\vec{c}| = \sqrt{35}$. Тоді $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

Запишемо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -x + y - 2z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 35; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ y = 5z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 35; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 9z = 0, \\ y = 5z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 35; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3z, \\ y = 5z, \\ 9z^2 + 25z^2 + z^2 = 35; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3z, \\ y = 5z, \\ z^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 5, \\ z = \pm 1. \end{cases}$$

Таким чином, маємо два вектори:

$$\vec{c}_1 = (-3; -5; -1) \text{ і } \vec{c}_2 = (3; 5; 1),$$

які задовольняють умові задачі.

20. За якою формулою обчислюють кут між двома векторами?

Приклад 15. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$ та $\vec{b} = (0; -2; 1)$.

За умовою задачі паралелограм побудовано на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 2.17).

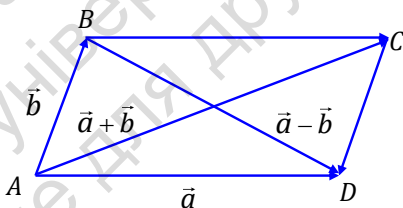


Рис. 2.17

Позначимо у паралелограмі $ABCD$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}; \quad b = \overrightarrow{AB}; \quad -b = \overrightarrow{CD}; \quad \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Діагоналями паралелограма будуть вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$. Знаходимо їхні координати:

$$\overrightarrow{AC} = (2; -1; 1), \quad \overrightarrow{BD} = (2; 3; -1).$$

За (2.18) знаходимо косинус кута φ між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{4 - 4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = 0.$$

Оскільки $\cos \varphi = 0$, то $\varphi = \pi/2$. Отже, діагоналі цього паралелограма перпендикулярні.

Приклад 16. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який колінеарний до вектора $\vec{a} = (6; -8; -7,5)$, утворює з віссю OZ гострий кут і його довжина $|\vec{b}| = 50$.

Позначимо координати вектора $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$. Оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то їх координати пропорційні:

$$\frac{x_b}{6} = \frac{y_b}{-8} = \frac{z_b}{-7,5} = \lambda.$$

Із цієї рівності дістанемо:

$$x_b = 6\lambda, y_b = -8\lambda, z_b = -7,5\lambda.$$

Оскільки вектор $\vec{b}$ утворює із віссю OZ гострий кут, а вектор $\vec{a}$ із віссю OZ – тупий кут ($z_a = -7,5 < 0$), то вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ протилежно напрямлені. Тому:

$$\lambda = -|\vec{b}|/|\vec{a}| = -50/12,5 = -4.$$

Отже, $x_b = -24, y_b = -32, z_b = 30$.

Приклад 17. Знайти об'єм V тетраедра з вершинами $A(1; 2; 3), B(4; 4; 4), C(2; 6; 4), D(2; 3; 6)$.

Розглянемо вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (3; 2; 1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1; 4; 1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (1; 1; 3).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 26.$$

Шуканий об'єм тетраедра становить $\frac{1}{6}$ від об'єму паралелепіпеда, що побудований на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тому:

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})| = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \approx 4,33.$$

Розділ 3

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Рівняння лінії у прямокутній системі координат

В аналітичній геометрії геометричні об'єкти вивчають за допомогою методів алгебри та математичного аналізу. Вивчення ґрунтується на методі координат. Положення точки на прямій, на площині чи у просторі описують відповідно одним, двома або трьома числами – координатами цієї точки, а кожній кривій лінії (або поверхні) відповідає одне або кілька рівнянь, які зв'язують координати будь-якої точки, що їй належить.

В аналітичній геометрії розглядають дві основні задачі:

1) за відомих геометричних властивостей кривої лінії (або поверхні) знайти її рівняння;

2) за відомого рівняння кривої лінії (або поверхні) вивчити її форму та властивості.

Рівняння лінії є найважливішим поняттям аналітичної геометрії. Нехай на площині задано деяку лінію (криву), координати x та y точки $M(x; y)$, яка належить цій лінії, пов'язані між собою у певний спосіб. Такий зв'язок аналітично записують у вигляді деякого рівняння.

Означення. *Рівнянням лінії (кривої) на площині* називають рівняння із двома змінними x та y , якому задовольняють координати довільної точки цієї лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії (рис. 3.1).

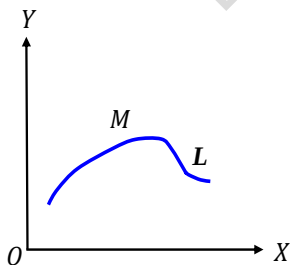


Рис. 3.1

У загальному випадку рівняння лінії (кривої) L можна записати:

$$F(x; y) = 0. \quad (3.1)$$

Іноколи змінну y можна виразити із рівняння (3.1), у такому випадку рівняння лінії має вигляд:

$$y = f(x). \quad (3.2)$$

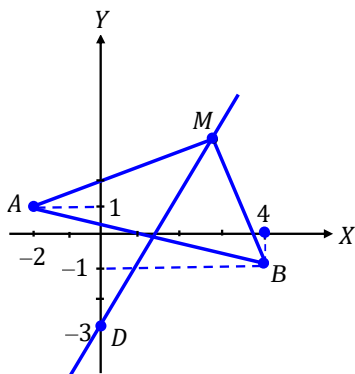


Рис. 3.2

Тоді, підставивши до (3.3) координати точок $M(x; y)$, $A(-2; 1)$, $B(4; -1)$, дістанемо:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння. Після перетворень одержимо $3x - y - 3 = 0$ або $y = 3x - 3$ – рівняння прямої MD , яка є серединним перпендикуляром, що проведений до відрізка AB .

Загалом можна записати рівняння будь-якої лінії, але на практиці це не завжди просто зробити.

Щоб переконатись, чи належить точка $M(x_0; y_0)$ лінії $F(x; y) = 0$, варто перевірити, чи задовольняють координати цієї точки це рівняння, тобто $F(x_0; y_0) \equiv 0$, якщо точка $M(x_0; y_0)$ належить лінії.

Отже, в аналітичній геометрії, на відміну від елементарної геометрії, під *лінією* розуміють множину точок (*геометричне місце точок*, координати яких задовольняють рівняння лінії).

Із означення лінії випливають геометричні властивості точок, які належать цій лінії. Для того, щоб скласти рівняння лінії (кривої) за заданими геометричними властивостями її точок, застосовують наступний **алгоритм**:

Крок 1. Вибрати на довільну точку $M(x; y)$, яка належить шуканій лінії L .

Приклад 3.1. Записати рівняння, лінії точки якої рівновіддалені від двох точок площини $A(-2; 1)$ та $B(4; -1)$ (рівняння серединного перпендикуляра).

Відстань між двома точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ визначають за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.3)$$

Нехай $M(x; y)$ – довільна точка шуканої лінії (рис. 3.2).

Крок 2. Записати в аналітичному вигляді умови, які задовольняють координати точки $M(x; y)$ шуканої лінії L у вигляді рівняння або системи рівнянь.

3.2. Рівняння прямої на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. Для того, щоб скласти рівняння прямої лінії на площині, необхідно у певний спосіб задати умови, які визначають положення прямої щодо координатних осей. Прямую на площині щодо системи координат можна задати, наприклад двома різними точками; точкою та напрямком (вектором); точкою та вектором, що перпендикулярний до прямої тощо. Оскільки таких способів існує кілька, то й рівняння прямої можна отримати у різних формах.

3.2.1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора

Запишемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$, перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n} = (a; b)$.

Виберемо на прямій L довільну точку $M(x; y)$.

Розглянемо вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0).$$

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні (рис. 3.3), тому їх скалярний добуток дорівнює нулю. Із цієї умови дістанемо рівняння прямої

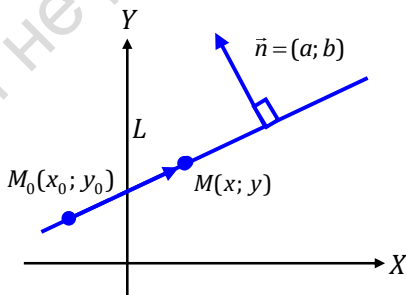


Рис. 3.3

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) називають **рівнянням прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора**. Рівняння (3.4) задовольняє координати довільної точки, яка лежить на прямій, і не задовольняє координати точки, яка не лежить на прямій. Тому (3.4) є шуканим рівнянням.

Приклад 3.2. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; -1)$, перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (2; 4)$.

Підставимо до (3.4) координати вектора $\vec{n} = (2; 4)$ і точки $M(3; -1)$, дістанемо рівняння $2(x-3)+4(y+1)=0$, звідки $2x+4y-2=0$. Остаточного маємо: $x+2y-1=0$.

3.2.2. Рівняння прямої із кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма перетинає вісь OY у точці $B(0; b)$ та утворює з віссю OX кут α (рис. 3.4), який називають **кутом нахилу прямої**.

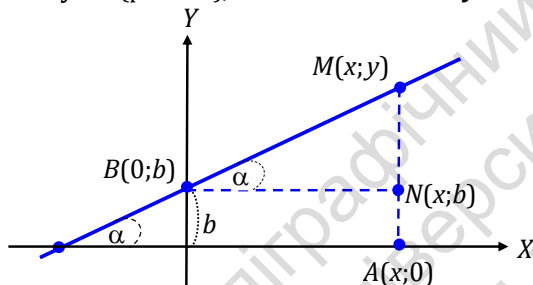


Рис. 3.4

Виберемо на прямій довільну точку $M(x; y)$. Тангенс кута нахилу прямої знайдемо з трикутника $\triangle MBN$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x}.$$

Означення. **Кутовим коефіцієнтом прямої** називають тангенс кута нахилу α , що утворює пряма із додатним напрямком осі OX :

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.5)$$

Оскільки $k = \frac{y-b}{x}$, то

$$y = kx + b. \quad (3.6)$$

Формулу (3.6) називають **рівнянням прямої із кутовим коефіцієнтом**.

Розглянемо **окремі випадки**:

1. Якщо $b=0$, то **пряма $y=kx$ проходить через початок координат** (рис. 3.5).

Якщо $k = \operatorname{tg} \alpha > 0$, то пряма утворює з віссю OX гострий кут, якщо ж $k = \operatorname{tg} \alpha < 0$, то пряма утворює з віссю OX тупий кут.

2. Якщо $k = \operatorname{tg} \alpha = 0$, то $\alpha = 0$ та $y = b$ **пряма, паралельна до осі OX** . Зокрема, **рівняння осі OX** має вигляд: $y = 0$ (рис. 3.6).

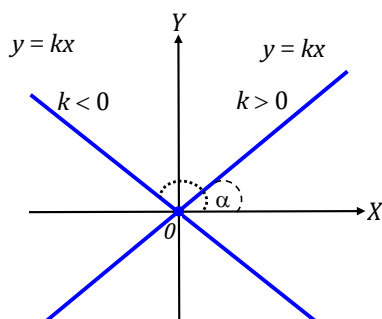


Рис. 3.5

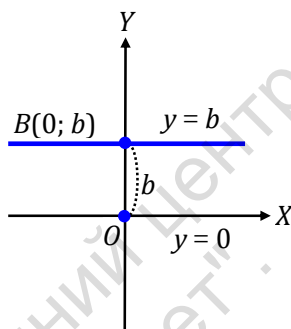


Рис. 3.6

3. Якщо $\alpha = \pi/2$, то $\operatorname{tg} \pi/2$ не існує, тобто ця пряма не має кутового коефіцієнта. Тоді y — довільне та **пряма паралельна до осі OY** . Якщо пряма відтинає від осі OX відрізок, рівний a , то її рівняння має вигляд: $x = a$.

Рівняння осі OY має вигляд: $x = 0$ (рис. 3.7).

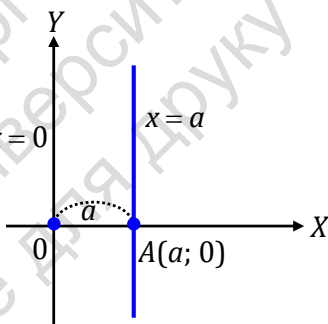


Рис. 3.7

3.2.3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ та утворює із віссю OX кут α ($\alpha \neq \pi/2$). Оскільки точка $M_0(x_0; y_0)$ лежить на прямій, то її координати задовольняють (3.6), тому:

$$y_0 = kx_0 + b. \quad (3.7)$$

Віднімемо від (3.6) рівняння (3.7) і дістанемо:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.8)$$

Це **рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ у заданому напрямку**. Його ще називають **рівнянням пучка прямих**, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Приклад 3.3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -2)$:

1) паралельно до осі OX ; 2) паралельно до осі OY ; 3) під кутом $\alpha = 135^\circ$.

1) якщо пряма паралельна до осі OX , то кутовий коефіцієнт цієї прямої $k=0$, тому її рівняння має вигляд: $y=b$. Підставляючи до цього рівняння координати точки $M_0(1; -2)$, одержимо: $b=-2$. Таким чином, рівняння шуканої прямої: $y=-2$;

2) якщо пряма паралельна до осі OY , то вона утворює кут $\alpha = \pi/2$ із віссю OX , тому $k = \operatorname{tg} \pi/2$ не існує, і рівняння прямої має вигляд: $x=a$. Підставимо координати точки $M_0(1; -2)$ та одержимо: $a=1$. Отже, рівняння шуканої прямої: $x=1$;

3) якщо пряма утворює із віссю OX кут $\alpha = 135^\circ$, то її кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Використовуючи (3.8), матимемо: $y+2 = -1 \cdot (x-1)$ або $y = -x-1$. Це рівняння шуканої прямої.

3.2.4. Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до вектора $\vec{s}=(l;m)$ (рис. 3.8).

Виберемо на прямій довільну точку $M(x; y)$, після чого розглянемо вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0).$$

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні, тому їх координати пропорційні. Із цієї умови дістанемо рівняння:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (3.9)$$

Рівняння (3.9) називають **канонічним рівнянням прямої**. Вектор $\vec{s}$ називають **напрямним вектором прямої**.

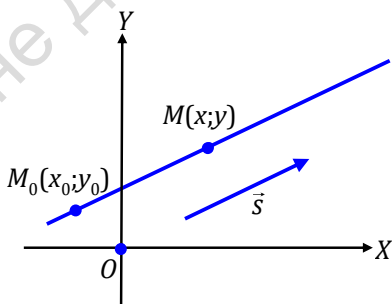


Рис. 3.8

3.2.5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 3.9). Тоді напрямним прямої буде вектор:

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

Підставимо його координати та координати заданої точки $M_1(x_1; y_1)$ до (3.9) й дістанемо рівняння:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.10)$$

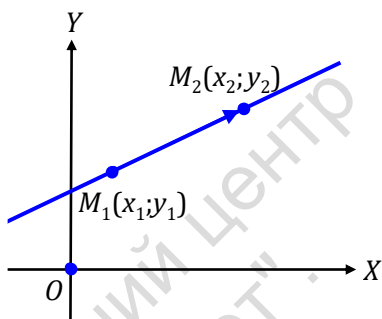


Рис. 3.9

Рівняння (3.10) називають *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

Приклад 3.4. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3; 1)$ і $M_2(5; 4)$.

Підставляючи координати заданих точок до (3.10), дістанемо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 1}{4 - 1} \quad \text{або} \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{3},$$

яке запишемо у загальному вигляді: $3x - 2y - 7 = 0$.

3.2.6. Рівняння прямої у відрізках

Запишемо рівняння прямої, яка відтинає від осей координат OX та OY задані відрізки $a \neq 0$ та $b \neq 0$, відповідно (рис. 3.10).

Використовуючи рівняння прямої (3.10), яка проходить через точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$, маємо рівняння:

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a},$$

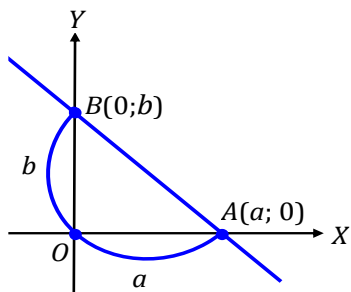


Рис. 3.10

яке після перетворень набуває вигляду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.11)$$

Рівняння (3.11) називають **рівнянням прямої у відрізках на осях**. Його зручно використовувати при побудові прямої.

Приклад 3.5. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(4; -1)$ і відтинає від додатної півосі OX відрізок, удвічі більший, ніж на додатній півосі OY . Побудувати пряму.

За умовою задачі $a = 2 \cdot b$ ($a > 0, b > 0$). Підставимо ці значення до (3.11), дістанемо:

$$\frac{x}{2 \cdot b} + \frac{y}{b} = 1.$$

Оскільки точка $M(4; -1)$ лежить на прямій, то її координати задовольняють це рівняння. Підставимо їх, маємо:

$$\frac{4}{2 \cdot b} - \frac{1}{b} = 1,$$

звідки $b = 1$, тоді $a = 2$. Рівняння шуканої прямої має вигляд:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1.$$

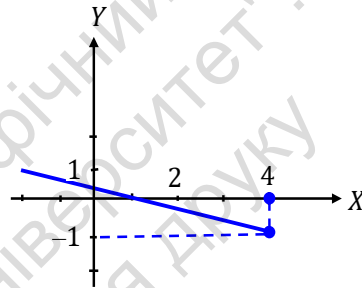


Рис. 3.11

3.2.7. Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння першого ступеня щодо змінних x та y :

$$ax + by + c = 0. \quad (3.12)$$

Якщо коефіцієнти a та b рівняння (3.12) одночасно не дорівнюють нулю ($a^2 + b^2 > 0$), то його називають **загальним рівнянням прямої**.

Окремі випадки (3.12) подано у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Значення коефіцієнтів	Вигляд рівняння	Положення прямої
$c = 0$	$ax + by = 0$ ($y = kx$)	Проходить через початок координат
$a = 0$	$by + c = 0$ ($y = d$)	Паралельна осі OX
$b = 0$	$ax + c = 0$ ($x = g$)	Паралельна осі OY
$a = c = 0$	$y = 0$	Збігається із віссю OX
$b = c = 0$	$x = 0$	Збігається із віссю OY

3.2.8. Взаємне розміщення двох прямих

Перетин двох прямих

Нехай задано дві прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ та $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, які перетинаються. Оскільки координати точки перетину цих прямих мають задовольняти рівняння кожної прямої, то їх можна знайти, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Якщо (3.13) має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то прямі перетинаються у точці $M_0(x_0; y_0)$.

Кут між прямими

Нехай потрібно знайти кут між прямими (рис. 3.12):

$$L_1: y = k_1x + b_1 \text{ і } L_2: y = k_2x + b_2.$$

Із рисунка видно, що кут між прямими $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Оскільки $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, то за умови, що $\alpha_1 \neq \pi/2$ і $\alpha_2 \neq \pi/2$, дістанемо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

або $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, звідки:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) визначає один із кутів між прямими, що перетинаються. Інший кут дорівнює $\pi - \varphi$.

Умова паралельності прямих

Якщо прямі $L_1: y = k_1x + b_1$ і $L_2: y = k_2x + b_2$ паралельні, то кут між ними $\varphi = 0$, отже і $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Із (3.14) випливає, що:

$$k_1 = k_2, \quad (3.15)$$

і навпаки, якщо $k_1 = k_2$, то із (3.14) випливає, що $\operatorname{tg}\varphi = 0$, отже і $\varphi = 0$. Таким чином, (3.15) є *необхідною та достатньою умовою паралельності двох прямих*.

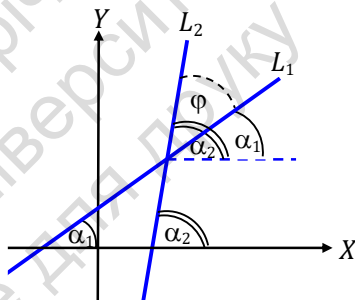


Рис. 3.12

Приклад 3.6. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2; 4)$ паралельно до прямої $2x - 3y + 6 = 0$ (рис. 3.13).

Перепишемо рівняння прямої у вигляді:

$$y = (2/3)x + 2$$

і знайдемо її кутовий коефіцієнт $k_1 = 2/3$.

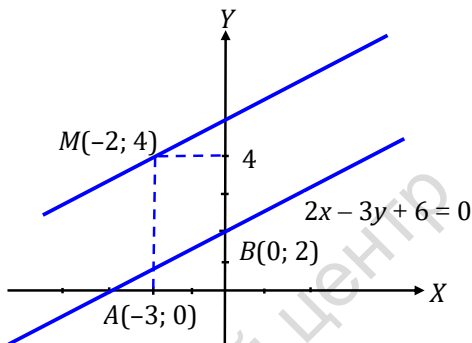


Рис. 3.13

Оскільки задана та шукана прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто $k_1 = k_2 = 2/3$.

Шукана пряма проходить через точку $M(-2; 4)$ і має кутовий коефіцієнт $k_2 = 2/3$, тому її рівняння має вигляд: $y - 4 = (2/3) \cdot (x + 2)$ або у загальному вигляді: $2x - 3y + 16 = 0$.

Умова перпендикулярності двох прямих

Якщо прямі $L_1: y = k_1x + b_1$ і $L_2: y = k_2x + b_2$ перпендикулярні, то кут між ними $\varphi = \pi/2$, при цьому $\text{ctg}\varphi = \text{ctg}(\pi/2) = 0$ або $\text{ctg}\varphi = \frac{1}{\text{tg}\varphi} = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отже, має місце рівність:

$$k_1k_2 = -1. \quad (3.16)$$

Таким чином, (3.16) є *необхідною й достатньою умовою перпендикулярності двох прямих*.

3.2.9. Відстань від точки до прямої

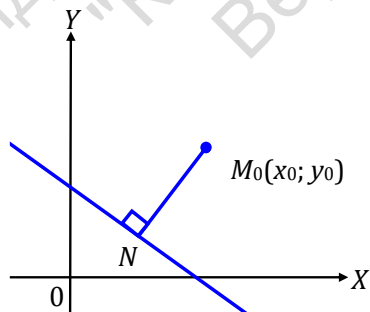


Рис. 3.14

Задано точку $M_0(x_0; y_0)$ і пряму $L: ax + by + c = 0$. Відстанню від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої L є довжина перпендикуляра $d = M_0N$ (рис. 3.14), що обчислюють за формулою:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.17)$$

Приклад 3.7. Знайти відстань між двома паралельними прямими $4x + 3y - 8 = 0$ (AB) і $4x + 3y - 33 = 0$ (CD) (рис. 3.15).

Через довільну точку A на будь-якій із прямих, наприклад AB , проведемо перпендикуляр AM . Визначимо координати точок перетину цього перпендикуляру із заданими прямими та знайдемо відстань між ними.

Кутовий коефіцієнт прямої AB із (3.16): $k_1 = -(4/3)$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AM , що проходить через точку $A(2; 0)$ перпендикулярно до прямої AB :

$$k_2 = -(1/k_1) = 3/4.$$

Отже, рівняння цього перпендикуляра має вигляд:

$$y - 0 = (3/4) \cdot (x - 2) \text{ або } 3x - 4y - 6 = 0.$$

Знайдемо точку перетину перпендикуляра AM із прямою CD , розв'язавши систему:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 33 = 0, \\ 3x - 4y - 6 = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо координати точки перетину $M(6; 3)$. Обчислюємо відстань між точками A та M :

$$AM = \sqrt{(2-6)^2 + (0-3)^2} = 5.$$

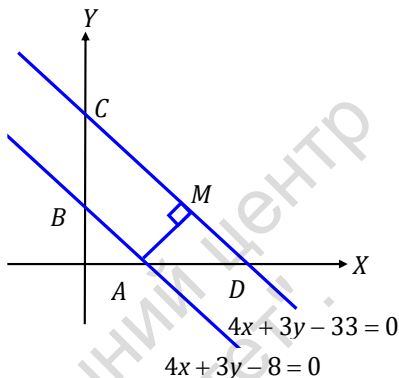


Рис. 3.15

3.3. Моделі та задачі економічного змісту

3.3.1. Модель рівноваги ринку

Розглянемо просту математичну *модель рівноваги ринку*. Основними тут є співвідношення між двома величинами: ціною одиниці товару p та обсягом товару на ринку q .

В основі математичної моделі лежить проста ідея: розглянути ціну одиниці товару p та обсяг товару q як упорядковану

пару чисел $(p; q)$ і поставити їй у відповідність на площині точку із координатами $(p; q)$. Вісь абсцис позначимо p , а вісь ординат – q . Наприклад, пара $(7; 2000)$ відповідає ситуації, коли 2000 одиниць товару можна продати за ціною 7 грн/од.

Розглянемо деякий товар. За ціни p за одиницю товару позначимо $s(p)$ – число одиниць товару, що запропонований на продаж. Функцію $s = s(p)$ називають **функцією пропозиції на товар**. З іншого боку, позначимо $q(p)$ – число одиниць товару, який покупці бажають купити. Функція $q = q(p)$ є **функцією попиту на товар**. З економічних міркувань функція пропозиції $s = s(p)$ така, що зростає, а функція попиту $q = q(p)$ – спадна.

Означення. Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції на цей товар, називають **рівноважною**.

За рівноважної ціни p^* виконується рівність $s(p^*) = q(p^*)$, яку називають **умовою рівноваги**, а точку $E(p^*; q^*)$, координати якої задовольняють цю рівність, називають **точкою рівноваги**.

Нехай задано лінійні функції $s(p) = bp - a$ та $d(p) = c - gp$, де a, b, c, g – додатні числа; функція $s = s(p)$ визначає пропозицію, а функція $q = q(p)$ – попит на певний товар. Потрібно знайти рівноважну ціну p^* .

Якщо відсутні податки, то рівноважну ціну визначають як розв'язок **рівняння рівноваги** $s(p^*) = q(p^*)$ або системи лінійних рівнянь:

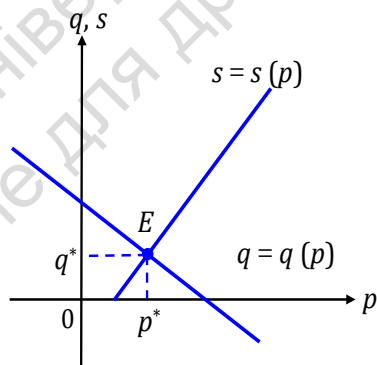


Рис. 3.16

$$\begin{cases} s^* = bp^* - a \\ q^* = c - gp^* \end{cases} \Leftrightarrow bp^* - a = c - gp^* \Leftrightarrow p^*(b + g) = a + c.$$

$$p^* = \frac{a + c}{b + g}. \quad (3.18)$$

Приклад 3.8. Задано функції: попиту $q = -5p - 40$ і пропозиції $s = (15/2) \cdot p - 10$. Знайти точку рівноваги.

Знайдемо точку рівноваги $E(p^*; q^*)$, координати якої задовольняють умові рівноваги:

$$s^* = q^*,$$

тобто $40 - 5p = (15/2) \cdot p - 10$,

звідки:

$$p^* = 4, \text{ а } s^* = q^* = 40 - 5p^* = 20.$$

Отже, шукана точка рівноваги – $E(4; 20)$ (рис. 3.17).

Приклад 3.9. Припустимо, що уряд деякої країни встановив акцизний податок T за одиницю товару, причому податком є фіксоване число, а не відсоток від ціни, за якою товар продають на ринку.

У попередньому прикладі було задано функції: попиту $q = 40 - 5p$, пропозиції $s = (15/2) \cdot p - 10$ і визначено рівноважну ціну $p^* = 4$.

Якщо уряд установить податок T за одиницю товару, то функція пропозиції зміниться та її визначатиме співвідношення:

$$s^T = s(p - T) = (15/2) \cdot (p - T) - 10,$$

а функція попиту залишиться незмінною. Тоді нову точку рівноваги $(p^T; q^T)$ можна визначити за умови рівноваги:

$$s^T = q^T, \text{ тобто } 40 - 5p^T = (15/2) \cdot (p^T - T) - 10.$$

Отже, нова рівноважна ціна: $p^T = 4 + (3/5) \cdot T$, а відповідний обсяг товару: $s^T = q^T = 20 - 3T$.

Отримано нову точку рівноваги: $E_1(4 + (3/5) \cdot T; 20 - 3T)$.

Наприклад, якщо податок $T = 1$ грн/од., то рівноважна ціна збільшиться від 4,0 до 4,6 грн, а обсяг товару (пропозиція) зменшиться від 20 до 17, тобто обсяг одиниць товару для продажу на ринку зменшиться на $3T$, а ціна – збільшиться на $(3/5) \cdot T$.

Розглянемо узагальнену ситуацію, за якої функції попиту $q = c - gp$ і пропозиції $s = bp - a$ – лінійні, де a, b, c, g – деякі додатні числа. Якщо встановлено податок T за одиницю товару, то новою ціною буде $p^T - T$. Тоді визначимо нову точку рівноваги із умови:

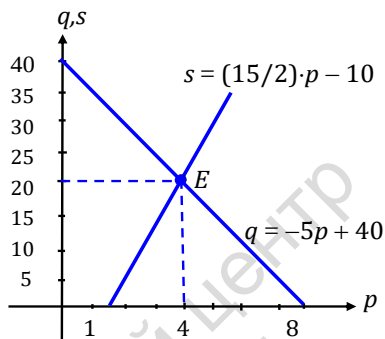


Рис. 3.17

$$s^T = q^T, \text{ де } s^T = b(p^T - T) - a, \text{ а } q^T = c - gp^T.$$

Отримуємо $bp^T - Tb - a = c - gp^T$. Із цієї рівності визначаємо нову рівноважну ціну:

$$p^T = \frac{a+c}{b+g} + \frac{b}{b+g} \cdot T.$$

Ураховуючи результат (3.18) прикладу 3.8 $p^* = \frac{a+c}{b+g}$, матимемо:

$$p^T = p^* + \frac{b}{b+g} \cdot T. \quad (3.19)$$

Отже, нова рівноважна ціна підвищується на $\frac{b}{b+g} \cdot T$.

Оскільки $b > 0$ і $g > 0$, то $0 < \frac{b}{b+g} < 1$ і величина $0 < \frac{b}{b+g} \cdot T < T$.

Приклад 3.10 (визначення доходів і збитків компанії).

Компанія випускає продукцію та продає її за p грн/од. Керівництво компанії встановило, що сума y_B загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції кількістю x (тис. од.) має закономірність $y_B = ax + b$. Знайти точку рівноваги, сфери прибутків і збитків компанії (рис. 3.18).

Оскільки дохід від продажу x тис. виробів продукції за ціною p грн/од. визначатиметься функцією доходу $y_D = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно виконання умови рівноваги $y_D = y_B$. Підставивши вирази функцій, знаходимо розв'язок рівняння $px = ax + b$.

Дістанемо абсцису точки рівноваги: $x^* = \frac{b}{p-a}$.

Таким чином, визначено точку рівноваги:

$$E\left(\frac{b}{p-a}, \frac{pb}{p-a}\right).$$

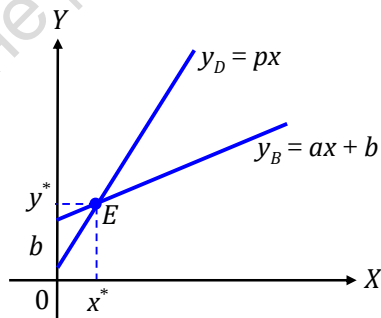


Рис. 3.18

Розглянемо можливості компанії. Функцію її прибутку $\Pi = \Pi(x)$ визначають за допомогою рівності:

$$\Pi = \Pi(x) = y_D - y_R = px - ax - b = x(p - a) - b.$$

Точка рівноваги – це точка, коли прибуток компанії $\Pi = 0$.

Якщо $0 \leq x \leq x^*$, то графік функції доходу y_D нижчий за графік функції витрат y_B і $y_D < y_B$. Тоді $\Pi < 0$, і компанія зазнає збитків.

Якщо $x > x^*$, то $y_D > y_B$: графік функції доходу y_D вищий за графік функції витрат y_B . Тоді $\Pi > 0$, і компанія одержує прибуток.

Таким чином, область збитків компанії $x \in [0, x^*)$, а областю прибутків є $x \in (x^*, +\infty)$.

Приклад 3.11 (визначення рентабельності транспортного постачання). Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу у залізничним транспортом виражає функція $y = x + 20$, автомобільним – функція $y = 2x + 10$, де x вимірюють десятками кілометрів.

Визначити, на які відстані вигідніше перевозити вантажі залізничним та автомобільним транспортом.

Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення.

Для віднайдення координат точок перетину прямих розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x + 20, \\ y = 2x + 10. \end{cases}$$

Розв'язком буде точка із координатами $x = 10$, $y = 30$. Тому графіки перетинаються у точці $M(10; 30)$ (рис. 3.19).

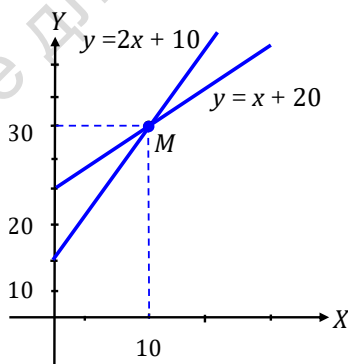


Рис. 3.19

Графічний аналіз функцій витрат дозволяє дійти висновків:

- якщо $x \in [0; 10)$, тобто $x < 100$ км, то транспортні витрати у перевезення автомобільним транспортом нижчі за витрати при перевезенні залізничним транспортом;
- якщо $x \in (10; +\infty)$, тобто $x > 100$ км, то рентабельнішим буде залізничний транспорт.

3.3.2. Бюджетні множини та лінії бюджетного обмеження

Розглянемо n -вимірний простір товарів C . Нехай задано вектор цін $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ одиниць товарів, тоді ціною набору товарів $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ буде скалярний добуток цих векторів:

$$c(\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Для кращого розуміння задачі розглянемо простір двох товарів.

Геометрично набори товарів за ціною $c(\vec{x}) = c = \text{const}$ утворюють множину точок площини, які лежать на прямій L_c , що задана рівнянням $p_1 x_1 + p_2 x_2 = c$ і розташована у першому квадранті (оскільки $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) перпендикулярно до вектора цін. Якщо $c_1 < c$, то пряма L_{c_1} , що задана рівнянням $p_1 x_1 + p_2 x_2 = c_1$, паралельна прямій L_c і лежить ближче до початку координат (рис. 3.20).

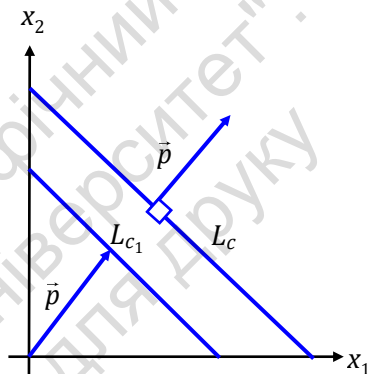


Рис. 3.20

Нехай фіксована деяка грошова сума D , яку умовно називають **бюджетом**.

Означення. Множину всіх наборів товарів, ціна яких не перевищує D , називають **бюджетною множиною** та позначають $B(p; D)$.

Бюджетну множину можна визначити за допомогою звичайних чи векторних нерівностей:

$$B(p; D) = \{ \vec{x} \in C : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq D, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \} \text{ або}$$

$$B(p; D) = \{ \vec{x} \in C : \vec{p} \cdot \vec{x} \leq D, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}.$$

Означення. Межею бюджетної множини G називають множину наборів товарів, що мають ціну, яка дорівнює D .

Межу бюджетної множини можна визначити за допомогою звичайних чи векторних рівностей:

$$G(p; D) = \{\bar{x} \in C : p_1 x_1 + p_2 x_2 = D\} \text{ або } G(p; D) = \{\bar{x} \in C : \bar{p} \cdot \bar{x} = D\}.$$

Якщо простір товарів дво- або тривимірний, то бюджетну множину можна подати наочно.

Приклад 3.12. Розглянемо бюджетні множини за різних цін p і бюджетів D .

Якщо задано бюджет $D=20$ ум. од. і вектор цін $\bar{p}=(2;1)$, то бюджетну множину задають нерівності:

$$B(p; 20) = \{(x_1; x_2) : 2x_1 + x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Будуємо межу бюджетної множини – пряму, що задана рівнянням $x_1/10 + x_2/20 = 1$. Ураховуємо, що $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (рис. 3.21).

У випадку, коли $D=40$, а $\bar{p}=(2;1)$, бюджетна множина:

$$B(p; 40) = \{(x_1; x_2) : 2x_1 + x_2 \leq 40, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

а її межа:

$$G(p; 40) = \{(x_1; x_2) : x_1/20 + x_2/40 = 1\}.$$

Якщо змінити бюджет $D=20$ і вектор цін $\bar{p}=(1;2)$, то бюджетна множина:

$$B(p; 20) = \{(x_1; x_2) : x_1 + 2x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

а її межа:

$$G(p; 20) = \{(x_1; x_2) : x_1/20 + x_2/10 = 1\} \text{ (рис. 3.22)}.$$

Якщо $D=60$ і $\bar{p}=(1;2)$, то бюджетна множина:

$$B(p; 60) = \{(x_1; x_2) : x_1 + 2x_2 \leq 60, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

а її межа:

$$G(p; 60) = \{(x_1; x_2) : x_1/60 + x_2/30 = 1\} \text{ (рис. 3.22)}.$$

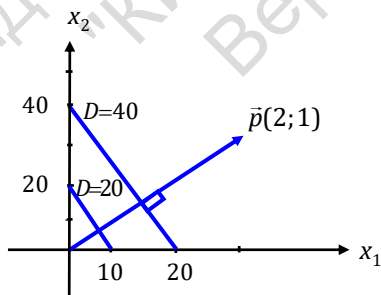


Рис. 3.21

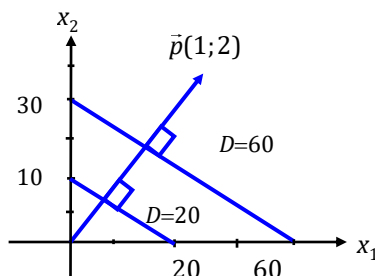


Рис. 3.22

Із рисунків 3.21 і 3.22 видно, що межа бюджетної множини, що перпендикулярна до вектора цін, – це відрізок між осями координат у першому квадранті.

За тривимірного випадку бюджетна множина буде тригранною пірамідою, а межа – однією із граней піраміди, частиною площини, що розташована у першому квадранті.

Очевидно, що бюджетна множина $B(p; D)$ залежить від цін p і бюджету D . За збільшення бюджету D межа бюджетної множини паралельно рухається у напрямку від початку координат; за зменшення цін бюджетна множина також збільшується.

Зазначимо, що введені поняття застосовують у теорії оптимального планування та лінійного програмування економічних процесів і в мікроекономіці.

3.4. Площина та пряма у просторі

3.4.1. Рівняння площини у просторі R^3

Складемо рівняння площини у тривимірному просторі. Нехай на площині P задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і вибрано вектор $\vec{n} = (a; b; c)$, що перпендикулярний до неї (вектор нормалі).

Виберемо довільну точку $M(x; y; z)$ на площині P . Вектор $\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$ (рис. 3.23).

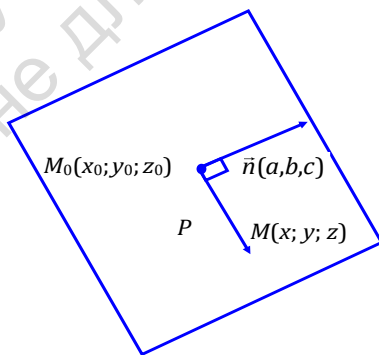


Рис. 3.23

Запишемо аналітично умову перпендикулярності векторів:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) називають *рівнянням площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n} = (a; b; c)$.*

Якщо позначити сталу величину $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, то (3.20) перетвориться на:

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (3.21)$$

Якщо $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, то рівняння (3.21) називають **загальним рівнянням площини**.

Розглянемо **окремі випадки** (3.21):

1. $a = 0$ площина паралельна осі OX .
2. $b = 0$ площина паралельна осі OY .
3. $c = 0$ площина паралельна осі OZ .
4. $d = 0$ площина проходить через початок координат.
5. $a = b = 0$ площина перпендикулярна до осі OZ .
6. $a = c = 0$ площина перпендикулярна до осі OY .
7. $b = c = 0$ площина перпендикулярна до осі OX .
8. $a = d = 0$ площина проходить через вісь OX .
9. $b = d = 0$ площина проходить через вісь OY .
10. $c = d = 0$ площина проходить через вісь OZ .
11. $a = b = d = 0$ площина проходить через осі OX, OY (площина XOY).
12. $a = c = d = 0$ площина проходить через осі OX, OZ (площина XOZ).
13. $b = c = d = 0$ площина проходить через осі OY, OZ (площина YOZ).

Якщо жоден із коефіцієнтів (3.21) не дорівнює нулю, то загальне рівняння площини можна записати у вигляді:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1, \quad (3.22)$$

де $A = -(d/a)$, $B = -(d/b)$, $C = -(d/c)$ – відрізки, які відтинає площина від координатних осей. Рівняння (3.22) називають **рівнянням площини у відрізках на осях**.

Нехай задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій. Запишемо рівняння площини, що проходить через ці точки. Рівняння (3.21) запишемо як:

$$ax_k + by_k + cz_k + d = 0, k = 1, 2, 3.$$

Віднімаємо почленно ці рівняння та складемо систему:

$$\begin{cases} a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0, \\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0, \\ a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0. \end{cases}$$

Оскільки ця однорідна система рівнянь має ненульовий розв'язок a, b, c , то її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.23)$$

Рівняння (3.23) є **рівнянням площини, що проходить через три задані точки**.

Приклад 3.13. Записати рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(4; -1; -2)$, $M_3(4; 0; 3)$.

Використовуючи (3.23), запишемо рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, дістанемо шукане рівняння площини:

$$10x + 15y - 3z - 31 = 0.$$

3.4.2. Відстань від точки до площини

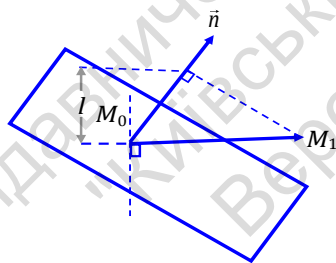


Рис. 3.24

Задано площину

$$ax + by + cz + d = 0$$

і $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – точку поза нею.

Нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежить на площині. Тоді відстань l від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до площини дорівнює модулю проекції вектора

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

на нормаль до площини (рис. 3.24). Тоді дістанемо:

$$l = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}}{\vec{n}} \right| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Оскільки $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, то:

$$l = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (3.24)$$

За (3.24) обчислюють відстань від точки до площини.

3.4.3. Взаємне розміщення двох площин

Нехай дві площини задано загальними рівняннями:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (P_1),$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad (P_2).$$

За довільного розміщення площин P_1 і P_2 у просторі один із кутів φ між ними дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$, який обчислюють за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (3.25)$$

Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$.

Якщо площини P_1 і P_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, і навпаки. Тому із (3.25) дістанемо **умову перпендикулярності двох площин**:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \quad (3.26)$$

Якщо площини P_1 і P_2 паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні, і навпаки. Тоді їх координати пропорційні, отже маємо **умову паралельності двох площин**:

$$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2. \quad (3.27)$$

Дві площини збігаються, якщо виконується рівність:

$$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = d_1/d_2. \quad (3.28)$$

3.4.4. Рівняння прямої у просторі R^3

Будь-яку пряму L у просторі можна розглядати як лінію перетину двох непаралельних площин, при цьому, якщо площини P_1 і P_2 задані загальними рівняннями, то система:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

задає **загальні рівняння прямої у просторі**.

Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та вектор $\vec{s} = (l; m; n)$, паралельний до цієї прямої. Вектор $\vec{s}$ називають **напрямним вектором прямої**.

Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка, яка лежить на прямій L . Вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ і $\vec{s} = (l; m; n)$ колінеарні, тому їх координати пропорційні. Із цієї умови дістанемо:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3.30)$$

Рівняння (3.30) задає **канонічні рівняння прямої у просторі**.

Нехай t – коефіцієнт пропорційності, тобто $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. Із (3.30) маємо:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

яке можна переписати у вигляді системи:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (3.31)$$

Рівняння (3.31) задає **параметричні рівняння прямої у просторі**. Параметричні рівняння зручно застосовувати у випадках, за яких потрібно знайти точку перетину прямої із площиною.

Приклад 3.14. Знайти точку перетину прямої

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{5}$$

із площиною $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Запишемо рівняння прямої у параметричній формі. Припустимо, що:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{5} = t,$$

дістанемо параметричні рівняння прямої:

$$x = 2 + 4t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = 5t - 1.$$

Підставимо знайдені значення x, y, z до рівняння площини:

$$(2 + 4t) + 2(3 + 2t) - 3(5t - 1) - 4 = 0,$$

розв'язок якого $t = 1$. Підставимо значення $t = 1$ до параметричних рівнянь прямої і дістанемо:

$$x = 6, y = 5, z = 4.$$

Отже, шукана точка перетину прямої та площини – $(6; 5; 4)$.

Нехай пряму задано двома її точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ можна взяти за напрямний вектор прямої. Підставимо його координати до (3.30):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.32)$$

Рівняння (3.32) – *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*.

3.4.5. Відстань від точки до прямої. Відстань між прямими

Відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої L :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

що проходить через $M_0(x_0; y_0; z_0)$, обчислюють за формулою:

$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (3.33)$$

Знайдемо відстань між двома мимобіжними прямими L_1 і L_2 :

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ і } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}. \quad (3.34)$$

Довжину відрізка спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих, кінці якого лежать на цих прямих, називають *відстанню між двома мимобіжними прямими* та обчислюють за формулою:

$$d = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\left| \begin{matrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{matrix} \right|^2}}}. \quad (3.35)$$

3.4.6. Взаємне розміщення двох прямих

Якщо прямі L_1 і L_2 задані рівняннями вигляду (3.34), то за довільного розміщення у просторі один із двох кутів між ними дорівнює куту φ між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$, $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$, а другий кут дорівнює $\pi - \varphi$.

Кут між прямими L_1 і L_2 обчислюють за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (3.36)$$

Умову паралельності прямих L_1 і L_2 дістаємо з умови колінеарності їх напрямних векторів $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$:

$$l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2. \quad (3.37)$$

Умову перпендикулярності прямих L_1 і L_2 дістанемо з умови перпендикулярності їх напрямних векторів $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (3.38)$$

3.4.7. Взаємне розміщення прямої та площини

Нехай задано площину $P: ax + by + cz + d = 0$ і пряму $L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$. Знайдемо кут φ між цією прямою та заданою площиною. Обчислимо додатковий кут $\theta = (\pi/2) - \varphi$ між векторами $\vec{n} = (a; b; c)$ і $\vec{s} = (l; m; n)$ за формулою:

$$\cos \theta = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Якщо $\theta \leq \pi/2$ (рис. 3.25), то

$$\varphi = (\pi/2) - \theta, \quad \sin \varphi = \sin((\pi/2) - \theta) = \cos \theta.$$

Якщо $\theta \geq \pi/2$, то

$$\varphi = \theta - (\pi/2) \quad \text{і} \quad \sin \varphi = \sin(\theta - (\pi/2)) = -\cos \theta.$$

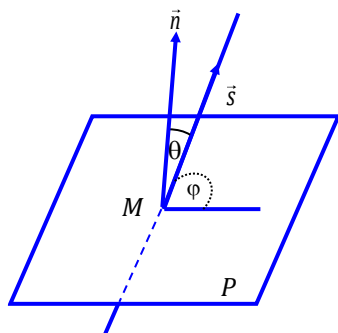


Рис. 3.25

У будь-якому випадку $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Тому має місце рівність:

$$\sin\varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (3.39)$$

Із (3.39) випливають умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини у просторі. Пряма паралельна площині тільки у тому випадку, коли напрямний вектор прямої $\vec{s} = (l; m; n)$ перпендикулярний до вектора нормалі $\vec{n} = (a; b; c)$ площини. Звідси дістанемо *умову паралельності прямої і площини у просторі*:

$$al + bm + cn = 0. \quad (3.40)$$

Пряма перпендикулярна до площини у тому й тільки у тому випадку, коли її напрямний вектор $\vec{s} = (l; m; n)$ колінеарний нормальному вектору $\vec{n} = (a; b; c)$ площини. Звідси дістанемо *умову перпендикулярності прямої і площини у просторі*:

$$a/l = b/m = c/n. \quad (3.41)$$

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. За якою формулою обчислюють відстань між двома точками?

Приклад 1. На осях координат знайти точки, рівновіддалені від точок $A(1; 1)$ і $B(3; 7)$.

Нехай M_1 і M_2 – шукані точки. Точка M_1 лежить на осі OX , тоді її координати $(x; 0)$; точка M_2 лежить на осі OY , тоді її координати $(0; y)$.

Оскільки точки M_1 і M_2 рівновіддалені від точок A та B , то відстані $M_1A = M_1B$ і $M_2A = M_2B$.

Скористаємося формулою (3.3) відстані між двома точками:

$$\sqrt{(1-x)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (7-0)^2},$$

$$\sqrt{(1-0)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (7-y)^2}.$$

Розв'язуючи одержані рівняння, знаходимо $x = 14$, $y = 14/3$.

Отже, шукані точки $M_1(14; 0)$, $M_2(0; 14/3)$.

2. Як визначають рівноважну ціну, якщо функції попиту та пропозиції лінійні?

Приклад 2. Задано залежність попиту q і пропозиції s від ціни p : $q(p) = 400 - 5p$; $s(p) = 100 + 5p$.

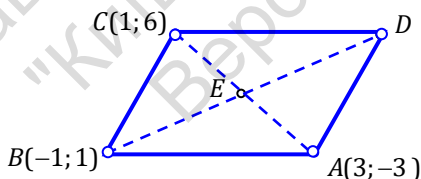
Знайти рівноважну ціну та дохід за рівноважної ціни.

Точку рівноваги визначають із умови рівноваги $q(p) = s(p)$. Тоді $400 - 5p = 100 + 5p$. Звідси $p = 30$. Отже, рівноважна ціна становить 30 ум. гр. од.

Дохід за рівноважної ціни: $R(30) = q(30) \cdot 30 = 7500$ (гр. од.).

Приклад 3. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(3; -3)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 6)$. Знайти координати четвертої вершини D .

Відомо, що діагоналі паралелограма у точці перетину E діляться навпіл. Знайдемо координати точки E як координати середини відрізка AC (рис. 3.26).



$$x_E = \frac{3+1}{2} = 2,$$

$$y_E = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2},$$

Отже, $E(2; 3/2)$.

Рис. 3.26

Якщо x_D та y_D – координати точки D , то дістанемо рівняння:

$$2 = \frac{-1+x_D}{2}; \quad 4 = -1+x_D; \quad x_D = 5; \quad \frac{3}{2} = \frac{1+y_D}{2}; \quad 3 = 1+y_D; \quad y_D = 2.$$

Отже, точка $D(5; 2)$ – четверта вершина паралелограма.

Приклад 4. Задано координати середин сторін трикутника: $E(7; 8)$, $F(-4; 5)$, $K(1; -4)$. Визначити координати вершин трикутника (рис. 3.27).

Позначимо $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ – вершини трикутника. Точка E – середина сторони AB :

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2},$$

або $x_A + x_B = 14$, $y_A + y_B = 16$.

Точка F – середина сторони AC :

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad y_F = \frac{y_A + y_C}{2}$$

або $x_A + x_C = -8$, $y_A + y_C = 10$.

Точка K – середина сторони BC , тоді:

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_K = \frac{y_B + y_C}{2} \quad \text{або} \quad x_B + x_C = 2, \quad y_B + y_C = -8.$$

Таким чином, для визначення шести невідомих одержано дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 14, \\ x_A + x_C = -8, \\ x_B + x_C = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_A + y_B = 16, \\ y_A + y_C = 10, \\ y_B + y_C = -8. \end{cases}$$

Додамо почленно рівняння першої системи:

$$2(x_A + x_B + x_C) = 8 \quad \text{або} \quad x_A + x_B + x_C = 4.$$

Із третього рівняння першої системи $x_B + x_C = 2$, тоді:
 $x_A + 2 = 4$, $x_A = 2$.

Із другого рівняння системи $x_A + x_C = -8$ маємо:

$$x_B - 8 = 4, \quad x_B = 12.$$

Із першого рівняння $x_A + x_B = 14$ маємо:

$$x_C + 14 = 4, \quad x_C = -10.$$

Отже, $x_A = 2$, $x_B = 12$, $x_C = -10$.

Аналогічно розв'яжемо другу систему, дістанемо $y_A = 17$,
 $y_B = -1$, $y_C = -7$.

Шукані вершини трикутника:

$$A(2; 17), B(12; -1), C(-10; -7).$$

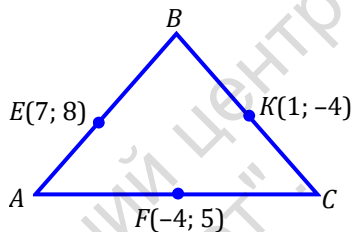


Рис. 3.27

Приклад 5. Точки

$A(3; -5)$, $B(-3; 3)$, $C(-1; -2)$

є вершинами трикутника $\triangle ABC$ (рис. 3.28). Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута, яка проведена із вершини A .

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, що пропорційні довжинам прилеглих сторін. Довжини сторін трикутника:

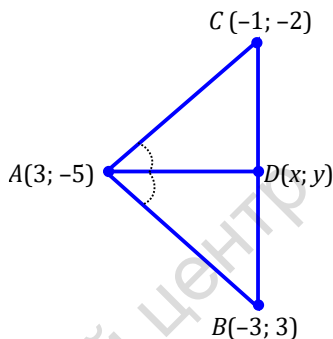


Рис. 3.28

$$AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (3+5)^2} = 10, \quad AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+5)^2} = 5.$$

Якщо точка $D(x; y)$ – точка перетину бісектриси та сторони BC , то вона ділить цю сторону у відношенні λ :

$$\lambda = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{5} = 2.$$

Знайдемо координати точки D :

$$x = \frac{-3 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{3 + 2 \cdot (-2)}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

і довжину бісектриси:

$$AD = \sqrt{\left(-\frac{5}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + 5\right)^2} = \frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

Приклад 6. Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо вершинами його є точки: $A(7; 4)$, $B(-1; 8)$ і $C(-12; -1)$.

Відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці M , яка ділить кожну із медіан у відношенні $2 : 1$, рахуючи від відповідної вершини трикутника.

Знайдемо координати точки D – середини сторони BC :

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Координати точки M , яка ділить медіану AD у відношенні $\lambda = 2 : 1 = 2$ (від A до D) знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1 + \lambda} = \frac{x_A + 2 \cdot \left(\frac{x_B + x_C}{2} \right)}{1 + 2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1 + \lambda} = \frac{y_A + 2 \cdot \left(\frac{y_B + y_C}{2} \right)}{1 + 2} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Отже, координати точки перетину медіан трикутника дорівнюють середньому арифметичному однойменних координат його вершин. Підставимо координати цих точок A , B і C , маємо:

$$x_M = \frac{7 - 1 - 12}{3} = -\frac{6}{3} = -2, \quad y_M = \frac{-4 + 8 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Отже, шукана точка перетину медіан трикутника $M(-2; 1)$.

3. Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?

Приклад 7. Побудувати пряму $x - 2y - 4 = 0$ (рис. 3.29).

Спосіб 1. Положення прямої на площині визначають двома точками.

Знайдемо точки A та B її перетину з осями координат. Якщо A – точка перетину із віссю OX , то її ордината дорівнює нулю. Для знаходження її ординати підставимо до рівняння прямої $y = 0$ і дістанемо: $x = 4$.

Якщо B – точка перетину із віссю OY , то її абсциса дорівнює нулю.

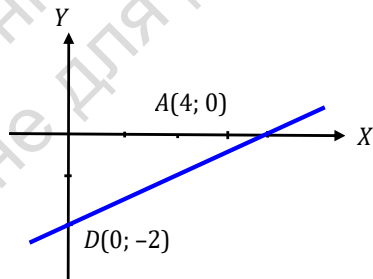


Рис. 3.29

Підставимо до рівняння прямої значення $x = 0$ і дістанемо: $y = -2$. Побудуємо знайдені точки $A(4; 0)$, $B(0; -2)$ і проведемо через них пряму.

Спосіб 2. Пряма задана загальним рівнянням $x - 2y - 4 = 0$. Запишемо його у вигляді рівняння у відрізках на осях. Для цього вільний член перенесемо до правої частини рівняння, обидві його частини поділимо на 4 і дістанемо:

$$x/4 + y/(-2) = 1.$$

Побудуємо відрізки, які пряма відтинає на осях координат. Для цього відкладемо від початку координат праворуч від осі OX чотири одиниці та вниз від осі OY – дві одиниці. Одержимо точки A та B , через які проведемо пряму AB .

Приклад 8. Визначити площу S і периметр трикутника, що утворений прямою $3x - 4y - 12 = 0$ та осями координат.

Загальне рівняння прямої перетворимо на рівняння прямої у відрізках на осях:

$$x/4 + y/(-3) = 1.$$

Пряма відтинає на осях координат відрізки довжиною в 4 і (-3) одиниці, відповідно. Тому площа S трикутника:

$$S = (1/2) \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ (од}^2\text{)}.$$

Для обчислення периметра трикутника знайдемо довжину c його гіпотенузи:

$$c = \sqrt{(4-0)^2 + (0+3)^2} = 5 \text{ і } P = 4 + 3 + 5 = 12 \text{ (од)}.$$

Отже $S = 6 \text{ од}^2$; $p = 12 \text{ од}$.

4. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом?

5. Яка умова паралельності двох прямих, що задані рівняннями із кутовими коефіцієнтами?

Приклад 9. Записати рівняння прямої, що паралельна бісектрисі другого координатного кута, яка відтинає на від'ємній півосі OY відрізок, рівний чотирьом одиницям.

Шукана пряма, як бісектриса другого координатного кута, утворює із віссю OX кут, рівний $3\pi/4$. Тому кутовий коефіцієнт $k = \tan(3\pi/4) = -1$. Крім того, відомо, що $b = -4$. Тоді можна записати рівняння прямої у вигляді $y = -x - 4$.

6. За якою формулою обчислюють кут між двома прямими?

Приклад 10. Обчислити величину кута між прямими

1) $y = 3x$ та $y = -2x + 5$; 2) $y = 4x - 7$ та $y = -(x/4) + 2$;

3) $y = 5x - 3$ та $y = 5x + 8$.

$$1) \text{ Оскільки } k_1 = 3, k_2 = -2, \quad \tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-2 - 3}{1 - 6} = 1.$$

Кут між прямими $y = 3x$ та $y = -2x + 5$ становить $\varphi = \pi/4$.

$$2) k_1 = 4, k_2 = -(1/4), \text{ тому } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-(1/4) - 4}{1 - 1}, \text{ тобто } \operatorname{tg} \varphi$$

не існує.

Отже, $\varphi = \pi/2$.

$$3) k_1 = 5, k_2 = 5, \text{ тому } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{5 - 5}{1 + 25} = 0.$$

Отже, $\varphi = 0$.

Приклад 11. Записати рівняння прямих, на яких лежать катети рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо відомо рівняння прямої, на якій лежить гіпотенуза, $3x - y + 5 = 0$, а вершина прямого кута розташована у точці $C(4; -1)$.

Оскільки трикутник прямокутний і рівнобедрений, то величини його гострих кутів дорівнюють $\pi/4$. Перепишемо рівняння цієї прямої у вигляді $y = 3x + 5$. Позначимо $k_2 = 3$ – кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить гіпотенуза, а k_1 – кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить один із катетів трикутника, що утворює із прямою, яка визначає гіпотенузу, кут φ величиною $\pi/4$. Тоді $\operatorname{tg} \varphi = 1$.

$$\text{Отже, } 1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \text{ та } 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_1}, \text{ звідки } k_1 = 1/2.$$

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої і точка, через яку вона проходить, відомі, то запишемо її рівняння $y + 1 = 1/2 \cdot (x - 4)$ або $x - 2y - 6 = 0$. Прямі, на яких лежать катети, є перпендикулярними, тому кутовий коефіцієнт k_3 прямої, на якій лежить другий катет, визначимо із співвідношення $k_3 = -(1/k_1)$, $k_3 = -2$.

Якщо відомі кутовий коефіцієнт прямої і точка, через яку проходить пряма, то запишемо її рівняння $y + 1 = -2 \cdot (x - 4)$ або $2x + y - 7 = 0$. Таким чином, рівняння шуканих прямих:

$$x - 2y - 6 = 0 \text{ та } 2x + y - 7 = 0.$$

Приклад 12. Основа рівнобедреного трикутника лежить на прямій $x - 2y = 0$, а одна із бічних сторін – на прямій $x + y - 3 = 0$. Записати рівняння прямої, на якій лежить друга бічна сторона, якщо відомо, що вона проходить через точку $M(1; -1)$.

Позначимо $k_1 = 1/2$ кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить основа трикутника, $k_2 = -1$ – кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить ця бічна сторона. Тангенс кута φ між цими прямими визначимо, використовуючи (3.14), дістанемо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1 - (1/2)}{1 - (1/2)} = -3.$$

Оскільки величина кута між прямими, на яких лежать основа та друга бічна сторона, дорівнює $\pi - \varphi$ (рис. 3.30), то тангенс кута між ними $\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi = 3$.

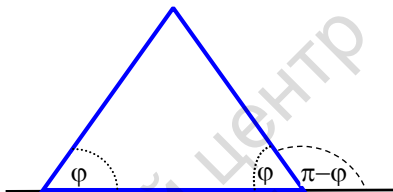


Рис. 3.30

Якщо k_3 – кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить шукана бічна сторона, то

$$3 = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3} = \frac{k_3 - 1/2}{1 + 1/2 k_3}, \text{ звідки } k_3 = -7.$$

Запишемо рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку $M(1; -1)$ у заданому напрямку (відомо $k_3 = -7$), на якій лежить бічна сторона: $y + 1 = -7(x - 1)$ або $7x + y - 6 = 0$.

7. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?

Приклад 13. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку $(-1; 8)$.

Шукана пряма проходить через дві точки $(0; 0)$ та $(-1; 8)$.

Її рівняння можна записати за формулою (3.10)

$$\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y - 0}{8 - 0} \text{ або } y = -8x.$$

Приклад 14. Задано вершини $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ і $C(-2; 0)$ трикутника. Записати рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині A .

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, що пропорційні довжинам прилеглих сторін. Тоді $BM/MS = AB/AC$.

Точка M – точка перетину бісектриси AM зі стороною BC , ділить відрізок BC у відношенні $\lambda = AB/AC$. Знайдемо відстані:

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52}, \quad AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Тоді } \lambda = BM/MC = AB/AC = \sqrt{52}/\sqrt{13} = 2.$$

Знайдемо координати точки M як координати точки, що поділяє відрізок у заданому співвідношенні $\lambda = 2$:

$$x = \frac{5+2 \cdot (-2)}{1+2} = 1/3 \text{ та } y = \frac{4+2 \cdot 0}{1+2} = \frac{4}{3}. \text{ Отже, } M(1/3; 4/3).$$

Запишемо рівняння бісектриси AM за (3.10):

$$\frac{x-1}{(1/3)-1} = \frac{y+2}{(4/3)+2} \text{ або } 5x + y - 3 = 0.$$

8. Яким може бути взаємне розміщення двох прямих, які задані своїми рівняннями із кутовими коефіцієнтами?

Приклад 15. Установити, які із пар прямих паралельні, збігаються або перетинаються (в останньому випадку знайти їх точку перетину):

$$1) \ x + y - 3 = 0 \text{ і } 2x + 3y - 8 = 0;$$

$$2) \ y = x + 5 \text{ і } 2x + 2y + 3 = 0;$$

$$3) \ y = (1/2)x + 2 \text{ і } -(1/4)x + (1/2)y = 1.$$

1) Прямі задані своїми загальними рівняннями, тому зручно порівнювати відношення їх коефіцієнтів $a_1/a_2 = 1/2$, $b_1/b_2 = 1/3$. Оскільки $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$, то прямі перетинаються.

Для знаходження точки перетину розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + 3y - 8 = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $y = 2$. Отже, точка перетину $(1; 2)$.

2) Перетворимо рівняння другої прямої на рівняння із кутовим коефіцієнтом $y = x + (3/2)$. У цих прямих кутові коефіцієнти рівні $k_1 = k_2 = 1$, а вільні члени – не рівні $b_1 = 5$, $b_2 = 3/2$. Отже, прямі паралельні.

3) Перетворимо друге рівняння на рівняння прямої із кутовим коефіцієнтом $y = (1/2)x + 2$. У цих прямих кутові коефіцієнти $k_1 = k_2 = 1/2$ і вільні члени $b_1 = b_2 = 2$. Отже, прямі збігаються.

9. Яка умова перпендикулярності двох прямих, що задані рівняннями із кутовими коефіцієнтами?

Приклад 16. Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(-2; 9)$ щодо прямої $2x - 3y + 18 = 0$.

Якщо N – точка, симетрична точці M щодо прямої $2x - 3y + 18 = 0$, то точки M і N лежать на прямій MN , що перпендикулярна до цієї прямої, і рівновіддалені від цієї прямої, тобто $MP = PN$, де точка P – проекція точки M на задану пряму $2x - 3y + 18 = 0$ (рис. 3.31).

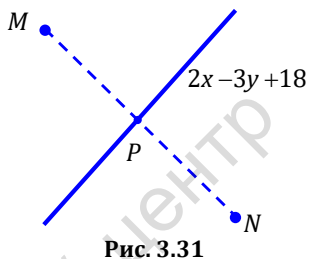


Рис. 3.31

Запишемо рівняння прямої MN . Оскільки кутовий коефіцієнт k_1 заданої прямої $k_1 = 2/3$, то кутовий коефіцієнт прямої MN : $k_2 = -(1/k_1) = -(3/2)$.

Пряма проходить через точку $M(-2; 9)$, тому рівняння прямої MN :

$$y - 9 = -(3/2) \cdot (x + 2) \text{ або } 3x + 2y - 12 = 0.$$

Знайдемо координати P як точки перетину заданої прямої і прямої MN , для чого розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 18 = 0, \\ 3x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Точка P має координати $P(0; 6)$ і ділить відрізок MN навпіл. Із співвідношень

$$0 = \frac{-2 + x}{2} \text{ та } 6 = \frac{9 + y}{2}$$

знаходимо координати точки N : $x = 2$, $y = 3$. Отже, $N(2; 3)$.

Приклад 17. Міжнародна компанія випускає продукцію та продає її по 7 грн/од. Керівництво компанії встановило, що сума загальних щотижневих витрат на виготовлення продукції кількістю x (тис. од.) має закономірність $y_B = 1000 + 5x$. Знайти точку рівноваги, області прибутку та збитків компанії.

Оскільки доход від продажу x тис. виробів продукції вартістю 7 грн/од. виражає функція $y_D = 7x$, то для рівноваги доходу та витрат потрібно виконання рівності $y_D = y_B$ (умова рівноваги). Підставимо $1000 + 5x = 7x$ або $2x = 1000$. Звідси $x = 500$.

При $x = 500$ прибуток компанії $\Pi = 0$. Якщо компанія виробляє менше 500 од. продукції, то вона зазнає збитків. Якщо компанія вироблятиме більше 500 од. продукції, то вона одержуватиме прибуток.

10. Який вигляд має загальне рівняння площини? Наведіть окремі його випадки.

Приклад 18. Записати рівняння площини, що проходить через вісь OZ і точку $M(1; -2; 1)$.

У загальному рівнянні площини $ax + by + cz + d = 0$, коефіцієнти $c = d = 0$, оскільки площина проходить через вісь OZ . Тоді шукану площину задає рівняння $ax + by = 0$. Точка M за умовою лежить на цій площині, отже її координати задовольняють рівняння площини $a - 2b = 0$, тобто $a = 2b$. Підставимо значення a до рівняння площини та скоротимо на b , дістанемо рівняння шуканої площини: $2x + y = 0$.

11. Який вигляд має рівняння площини у відрізках на осях?

Приклад 19. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 8; -4)$ і відтинає на осі абсцис відрізок $a = -3$, на осі аплікат $c = 2$.

Запишемо рівняння площини у відрізках на осях $x/a + y/b + z/c = 1$. За умовою $a = -3$, $c = 2$, тому

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{2} = 1.$$

Точка $M(3; 8; -4)$ лежить на площині, тому її координати задовольняють рівняння площини:

$$\frac{3}{-3} + \frac{8}{b} + \frac{-4}{2} = 1,$$

звідки $b = 2$. Отже, шукане рівняння:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \text{ або } 2x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

12. Який вигляд має рівняння площини, що проходить через задану точку із заданим нормальним вектором?

Приклад 20. Записати рівняння площини, що перпендикулярна до осі OX і проходить через точку $M_0(2; -1; 3)$.

Рівняння площини, що перпендикулярна до осі OX , має вигляд $ax + d = 0$. Підставивши до цього рівняння координати точки $M_0(2; -1; 3)$, знаходимо $d = -2a$. Підставимо значення d , дістанемо: $ax - 2a = 0$.

Приклад 21. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-2; 3; 4)$ і паралельна площині $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Оскільки шукана площина паралельна площині $x + 2y - 3z + 4 = 0$, то за її нормальний вектор можна взяти нормальний вектор заданої площини $\vec{n} = (1; 2; -3)$. Використовуючи рівняння площини, що проходить через задану точку із заданим нормальним вектором (3.30), дістанемо:

$$(x + 2) + 2(y - 3) - 3(z - 4) = 0 \text{ або } x + 2y - 3z + 8 = 0.$$

13. За якою формулою знаходять відстань від точки до площини?

Приклад 22. Знайти відстань між паралельними площинами:

$$2x - 3y + 6z + 28 = 0 \text{ та } 2x - 3y + 6z - 14 = 0.$$

Для віднайдення шуканої відстані необхідно взяти точку на одній із площин і визначити відстань від неї до другої площини. Покладемо у рівнянні першої із заданих площин $y = 0, z = 0$. Маємо: $2x + 28 = 0$, тобто $x = -14$.

Отже, дістали точку $M(-14; 0; 0)$.

Використовуючи (3.24), знаходимо відстань від точки $M(-14; 0; 0)$ до другої площини $2x - 3y + 6z - 14 = 0$:

$$d = \frac{|2 \cdot (-14) - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 14|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = 6.$$

14. За якою формулою обчислюють кут між площинами?

Приклад 23. Знайти кут між площинами:

$$x + y - 1 = 0 \text{ та } 2x - y + \sqrt{3}z + 1 = 0.$$

Для знаходження кута між площинами застосуємо (3.25):

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{4},$$

тобто $\varphi = \arccos(1/4) \approx 76^\circ$.

15. Який вигляд мають канонічні й параметричні рівняння прямої у просторі?

Приклад 24. Записати канонічні й параметричні рівняння прямої, яка утворює з осями координат кути $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = 2\pi/3$ і проходить через точку $M_0(-1; 0; 5)$.

За напрямний вектор $\vec{s}$ прямої можна взяти одиничний вектор заданої прямої. Його координатами є напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\vec{s} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2} \right)$.

Використовуючи канонічні рівняння прямої, дістанемо:

$$\frac{x+1}{1/2} = \frac{y-0}{\sqrt{2}/2} = \frac{z-5}{-(1/2)} \quad \text{або} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z-5}{-1}.$$

Якщо прирівняти кожне із цих відношень до t , то:

$$\frac{x+1}{1} = t, \quad \frac{y}{\sqrt{2}} = t, \quad \frac{z-5}{-1} = t.$$

Тоді параметричні рівняння прямої:

$$x = t - 1, \quad y = \sqrt{2}t, \quad z = 5 - t.$$

Приклад 25. Звести до канонічного вигляду рівняння прямої:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Додамо рівняння системи, дістанемо:

$$4x - 2z - 8 = 0 \quad \text{або} \quad x = \frac{2z + 8}{4} = \frac{z + 4}{2}.$$

Помножимо перше рівняння на 5, друге – на 3 і почленно їх додамо, дістанемо:

$$14x - 4y - 32 = 0 \quad \text{або} \quad x = \frac{2y + 16}{7} = \frac{y + 8}{7/2}.$$

Прирівнюючи отримані результати, дістанемо канонічні рівняння у вигляді:

$$x = \frac{y + 8}{7/2} = \frac{z + 4}{2} \quad \text{або} \quad \frac{x}{2} = \frac{y + 8}{7} = \frac{z + 4}{4}.$$

Приклад 26. Записати канонічне рівняння перпендикуляра, що опущений із початку координат на площину $4x - y + 2z - 3 = 0$.

Вектор $\vec{n} = (4; -1; 2)$ перпендикулярний до заданої площини, паралельний до шуканої прямої, і його можна вважати напрямним вектором цієї прямої. За (3.30) дістанемо:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Приклад 27. Записати рівняння прямої, що паралельна OX і проходить через точку $M_0(1; 1; 1)$.

Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої колінеарний осі OX , отже його проекції на координатні осі OY і OZ дорівнюють нулю. Виберемо за вектор $\vec{s}$ орт осі OX $\vec{i} = (1; 0; 0)$ і запишемо канонічне рівняння:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{0}.$$

Загальні рівняння шуканої прямої мають вигляд:

$$\begin{cases} y-1=0, \\ z-1=0. \end{cases}$$

Приклад 28. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1; 2; 1)$ і паралельна прямій:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

Оскільки шукана пряма паралельна заданій, за її напрямний вектор можна взяти вектор $\vec{s} = (2; 3; 1)$ заданої прямої. Використовуючи (3.30), дістанемо канонічні рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{1}.$$

16. За якою формулою обчислюють кут між прямими?

Приклад 29. Обчислити гострий кут між прямими:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{2} \quad \text{та} \quad \frac{x+1}{12} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Використовуючи (3.36), дістанемо:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2}} = 0,8974.$$

Отже, $\varphi = \arccos 0,8974 \approx 26^\circ$.

17. За якою формулою обчислюють кут між прямою та площиною?

Приклад 30. Обчислити кут між прямою

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$$

та площиною $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Використовуючи (3.39), дістанемо:

$$\sin \varphi = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = 0,2482.$$

Отже, $\varphi = \arcsin 0,2482 \approx 14^\circ$.

Приклад 31. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1; 2; -3)$, перпендикулярно до прямої:

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{2}.$$

За нормальний вектор шуканої площини $\vec{n}$ можна взяти паралельний йому напрямний вектор прямої $\vec{s} = (4; 3; 2)$. Використовуючи рівняння площини (3.30), дістанемо:

$$4(x+1) + 3(y-2) + 2(z+3) = 0.$$

Відкривши дужки, остаточно отримаємо:

$$4x + 3y + 2z + 4 = 0.$$

Приклад 32. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1; 3; 2)$ перпендикулярно до заданої площини $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

Візьмемо за напрямний вектор шуканої прямої паралельний йому нормальний вектор $\vec{n} = (1; -2; 2)$ заданої площини. Використовуючи (3.30), дістанемо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}.$$

Приклад 33. Знайти проєкцію N точки $M(5; 2; -1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Вектор $\vec{n} = (2; -1; 3)$, що перпендикулярний до заданої площини, можна взяти за напрямний вектор перпендикуляра MN . Тому канонічні рівняння цього перпендикуляра мають вигляд:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Параметричні рівняння прямої MN :

$$x = 5 + 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 3t - 1.$$

Підставимо значення x, y, z до рівняння заданої площини, дістанемо рівняння:

$$2(5 + 2t) - (2 - t) + 3(3t - 1) + 23 = 0,$$

з якого знайдемо значення параметра $t = -2$, що відповідає точці N як точці перетину прямої MN із заданою площиною.

Отже, $N(1; 4; -7)$ - шукана точка.

Приклад 34. Знайти проєкцію P точки $N(4; 3; 10)$ на пряму

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

Точка P є точкою перетину заданої прямої із перпендикулярною до неї площиною, яка проходить через точку Q . Оскільки вектор $\vec{s} = (2; 4; 5)$ є перпендикулярним до цієї площини, то її рівняння:

$$2(x-4) + 4(y-3) + 5(z-10) = 0 \quad \text{або} \quad 2x + 4y + 5z - 70 = 0.$$

У такий самий метод, що й у попередньому прикладі, знайдемо координати точки перетину заданих прямої та площини. Для цього запишемо параметричні рівняння прямої:

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 3 + 5t.$$

Підставимо значення x, y, z до рівняння заданої площини:

$$2(1 + 2t) + 4(2 + 4t) + 5(3 + 5t) - 70 = 0.$$

Знайдемо значення параметра $t = 1$, що відповідає точці P .

Отже, шукана точка $P(3; 6; 8)$.

Розділ 4

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ТЕОРІЇ МНОЖИН

4.1. Елементи теорії множин

4.1.1. Множини. Основні поняття

Поняття множини – одне з основних у математиці. Слова *сукупність, клас, система, набір* часто є синонімами слова *множина*.

Множина – це деякі об'єкти (*елементи множини*), які виділені за певною ознакою або ознаками з інших об'єктів, що розглядають як єдине ціле. При цьому клас усіх об'єктів, які розглядають, має бути описаний ще раніше у будь-який спосіб. Цей клас називають *універсальною множиною* й позначають *U*.

Множини зазвичай позначають великими літерами латинської абетки *A, B, C, ...*, а елементи множини – маленькими літерами *a, b, c, ...*. Належність елемента *a* множині *A* позначають $a \in A$ (*a* належить множині *A*). Якщо елемент *a* універсальної множини *U* не є елементом множини *A*, це позначають як $a \notin A$ (*a* не належить множині *A*).

Множину, що не містить жодного елементу, називають *порожньою* та позначають $\emptyset$.

Якщо вдається перелічити всі елементи множини *A*, то їх записують у фігурних дужках $A = \{a, b, c, ..., d\}$. Найчастіше множину задають виразом $A = \{a | P(a)\}$. Такий запис означає, що *A* – множина всіх елементів певної універсальної множини, які мають властивість *P*.

Якщо літерами позначено певні множини *A* та *B*, то рівність $A = B$ завжди означає, що *A* та *B* – одна й та сама множина.

Якщо кожен елемент множини *A* є елементом множини *B*, то *A* називають *підмножиною B* і позначають $A \subset B$. Порожню множину вважають підмножиною кожної множини.

Нехай *A* – деяка множина, тоді $\bar{A} = \{x | x \notin A\}$ позначатимемо множину всіх елементів універсальної множини, які не належать *A* та називатимемо *доповненням* до множини *A*.

Нехай задано множини A та B .

Означення. Об'єднанням двох множин A та B називають множину $A \cup B$ усіх елементів, які належать принаймні до однієї із цих множин $A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$.

Аналогічно й об'єднання кількох $A_1, A_2, \dots, A_n$ (і навіть безлічі) множин є множиною тих елементів, які належать принаймні до однієї із цих множин.

Позначають:

- $\bigcup_{k=1}^n A_k$ – об'єднання скінченної кількості множин $A_1, A_2, \dots, A_n$;
- $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ – об'єднання нескінченної кількості множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$.

Означення. Перерізом (перетином) двох множин A та B називають множину $A \cap B$ їх спільних елементів, тобто всіх елементів, які належать як множині A , так і множині B :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ та } x \in B\}.$$

Аналогічно перерізом кількох $A_1, A_2, \dots, A_n$ (і навіть безлічі) множин називають множину всіх їх спільних елементів.

Позначають:

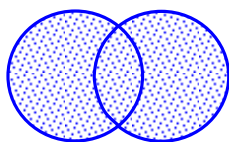
- $\bigcap_{k=1}^n A_k$ – переріз скінченної кількості множин $A_1, A_2, \dots, A_n$;
- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ – переріз нескінченної кількості множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$.

Означення. Різницею двох множин A та B називають множину $A \setminus B$ усіх елементів, які належать до множини A , але не належать до множини B :

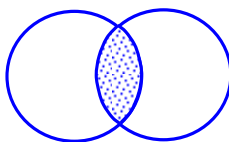
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ та } x \notin B\}.$$

Зауважимо, що $\bar{A} = U \setminus A$, де U – універсальна множина.

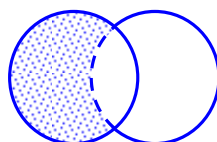
Об'єднання, переріз і різницю множин A та B подано на рис. 4.1–4.3, відповідно, які часто називають **діаграмами Венна** або **кругами Ейлера**.



$A \cup B$
Рис. 4.1



$A \cap B$
Рис. 4.2



$A \setminus B$
Рис. 4.3

Приклад 4.1. Нехай $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ і $B = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

Зобразити множини A ; $\bar{A}$; B ; $\bar{B}$; $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

Якщо зобразити ці множини як множини точок площини із координатами (x, y) , то множина A складеться із внутрішніх точок круга із центром у точці $O(0, 0)$ одиничного радіуса, причому точки кола $x^2 + y^2 = 1$ не входять до множини A (рис. 4.4). Множина $\bar{A}$ – це множина точок, які лежать зовні круга разом із точками кола $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 4.5).

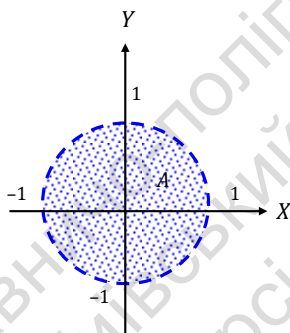


Рис. 4.4

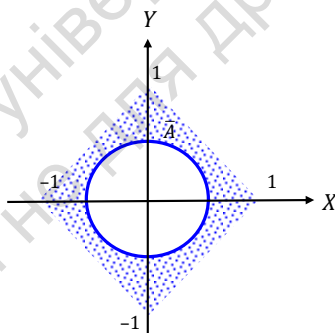


Рис. 4.5

Множина B – це множина внутрішніх точок квадрату разом із точками сторін квадрату $|x| + |y| = 1$ (рис. 4.6), а множина $\bar{B}$ – це множина точок поза межами квадрата без межі квадрата (рис. 4.7).

Множина $A \cup B$ у цьому прикладі збігається із множиною A (рис. 4.8). Переріз множин $A \cap B$ збігається із множиною B без точок $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ (рис. 4.9).

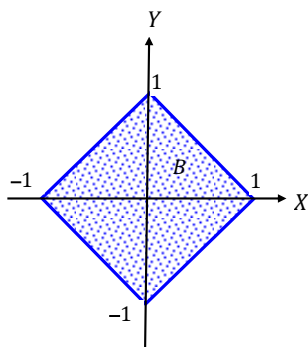


Рис. 4.6

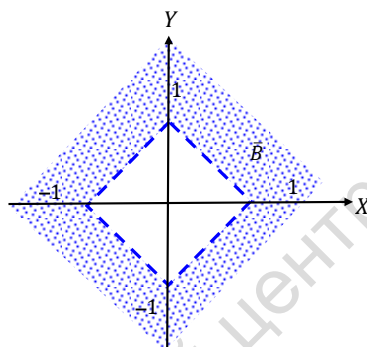


Рис. 4.7

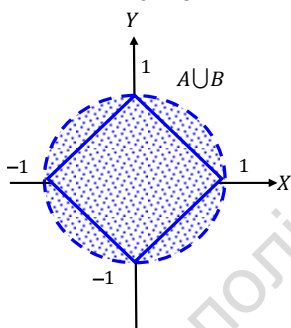


Рис. 4.8

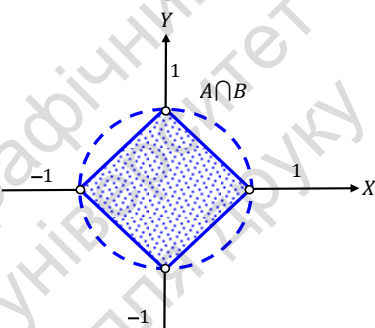


Рис. 4.9

Різниця множин $A \setminus B$ – це сегменти круга радіуса 1 без точок $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ (рис. 4.10). Різниця множин $B \setminus A$ – це точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ (рис. 4.11).

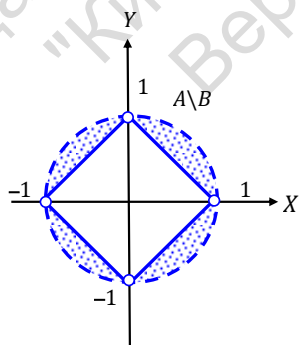


Рис. 4.10

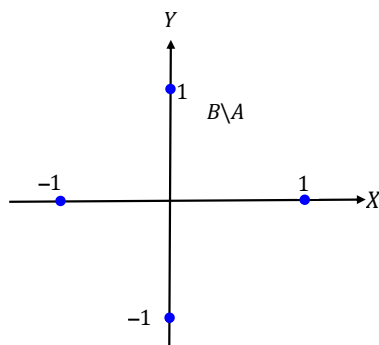


Рис. 4.11

4.1.2. Числові множини

У математиці використовують такі основні **числові множини**:

1. **Множина натуральних чисел** $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

2. **Множина цілих чисел** $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots\}$.

3. **Множина раціональних чисел** $Q = \{m/n, m \in Z, n \in N\}$.

4. **Множина ірраціональних чисел** $I = \{x, x \notin Q\}$, до якої входять числа, які не є раціональними.

5. **Множина дійсних чисел** $R = Q \cup I$.

Будь-яке дійсне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу (періодичного, якщо число раціональне, і неперіодичного, якщо – ірраціональне).

6. **Множина комплексних чисел** C .

Означення. **Комплексним числом** називають число $a + bi$, $a, b \in R, i^2 = -1$.

Дійсне число a називають **дійсною частиною** комплексного числа $a + bi$, а дійсне число b – його **уявною частиною**. Число i називають **уявною одиницею**.

Числа $a_1 + b_1i$ та $a_2 + b_2i$ рівні лише у випадку $a_1 = a_2$ та $b_1 = b_2$.

Число $a - bi$ називають **комплексно-спряженим** до числа $a + bi$.

Додавання, віднімання, множення та ділення комплексних чисел вводять за формулами:

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i;$$

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} &= \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 - a_1b_2i + a_2b_1i - b_1b_2i^2}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i. \end{aligned}$$

Крім стандартної **алгебраїчної форми запису** комплексного числа $z = a + bi$ використовують **тригонометричну** та **показникову** форми.

Детальнішу інформацію про комплексні числа можна отримати у будь-якому довіднику з елементарної математики.

4.1.3. Обмежені числові множини.

Межі числових множин

Розглянемо множину дійсних чисел $\mathbf{R}$. Дійсні числа можна зображати точками числової осі, тобто між точками прямої і множини $\mathbf{R}$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тому множину $\mathbf{R}$ часто ототожнюють із **числовою прямою** (віссю), а її елементи – із **точками числової осі**, які задані своїми координатами.

Нехай $a, b \in \mathbf{R}$, причому $a < b$. Введемо такі позначення:

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ – інтервал (a, b) ;

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ – відрізок $[a, b]$;

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ – напівінтервал $[a, b]$, який містить кінець b ;

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ – напівінтервал $[a, b]$, який містить кінець a .

Надалі інтервали, відрізки та напівінтервали називатимемо **числовими проміжками** або **проміжками**.

Числові множини:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | a < x\}, [a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} | x \leq b\}, (-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} | x < b\}$$

називатимемо необмеженими проміжками.

Множину всіх дійсних чисел позначатимемо $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Розглянемо деяку множину $X, X \subset \mathbf{R}$.

Означення. Числову множину X називають **обмеженою зверху**, якщо існує таке число $c \in \mathbf{R}$, що для всіх елементів $x \in X$ виконується нерівність $x \leq c$.

Число c називають **верхньою межею** множини X .

Означення. Числову множину X називають **обмеженою знизу**, якщо існує таке число $c \in \mathbf{R}$, що для всіх елементів $x \in X$ виконується нерівність $x \geq c$.

Число c називають **нижньою межею** множини X .

Якщо множина X обмежена зверху та знизу, її називають **обмеженою**.

Означення. Найменшу серед усіх верхніх меж називають **точною верхньою межею** множини X . Її позначають $\sup X$ (супремум множини X). Найбільшу серед усіх нижніх меж нази-

вають **точною нижньою межею** множини X . Її позначають $\inf X$ (інфімум множини X).

Сформулюємо ознаки, за якими можна встановити, що число c дійсно є точною верхньою (нижньою) межею множини X .

Ознака 1. Число c є **точною верхньою межею** множини X , якщо виконуються умови:

- 1) для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \leq c$;
- 2) для довільного $d < c$ знайдеться такий елемент $x \in X$, що $x > d$.

Ознака 2. Число c є **точною нижньою межею** множини X , якщо виконуються умови:

- 1) для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \geq c$;
- 2) для довільного $d > c$ знайдеться такий елемент $x \in X$, що $x < d$.

ТЕОРЕМА

У будь-якої непорожньої обмеженої множини X існують точна верхня та точна нижня межі.

Зазвичай у випадку, коли множина X не обмежена зверху (знизу), використовують позначення $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$). За такої домовленості можна вважати, що будь-яка числова множина має скінчену або нескінчену точну верхню (нижню) межу.

4.2. Числові послідовності

Числові послідовності – це нескінченні множини чисел.

Означення. Нехай кожному натуральному $n \in \mathbb{N}$ поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n , тоді кажуть, що задано **послідовність** чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ або коротко – послідовність $\{x_n\}$.

Отже послідовність – це функція $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, що визначена на множині натуральних чисел.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ є **членами** (елементами) числової послідовності, x_n – **загальним членом** (загальним елементом), n – номером члена.

Щоб задати послідовність, необхідно вказати правило, за яким кожному числу n ставиться у відповідність одне й тільки одне число x_n . Послідовність визначають формулою її загального члена.

Приклад 4.2. Нехай загальний член послідовності:

$$x_n = \frac{2n + 1}{n^2 + 1}.$$

За цією формулою можна знайти будь-який член послідовності, підставивши замість n його номер, наприклад:

$$x_7 = \frac{2 \cdot 7 + 1}{7^2 + 1} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Розглянемо інші приклади послідовностей:

1) $x_n = 1/n$; $x_n : 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$

2) $x_n = (-1)^n$; $x_n : -1, 1, -1, 1, \dots$

3) $x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$; $x_n : -(1/2), 2/3, -(3/4), 4/5, \dots$

4) $x_n = n!$; $x_n : 1, 2, 6, 24, \dots$

5) $x_n = 1/3^n$; $x_n : 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, \dots$

Означення. Числову послідовність називають **монотонно зростаючою**, якщо для довільного $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$.

Приклад 4.3. Послідовність $x_n = \frac{n}{n+1}$ є такою, що монотонно зростає, оскільки:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0. \end{aligned}$$

Тоді $x_{n+1} > x_n$ для довільного $n \in \mathbf{N}$.

Означення. Числову послідовність називають **монотонно спадною**, якщо для довільного $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $x_{n+1} < x_n$.

Приклад 4.4. Послідовність $x_n = 1/n$ є монотонно спадною, оскільки:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0,$$

тоді $x_{n+1} < x_n$ для довільного $n \in \mathbf{N}$.

Означення. Числову послідовність називають:

• **обмеженою зверху**, якщо існує таке число M , що для довільного $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $x_n \leq M$;

• **обмеженою знизу**, якщо існує таке число m , що для довільного $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $x_n \geq m$;

• **обмеженою**, якщо існує таке число $C > 0$, що для довільного $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $|x_n| \leq C$;

• **необмеженою**, якщо для довільного $n \in \mathbf{N}$ послідовність не обмежена ані зверху, ані знизу.

Приклад 4.5. Визначити, які із наведених послідовностей обмежені:

$$1) x_n = 1/n; \quad 2) x_n = \frac{n}{n+1}; \quad 3) x_n = (-1)^n; \quad 4) x_n = n.$$

1) $x_n = 1/n$. Очевидно, що $0 < 1/n \leq 1$, тобто вона обмежена знизу числом 0, зверху – числом 1. Для довільного $n \in \mathbf{N}$ $|x_n| \leq 1$. Отже, послідовність обмежена.

2) $x = \frac{n}{n+1}$. Оскільки

$$|x_n| = \left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

то послідовність обмежена.

3) $x_n = (-1)^n$. Оскільки $|x_n| = |(-1)^n| \leq 1$, то послідовність обмежена.

4) $x_n = n$. Оскільки $x_n = n \geq 1$, то послідовність обмежена знизу, але не обмежена зверху.

Приклад 4.6. Послідовність чисел арифметичної прогресії.

Арифметична прогресія – це числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому плюс деяке число d , яке називають **різницею** прогресії, тобто $a_n - a_{n-1} = d$.

Формула загального члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Приклад 4.7. Послідовність чисел геометричної прогресії.

Геометрична прогресія – це числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, який помножено на деяке число q , що називають **знаменником**

прогресії $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ для довільного $n \in \mathbf{N}$. Загальний член геометричної прогресії $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Арифметичну та геометричну прогресії часто використовують у банківських розрахунках. Слушним прикладом послідовності є нарощені грошові суми, що покладені у банк. Коли вкладник робить вклад у банк, то останній отримує можливість розпоряджатися (у певних межах) вкладеною грошовою сумою. Виплата відсотків i є платою банку за можливість користуватися грошима вкладника протягом певного періоду.

Приклад 4.8. До банку внесено вклад S гривень за відсоткової ставки p %. Суму, що буде отримана за час t за умови **нарахування простих відсотків**, виражають формулою:

$$S_t = S \left(1 + \frac{pt}{100} \right).$$

Отже, накопичення суми від часу виражає лінійна залежність. Якщо нарахування відбувається тільки після цілого числа років, то накопичена сума є сумою арифметичної прогресії із початковим членом $a_0 = S$ і різницею $d = Sp/100$.

Розглянемо тепер ситуацію, за якої банк **нараховує складні відсотки**. Суму S_t , яка буде отримана за час t , виражають формулою:

$$S_t = S \left(1 + \frac{pt}{100} \right)^t,$$

тобто залежність накопиченої суми від часу t є показниковою. Якщо нарахування відбувається тільки після цілого числа років, то накопичена сума є геометричною прогресією із початковим членом $a_0 = S$ і знаменником $q = 1 + \frac{pt}{100}$.

4.2.1. Границя числової послідовності

Нехай задано числову послідовність $\{x_n\}$.

Означення. Число a називають **границею числової послідовності** $\{x_n\}$, якщо для довільного, як завгодно малого додатного

числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N (залежний від ε , тобто $N = N(\varepsilon)$), що для всіх членів послідовності із номерами n , які є більшими за цей номер $n > N$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Границя числової послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ або } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Послідовність, що має границю, називають **збіжною**. Якщо послідовність границі не має, її називають **розбіжною**.

Використовуючи логічні символи: квантор загальності $\forall$ (замість слова "будь-який") та квантор існування $\exists$ (замість слова "існує"), запишемо символічно означення границі послідовності: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Зміст означення границі числової послідовності полягає в тому, що за достатньо великих n члени послідовності $\{x_n\}$ незначно відрізняються від числа a (за абсолютною величиною менше, ніж число ε , яким би малим воно не було).

Приклад 4.9. Використовуючи означення границі послідовності, довести, що:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1.$$

Розглянемо послідовність $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Тоді:

$$|x_n - a| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Нехай, наприклад, $\varepsilon = 0,1$, тоді $|x_n - a| = 1/n < 0,1 = 1/10$, і ця нерівність виконується при $n > 10$.

Аналогічно можна показати, що для $\varepsilon = 0,01$ нерівність $|x_n - a| = 1/n < \varepsilon = 1/100$ виконується при $n > 100$.

У загальному випадку для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$|x_n - a| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 1 \right| = 1/n < \varepsilon$$

виконується при $n > 1/\varepsilon$.

Виберемо $N = [1/\varepsilon]$, де $[1/\varepsilon]$ – ціла частина числа $1/\varepsilon$, тоді:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = [1/\varepsilon] \forall n > N : |x_n - 1| < \varepsilon,$$

а це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Розглянемо *геометричний зміст границі послідовності*.

Розташуємо члени послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ на числовій прямій (рис. 4.12)

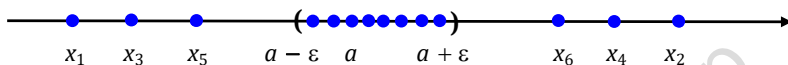


Рис. 4.12

Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, тобто $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Проміжок $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ називають **ε -околом** точки a . Отже число a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , починаючи з якого ($n > N$) всі члени послідовності потрапляють до ε -околу точки a , який би вузьким цей окіл не був. Поза цим околом перебуває лише скінчене число членів цієї послідовності.

Розглянемо застосування поняття границі числової послідовності в економічній теорії.

4.2.2. Павутинна модель ринку

Павутинна модель ринку дозволяє дослідити стійкість цін та обсягів товарів на ринку, що описують традиційні криві попиту й пропозиції за наявності запізнення у часі – лага.

Нехай виробники (напр., деяка фірма) визначають пропозицію товару у поточному періоді t на підставі цін, що встановлені у попередньому періоді $(t - 1)$, тобто обсяг пропозиції $s(t)$ залежить від ціни товару у попередньому періоді $s(t) = s_t(p_{t-1})$. Таким чином, до функції пропозиції включають часовий лаг тривалістю в одиницю часу (напр., один рік). Дійсно, рішення про обсяг виробництва приймають із врахуванням поточних цін, але виробничий цикл має певну тривалість, і відповідна цьому рішення пропозиція на ринку з'являється по закінченні цього циклу. Оскільки попит характеризує залежність обсягу попиту на товар від ціни товару у цьому періоді, то $q(p) = q_t(p_t)$. Таким чином, динаміку ціни можна описати системою рівнянь:

$$\begin{cases} s(t) = s_t(p_{t-1}), \\ q_t = q_t(p_t), \quad q_t = s_t \end{cases}$$

або одним рівнянням:

$$q_t(p_t) = s_t(p_{t-1}), \quad (4.1)$$

з якого можна знайти значення ціни p_t у поточний період часу за відомого значення p_{t-1} у попередній момент часу. Схema розв'язку:

$$q_0 \rightarrow p_0 = q^{-1}(p_0) \rightarrow q_1 = s(p_0) \rightarrow p_1 = q^{-1}(p_1) \rightarrow q_2 = s(p_1),$$

де q^{-1} – обернена функція попиту.

Нехай на початку ціну p_1 називає виробник (у найпростішому випадку він і є продавцем). Ціна p_1 вище від рівноважної (адже будь-який виробник намагається отримати максимальний прибуток). Покупець оцінює попит q_1 за цієї ціни та визначає свою ціну p_2 , за якої попит q_1 дорівнює пропозиції. Ціна p_2 нижча за рівноважну (адже будь-який покупець намагається купити товар дешевше).

У свою чергу виробник оцінює попит q_2 , що відповідає ціні p_2 , і визначає свою ціну p_3 , за якої попит дорівнює пропозиції; ця ціна вища від рівноважної. Процес торгу, що продовжується за певних умов, приводить до стійкого наближення до рівноважної ціни, тобто до "скручування" спіралі (рис. 4.13).

Якщо розглядати послідовність чисел, яка складається із ціни у процесі торгу $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$, то границею цієї послідовності є рівноважна ціна p_0 , тобто $p_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

Але "спіраль" устанавлення рівноважної ціни не завжди "скручується" до точки p_0 . Якщо економіка "хвора", то криві попиту та пропозиції можуть мати інший вигляд. Наприклад, пропозиція явно недостатня, а купівельна спроможність населення дуже низька (рис. 4.14). У цьому випадку рівноважна ціна p_0 нестійка у тому розумінні, що процес торгу "розкручує" спіраль цін від ціни p_0 ; покупцю не вдається утримати ціну, і виробник виграє у результаті такого торгу. Подібна ситуація можлива, якщо виробник є монополістом. Тоді рівноважну ціну можна втримати лише неринковими засобами (зокрема, за допомогою державного втручання).

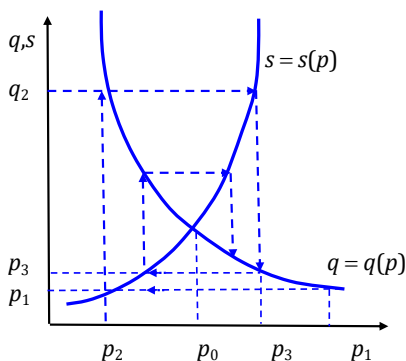


Рис. 4.13

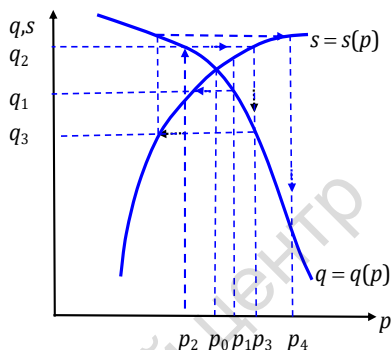


Рис. 4.14

Розглянемо окремий випадок **павутинної моделі**, в якій **функції попиту та пропозиції лінійні** $s(p) = a + bp_{t-1}$, $q(p) = c - dp_t$, де $b > 0$, оскільки функція пропозиції зростаюча; $d < 0$, оскільки функція попиту спадаюча; $c > a > 0$, тобто $q(0) > s(0) > 0$ (вважаємо, що за нульової ціни попит перевищує пропозицію).

Запишемо умову рівноваги:

$$q(p_t) = s(p_{t-1}) \text{ або } c - dp_t = a + bp_{t-1}.$$

Спочатку знайдемо рівноважні ціну p^* та обсяг виробництва q^* з умови $c - dp^* = a + bp^*$, звідки:

$$p^* = \frac{c-a}{b+d} \text{ та } q^* = \frac{bc+ad}{b+d}.$$

Далі дослідимо поведінку цін та обсягів виробництва у випадку, за якого початкова точка не збігається із рівноважною. Спочатку цю задачу можна розв'язати графічно та отримати рисунок "павутиння", що підтверджує її назву.

Задавши певні початковий обсяг товару та ціну, які не збігаються із точкою рівноваги, послідовно наноситимемо точки, відповідно до процедури розрахунку за моделлю, з'єднуючи їх горизонтальними та вертикальними прямими лініями. Із графічного аналізу можна отримати певні результати.

Якщо крива пропозиції нахилена крутіше від кривої попиту ($b < d$), то рівновага на такому ринку стійка (рис. 4.15). Якщо крива попиту нахилена крутіше за криву пропозиції ($b > d$), то рівновага на ринку нестійка (рис. 4.16); за рівного нахилу кривих попиту та пропозиції ($b = d$) ціни на ринку матимуть регулярні коливання зі сталою амплітудою (рис. 4.17).

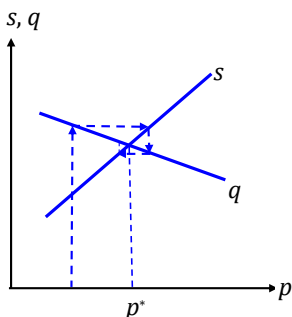


Рис. 4.15

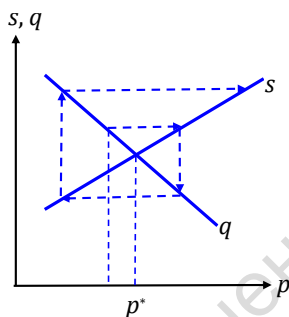


Рис. 4.16

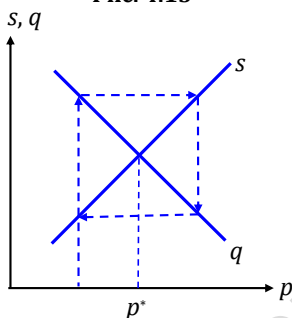


Рис. 4.17

Перейдемо до математичного аналізу моделі. Виразимо p_t через p_{t-1} , дістанемо рекурентне співвідношення:

$$p_t = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_{t-1}.$$

Послідовно застосовуючи це співвідношення, знаходимо:

$$p_1 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_0; \quad p_2 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} \left[\frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} p_0 \right] = \frac{c-a}{d} \left[1 - \frac{b}{d} \right] + \left(\frac{b}{d} \right)^2 p_0$$

або у загальному випадку:

$$p_t = \frac{c-a}{d} \left[1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d} \right)^2 + \dots + (-1)^t \left(\frac{b}{d} \right)^{t-1} \right] + (-1)^t \left(\frac{b}{d} \right)^t p_0.$$

Вираз у квадратних дужках є сумою t членів геометричної прогресії. Використаємо формулу суми n членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

$$\text{Якщо } |q| < 1, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Для павутинної моделі $q = -(b/d)$, $a_1 = (c-a)/d$. Звідси отримаємо вираз для ціни p_t у будь-який момент часу t :

$$p_t = \frac{c-a}{d} \cdot \frac{1 - (-1)^t (b/d)^t}{1 + (b/d)} + (-1)^t (b/d)^t \cdot p_0.$$

Очевидно, що:

$$\text{при } b/d < 1 \quad (b/d)^t \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty \quad p_t \rightarrow \frac{c-a}{b+d} = p^*,$$

тобто за нахилу кривої пропозиції крутішого, ніж кривої попиту, рівновага є стійкою. Якщо $b/d > 1$, тобто нахил кривої попиту крутіший, то $(b/d)^t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, і процес розбігається (рівновага нестійка). При $b/d = 1$, тобто $b = d$, значення p_t чергуються навколо рівноважного значення.

4.2.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Означення. Якщо границя числової послідовності дорівнює нулю, то послідовність називають **нескінченно малою** при $n \rightarrow \infty$, тобто:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N: |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Приклад 4.10. Розглянемо послідовність $x_n = 1/n$. Покажемо, що вона при $n \rightarrow \infty$ є нескінченно малою.

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Із нерівності $|\alpha_n| = |1/n| < \varepsilon$ маємо, що $n > 1/\varepsilon$.

Якщо вибрати $N = [1/\varepsilon]$, то для всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|\alpha_n| = |1/n| < \varepsilon$. Отже:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = [1/\varepsilon] \quad \forall n > N: |1/n| < \varepsilon.$$

За означенням це свідчить, що $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$.

Зауваження. Якщо існує границя послідовності $\{x_n\}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то послідовність $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ є нескінченно малою при $n \rightarrow \infty$, оскільки $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon$. Тому збіжну послідовність $\{x_n\}$, яка має границю a , можна подати у вигляді:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{4.2}$$

де α_n – нескінченно мала послідовність при $n \rightarrow \infty$.

Співвідношення (4.2) часто використовують при доведенні теорем про границі.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно великою** при $n \rightarrow \infty$, якщо для довільного числа $E > 0$ існує такий номер N , що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > E$.

Очевидно, що нескінченно велика послідовність не має скінченої границі. Тому кажуть, що вона має нескінчену границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ } (-\infty \text{ або } +\infty).$$

Приклад 4.11. Розглянемо послідовність $x_n = n$ і покажемо, що вона нескінченно велика при $n \rightarrow \infty$.

Виберемо довільне число $E > 0$. Із нерівності $|x_n| = |n| > E$ одержимо, що $n > E$. Якщо вибрати $N = [E]$, то $\forall n > N$ виконується нерівність $|x_n| > E$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = [E] \quad \forall n > N: |x_n| > E.$$

А це означає, що послідовність нескінченно велика при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА

*(зв'язок між нескінченно малими
та нескінченно великими послідовностями)*

Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно мала при $n \rightarrow \infty$,
то послідовність $\{1/x_n\}$ нескінченно велика при $n \rightarrow \infty$.

І навпаки, якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика при
 $n \rightarrow \infty$, то послідовність $\{1/x_n\}$ є нескінченно малою при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика при $n \rightarrow \infty$. Для довільно взятого числа $\varepsilon > 0$ покладемо $E = 1/\varepsilon$. Відповідно до означення для цього E існує такий номер N , що при $n > N$ $|x_n| > E$. Звідси дістанемо:

$$\left| \frac{1}{x_n} \right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E} = \varepsilon \text{ для всіх } n > N,$$

тобто послідовність $\{1/x_n\}$ є нескінченно малою при $n \rightarrow \infty$.

Доведення другої частини теореми проводять аналогічно.
Користуючись означеннями, можна довести

Основні властивості нескінченно малих послідовностей

1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

2. Добуток скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

3. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою послідовністю.

4. Добуток нескінченно малої послідовності на сталие число є нескінченно малою послідовністю.

4.2.4. Основні властивості збіжних послідовностей

ТЕОРЕМА 1

Збіжна послідовність має лише одну границю.

Доведення. Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що послідовність $\{a_n\}$ має дві різні границі $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ та $a \neq b$. Тоді для $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \exists N_1 \quad \forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon \\ \text{та} \quad \exists N_2 \quad \forall n > N_2 : |a_n - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Виберемо $N = \max \{N_1, N_2\}$. Тоді для $\forall n > N$:

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

а це означає, що $a = b$. Теорему доведено.

ТЕОРЕМА 2

Усяка збіжна послідовність обмежена.

Доведення. Якщо послідовність збіжна, то вона має границю $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

За означенням:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$ або $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Іншими словами, в ε -околі $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ точки a перебувають усі члени a_n для всіх $n > N$, а поза ε -околом точки залишається скінченне число членів послідовності $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$.

Виберемо число $C = \max\{|a| + \varepsilon, |a_1|, \dots, |a_N|\}$, тоді очевидно, що $|a_n| < C$ для всіх натуральних n , тобто послідовність обмежена. Теорему доведено.

Зауваження. Обернене твердження, загалом кажучи, невірне. Обмежена послідовність може бути розбіжною. Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n$ обмежена, але границі не має.

Нехай задано дві послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ і $\{b_n, n \geq 1\}$, тоді із них можна утворити нові послідовності за допомогою арифметичних дій над відповідними їх членами:

$$\{a_n \pm b_n\} = a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, \dots, a_n \pm b_n, \dots$$

$$\{a_n \cdot b_n\} = a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \dots, a_n \cdot b_n, \dots$$

$$\{a_n/b_n\} = a_1/b_1, a_2/b_2, a_3/b_3, \dots, a_n/b_n, \dots, \text{ якщо } b_n \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 3

(арифметичні дії над границями)

Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ збіжні,
тобто існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$; 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$,
якщо $b \neq 0$.

Доведення. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то із (4.2) дістанемо:

$a_n = a + \alpha_n$ і $b_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n – нескінченно малі послідовності при $n \rightarrow \infty$. Тоді маємо:

$$1. (a_n \pm b_n) - (a \pm b) = (a_n - a) \pm (b_n - b) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

За властивостями нескінченно малих послідовностей $\{a_n \pm b_n\}$ нескінченно мала при $n \rightarrow \infty$, тому послідовність $\{(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\}$ також нескінченно мала при $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

$$2. a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) - a \cdot b = \\ = a \cdot b + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n - a \cdot b = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

За властивостями нескінченно малих послідовностей послідовності $\{a_n \cdot b_n\}$, $\{b \cdot \alpha_n\}$, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ нескінченно малі при $n \rightarrow \infty$, тому послідовність $\{a_n \cdot b_n - a \cdot b\}$ – нескінченно мала при $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

3. Якщо $b \neq 0$, то елементи послідовності $\{b_n\}$ не перетворюються на нуль, починаючи з деякого номера N , тому частка a_n/b_n має сенс за всіх $n > N$, тоді:

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{b \cdot b_n} = \\ = \frac{a \cdot b + b \cdot \alpha_n - a \cdot b - a \cdot \beta_n}{b \cdot b_n} = \frac{1}{b_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right).$$

За властивостями нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n - (a/b)\beta_n\}$ нескінченно мала при $n \rightarrow \infty$. Покажемо, що послідовність $\{1/b_n\}$ обмежена.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2} \exists N \forall n > N : |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$.

Тому $|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$.

Оскільки $|b_n| > \frac{|b|}{2}$, то $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ при всіх $n > N$.

Отже, послідовність $\{1/b_n\}$ обмежена.

Таким чином, послідовність $\{1/b_n\}(\alpha_n - (a/b)\beta_n)$ нескінченно мала як добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність. Отже, послідовність $\{(a_n/b_n) - (a/b)\}$ нескінченно мала при $n \rightarrow \infty$, а це свідчить, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$. Теорему доведено.

Наслідок:

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$, де $c = \text{const}$.

4.2.5. Граничний перехід у нерівностях

ТЕОРЕМА

Якщо члени збіжної послідовності $\{a_n\}$ задовольняють нерівність $a_n \geq b$ (або $a_n \leq b$) для всіх n та $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то $a \geq b$ (або $a \leq b$).

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що $a \leq b$. Виберемо $\varepsilon = b - a > 0$. Тоді $\exists N \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon = b - a$. Це рівносильно $-(b - a) \leq a_n - a \leq b - a$, тобто $a_n \leq b$, що суперечить умові.

Наслідок 1:

Якщо елементи збіжних послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ задовольняють нерівність $a_n \leq b_n$, починаючи з деякого номера, то їх границі $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ та $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ задовольняють нерівність $a \leq b$.

Дійсно, починаючи з деякого номера елементи послідовності $\{b_n - a_n\}$ невід'ємні, і за теоремою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b - a \geq 0.$$

Тоді $b \geq a$.

Наслідок 2:

Якщо елементи збіжної послідовності $\{a_n\}$ розташовані на відрізку $[c, b]$, то й границя $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ також належить відрізку $[c, b]$, тобто $a \in [c, b]$.

Дійсно, якщо $c \leq a_n \leq b$ для всіх n , то $c \leq a \leq b$.

ТЕОРЕМА (три послідовності)

Якщо існують границі послідовностей $\{x_n\}$, $\{z_n\}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ та для всіх n виконується нерівність

$x_n \leq y_n \leq z_n$, то послідовність $\{y_n\}$ збіжна та $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Доведення. Оскільки $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, то для $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists N_1 \quad \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Виберемо $N = \max\{N_1, N_2\}$, тоді для всіх $n > N$:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Сформулюємо й доведемо ознаку збіжності монотонної послідовності.

ТЕОРЕМА Веєрштрасса

Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю.

Доведення. Розглянемо множину значень послідовності $\{x_n\}$. Вона обмежена, тому має точні верхню й нижню межі. Для визначеності вважатимемо, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає.

Позначимо $M = \sup\{x_n\}$ та доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$.

За всіх n за умовою теореми виконується нерівність $x_n \leq M$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. За означенням точної верхньої межі можна знайти значення $x_N > M - \varepsilon$. Оскільки послі-

довність монотонно зростає, то при $n > N$ маємо: $x_n > x_N > M - \varepsilon$.
 Із нерівностей $M - \varepsilon < x_n \leq M$ випливає, що $M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon$,
 тобто $|x_n - M| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$.

Наслідок 1:

Обмежена зверху послідовність, що монотонно зростає, має границю.

Наслідок 2:

Обмежена знизу послідовність, що монотонно спадає, має границю.

4.2.6. Число e

Розглянемо послідовність чисел $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Обчислимо кілька перших членів послідовності:

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2; \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 9/4 = 2,25;$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 64/27 = 2,37\ldots$$

Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає та обмежена зверху. Застосуємо **формулу бінома Ньютона**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (4.3)$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти. Тоді:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}. \quad (4.4)$$

Скоротивши дробі, дістанемо:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Замінімо у цьому розкладанні n на $n + 1$. Тоді число доданків збільшиться на одиницю:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ & + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Оскільки $n < n + 1$, то:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1},$$

і для довільного k ($1 \leq k < n$) виконується нерівність:

$$1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Тому $x_n < x_{n+1}$ для довільного $n \in N$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає.

Доведемо обмеженість послідовності $\{x_n\}$.

Скористаємося нерівністю $n! > 2^{n-1}$ для довільного $n \in N$. У формулі (4.4) значення кожного виразу у дужках менше одиниці. Отже:

$$\begin{aligned} 2 < x_n < 2 + (1/2!) + (1/3!) + \dots + (1/n!) < 2 + \underbrace{(1/2) + (1/2^2) + \dots + (1/2^{n-1})}_{\text{геометрична прогресія зі знаменником } q=1/2} = \\ = 2 + \frac{1/2(1 - (1/2)^n)}{1 - (1/2)} = 2 + (1 - (1/2^n)) = 3 - (1/2^n) < 3. \end{aligned}$$

Таким чином, послідовність $\{x_n\}$ – обмежена:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

За теоремою Вейєрштрасса послідовність має границю та:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (4.5)$$

Число e – ірраціональне, $e \approx 2,7182$. Літерою e це число вперше позначив Л. Ейлер.

4.2.7. Задача про неперервне нарахування відсотків

Нехай початковий вклад у банк становив S_0 грн. Банк нараховує p % річних. Знайти розмір вкладу S_t за t років.

При використанні **простих відсотків** розмір вкладу щорічно збільшуватиметься на одну й ту саму величину $\frac{p}{100} S_0$:

$$S_1 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right), S_2 = S_0 \left(1 + \frac{2p}{100} \right), \dots, \\ S_t = S_0 \left(1 + \frac{tp}{100} \right). \quad (4.6)$$

На практиці частіше застосовують **складні відсотки**. У такому випадку розмір вкладу щорічно збільшуватиметься в одне й саме число $\left(1 + \frac{p}{100} \right)$ разів:

$$S_1 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right), S_2 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2, \dots, \\ S_t = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t. \quad (4.7)$$

Формули такого типу застосовують також у демографічних розрахунках (приріст населення) та в економічних прогнозах (збільшення валового національного продукту).

Нехай початковий депозит S_0 покладено у банк під $p = 100$ % річних, тоді за рік ($n = 1$) сума депозиту становитиме $2S_0$. Припустимо, що за півроку ($n = 2$) рахунок закрито із результатом:

$$S_1 = S_0 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} S_0,$$

і цю суму знов покладено як депозит у той самий банк. Наприкінці року депозит становитиме:

$$S_2 = S_0 \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = 2,25 S_0.$$

Зменшуватимемо термін розміщення депозиту у банку за умови його подальшого розміщення після вилучення. За щоквартального повторення цих операцій депозит наприкінці року становитиме:

$$S_4 = S_0 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,37S_0.$$

Якщо є можливість повторювати операцію вилучення-розміщення протягом року скільки завгодно разів, то за виконання цієї операції сума за рік становитиме:

- за щомісячного ($n = 12$) $S_{12} = S_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2,61S_0$;

- за щоденного ($n = 365$) $S_{365} = S_0 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2,714S_0$;

- за щогодинної активності ($n = 8760$)

$$S_{8760} = S_0 \left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} \approx 2,718S_0 \text{ і т. д.}$$

Ясно, що послідовність значень початкового вкладу $\{q_n\} = \{S_n/S_0\}$ збігається із послідовністю, границею якої є число e при $n \rightarrow \infty$.

У загальному випадку, якщо відсоток нарахування p і рік розбито на n частин, то за t років сума депозиту досягне величини:

$$S_t = S_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}. \quad (4.8)$$

Тоді:

$$S_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[S_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} \right] = S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}} \right]^{\frac{tp}{100}} = S_0 e^{\frac{tp}{100}}.$$

$$S_t = S_0 e^{\frac{tp}{100}}. \quad (4.9)$$

Розрахунки, виконані за (4.9), називають **обчисленнями за неперервними відсотками**.

Зауважимо, що хоча у практичних фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування відсотків застосовують не часто, воно є ефективним при аналізі фінансових проблем, зокрема при обґрунтуванні та виборі інвестиційних рішень.

Приклад 4.12. Щоб відчути результати розрахунків, залежно від способу нарахування відсотків, у табл. 4.1 наведено розміри внесків 5т грн. од., обчислені при $S_0 = 1$ грн. од., $p = 5\%$, $t = 20$ років.

Таблиця 4.1

Початковий внесок	Прості відсотки	Складні відсотки					Неперервне нарахування відсотків
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 12$	$n = 365$	
1,000	2,0000	2,6355	2,6851	2,7086	2,7126	2,7181	2,7182

Дані таблиці свідчать про те, що похибка обчислення суми внеску за формулою (4.9) неперервного нарахування відсотків, порівняно із формулою (4.8) складних відсотків, які нараховують щорічно, $n = 1$ за однієї і тієї самої відсоткової ставки ($p = 5\%$) виявилась значною (бл. 5 %).

Приклад 4.13. Нехай межа інфляції становить 1 % на день. Наскільки зменшиться початкова сума вкладу за півроку?

Застосування формули складних відсотків дає:

$$S = S_0 \left(1 - \frac{1}{100} \right)^{182},$$

де S_0 – початкова сума, 182 – число днів у півріччі. Перетворення цього виразу дає:

$$S = S_0 \left[\left(1 - \frac{1}{100} \right)^{-100} \right]^{\frac{182}{100}} \approx S_0 e^{-1.82},$$

тобто інфляція зменшить початкову суму майже у шість разів.

4.2.8. Терема про вкладені відрізки

ТЕОРЕМА (вкладені відрізки)

Нехай задано послідовність відрізків $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$, таких, що кожний наступний лежить у попередньому, тобто $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$.
Тоді, якщо $b_n - a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то існує єдина точка, що належить усім відрізкам цієї послідовності.

Доведення. Із умови $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ для довільного $n \in \mathbf{N}$ випливає, що $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ за всіх $n \in \mathbf{N}$, тобто $\{a_n\}$ – неспадна та обмежена зверху, а послідовність $\{b_n\}$ – незростаюча та обмежена знизу. Тоді за теоремою Вейерштрасса існують $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c_2$. Оскільки $b_n - a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c_2 - c_1 = 0$, тобто $c_2 = c_1$.

Отже, послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ мають спільну границю. Позначимо її через c .

Оскільки послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ монотонні, то за будь-яких $n \in \mathbf{N}$ виконуються нерівності $a_n \leq c \leq b_n$, тобто точка c дійсно належить відрізкам $[a_n, b_n]$.

Доведемо, що точка c єдина. Дійсно, якби існувала ще одна точка d , належна всім відрізкам, то відрізок із кінцями c і d належав би всім відрізкам, але тоді за будь-якого $n \in \mathbf{N}$ виконувались би нерівності $b_n - a_n \geq |d - c| > 0$, що неможливо, оскільки $b_n - a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, $c = d$. Теорему доведено.

Заяпитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Що називають множиною?
2. Яку з множин називають універсальною?
3. Яку з множин називають порожньою?
4. Яку множину називають підмножиною заданої множини?

Приклад 1. Якщо A , B і C – задані множини, то які із наведених тверджень правильні, а які – ні:

1. $(A \subset A)$;
2. $(A \subset \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)$;
3. $((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Leftrightarrow (A = B)$;
4. $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset C)$.

1. Твердження $(A \subset A)$ правильне, оскільки кожен елемент множини A належить множині A .

2. Твердження $(A \subset \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)$ правильне, оскільки порожня множина $\emptyset$ не містить жодного елемента, а множина A є її підмножиною, тому множина A також не містить жодного елемента та збігається із порожньою множиною.

3. Твердження $((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Leftrightarrow (A=B)$ правильне, оскільки кожен елемент множини A належить множині B , і навпаки, кожен елемент множини B належить множині A , тому за означенням такі множини рівні.

4. Твердження $((A \subset B) \wedge (B \supset C)) \Rightarrow (A \supset C)$ неправильне, оскільки кожен елемент множини A є елементом множини B , а кожен елемент множини C є елементом множини B ; це геть не означає, що кожен елемент множини C є елементом множини A .

5. Яку множину називають об'єднанням двох заданих множин?

6. Яку множину називають перерізом двох заданих множин?

7. Яку множину називають різницею двох заданих множин?

Приклад 2. Фірма A випускає товари a, b, c, d , а фірма B – товари b, c, d . Оптова база закупає товари обох фірм. Знайти множину тих товарів, які база закупає: 1) на фірмі A або на фірмі B ; 2) тільки на фірмі A ; 3) тільки на фірмі B ; 4) одночасно на обох фірмах.

Позначимо множини $A = \{a, b, c, d\}$ та $B = \{b, c, d\}$.

1) Множина товарів, які база закупає на фірмах A або B , є об'єднанням множин $A = \{a, b, c, d\}$ та $B = \{b, c, d\}$. Тоді $A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$. Тобто $A \cup B = \{a, b, c, d\} = A$.

2) Множина товарів, які база закупає тільки на фірмі A , є різницею двох множин A та B : $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ та } x \notin B\}$. У нашому випадку ця множина складається тільки з одного елемента $A \setminus B = \{a\}$.

3) Множина товарів, які база закупає тільки на фірмі B , є різницею двох множин B та A : $B \setminus A = \{x | x \in B \text{ і } x \notin A\}$. У нашому випадку ця множина не містить жодного елемента, тобто $B \setminus A = \emptyset$.

4) Множина товарів, які база закупає одночасно на фірмах A та B , є перерізом множин $A = \{a, b, c, d\}$ та $B = \{b, c, d\}$. Тобто множина їх спільних елементів: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ та } x \in B\}$. У нашому випадку ця множина збігається із множиною B . Отже, $A \cap B = B = \{b, c, d\}$.

8. Які числові множини ви знаєте?

9. Сформулюйте означення числової послідовності.

Приклад 3. Знайти загальний член послідовності 1, 4, 9, 16, 25, ...

Легко побачити, що:

$$a_1 = 1 = 1^2; a_2 = 4 = 2^2; a_3 = 9 = 3^2; a_4 = 16 = 4^2; a_5 = 25 = 5^2 \text{ тощо.}$$
$$a_5 = 25 = 5^2 \text{ тощо. Отже, } a_n = n^2.$$

Приклад 4. Знайти загальний член послідовності:

$$1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{9} \dots$$

Маємо:

$$|a_1| = |1| = \frac{1}{1}; |a_2| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}; |a_3| = \left| \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{2 \cdot 2 + 1};$$
$$|a_4| = \left| -\frac{1}{7} \right| = \frac{1}{7} = \frac{1}{2 \cdot 3 + 1}; |a_5| = \left| \frac{1}{9} \right| = \frac{1}{9} = \frac{1}{2 \cdot 4 + 1}.$$

$$\text{Отже, } |a_n| = \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2 \cdot n - 1}.$$

Оскільки $a_1 > 0$; $a_2 < 0$; $a_3 > 0$ тощо, то загальний член послідовності:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot n - 1}.$$

10. Які числові послідовності називають монотонними?

Приклад 5. Визначити, чи буде монотонною послідовність

$$a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Оскільки

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 2^{n+1}}{2^n \cdot 2^{n+1}} = \frac{2^n(1-2)}{2^n \cdot 2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0, \text{ то}$$

$a_{n+1} < a_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Отже, задана послідовність є монотонно спадною.

11. Які числові послідовності називають обмеженими?

Приклад 6. Визначити, які із послідовностей обмежені:

$$1) a_n = \sin 2^n; \quad 2) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

1) Оскільки $|a_n| = |\sin 2^n| \leq 1$, то послідовність обмежена.

2) Оскільки має місце рівність:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ то}$$
$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, що $0 < a_n < 1$, тобто вона обмежена знизу числом 0, зверху – числом 1. Для довільного $n \in \mathbf{N}$ $|x_n| \leq 1$. Отже, послідовність обмежена.

12. *Сформулюйте означення границі числової послідовності.*

Приклад 7. Використовуючи означення границі послідовності, показати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

Розглянемо послідовність $x_n = 1/10^n$. У загальному випадку для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$|x_n - a| = \left| \frac{1}{10^n} - 0 \right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

виконується при $n > \lg(1/\varepsilon)$. Отже, виберемо:

$$N = \left[\lg \frac{1}{\varepsilon} \right], \text{ де } \left[\lg \frac{1}{\varepsilon} \right] - \text{ціла частина числа } \lg \frac{1}{\varepsilon},$$

тоді $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left[\lg \frac{1}{\varepsilon} \right] \forall n > N : \left| \frac{1}{10^n} - 0 \right| < \varepsilon$, а це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0.$$

Приклад 8. Використовуючи означення границі послідовності, показати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbf{N}$.

Аналогічно до прикладу 7 можна показати, що:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbf{N}.$$

У цьому випадку можна знайти вираз для числа N , залежно від ε . Для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$|x_n - a| = \left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon \text{ виконується при } n > \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Виберемо $N = \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$, де $\left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right]$ – ціла частина числа $n > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$,

тоді $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right] \quad \forall n > N: \left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| < \varepsilon$, а це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Приклад 9. Обчислити границю послідовності із загальним членом:

$$a_n = \frac{5n^5 + 3n^3 + 2}{2n^5 - n^4 - 1}.$$

Потрібно знайти:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5 + 3n^3 + 2}{2n^5 - n^4 - 1}.$$

Перетворимо загальний член послідовності, поділивши почленно чисельник і знаменник на n^5 :

$$a_n = \frac{5n^5 + 3n^3 + 2}{2n^5 - n^4 - 1} = \frac{5 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^5}}{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^5}}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^5} \right) = 5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 2 \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5 + 3n^3 + 2}{2n^5 - n^4 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^5}}{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^5}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Приклад 10. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3}$.

Поділимо чисельник і знаменник на n^2 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{3 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

13. Яку із послідовностей називають нескінченно малою?
 14. Якими є властивості нескінченно малих послідовностей?

Приклад 11. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1}$.

Поділимо чисельник і знаменник на n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cos n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Оскільки послідовність $\{\cos n\}$ обмежена, тобто для всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $|\cos n| \leq 1$, послідовності $\{1/\sqrt{n}\}$ і $\{1/n\}$ – нескінченно малі при $n \rightarrow \infty$.

Приклад 12. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (\infty - \infty)$.

Помножимо та поділимо чисельник і знаменник на спряжений вираз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = 0. \end{aligned}$$

15. Яку із послідовностей називають нескінченно великою?

16. Який зв'язок існує між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями?

Приклад 13. Довести, що послідовність $x_n = q^n$ нескінченно мала при $|q| < 1$ і нескінченно велика – при $|q| > 1$.

1) Якщо $q = 0$, то має місце рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне та $0 < |q| < 1$. Тоді, користуючись нерівністю Бернуллі $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $n > 1$, дістанемо:

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right), \text{ звідки}$$

$$|q|^n < \frac{|q|}{n(1-|q|)} < \varepsilon.$$

Ця нерівність виконується:

$$\forall n > \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}.$$

Виберемо $N = \left\lceil \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)} \right\rceil$, тоді для всіх $n > N$ виконується нерівність $|q|^n < \varepsilon$. Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$, тобто послідовність нескінченно мала при $n \rightarrow \infty$.

2) Нехай $|q| > 1$ і $\Delta > 0$ – довільне. Тоді із нерівності

$$|q|^n > ((1 + (|q| - 1))^n > 1 + n(|q| - 1) > n(|q| - 1) > \Delta$$

знаходимо, що:

$$|q|^n > \Delta \quad \forall n > \frac{\Delta}{|q| - 1}.$$

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ при $|q| > 1$, тобто послідовність нескінченно велика при $n \rightarrow \infty$.

17. Яким є економічний зміст границі числової послідовності?

18. У чому полягає суть павутинної моделі ринку?

Приклад 14. Нехай попит і пропозиція виражають лінійні функції $q(p) = 10 - 2p$ і $s(p) = 4 + p$. Визначити рівноважну ціну. Установити у графічний спосіб, якою буде павутинна модель ринку.

Рівноважну ціну можна знайти з умови рівноваги: $q(p_0) = s(p_0)$, тобто $10 - 2p_0 = 4 + p_0$. Отже, $p_0 = 2$. Виразимо ціну через попит: $p = 5 - (1/2)q$. Нехай початкова ціна $p_1 = 2,8$.

Оскільки:

- попит $q_1(2,8) = 10 - 2 \cdot 2,8 = 4,4$;

- пропозиція $s_1(2,8) = 4 + 2,8 = 6,8$,

то $q_1 < s_1$. Тоді ціна зменшується до p_2 так, щоб $s_1 = q_2$, тобто $p_2 = 5 - (1/2) \cdot 6,8 = 1,6$.

Але за ціни $p_2 = 1,6$ пропозиція $s_2(1,6) = 4 + 1,6 = 5,6$ менша, ніж $q_2 = 6,8$. Це спричинить зростання ціни до $p_3 = 5 - (1/2) \cdot 5,6 = 2,2$ так, щоб $s_2 = q_3$.

А за ціни $p_3 = 2,2$ попит $q_3(2,2) = 10 - 2 \cdot 2,2 = 5,6$ менше, ніж пропозиція $s_3(2,2) = 4 + 2,2 = 6,2$, що приводить до падіння ціни до $p_3 = 1,9$.

Продовжуючи цей процес, дістанемо послідовності:

• ціни $\{p_n\}$ 2,8; 1,6; 2,2; 1,9; 2,05; 1,975; ...

• попиту $\{q_n\}$ 4,4; 6,8; 5,6; 6,2; 5,9; 6,05; ...

Зобразимо точки із координатами $(p_i; q_i)$ на графіку (рис. 4.18). Тоді $p_n \rightarrow p_0 = 2$, $q_n \rightarrow q_0 = 6$ при $n \rightarrow \infty$. Маємо точку рівноваги (2; 6).

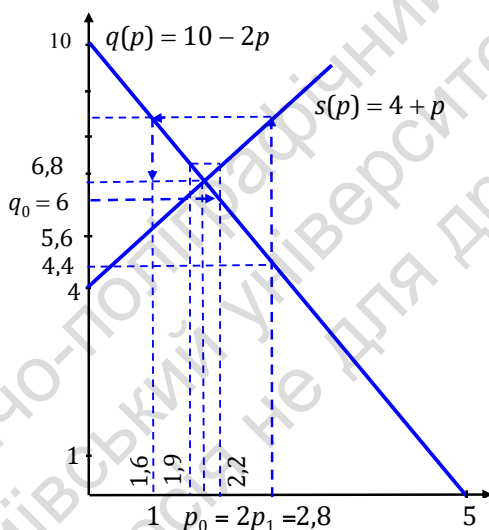


Рис. 4.18

19. Як визначають число e ?

Приклад 15. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}} \right)^4 = e^4.$$

Приклад 16. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{-n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right)^{-(1/2)} = e^{-(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

20. У чому суть задачі про неперервне нарахування відсотків?

Приклад 17. Початковий внесок, що покладений до банку під 10 % річних, становить 6 млн грн. Знайти розмір внеску за п'ять років за нарахування відсотків: 1) щорічного; 2) щоквартального; 3) неперервного.

1) Для обчислення розміру внеску за щорічного нарахування відсотків скористаємося формулою (4.8) ($n = 1$):

$$S_t = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 1} \right)^{1t}.$$

У нашому випадку $S_5 = 6 \cdot \left(1 + \frac{10}{100 \cdot 1} \right)^5 \approx 9,663$ млн грн.

2) Для обчислення розміру внеску за щоквартального нарахування відсотків скористаємося формулою (4.8) ($n = 4$):

$$S_t = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 4} \right)^{4t}.$$

У нашому випадку $S_5 = 6 \cdot \left(1 + \frac{10}{100 \cdot 4} \right)^{20} \approx 9,832$ млн грн.

3) Для обчислення розміру внеску за неперервного нарахування відсотків скористаємося формулою (4.9):

$$S_t = S_0 e^{\frac{tp}{100}}.$$

Тоді дістанемо:

$$S_5 = 6 \cdot e^{0,5} \approx 9,892 \text{ млн грн.}$$

Розділ 5

ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

5.1. Функції однієї змінної

Означення. Нехай X і Y – деякі числові множини. Якщо кожному елементу x множини $X(x \in X)$ ставиться у відповідність певний елемент y із множини $Y(y \in Y)$, то кажуть, що на множині X задано функцію $y = f(x)$. При цьому x називають *незалежною змінною* (або аргументом), y – *залежною змінною*, а f означає закон відповідності. Множину $X = D(f)$ називають *областю визначення* функції, множину $Y = E(f)$ – *областю значень* функції. Позначають $f: X \rightarrow Y$.

Якщо множина X спеціально не зумовлена, то під областю визначення функції розуміють область допустимих значень (ОДЗ) незалежної змінної x , тобто множину таких значень x , за яких функція $y = f(x)$ має сенс.

5.1.1. Способи задання функції

Задати функцію f – означає вказати, як за кожним значенням аргументу x знайти відповідні значення функції $y = f(x)$. Існують кілька способів задання функції.

1. Аналітичний спосіб, за якого функцію задають формулою. Цей спосіб найчастіше застосовують на практиці.

Приклад 5.1. Указати області визначення та значень функції $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$. Маємо $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [0; \infty)$.

Приклад 5.2. Розглянути залежність між ціною деякого товару p і величиною попиту на цей товар q . Цей зв'язок можна визначити, наприклад за формулою $q(p) = 50 - 0,06p$.

2. Сенс табличного способу: функціональну залежність задають у вигляді таблиці, де для кожного значення незалежної змінної вказано відповідне значення залежної змінної. Цей спосіб дуже часто використовують в економіці.

Приклад 5.3. Функціональну залежність задано таблично:

p	100	150	200	250	300
q	44	41	38	35	32

Якщо підставити значення ціни із верхнього рядка таблиці до формули попереднього прикладу $q(p) = 50 - 0,06p$, то дістанемо відповідні значення величини попиту, що задані у нижньому рядку таблиці.

3. Графічний спосіб – функцію задано за допомогою графіка.

Означення. Графіком функції $y = f(x)$ називають геометричне місце точок на координатній площині, що мають координати $(x; f(x))$, абсциси яких є значеннями незалежної змінної x , а ординати – відповідними значеннями $y = f(x)$.

Приклад 5.4. Для побудови графіка функції попиту:

$$q(p) = 50 - 0,06p$$

потрібно відкласти значення величин p та q , які задані у таблиці на відповідних координатних осях, і з'єднати одержані точки (рис. 5.1).

У багатьох випадках графіки на практиці виконують за допомогою приладів. Наприклад, для вимірювання тиску атмосфери на різних висотах використовують спеціальний прилад – барограф, який записує на рухомій стрічці криву лінії зміни тиску залежно від висоти. Ще одним прикладом може служити електрокардіограма.

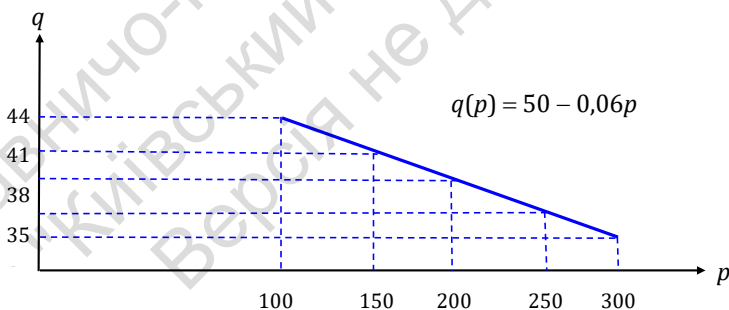


Рис. 5.1

4. Словесний спосіб використовують, якщо функцію описує правило її одержання за допомогою слів.

Приклад 5.5. Функція Діріхле $f(x) = 1$, якщо x – число раціональне; $f(x) = 0$, якщо x – число ірраціональне.

Приклад 5.6. Функція $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

Зауваження. Якщо функцію задано аналітично, то неважко перейти до табличного або графічного способів її задання. Перехід потребує певних знань і навичок. Іноді його вдається здійснити тільки наближено.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **однозначною**, якщо кожному значенню x відповідає тільки одне значення y . Функцію $y = f(x)$ називають **багатозначною**, якщо кожному значенню x відповідає кілька значень y .

Означення. Функцію називають **явною**, якщо вона задана формулою $y = f(x)$.

Приклад 5.7. Функція $y = x^2 + 5x + 6$ явно виражає x через y .

Означення. Функцію y аргументу x називають **неявною**, якщо її задано рівнянням $F(x; y) = 0$, яке не розв'язане щодо y .

Приклад 5.8. Функцію задано рівнянням $x^3 + y^2 - x = 0$.

Ця рівність загалом задає дві функції:

$$y = \sqrt{x - x^3} \text{ при } y \geq 0, \quad y = -\sqrt{x - x^3} \text{ при } y < 0.$$

Означення. Нехай x та y – функції однієї незалежної змінної t , тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причому вони визначені та неперервні на заданому проміжку T . Тоді кажуть, що функцію $y = f(x)$ **задано параметрично**.

Приклад 5.9. Нехай функцію задано параметрично: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. Якщо піднести до квадрату обидві частини рівностей і почленно додати, то дістанемо:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

– рівняння кола із центром у початку координат радіуса $|a|$.

Крім "арифметичних" дій над функціями – додавання, віднімання, множення та ділення – існують операції, які дозволяють за заданих функцій будувати нові.

Обернена функція. Нехай на деякому проміжку D функція $y = f(x)$ кожне своє значення набуває тільки один раз, область її значень E : $f: D \rightarrow E$. Візьмемо деяке число y_0 із області E . Тоді в області D обов'язково знайдеться щонайменше одне число x_0 , за якого ця функція набуває значень саме y_0 так, що $y_0 = f(x_0)$.

Щоб дістати значення x_0 , достатньо через y_0 на осі ординат (рис. 5.2) провести пряму, паралельну осі абсцис, яка перетне графік функції $y = f(x)$ в одній чи кількох точках. Абсциси цих точок і дають шукані значення x (одне із них x_0), за яких функція дорівнює y_0 .

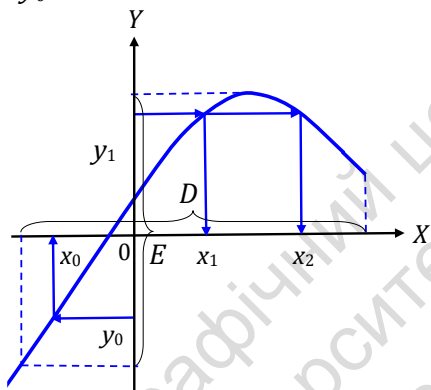


Рис. 5.2

Таким чином, кожному значенню y_0 із області E відповідає одне або кілька значень x , що належать проміжку D . Цим в області D визначено однозначну (якщо кожному y із E відповідає одне єдине значення x із D) або багатозначну функцію $x = g(y)$, яку називають **оберненою** для функції $y = f(x)$.

Графіки функцій $y = f(x)$ та оберненої для неї $x = \varphi(y)$ збігаються, тільки аргумент оберненої функції потрібно розглядати за віссю OY .

Але, оскільки ми звикли аргумент позначати літерою x і відкладати його на осі абсцис, то замінимо позначення x на y та замість рівності $x = \varphi(y)$ дістанемо рівність $y = \varphi(x)$. Графіки взаємно обернених функцій симетричні щодо бісектриси першого та третього координатних кутів – прямої $y = x$.

Сформулюємо **умову існування оберненої функції**.

ТВЕРДЖЕННЯ

Нехай однозначна функція $y = f(x)$ визначена та монотонно зростає (спадає) на множині D і набуває значень із множини E .

Тоді існує обернена їй функція $y = \varphi(x)$, що визначена на множині E , однозначна, яка також зростає (спадає) на множині D .

Знаходження оберненої функції зводиться до розв'язування рівняння $y = f(x)$ щодо x . Припустимо, що можна подати розв'язки цього рівняння у вигляді формули $x = \varphi(y)$. Якщо ця формула кожному y з області значень E ставить у відповідність тільки одне значення x , то $x = \varphi(y)$ можна розглядати як функцію, що визначена на множині E (це й буде оберненою функцією).

Якщо одному значенню y із множини E відповідає кілька значень x , то однозначна обернена функція для $y = f(x)$ на всій області визначення не існує, але має однозначну, обернену на кожному проміжку монотонності.

Оскільки традиційно незалежну змінну позначають через x , а значення функції – через y , то заміною позначення дістанемо функцію, яку позначають: $y = f^{-1}(x) = \varphi(x)$.

Приклад 5.10. Функцію

$$y = \frac{2x + 3}{5}$$

визначено для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, вона зростає та набуває значень $y \in (-\infty; +\infty)$. Виразимо x через y : $2x + 3 = 5y$, тобто:

$$x = \frac{5y - 3}{2}$$

– обернена, визначена та зростає на всій числовій прямій. Замінімо x на y й дістанемо функцію:

$$y = \frac{5x - 3}{2},$$

що обернена до заданої.

Приклад 5.11. Для заданих функцій указати обернені:

1) Функція $y = a^x$, де $a > 0, a \neq 1$. Виразимо x через y : $x = \log_a y$ або у звичайних позначеннях дістанемо обернену функцію: $y = \log_a x$.

2) Для функції $y = \sin x$ оберненою є функція:

$$y = \arcsin x, |x| \leq 1.$$

Складна функція. Нехай функція $y = f(u)$ є функцією змінної u ($f : U \rightarrow Y$), а змінна u є, своєю чергою, функцією $u = g(x)$ від змінної x ($g : X \rightarrow U$). Тоді на множині X задано

функцію $y = h(x) = f(g(x))$, яку називають **складною** (композицією) функцій, або **суперпозицією** функцій, або функцією від функції), при цьому $h : X \rightarrow Y$.

Приклад 5.12. Розглянемо функцію $y = \lg(\operatorname{tg} x)$. Тут так звані:

- внутрішня функція $u = \operatorname{tg} x$,
- зовнішня функція $y = \lg u$.

5.1.2. Властивості функцій

1. Парні або непарні функції

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **парною**, якщо для всіх $x \in D(f)$ має місце рівність $f(-x) = f(x)$, і **непарною** – якщо $f(-x) = -f(x)$. У протилежному випадку $y = f(x)$ називають функцією **загального вигляду** або є **ні парною, ні непарною**.

Графік парної функції симетричний щодо осі OY , графік непарної – щодо точки початку координат – точки $(0;0)$.

Приклад 5.13. 1) Для функції $y = x^2$ має місце рівність:

$$y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x),$$

тому функція парна.

2) Для функції $y = x^3$ має місце рівність:

$$y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x),$$

тому функція непарна.

3) Функція $y = x^2 + 3x$ ні парна, ні непарна.

2. Обмежені функції

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **обмеженою** на деякому проміжку X , якщо існує таке додатне число $C > 0$, що для всіх $x \in D(f)$: $|f(x)| \leq C$. У протилежному випадку функція **необмежена**.

Приклад 5.14.

1) Функція $y = \sin x$ обмежена, оскільки виконується нерівність $|\sin x| \leq 1$ для $\forall x \in D(f)$.

2) Функція $y = 1/x$ необмежена, оскільки набуває значень із множини $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Монотонні функції

Означення. Якщо для будь-яких значень аргументу $x_1, x_2 \in D(f)$ таких, що $x_1 < x_2$ для значень функції $y = f(x)$ виконується нерівність:

$f(x_1) < f(x_2)$, то функцію називають зростаючою (рис. 5.3 а);

$f(x_1) > f(x_2)$, то функцію називають спадною (рис. 5.3 б);

$f(x_1) \leq f(x_2)$, то функцію називають неспадною (рис. 5.3 в);

$f(x_1) \geq f(x_2)$, то функцію називають незростаючою (рис. 5.3 г).

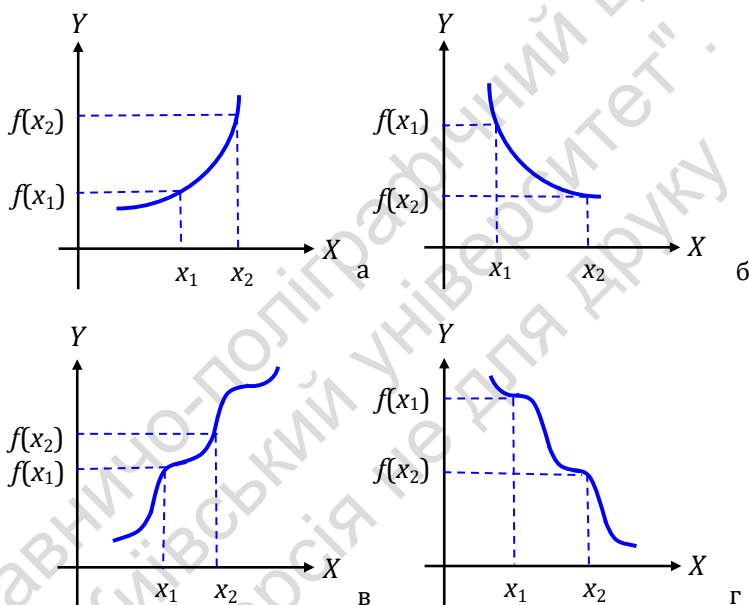


Рис. 5.3

4. Періодичні функції

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною* із найменшим періодом $T \neq 0$, якщо для всіх x із області визначення функції має місце рівність $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

Приклад 5.15. Функція $y = \sin x$ має період $T = 2\pi$, оскільки $\sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x$.

5.2. Основні елементарні функції

Розглянемо детально властивості **основних елементарних функцій**, із яких можна дістати всі функції, що входять до класу так званих **елементарних функцій**. Цей клас функцій в основному збігається із сукупністю тих функцій, які вивчають у середній школі.

5.2.1. Лінійна функція

Лінійною є функція $y = kx + b$, де $k, b \in \mathbb{R}$.

Графіком лінійної функції є пряма, що проходить через точку $(0; b)$ та утворює із додатним напрямком осі OX кут α .

Геометричний зміст коефіцієнтів: $k = \operatorname{tg} \alpha$ називають **кутовим коефіцієнтом** заданої прямої, b – ордината точки перетину з віссю OY . Графіки можливого розміщення прямих подано на рис. 5.4.

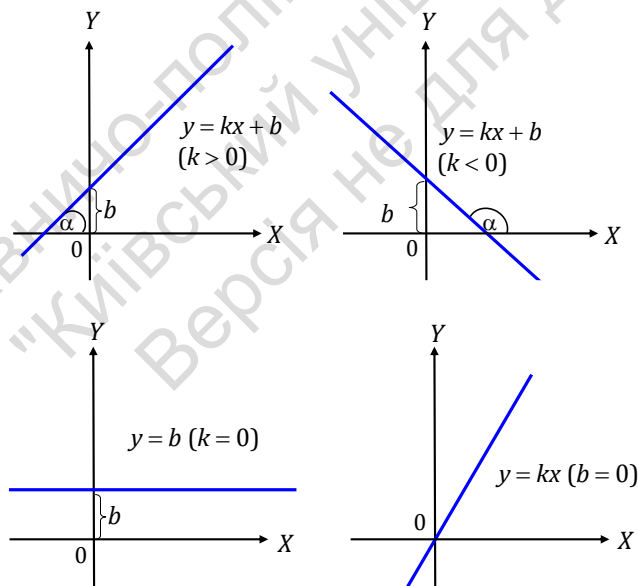


Рис. 5.4

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Множина значень: якщо $k \neq 0$, то $E(y) = (-\infty; +\infty)$, а якщо $k = 0$, то $E(y) = \{b\}$.
3. Функція ні парна, ні непарна при $k \neq 0, b \neq 0$; непарна – при $k \neq 0, b = 0$; парна – при $k = 0, b \neq 0$.
4. Функція неперіодична при $k \neq 0$. При $k = 0$ функція неперіодична, причому періодом є будь-яке дійсне число $T \neq 0$.
5. Функція $y = kx + b$ монотонна: при $k > 0$ вона зростає на $D(y)$, при $k < 0$ – спадає на $D(y)$, а при $k = 0$ – стала.
6. Функція не має точок локального екстремуму.

5.2.2. Квадратична функція

Квадратичною є функція $y = ax^2 + bx + c$, де $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Графіком є парабола.

Геометричний зміст коефіцієнтів: a визначає напрям гілок параболи: при $a > 0$ гілки параболи спрямовані вгору, при $a < 0$ гілки параболи спрямовані вниз; a та b визначають вершини параболи точки $(x_0; y_0)$, де $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$;

c – ордината точки перетину з віссю OY .

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Множина значень
 $E(y) = [y_0; +\infty)$ для $a > 0$ та $E(y) = (-\infty; y_0]$ для $a < 0$.
3. Функція ні парна, ні непарна при $b \neq 0$, парна – при $b = 0$.
4. Функція неперіодична.
5. Функція при $a > 0$ спадає на проміжку $(-\infty; x_0)$ і зростає – на проміжку $(x_0; +\infty)$; при $a < 0$ – зростає на проміжку $(-\infty; x_0)$ і спадає – на проміжку $(x_0; +\infty)$.
6. При $a > 0$ точка x_0 – точка мінімуму, при $a < 0$ точка x_0 – точка максимуму.

У найпростішому випадку, коли $a = 1, b = c = 0$, тобто $y = x^2$, функція є парною, невід'ємною та набуває значень із

множини $[0; +\infty)$. На проміжку $(-\infty; 0)$ вона спадає, а на проміжку $(0; +\infty)$ – зростає; при $x=0$ – досягає мінімального значення. Графіком функції є парабола із вершиною у точці $(0; 0)$. Вісь OY є віссю симетрії параболи.

Для довільного $a > 0$ графік функції $y = ax^2$ утворюється із графіка функції $y = x^2$ стисканням до осі OX у $1/a$ разів.

При $a < 0$ функція $y = ax^2$ зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, а на проміжку $(0; +\infty)$ – спадає, точка $x=0$ є її точкою максимуму.

Графік функції $y = ax^2$ при $a < 0$ можна дістати із графіка функції $y = |a|x^2$ дзеркальним відображенням щодо осі OX .

Отже, графіком функції $y = ax^2$ є парабола, яка симетрична щодо осі OY із вершиною у точці $O(0; 0)$. Гілки параболи при $a > 0$ направлені вгору (рис. 5.5 а), а при $a < 0$ – униз (рис. 5.5 б).

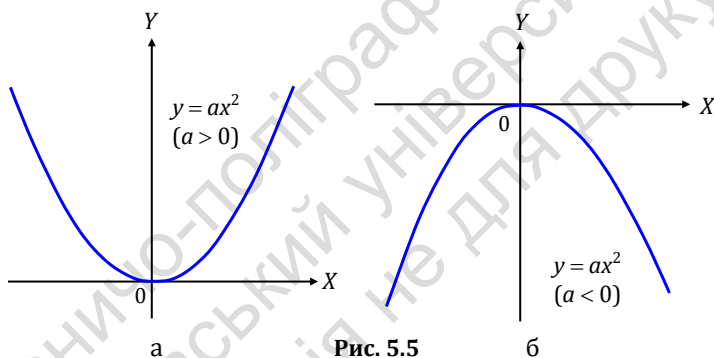


Рис. 5.5

5.2.3. Степенева функція

Степеневою є функція вигляду $y = x^p$, $p \in \mathbb{R}$.

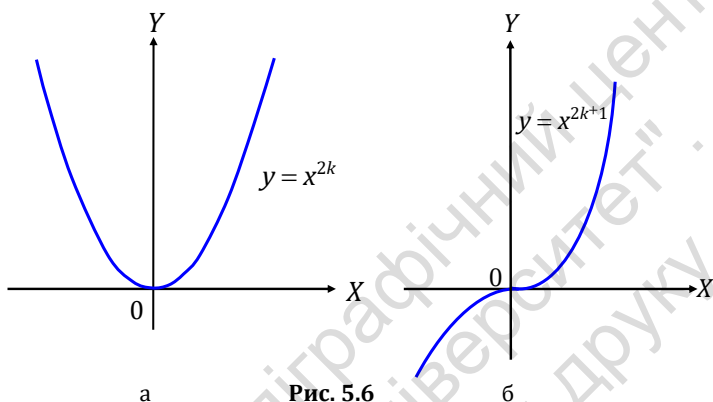
Якщо $p = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то **степенева функція** $y = x^n$.

Для $n=1$ маємо лінійну, а для $n=2$ – квадратичну функцію.

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Множина значень $E(y) = [0; +\infty)$ для парного n , тобто $n = 2k$ та $E(y) = (-\infty; +\infty)$, для непарного n , тобто $n = 2k + 1$.

3. За парного $n = 2k$ функція $y = x^{2k}$ буде парною, її графіком є парабола із вершиною у точці $O(0;0)$, яка симетрична щодо осі OY , гілки якої спрямовані вгору (рис. 5.6 а). За непарного $n = 2k + 1$ функція $y = x^{2k+1}$ непарна, її графік симетричний щодо початку координат (рис. 5.6 б).



4. Функція неперіодична.
5. Функцією за парного $n \in y = x^{2k}$, що спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і зростає – на проміжку $(0; +\infty)$; за непарного n функція $y = x^{2k+1}$ зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.
6. За парного $n = 2k$ точка $x_0 = 0$ є точкою мінімуму, за непарного $n = 2k + 1$ екстремумів немає.

Якщо $p = -n$, $n \in \mathbb{N}$, то **степенева функція**:

$$y = x^{-1} = 1/x^n.$$

Графіком функції є гіпербола. За $n = 2k$ графік подано на рис. 5.7 а, а за $n = 2k + 1$ – на рис. 5.7 б.

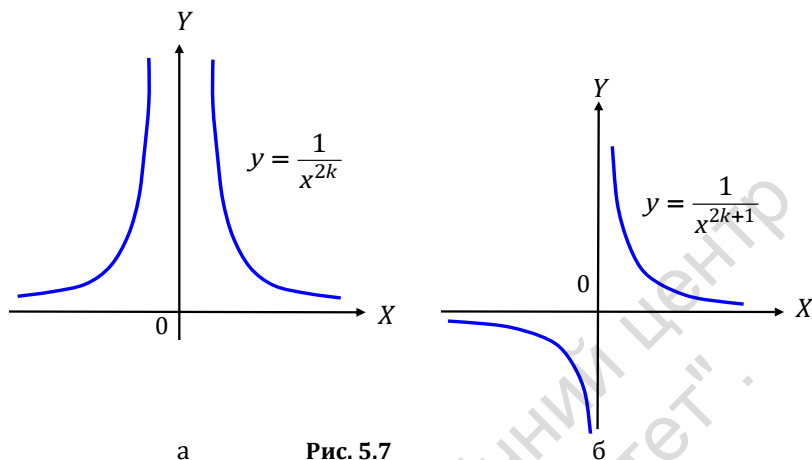


Рис. 5.7

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множина значень $E(y) = (0; +\infty)$ для парного $n = 2k$ і $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – для непарного $n = 2k + 1$.
3. Функція за парного $n = 2k$ буде парною, за непарного $n = 2k + 1$ функція непарна.
4. Функція неперіодична.
5. За парного $n = 2k$ функція $y = x^{2k}$ зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає – на проміжку $(0; +\infty)$; за непарного $n = 2k + 1$ функція спадає на проміжках $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
6. Функція не має точок локального екстремуму.

Якщо $p = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то **степенева функція** $y = \sqrt[n]{x}$.

Функція $y = \sqrt[n]{x}$ обернена до степеневій функції $y = x^n$, тому її графік симетричний щодо бісектриси першого та третього координатних кутів: за непарного $n > 1$ його подано на рис. 5.8 а, за парного n – на рис. 5.8 б.

Властивості

1. Область визначення функції за парного $n = 2k$, а за непарного $n = 2k + 1$ $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

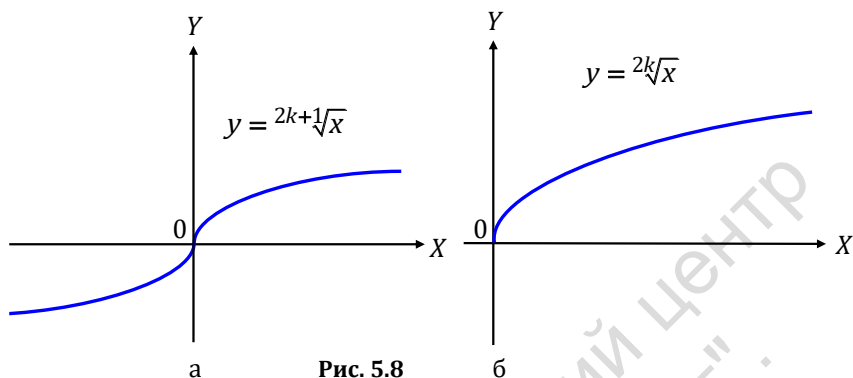


Рис. 5.8

2. Множина значень $E(y) = [0; +\infty)$ для парного $n = 2k$ та $E(y) = (-\infty; +\infty)$ – для непарного $n = 2k + 1$.

3. Функція ні парна, ні непарна за парного $n = 2k$, за непарного $n = 2k + 1$ функція непарна.

4. Функція неперіодична.

5. За парного $n = 2k$ функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$; за непарного $n = 2k + 1$ функція зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

6. Функція не має точок локального екстремуму.

Графік функції $y = x^{m/n}$, $x > 0$, $m, n \in \mathbf{Z}$ при $(m/n) > 1$ дотикається до осі OX . Якщо $0 < (m/n) < 1$, то $(n/m) > 1$, отже графік функції дотикається до осі OY . Якщо $(m/n) > 0$, то за необмеженого зростання x значення y також необмежено зростають.

Якщо $(m/n) < 0$, то за необмеженого зростання x значення y необмежено спадають, а за наближенні x до нуля значення y – необмежено зростають. При $x < 0$ функція $y = x^{m/n}$ визначена не для всіх x . Якщо ж вона визначена при $x < 0$, то вона або парна, або непарна, отже її графік при $x < 0$ можна дістати із її графіка при $x > 0$ за допомогою симетрії графіка функції $y = x^{m/n}$ (рис. 5.9).

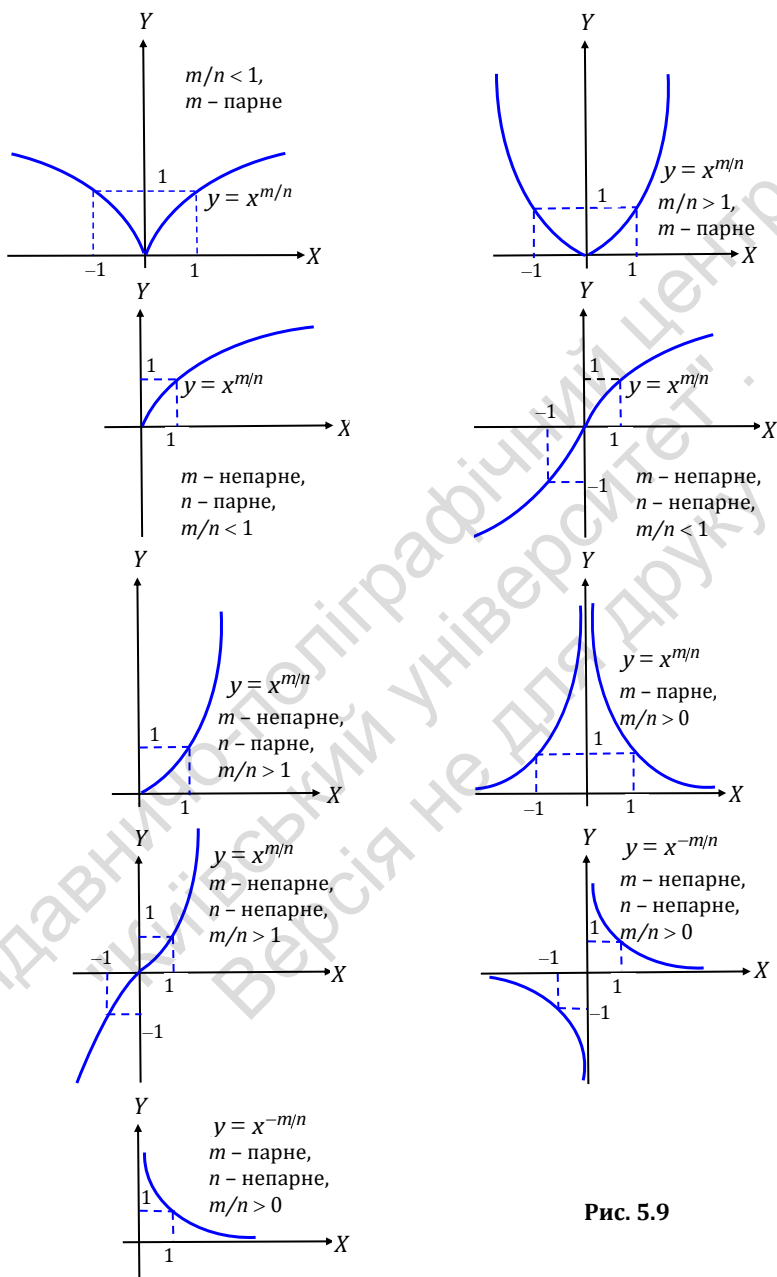


Рис. 5.9

5.2.4. Дробово-лінійна функція

Дробово-лінійна функція є відношенням двох лінійних функцій: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$.

Якщо $a = d = 0$, то при позначенні $b/c = k$ одержимо $y = k/x$, тобто обернено-пропорційну залежність.

Графік називають *гіперболою* (рис. 5.10 а-в).

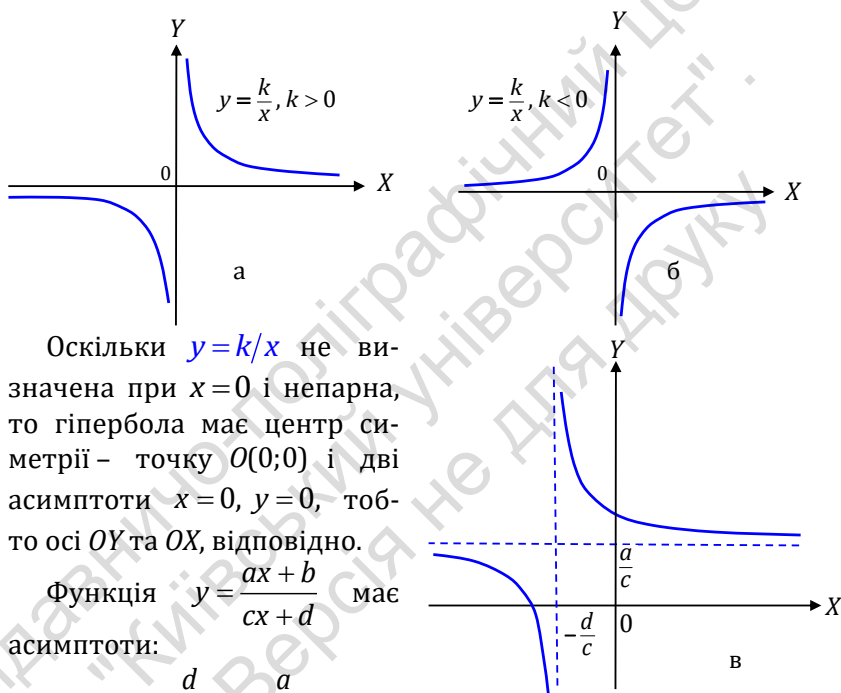


Рис. 5.10

Оскільки $y = k/x$ не визначена при $x=0$ і непарна, то гіпербола має центр симетрії – точку $O(0;0)$ і дві асимптоти $x=0$, $y=0$, тобто осі OY та OX , відповідно.

Функція $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ має асимптоти:

$$x_0 = -\frac{d}{c}, y_0 = \frac{a}{c}.$$

$$\text{Оскільки } \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}},$$

то графік дробово-лінійної функції можна дістати паралельним перенесенням $r\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ із графіка функції $y = \frac{k}{x}$, де

$k = \frac{bc - ad}{c^2}$ (паралельне перенесення – це перетворення, за якого графік зміщується в іншу точку, при цьому не повертаючись; рис. 5.10 в).

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$.
2. Множина значень $E(y) = (-\infty; y_0) \cup (y_0; +\infty)$.
3. Функція непарна при $a = 0, d = 0$; за всіх інших значень коефіцієнтів – ні парна, ні непарна.
4. Функція неперіодична.
5. Залежно від значень коефіцієнтів функція або спадає на проміжках $(-\infty; x_0)$ і $(x_0; +\infty)$, або зростає на проміжках $(-\infty; x_0)$ і $(x_0; +\infty)$.

5.2.5. Показникова функція

Показникова функція має вигляд: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Графіком функції $y = a^x$ є експоненційна крива (рис. 5.11 а, б).

Її ще називають експонентою.

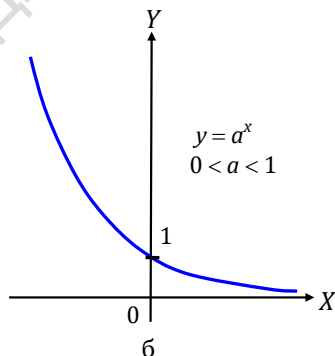
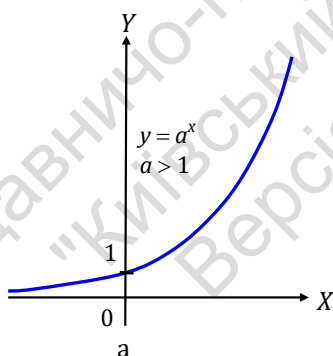


Рис. 5.11

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Множина значень $E(y) = (0; +\infty)$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Функція неперіодична.
5. При $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає, при $0 < a < 1$ – спадає.

6. Функція не має точок локального екстремуму.
 7. Вісь OX є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = a^x$ при $x \rightarrow +\infty$, якщо $0 < a < 1$ і при $x \rightarrow -\infty$, якщо $a > 1$.

5.2.6. Логарифмічна функція

Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ є оберненою до показникової функції $y = a^x$.

Графік $y = \log_a x$ можна одержати із графіка функції $y = a^x$ дзеркальним відображенням щодо бісектриси першого та третього координатних кутів – прямої $y = x$ (рис. 5.12 а–б).

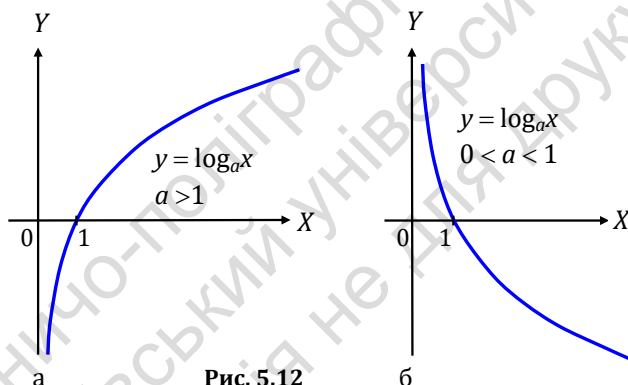


Рис. 5.12

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (0; +\infty)$.
2. Множина значень $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Функція неперіодична.
5. При $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає, при $0 < a < 1$ – спадає.
6. Функція не має точок локального екстремуму.
7. Вісь OY є вертикальною асимптотою графіка функції. Вісь OX перетинає графік функції $y = \log_a x$ у точці $x = 1$.

5.2.7. Тригонометричні функції

Для розгляду тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, введемо поняття синуса, косинуса кута на одиничному колі (рис. 5.13).

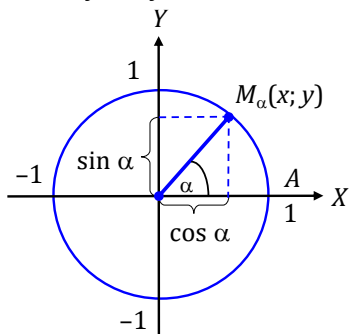


Рис. 5.13

Розглянемо одиничне коло із центром у точці $O(0;0)$ – так зване "тригонометричне коло". Горизонтальний радіус OA вважають нерухомим і розглядають як початковий для всіх кутів у колі. Кінцеву сторону цих кутів утворює радіус OM , який називають рухомим. Кожному дійсному числу α відповідає єдине положення рухомого радіуса OM_α (точки M_α на колі), який утворює кут в α радіан. Обернений зв'язок неоднозначний – кожному положенню радіуса OM_α (точки M_α на колі) відповідає нескінченна множина дійсних чисел α – величин усіх кутів, що визначені цим положенням рухомого радіуса OM_α . Усі ці числа містить формула $\alpha + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Означення. *Синусом* кута називають ординату у точки M_α рухомого радіуса одиничного кола $y = \sin \alpha$; *косинусом* – абсцису x точки M_α рухомого радіуса одиничного кола $x = \cos \alpha$; *тангенсом* кута $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; *котангенсом* кута $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Аналогічно вводять поняття косинуса, синуса, тангенса та котангенса числового аргументу, коли аргументом є число, що виражає радіанну міру кута. Оскільки кожному числу, що виражає радіанну міру кута, ставиться у відповідність ордината або абсциса точки на одиничному колі, таку відповідність називають функціями синуса або косинуса, відповідно.

Функцію $y = \operatorname{tg} x$ визначають як $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, а функцію $y = \operatorname{ctg} x$ – як $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Властивості

1. Областю визначення функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$ є вся числова пряма, а областю значень – проміжок $[-1; 1]$, що випливає із означення.

Областю визначення функції $y = \operatorname{ctgx}$ є множина всіх дійсних чисел, крім точок $(\pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а областю значень – проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Областю визначення функції $y = \operatorname{tgx}$ є множина всіх дійсних чисел, крім точок $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а областю значень – проміжок $(-\infty; +\infty)$.

2. Тригонометричні функції періодичні.

Функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ мають період 2π , а функції $y = \operatorname{tgx}$ та $y = \operatorname{ctgx}$ – період π .

3. Функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tgx}$ і $y = \operatorname{ctgx}$ непарні, а $y = \cos x$ – парна функція.

Для побудови графіків тригонометричних функцій достатньо побудувати графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ та графік $y = \operatorname{tgx}$ – на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$ і періодично продовжити.

Дослідимо функції $y = \sin x$ і $y = \operatorname{tgx}$ на зазначених проміжках.

4. Функція $y = \operatorname{tgx}$ на проміжку $(0; \pi)$ опукла вгору, а на проміжку $(\pi; 2\pi)$ – опукла вниз. Функція $y = \operatorname{tgx}$ опукла вниз на проміжку $(0; (\pi/2))$, а на проміжку $(-\pi/2; 0)$ – опукла вгору.

Із означення випливає, що функція $y = \sin x$ при $x \in (0; (\pi/2))$ зростає, набуваючи значень від 0 до 1, при $x \in ((\pi/2); (3\pi/2))$ – спадає від 1 до -1, при $x \in ((3\pi/2); 2\pi)$ зростає від -1 до 0. Графік, що називають **синусоїдою**, подано на рис. 5.14.

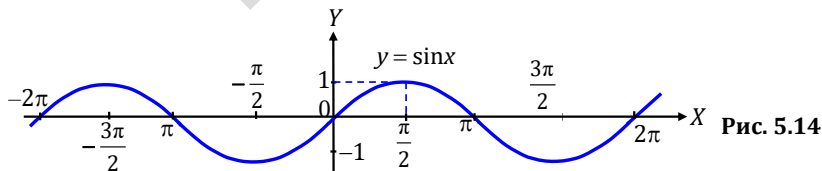


Рис. 5.14

Оскільки $y = \cos x = \sin(x + (\pi/2))$, то графіком функції $y = \cos x$ є синусоїда, що перенесена вздовж осі абсцис ліворуч на $(\pi/2)$ (рис. 5.15). Графік $y = \cos x$ називають **косинусоїдою**.

Функція $y = \operatorname{tg} x$ монотонно зростає на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ подано на рис. 5.16.

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ можна дістати із графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ за формулою зведення $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + (\pi/2))$, тому графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ можна дістати із графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ перенесенням уздовж осі OX ліворуч на $(\pi/2)$ одиниць із подальшим симетричним відображенням щодо осі OX (рис. 5.17).

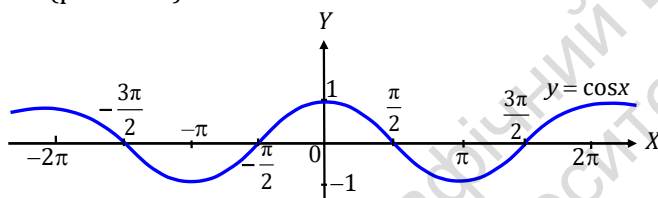


Рис. 5.15

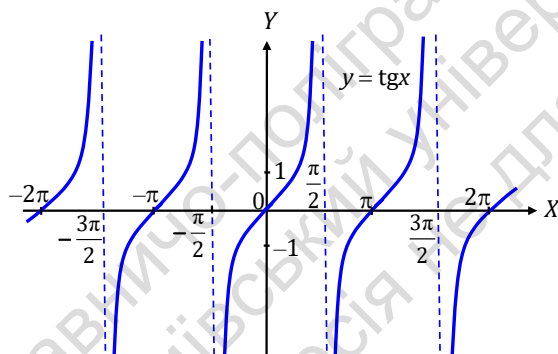


Рис. 5.16

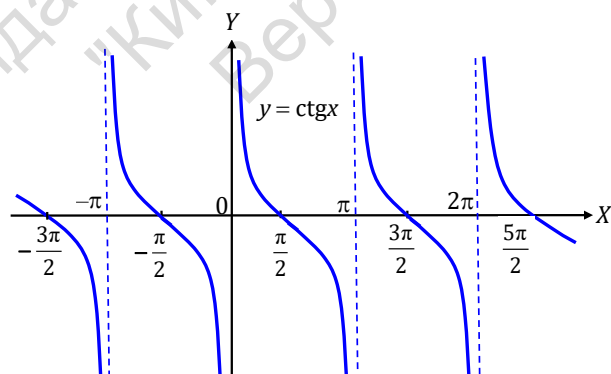


Рис. 5.17

5.2.8. Обернені тригонометричні функції

Усі тригонометричні функції, будучи періодичними, не є монотонними у всій області визначення. Звідси випливає, що функції, які обернені до тригонометричних, багатозначні. Для одержання однозначних гілок цих функцій необхідно взяти проміжки монотонності, на яких тригонометрична функція зростає або спадає, набуваючи при цьому всіх можливих для неї значень.

Розглянемо обернені функції для кожної із тригонометричних функцій окремо.

Функція $y = \arcsin x$

Якщо для функції $y = \sin x$ розглядати не всі значення аргументу x , а лише значення $x \in [-(\pi/2); \pi/2]$, то кожному значенню $y \in [-1; 1]$ відповідає лише одне значення x . Відповідно до загальної теорії існує обернена однозначна функція, що визначена на відрізку $[-1; 1]$ і монотонно зростає, набуваючи значень із відрізка $[-(\pi/2); \pi/2]$, її називають арксинусом і позначають $y = \arcsin x$.

Означення. *Арксинусом* числа x називають таку змінну величину y , яка набуває значень від $-\pi/2$ до $\pi/2$, синус якої дорівнює x .

Оскільки функції $y = \sin x$ та $y = \arcsin x$ взаємно обернені, то $\sin(\arcsin x) = x, |x| \leq 1$ і $\arcsin(\sin x) = x, |x| \leq \pi/2$.

Графік функції $y = \arcsin x$ є симетричним відображенням синусоїди, що взята з відрізка $[-(\pi/2); \pi/2]$, відносно прямої $y = x$ (див. рис. 5.18 а).

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = [-1; 1]$.
2. Множина значень $E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$.
3. Функція непарна: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4. Функція неперіодична.
5. Функція монотонно зростає, набуваючи значень від $-\pi/2$ до $\pi/2$.
6. Функція не має точок локального екстремуму.

Функція $y = \arccos x$

Розглянемо графік функції $y = \cos x$. Кожному значенню y із відрізка $[-1; 1]$ відповідає безліч значень x таких, що $\cos x = y$.

Якщо розглядати x лише з відрізка $[0; \pi]$, де функція $y = \cos x$ монотонно спадає та однозначна, то кожному значенню y ($-1 \leq y \leq 1$) відповідає лише одне значення x (позначимо його $x = \arccos y$) таке, що $\cos y = x$, тобто функцію $y = \arccos x$ на відріжку $[0; \pi]$ називають **арккосинусом** і позначають $x = \arccos y$.

Означення. Арккосинусом числа x називають таку змінну величину y , яка набуває значень від 0 до π , косинус якої дорівнює x , тобто:

$$\cos(\arccos x) = x, |x| \leq 1 \text{ та } \arccos(\cos x) = x, 0 \leq x \leq \pi.$$

Оскільки функція $y = \arccos x$ обернена до функції $y = \cos x$ на проміжку $[0; \pi]$, то її графік є симетричним відображенням косинусоїди, що взята на проміжку $[0; \pi]$, відносно прямої $y = x$ (рис. 5.18 б).

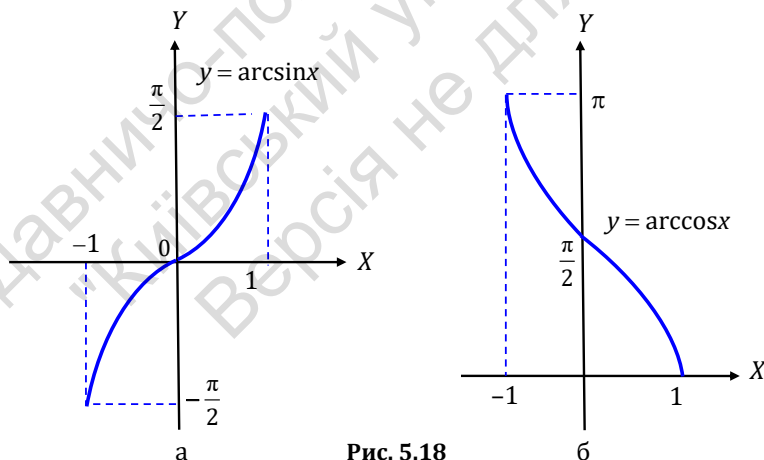


Рис. 5.18

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = [-1; 1]$.
2. Множина значень $E(y) = [0; \pi]$.

3. Функція загального вигляду, але справджується рівність $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

4. Функція неперіодична.

5. Функція монотонно спадає, набуваючи значень від π до 0.

6. Функція не має точок локального екстремуму.

Функція $y = \arctg x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$, на якому вона монотонно зростає та однозначна, тому для кожного значення y існує тільки одне значення x (позначимо його $x = \arctg y$) із проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$ таке, що $\operatorname{tg} x = y$. Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$ має обернену функцію, яку називають арктангенсом і позначають $x = \arctg y$. Змінимо позначення, помінявши місцями x та y .

Означення. Арктангенсом числа x називають таку змінну величину y , яка набуває значень із проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$, тангенс якої дорівнює x , тоді:

$$\operatorname{tg}(\arctg x) = x, x \in \mathbf{R} \text{ і } \arctg(\operatorname{tg} x) = x, |x| < \pi/2.$$

Графік функції $y = \arctg x$ утворюють за допомогою симетричного відображення графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $(-\pi/2; \pi/2)$ щодо прямої $y = x$ (рис. 5.19 а).

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множина значень $E(y) = (-\pi/2; \pi/2)$.

3. Функція непарна: $\arctg(-x) = -\arctg x$.

4. Функція неперіодична.

5. Функція монотонно зростає у всій області визначення.

6. Функція не має точок локального екстремуму.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, на якому вона монотонно спадає від $-\infty$ до ∞ та однозначна, тому для будь-якого значення y існує тільки одне x (позначатимемо його $x = \operatorname{ctg} y$) із проміжку $(0; \pi)$ таке, що $\operatorname{ctg} x = y$. Отже, функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ має обернену функцію. Функція

кцію, обернену до функції $y = \operatorname{ctgx}$ на проміжку $(0; \pi)$, називають арккотангенсом і позначають $x = \operatorname{arcctg} y$. Змінимо позначення, помінявши місцями x та y .

Означення. Арккотангенсом числа x називають таку змінну величину y , яка набуває значень із проміжку $(0; \pi)$, котангенс якої дорівнює x , при цьому:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in \mathbf{R} \text{ і } \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, 0 < x < \pi.$$

Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ утворюється із графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ симетричним відображенням щодо прямої $y = x$ (рис. 5.19 б).

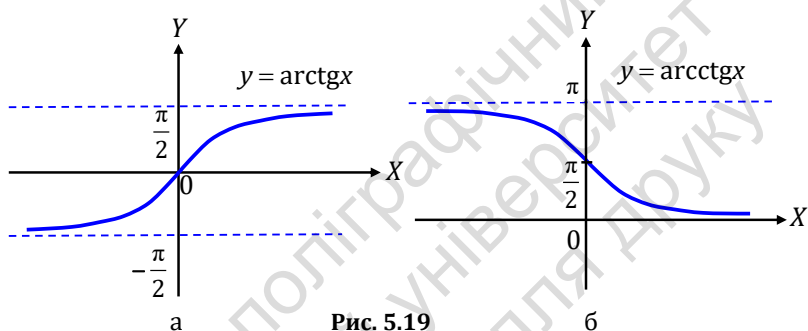


Рис. 5.19

Властивості

1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Множина значень $E(y) = (0; \pi)$.
3. Функція загального вигляду, й справджується рівність $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
4. Функція неперіодична.
5. Функція монотонно спадає у всій області визначення.
6. Функція не має точок локального екстремуму.

Крім того, мають місце рівності:

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \text{ та } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2.$$

Означення. Функції, що одержані з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій додавання, віднімання, множення, ділення та скінченного числа утворення складної функції, називають **елементарними функціями**.

Приклад 5.16. $y = \frac{\sqrt{x} \cdot \sin^2 x}{\sqrt[3]{x} + 5^{2x^3}} + \sqrt{\lg^3 x - 1}$ – елементарна функція,

а функції $y = |x|$, $y = [x]$ (ціла частина числа x) – неелементарні.

Класифікація функцій. Елементарні функції поділяють на алгебраїчні та неалгебраїчні (трансцендентні).

Означення. Алгебраїчною називають функцію, в якій над аргументом проводять скінченне число алгебраїчних дій.

До алгебраїчних функцій належать:

- **цілі раціональні (многочлени або поліноми):**

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n;$$

- **дробово-раціональні** – відношення двох многочленів:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m};$$

- **іраціональні** (якщо у складі операцій над аргументом є визначення арифметичного кореня).

Кожну неалгебраїчну функцію називають **трансцендентною**. До числа трансцендентних функцій належать показникові, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні.

5.3. Застосування функцій в економічній теорії

Функції широко застосовують в економічній теорії та практиці. Спектр функцій в економіці достатньо широкий: від лінійних до функцій, які можна дістати за певним алгоритмом за допомогою так званих рекурентних співвідношень, що пов'язують стани об'єктів у різні періоди часу.

Поряд із лінійними функціями використовують дробово-раціональні, степеневі, показникові, логарифмічні тощо.

Найчастіше в економіці використовують:

1. Функцію корисності (переваг) у широкому розумінні – це залежність корисності, тобто результату, ефекту деякої дії від рівня (інтенсивності) цієї дії.

2. Виробничу функцію – це залежність результату виробничої діяльності від факторів, що її зумовлюють.

3. Функцію випуску (окремий вид виробничої функції) – це залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів.

4. Функцію витрат (окремий вид виробничої функції) – це залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. Функцію попиту (споживання, пропозиції) – це залежність обсягу попиту (споживання, пропозиції) на окремі товари або послуги від різноманітних факторів (зокрема, ціни, доходу тощо).

Оскільки економічні явища та процеси зумовлені дією різноманітних факторів, то для їх дослідження широко використовують функції багатьох змінних, які розглянемо у розд. 8. Якщо дію побічних факторів можна знехтувати або вдається зафіксувати ці фактори на певних рівнях, то вплив одного головного фактора вивчають за допомогою функції однієї змінної.

Розглянемо приклади.

Приклад 5.17 (залежність попиту від доходу). Використовуючи залежності попиту на різні товари від доходу, можна встановити рівні доходів a_1 , a_2 , a_3 , за яких починається придбання тих або інших товарів і послуг, а також рівні (точки) насичення b_1 і b_2 для груп товарів першої та другої необхідності. Ці залежності описують функції Л. Торнквіста (рис. 5.20).

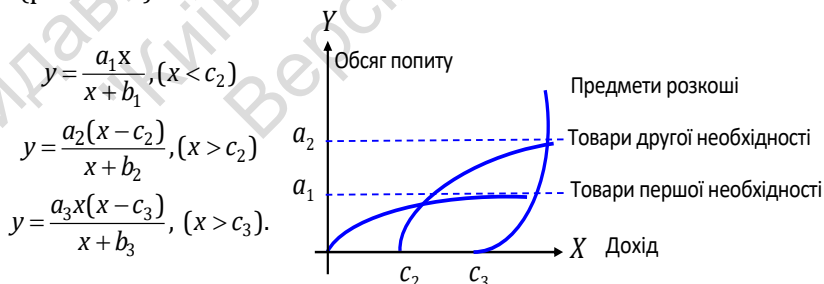


Рис. 5.20

Приклад 5.18 (залежність попиту та пропозиції від ціни). Розглядаючи в одній системі координат криві попиту та

пропозиції, можна встановити ринкову (рівноважну) ціну певного товару у процесі формування ціни в умовах конкурентного ринку (рис. 5.21). Приклад лінійних функцій попиту та пропозиції наведено у розд. 3.

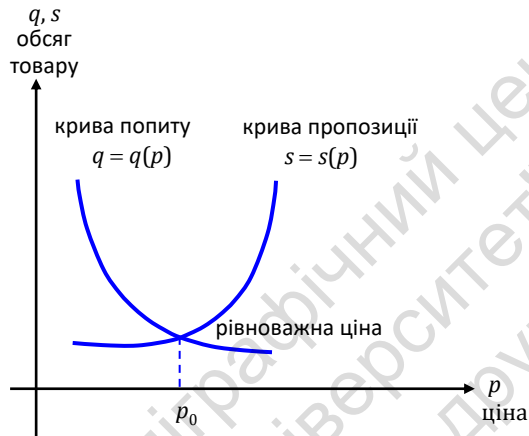


Рис. 5.21

Приклад 5.19 (функції споживання та лінії бюджетного обмеження). У теорії споживчого попиту на два товари x та y перевагу споживача описує **крива байдужості**:

$$U(x; y) = U_0$$

– лінія, уздовж якої корисність двох товарів x та y однакова, і розглядають бюджетні обмеження (витрати споживача не перевищують його дохід). У випадку, за якого споживач витрачає весь свій дохід на ці товари, маємо **лінію бюджетного обмеження**.

Розглянемо простий випадок функції корисності:

$$U(x; y) = xy.$$

Для рівня корисності (добробуту) U_0 лінією бюджетного обмеження є $p_x x + p_y y = D$, де p_x і p_y – відповідні ціни товарів, D – дохід споживача. Будуємо графіки функцій:

$$y = U_0/x, y = (D/p_y) - (p_x/p_y)x.$$

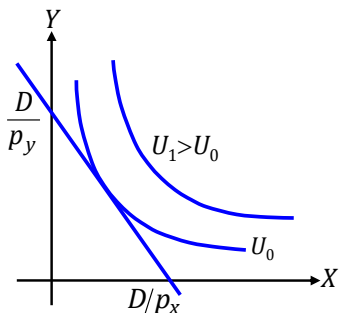


Рис. 5.22

Графіком першої функції (кривої байдужості) є гіпербола, а графіком другої (лінії бюджетного обмеження) – пряма (рис. 5.22).

Приклад 5.20 (залежність витрат і доходу від обсягу виробництва). При розгляді функції витрат (повних) $C = C(x)$ і доходу фірми $R(x) = px$, можна знайти залежність прибутку

$\Pi(x) = R(x) - C(x)$ від обсягу виробництва x . У типовому випадку витрати виробництва фірми є великими за невеликого обсягу виробництва та спочатку зростають швидше за дохід. Зі збільшенням обсягу виробництва швидкість зростання витрат зменшується, у деякий момент вони дорівнюють доходу, і фірма починає одержувати прибуток. За збільшення обсягу виробництва прибуток збільшується, досягаючи максимального значення. За подальшого збільшення обсягу виробництва витрати знову починають зростати швидше за дохід (вичерпані ресурси, необхідність додаткових приміщень, сировини, кваліфікованої робочої сили), і прибуток фірми зменшується, досягаючи від'ємних значень за достатньо великих обсягів виробництва. Типові графіки доходу, витрат і прибутку подано на рис. 5.23. Їм можуть відповідати, наприклад, функції:

$$R(x) = ax - bx^2,$$

$$C(x) = cx - dx^2 + ex^3,$$

де $a, b, c, d, e > 0$.

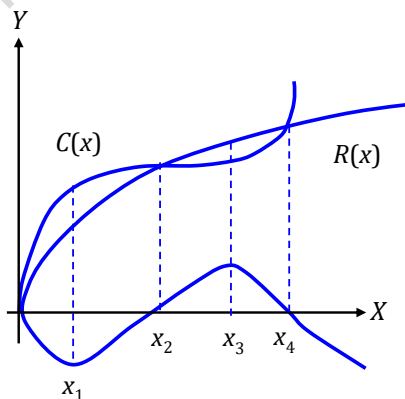


Рис. 5.23

Рівні обсягу виробництва, за яких останнє:

- є збитковим, становить $0 < x < x_2, x > x_4$;
- приносить прибуток, становить $x_2 < x < x_4$;

• дає максимальний прибуток при $x = x_3$ і максимальні збитки при $x = x_1$, а також дозволяє визначити розміри цих збитків і прибутків.

5.4. Границя функції

5.4.1. Означення границі функції у точці

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай $x_0 \in (a; b)$ і функцію $y = f(x)$ визначено на інтервалі $(a; b)$, за винятком точки x_0 .

Означення (Гейне). Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ у точці x_0 , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності значень аргументу, усі елементи якої відмінні від x_0 , відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A . Символічно записують так:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\}: x_n \rightarrow x_0, \quad n \rightarrow \infty \quad x_n \neq x_0: \\ \{f(x_n)\} \rightarrow A, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

Сформулюємо інше означення, що є еквівалентним попередньому.

Означення (Коші). Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх x із δ -околу точки x_0 , тобто таких, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконуватиметься нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(y): \\ 0 < |x - x_0| < \delta: |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Перше означення границі називають "мовою послідовностей" (*границя функції за Гейне*); друге означення – "мовою ε - δ " (*границя функції за Коші*).

ТЕОРЕМА

Перше та друге означення границі функції у точці еквівалентні.

Сенс означення границі функції $y = f(x)$ у точці x_0 полягає в тому, що для всіх значень x із області визначення функції, достатньо близьких до x_0 , значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A (за абсолютною величиною).

Розглянемо **геометричний зміст** границі функції у точці.

Нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям:

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \quad \text{або} \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Якщо розглянути границю функції $y = f(x)$ (рис. 5.24), то $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ відповідає розміщенню частини графіка у смузі шириною 2ε для всіх x із δ -околу точки x_0 , тобто таких, що $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

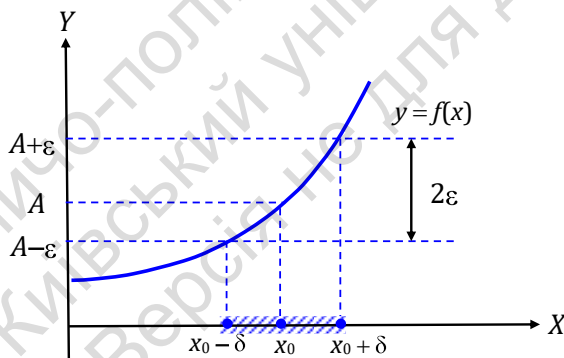


Рис. 5.24

Число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий δ -окіл точки x_0 , що для всіх $x \neq x_0$ із δ -околу точки x_0 відповідні ординати графіка функції $y = f(x)$ лежать у смузі $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, якою б вузькою вона не була.

Приклад 5.21. Нехай $f(x) = x^2$. Користуючись означенням границі функції за Коші, довести, що $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне додатне число. Потрібно довести, що можна дібрати таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - 2| < \delta$, виконуватиметься нерівність $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Якщо $0 < |x - 2| < \delta$, то $|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4$ та $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \delta(\delta + 4)$.

Для виконання нерівності $|x^2 - 4| < \varepsilon$ достатньо покласти, що $\varepsilon = \delta \cdot (\delta + 4)$, тобто $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$, звідки $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$ (другий корінь $\delta = -2 - \sqrt{4 + \varepsilon}$ відкидаємо, оскільки $\delta > 0$).

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 > 0$, що із нерівності $|x - 2| < \delta$ випливає нерівність $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Отже, $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Приклад 5.22. Довести, що функція $f(x) = \sin(1/x)$ не має границі у точці $x_0 = 0$.

Зазначимо, що точка $x_0 = 0$ не належить до області визначення функції. Візьмемо дві різні послідовності точок, що збігаються до точки $x_0 = 0$:

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi n}, \quad x_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi n + (\pi/2)} = \frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

Тоді відповідні послідовності значень функції:

$$f(x_n^{(1)}) = \sin(2\pi n) = 0, \quad \text{а} \quad f(x_n^{(2)}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi n = 1.$$

Таким чином, для двох різних послідовностей значень аргументу, які збігаються до нуля, відповідні послідовності значень функції мають різні границі. Отже, із означення границі функції за Гейне випливає, що функція не має границі у точці $x_0 = 0$.

Означення. *Границею функції* $y = f(x)$ на $+\infty$ або $-\infty$ є число

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 \forall x: x > x_0, x > \Delta: |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 \forall x: x > x_0, x < \Delta: |f(x) - A| < \varepsilon.$$

5.4.2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення. Функцію $y = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою** при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0. \quad (5.3)$$

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно великою** при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \quad (5.4)$$

Існує тісний зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими функціями.

ТЕОРЕМА

(зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих функцій)

Якщо при $x \rightarrow x_0$ функція $y = \alpha(x)$ нескінченно мала, то функція $y = f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ нескінченно велика при $x \rightarrow x_0$, і навпаки, якщо при $x \rightarrow x_0$ функція $y = f(x)$ нескінченно велика, то функція $y = f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$.

ТЕОРЕМА

(критерій існування скінченної границі)

Для функції $y = f(x)$ існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

тоді й тільки тоді, коли функцію $y = f(x)$ можна подати у вигляді суми $f(x) = A + \alpha(x)$, де

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0. \quad (5.5)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A$. Тоді за

означенням границі:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Таким чином для функції $\alpha(x) = f(x) - A$ виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Отже, $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Достатність. Нехай виконується рівність (5.5).

Перейдемо до границі при $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A + 0 = A,$$

що й треба було довести.

5.4.3. Властивості та порівняння нескінченно малих функцій

1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

2. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є функція нескінченно мала.

3. Добуток нескінченно малої функції на константу є функція нескінченно мала.

4. Добутком скінченного числа нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

5. Часткою від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є функція нескінченно мала.

При дослідженні функцій часто доводиться мати справу не з однією, а з кількома нескінченно малими функціями.

Для їх порівняння досліджують частку цих функцій: $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Означення. Нехай $y = \alpha(x)$ та $y = \beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тоді:

1. Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, де число $A \neq 0, A \neq 1$, то функції $y = \alpha(x)$ та $y = \beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку** при $x \rightarrow x_0$;

2. Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функції $y = \alpha(x)$ та $y = \beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими** при $x \rightarrow x_0$;

Запис $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow x_0$ означає, що функції $y = \alpha(x)$ та $y = \beta(x)$ – еквівалентні нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$;

3. Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функцію $y = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою вищого порядку, порівняно із функцією**

$y = \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$. У цьому випадку використовують символ o ("о мале"), тобто $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

4. Нескінченно малу функцію $y = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою порядку k , порівняно із нескінченно малою функцією $y = \beta(x)$** , якщо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = A, \text{ де число } A \neq 0.$$

5.4.4. Односторонні границі

Означення. Число A називають **правою (лівою) границею функції $y = f(x)$** у точці x_0 , якщо для довільної збіжної послідовності $\{x_n\}$ такої, що $x_n > x_0$ ($x_n < x_0$), $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$ відповідна послідовність значень функції $f(x_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Для правої (лівої) границі функції використовують записи:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \quad \left(A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \right).$$

Можна дати означення односторонніх границь "мовою ε - δ ".

Означення. Число A називають **правою (лівою) границею функції $y = f(x)$** у точці x_0 , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, коли для всіх x таких, що $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) виконується нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Приклад 5.23. Для функції

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

у точці $x = 0$ обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0 - 0} \text{sign}(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \text{sign}(x) = 1.$$

Графік функції подано на рис. 5.25.

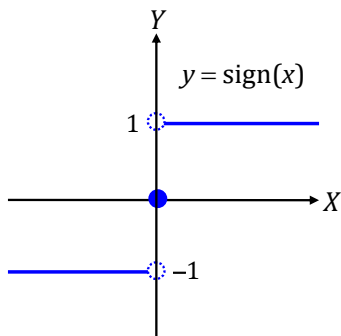


Рис. 5.25

ТЕОРЕМА

(зв'язок між односторонніми границями та границею функції)

Функція $y = f(x)$ має у точці x_0 границю тоді й тільки тоді, коли у цій точці існують права та ліва рівні границі.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A.$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Тоді за означенням $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta: |f(x) - A| < \varepsilon$.

Отже при $x_0 - \delta < x < x_0$ і при $x_0 < x < x_0 + \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Відповідно до означення односторонніх границь: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

Достатність. Нехай у функції $y = f(x)$ існують односторонні границі у точці x_0 і дорівнюють A . Тоді для довільного $\varepsilon > 0$:

$$\exists \delta_1 > 0 \forall x: x_0 - \delta_1 < x < x_0: |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 > 0 \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta_2: |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Виберемо $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Тоді для всіх x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta: |f(x) - A| < \varepsilon$. А це означає, що $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

5.4.5. Основні теореми про границі

ТЕОРЕМА

Якщо функція $y = f(x)$ має границю A при $x \rightarrow x_0$, то ця границя єдина.

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що існують дві різні границі $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$ та

$A \neq B$. Тоді за теоремою про зв'язок між границями та нескінченно малими функціями (5.5) маємо $f(x) = A + \alpha(x)$ та $f(x) = B + \beta(x)$, де функції $y = \alpha(x)$ та $y = \beta(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$. Віднімемо почленно рівності $0 = A - B + (\alpha(x) - \beta(x))$. Функція $y = (\alpha(x) - \beta(x))$ - нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$. Отже, $A = B$. Теорему доведено.

ТЕОРЕМА (арифметичні дії із границями)

Нехай існують скінченні границі у точці x_0 функцій $y = f(x)$

та $y = g(x)$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, тоді:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \quad (5.6)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B; \quad (5.7)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}; B \neq 0. \quad (5.8)$$

Доведення здійснимо так, як, наприклад, п. 2.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, то на підставі тео-

реми про зв'язок нескінченно малих із границями функцій (5.5) маємо $f(x) = A + \alpha(x)$ та $g(x) = B + \beta(x)$, де функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$ і добуток функцій:

$$f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = A \cdot B + A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x).$$

Функції $A \cdot \alpha(x)$, $B \cdot \alpha(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$. Отже, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$.

Пункти 1) і 3) пропонуємо довести самостійно.

Наслідки:

$$1. \text{ Для довільного } C \quad \lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (5.9)$$

$$2. \text{ Для довільного } m \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^m = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^m. \quad (5.10)$$

$$3. \text{ Для довільного } k \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}. \quad (5.11)$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}. \quad (5.12)$$

ТЕОРЕМА (про три функції)

Якщо у деякому околі точки x_0

виконується нерівність $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$,

причому $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Доведення. Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$. Тоді за означенням:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta: |\varphi(x) - A| < \varepsilon$ та $|\psi(x) - A| < \varepsilon$ або

$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon$ та $A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon$.

$A - \varepsilon < \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) < A + \varepsilon; |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Розглянемо приклади обчислення границь функцій.

Приклад 5.24. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - 6x + 7) = 5 - 6 + 7 = 6; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} (3x)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x)^{\lim_{x \rightarrow 2} x^2} = 6^4; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = \sin(\pi/2) = 1.$$

Отже, у простих випадках обчислення границь зводиться до підстановки до заданого виразу граничного значення аргументу. Але часто підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначеностей вигляду $0/0$; ∞/∞ ; $0 \cdot \infty$; 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞ ; $\infty - \infty$.

Приклад 5.25.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x} = \frac{-1}{2}.$$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники та скоротивши дріб, отримаємо результат.

$$\text{Приклад 5.26.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - (1/x)}{1 + (10/x^2)} = 2.$$

Поділимо чисельник і знаменник на x^2 , і до нового дробу застосуємо теорему про арифметичні дії із границями, урахувавши, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Приклад 5.27.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - 1}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 5.28.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0.\end{aligned}$$

У прикладах 5.27 і 5.28 необхідно помножити та поділити ірраціональні вирази на спряжені вирази.

5.4.6. Перша визначна границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (5.13)$$

Для доведення (5.13) розглянемо коло радіуса 1 із центром у точці O (рис. 5.26). Нехай OB – рухомий радіус, що утворює кут x $0 < x < (\pi/2)$ із віссю OX .

Із рисунку видно, що:

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект}AOB} < S_{\triangle AOC}.$$

Обчислимо:

$$S_{\triangle AOB} = (1/2)OA \cdot BD = (1/2) \cdot 1 \cdot \sin x;$$

$$S_{\text{сект}AOB} = (1/2)x \text{ і } S_{\triangle AOC} = (1/2)OA \cdot AC = (1/2) \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x.$$

Отже, $(1/2)\sin x < (1/2)x < (1/2)\operatorname{tg} x$. Поділимо на $(1/2)\sin x > 0$:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Оскільки функції $\cos x$ і $\frac{\sin x}{x}$ – парні, то одержана нерівність справедлива й при $-(\pi/2) < x < 0$. Перейдемо до границі при $x \rightarrow 0$ і дістанемо: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Тому за теоремою

про три функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Розглянемо приклади обчислення границі функцій.

Приклад 5.29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \frac{6}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2}.$

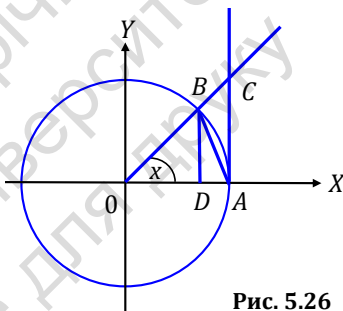


Рис. 5.26

Приклад 5.30.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Наслідки:

1.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}. \quad (5.14)$$

Дійсно,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{bx} \cdot \frac{bx}{\sin bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx} = \frac{a}{b}. \quad (5.15)$$

Дійсно,
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\cos ax \cdot bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{1}{\cos ax} \cdot \frac{ax}{bx} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos ax} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \frac{a}{b}. \quad (5.16)$$

Дійсно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} ax = t, \quad t \rightarrow 0 \\ ax = \operatorname{tg} t, \quad x = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{tg} t \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{b \cdot (1/a) \operatorname{tg} t} = \frac{a}{b}.$$

5.4.7. Друга визначна границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e. \quad (5.17)$$

Доведення. Припустимо, що при $x > 0$, $x \rightarrow \infty$. Для будь-якого x знайдеться натуральне число n таке, що $n < x < n+1$, тоді:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \quad \text{або} \quad 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Якщо велике число піднести до великого степеня, нерівність тільки підсилиться. Дістанемо:

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n.$$

Обчислимо границі:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.\end{aligned}$$

За теоремою про три функції маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Нехай $x < 0$, $x \rightarrow -\infty$. Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left| \begin{matrix} x = -1 - y \\ y = -x - 1 \\ y \rightarrow +\infty \end{matrix} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-1 - y}\right)^{-1 - y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{-y}{-1 - y}\right)^{-1 - y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y + 1}\right)^{-1 - y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + y}{y}\right)^{1 + y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Якщо зробити заміну $(1/x) = t$, то при $x < 0$, $x \rightarrow -\infty$ дістанемо:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e. \quad (5.18)$$

Наслідки:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (5.19)$$

Дійсно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a > 0, a \neq 1. \quad (5.20)$$

Дійсно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{\ln a} = \log_a e$.

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (5.21)$$

Дійсно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{\substack{y = e^x - 1 \\ x = \ln(1+y)}} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0. \quad (5.22)$$

Дійсно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a.$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.23)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{\substack{(1+x)^\alpha - 1 = y \\ (1+x)^\alpha = 1+y \\ \alpha \ln(1+x) = \ln(1+y) \\ \frac{\alpha \ln(1+x)}{\ln(1+x)} = 1}} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{y}{x} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{\ln(1+y)} = \\ &= \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha. \end{aligned}$$

Із (5.23) випливає, що

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}. \quad (5.24)$$

5.4.8. Границя показниково-степеневі функції

Розглянемо методи знаходження границь показниково-степеневі функції:

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Нехай існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Тоді

існує границя показниково-степеневі функції $y = f(x)^{g(x)}$, причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$. Використовуючи основну логарифмічну тотожність, можна записати функцію $y = f(x)^{g(x)}$ так:

$$y = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x) \cdot g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

У силу неперервності показникової і логарифмічної функцій маємо: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{B \ln A} = A^B$, тобто:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = A^B. \quad (5.25)$$

Формулу (5.25) застосовують, коли потрібно розкрити невизначеності типу 0^0 , ∞^0 і 1^∞ .

Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, тоді із (5.25) маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left((1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right)^{(f(x) - 1)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - 1)g(x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - 1)g(x)}. \quad (5.26)$$

Приклад 5.31. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$.

У нашому випадку:

$$f(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right), \quad g(x) = x^2 \text{ і } (f(x) - 1)g(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2}.$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 2}} = e^3.$$

Приклад 5.32. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Використовуючи формулу (5.25), дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x/\operatorname{tg} x)^2} = e.$$

5.5. Неперервність функції

5.5.1. Основні поняття

Означення. Функцію $y = f(x)$, що визначена в деякому околі точки x_0 , називають **неперервною** у точці x_0 , якщо існує скінченна границя функції та її значення у цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (5.27)$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, то (5.27) запишемо у вигляді:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} (x)\right). \quad (5.28)$$

Отже, для неперервної функції можна міняти місцями знаки функції і границі.

Величину $\Delta x = x - x_0$ називають **приростом аргументу**, а величину $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – **приростом функції** у точці x_0 .

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною** у точці x_0 , якщо її приріст у цій точці – нескінченно мала функція при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (5.29)$$

Саме це означення найчастіше використовують на практиці.

Приклад 5.33. Довести за означенням, що функція $y = \sin x$ неперервна у будь-якій точці $x_0 \in \mathbf{R}$.

Якщо надати приросту аргументу Δx , то функція дістане приросту:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = \\ &= 2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$. Отже, функція $y = \sin x$ є неперервною у кожній точці $x_0 \in \mathbf{R}$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною на проміжку $(a; b)$** , якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною у точці x_0 справа (зліва)**, якщо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) &= f(x_0 + 0) = f(x_0). \\ \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) &= f(x_0 - 0) = f(x_0) \right). \end{aligned}$$

Для неперервності функції $y = f(x)$ у точці x_0 необхідно та достатньо, щоб виконувались такі умови:

- 1) існує значення $f(x_0)$;
- 2) існує скінченна ліва границя $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$;
- 3) існує скінченна права границя $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$;
- 4) односторонні границі рівні та дорівнюють значенню функції у цій точці:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Якщо виконуються ці умови, то точку x_0 називають **точкою неперервності** функції $y = f(x)$.

Якщо щонайменше одну із цих умов порушено, то точку x_0 називають **точкою розриву** функції $y = f(x)$.

5.5.2. Класифікація точок розриву функції

Означення. Точку x_0 називають:

1) **точкою розриву першого роду**, якщо існують скінченні односторонні границі $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$, але вони не рівні:

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0).$$

2) **точкою усувного розриву** функції $y = f(x)$, якщо:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

3) **точкою розриву другого роду**, якщо у точці x_0 не існує або нескінченна щонайменше одна з односторонніх границь $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **розривною**, якщо вона має принаймні одну точку розриву.

5.5.3. Властивості неперервних функцій

Розглянемо основні властивості неперервних функцій, які впливають із означення неперервності та відповідних властивостей границі функції.

ТЕОРЕМА

Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ – неперервні у точці x_0 ,

то функції $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

(за умови $g(x_0) \neq 0$) також неперервні у цій точці.

Доведення теореми впливає із означення неперервності та теореми про арифметичні дії із границями функцій.

ТЕОРЕМА

(неперервність складної функції)

Нехай $y = f(g(x))$ – складна функція, де $y = f(u)$, а $u = g(x)$.

Якщо функція $u = g(x)$ – неперервна у точці x_0 ,

а $y = f(u)$ – у точці $u_0 = g(x_0)$,

то складна функція неперервна у точці x_0 .

Доведення. Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$. Унаслідок неперервності функції $u = g(x)$ послідовність $u_n = g(x_n) \rightarrow g(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Оскільки функція $y = f(u)$ неперервна у точці $u_0 = g(x_0)$, то $f(u_n) \rightarrow f(u_0)$ при $n \rightarrow \infty$, і це означає, що $f(g(x_n)) \rightarrow f(g(x_0))$ при $n \rightarrow \infty$.

Отже, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$.

Тоді за означенням функція $y = f(g(x))$ неперервна у точці x_0 . Теорему доведено.

Доведені теореми надають можливість установлення неперервності широкого класу функцій, зокрема неперервності у всіх точках своєї області визначення основних елементарних функцій:

$$y = x^n; y = a^x; y = \log_a x; y = \sin x; y = \cos x; y = \operatorname{tg} x; y = \operatorname{ctg} x; \\ y = \operatorname{arcsin} x; y = \operatorname{arccos} x; y = \operatorname{arctg} x; y = \operatorname{arccot} x.$$

Із цих теорем впливає наступний *наслідок*:

Функція, у виразі якої є скінченне число алгебраїчних дій і складних функцій (від функцій з основних елементарних функцій), є неперервною у всіх точках, в яких визначено всі елементарні функції, що її утворюють (за винятком, можливо, точок, де знаменники перетворюються на нуль).

Зокрема, всякий многочлен – функція неперервна в області дійсних чисел; дробово-раціональна функція (відношення двох многочленів) неперервна у всіх точках, в яких знаменник не дорівнює нулю.

Приклад 5.34. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = (\sin x)/x$ і встановити характер точок розриву.

Оскільки функції $y = \sin x$ та $y = x$ неперервні в усіх точках своїх областей визначення, то неперервною буде функція $y = (\sin x)/x$ в усіх точках, крім $x = 0$. У точці $x = 0$ функція не визначена, тому має розрив. Але існує $\lim_{x \rightarrow 0} ((\sin x)/x) = 1$, тому розрив у цій точці буде *усувний*. Якщо покласти $f(0) = 1$,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

то функція $y = F(x)$ буде неперервною у точці $x = 0$.

5.5.4. Економічна інтерпретація неперервності

Більшість функцій, які використовують в економіці, є неперервними. Наведемо приклади.

Приклад 5.35. Графік функції, що визначає податкову ставку N подано на рис. 5.27. Функція розривна та має розриви першого роду. Але сама величина прибуткового податку P є неперервною функцією річного доходу R (рис. 5.28).

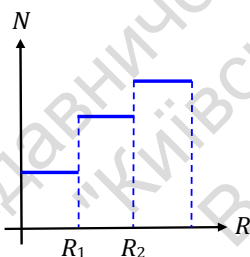


Рис. 5.27

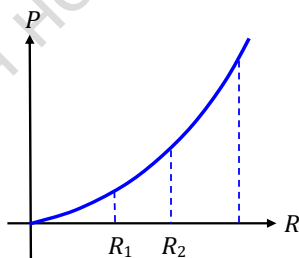


Рис. 5.28

Отже, якщо річні доходи двох осіб не дуже відрізняються, то різниця за величиною прибуткового податку, яку вони мають сплатити, також не має бути великою. Цікаво, що цю обставину більшість осіб сприймають як природну.

Якщо це не так, тобто результат не неперервно залежить від початкових даних, від параметрів, що характеризують економічну задачу, то таку задачу називають **некоректною**.

Приклад 5.36. За економічним змістом функції попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ неперервно залежать від ціни p . Отже за малих коливань цін попит і пропозиція також змінюються неперервно. За глибшого аналізу часто виявляють психологічні причини, через які, наприклад попит, може змінитися стрибкоподібно. Так буває, коли "пробивають" круглу ціну. Ціна підвищується деякий час, але люди "терплять" і попит зменшується незначно. І ось ціна завмерла біля "круглої" цифри. Коли ціна перевищує "круглу" цифру, може відбутися різне стрибкоподібне зменшення попиту. Це добре знають фінансисти, що працюють на валютних та інших фінансових ринках.

5.5.5. Властивості неперервних на відрізку функцій

Розглянемо важливі властивості функцій, що неперервні на відрізку $[a; b]$. При цьому розумітимемо, що функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна в усіх точках інтервалу $(a; b)$, а в самих точках a та b – неперервна справа та зліва, відповідно. Сформулюємо без доведення ці властивості у вигляді теорем, доведення яких за бажання можна знайти у класичних підручниках з вищої математики.

ТЕОРЕМА 1 (Вейєрштрасса)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Зауваження. Умова неперервності функції на відрізку $[a; b]$ є суттєвою. Неперервна на інтервалі $(a; b)$ функція не обов'язково обмежена на ньому. Наприклад, функція $y = 1/x$ неперервна на проміжку $(0; 1)$, але необмежена на проміжку $(0; 1)$ (рис. 5.29).

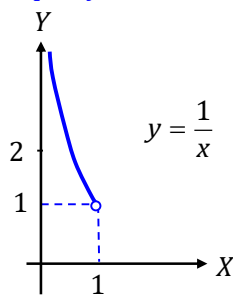


Рис. 5.29

ТЕОРЕМА 2 (Веєрштрасса)

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень.

Таким чином, існують точки c_1 і c_2 такі, що $c_1, c_2 \in [a; b]$, причому $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(c_1)$ $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(c_2)$.

Зауваження. На неперервній на проміжку $(a; b)$ функції друга теорема Веєрштрасса, загалом кажучи, не поширюється. Наприклад, функція $y = x$ неперервна на проміжку $(0; 1)$ та обмежена. Її значення мають точну верхню $M = 1$ та точну нижню $m = 0$ межі (рис. 5.30). Але функція не досягає найбільшого та найменшого значень. У теоремі 2 істотним є те, що $[a; b]$ – обмежена множина.

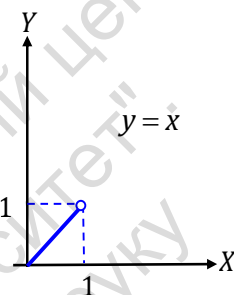


Рис. 5.30

ТЕОРЕМА 3 (Больцано–Коші)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває на кінцях цього відрізка значень різних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то всередині відрізка існує щонайменше одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f(c) = 0$.

Зауваження. Теорема має **геометричний зміст**: якщо функція на кінцях відрізка набуває значень різних знаків, то її графік обов'язково перетне вісь OX у деякій точці $c \in (a; b)$ (рис. 5.31-5.32).

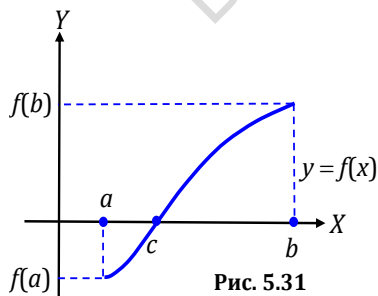


Рис. 5.31

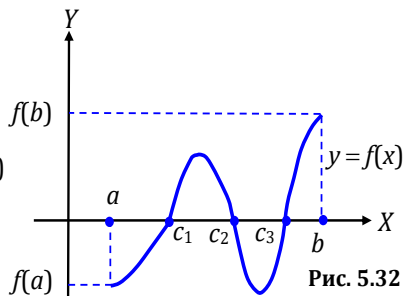


Рис. 5.32

Справедливим буде й наступне твердження, що узагальнює теорему 3.

ТЕОРЕМА 4 (Больцано–Коші)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває різних значень $f(a) = A$ та $f(b) = B$, причому $A \neq B$, то за будь-якого C ($A < C < B$) знайдеться щонайменше одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f(c) = C$.

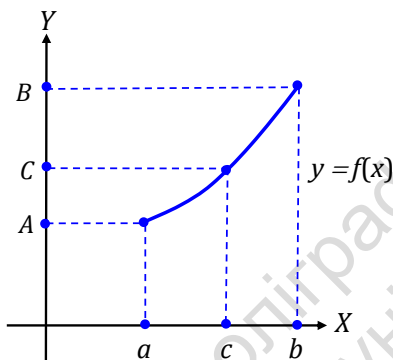


Рис. 5.33

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що при виконанні відповідних умов пряма $y = C$ перетинає графік функції $y = f(x)$ щонайменше в одній точці (рис. 5.33).

Наслідок. Множиною значень функції $y = f(x)$, що відмінна від сталої функції, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, є відрізок $[m; M]$, де

$$m = \min_{x \in [a; b]} f(x) \text{ та } M = \max_{x \in [a; b]} f(x).$$

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Що таке функція одного аргументу?
2. Що таке область визначення функції, що таке область її значень?

Приклад 1. Знайти область визначення функції:

$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin \frac{3x-1}{2}.$$

Перший доданок набуває дійсних значень при $1-2x \geq 0$, а другий – при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$.

Таким чином, для знаходження області визначення заданої функції потрібно розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 1 - 2x \geq 0, \\ 3x - 1 \leq 2, \\ 3x - 1 \geq -2, \end{cases} \begin{cases} x \leq 1/2, \\ x \leq 1, \\ x \geq -1/3. \end{cases}$$

Отже, областю визначення функції є відрізок $[-1/3; 1/2]$.

3. Як формулюють означення границі функції за Коші?

Приклад 2. Використовуючи означення Коші, довести, що:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Виберемо $E > 0$ – довільне. Тоді нерівність $\frac{1}{(x-1)^2} < E$ виконується, як тільки виконується нерівність $(x-1)^2 < \frac{1}{E}$ або $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}} = \delta(E)$. Звідси випливає, що:

$$\forall E > 0 \exists \delta = \frac{1}{\sqrt{E}} > 0 \forall x: 0 < |x-1| < \delta: \left| \frac{1}{(x-1)^2} \right| > E.$$

4. Як формулюють означення границі функції за Гейне?

5. Чи рівносильні означення границі за Гейне та за Коші?

Приклад 3 є цікавим, коли границі функції не існує загалом. Покажемо, що функція $y = \sin x$ при $x \rightarrow +\infty$ (або $x \rightarrow -\infty$) не має границі.

Легше за все це довести, використовуючи означення границі функції "мовою послідовностей" (за Гейне).

Розглянемо дві послідовності аргументів:

$$x_n = (2n - (1/2))\pi \text{ та } x_n^{(1)} = (2n + (1/2))\pi \\ \text{при } n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow +\infty, x_n^{(1)} \rightarrow +\infty.$$

Відповідні послідовності значень функції:

$$f(x_n) = \sin(2n - (1/2))\pi = -1, \quad f(x_n^{(1)}) = \sin(2n + (1/2))\pi = 1.$$

Отже, функція не має границі при $x \rightarrow \infty$.

Приклад 4. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1000}{2x^2 - x - 1}$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1000) = -1000$, $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x - 1) = -1 \neq 0$,

то за теоремою про арифметичні дії із границями дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1000}{2x^2 - x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1000)}{\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x - 1)} = \frac{-1000}{-1} = 1000.$$

6. Які типи невизначеностей існують при обчисленні границь?

Приклад 5. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

У цьому прикладі як чисельник, так і знаменник дробу при $x \rightarrow 3$ прямують до нуля, тобто має місце невизначеність $(0/0)$.

Тому, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2.$$

Приклад 6. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

У цьому прикладі при $x \rightarrow 1$ чисельник і знаменник функції нескінченно малі, тобто має місце невизначеність $(0/0)$.

Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу та обчислимо границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 7. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 5}{4x^3 - 2x + 1}$.

При $x \rightarrow \infty$ чисельник і знаменник є нескінченно великими, тобто має місце невизначеність (∞/∞) . Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник цього дробу на x^3 і до нового дробу застосуємо теорему про арифметичні дії із границями:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 5}{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{3 + 2\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - 5\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{4 - 2\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{3}{4},$$

оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ та $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Приклад 8. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^6} - 1}{x^6}$.

Тут має місце невизначеність $(0/0)$, для розкриття якої помножимо чисельник і знаменник на вираз, що спряжений до чисельника. Після цього скоротимо на x^6 , дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^6} - 1}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^6 - 1}{x^6 (\sqrt{1+x^6} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^6} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 9. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$.

Знову має місце невизначеність вигляду $(0/0)$. Помножимо чисельник і знаменник на неповний квадрат суми – вираз $\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2} \right)^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1 \right)$, тоді:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - 1}{x^2 \left(\left(\sqrt[3]{1+x^2} \right)^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2} \right)^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 10. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(x+m) \cdot (x+n)} - x \right)$.

Має місце невизначеність вигляду $(\infty - \infty)$. Помножимо та поділимо на спряжений вираз, дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(x+m) \cdot (x+n)} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+m) \cdot (x+n) - x^2}{\sqrt{(x+m) \cdot (x+n)} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+m) \cdot x + mn}{\sqrt{\left(1 + \frac{m}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{n}{x}\right)} + 1} = \frac{m+n}{2}. \end{aligned}$$

7. Яка перша визначна границі? Які наслідки цієї границі?

Приклад 11. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

При $x \rightarrow 0$ величина $\alpha = 2x \rightarrow 0$. Помножимо й поділимо чисельник і знаменник на 2 та застосуємо (5.13), дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Приклад 12. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(1/x)$.

У цьому прикладі при $x \rightarrow \infty$ величина $\alpha = (1/x) \rightarrow 0$, тому:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{(1/x)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Приклад 13. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$.

Оскільки справедлива формула $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, то користуючись (5.13), дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(5x/2)}{x^2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(5x/2)}{(5x/2)} \right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

8. Яка друга важлива границя? Які її наслідки?

Приклад 14. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Має місце невизначеність 1^∞ .

Оскільки $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$, то покладемо $\alpha = \operatorname{tg} x \rightarrow 0$, при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e.$$

9. Як обчислюють границю показниково-степеневої функції?

Приклад 15. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$.

У цьому прикладі границя основи дорівнює 1, а показник степені прямує до ∞ . Має місце невизначеність вигляду 1^∞ , для розкриття якої виділимо цілу частину у дробу:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Зробимо заміну:

$$\frac{2}{x-1} = \alpha,$$

тоді $x = \frac{2}{\alpha} + 1$, і при $x \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{(2/\alpha)+1} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{(2/\alpha)} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left((1+\alpha)^{1/\alpha} \right)^2 \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha) = e^2 \cdot 1 = e^2.\end{aligned}$$

Приклад 16. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{4^x - 1}$.

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x , тоді за формулами (5.22) і (5.8) дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{4^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7^x - 1}{x} : \frac{4^x - 1}{x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{x}} = \frac{\ln 7}{\ln 4}.$$

Приклад 17. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} x \lg \frac{5+x}{3+x}$.

Позначимо $y = 1/x$, тоді $x = 1/y$. Якщо $x \rightarrow \infty$, то $y \rightarrow 0$, тоді за (5.20) дістанемо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \lg \frac{5+x}{3+x} &= \lim_{y \rightarrow 0} (1/y) \lg \frac{5+(1/y)}{3+(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0} (1/y) \lg \frac{1+5y}{1+3y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1+5y) - \lg(1+3y)}{y} = 5 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1+5y)}{5y} - 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1+3y)}{3y} = \\ &= 5 \lg e - 3 \lg e = 2 \lg e.\end{aligned}$$

Приклад 18. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[k]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$.

Позначимо $x = 1 + y$, тоді $y = x - 1$. Якщо $x \rightarrow 1$, то $y \rightarrow 0$, тоді за (5.23) дістанемо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[k]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{1/k} - 1}{(1+y)^{1/m} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{(1+y)^{1/k} - 1}{y} : \frac{(1+y)^{1/m} - 1}{y} \right) = \\ &= \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{1/k} - 1}{y} \right) : \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{1/m} - 1}{y} \right) = \frac{1}{k} : \frac{1}{m} = \frac{m}{k}.\end{aligned}$$

10. Які функції називають нескінченно малими при $x \rightarrow x_0$?

11. Які функції називають нескінченно великими при $x \rightarrow x_0$?

12. Які нескінченно малі функції називають еквівалентними?

Запишемо основні еквівалентності при $\alpha(x) \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\sin \alpha(x) &\sim \alpha(x), & \operatorname{tg} \alpha(x) &\sim \alpha(x), \\ \arcsin \alpha(x) &\sim \alpha(x), & \operatorname{arctg} \alpha(x) &\sim \alpha(x), \\ e^{\alpha(x)} - 1 &\sim \alpha(x), & \ln(1 + \alpha(x)) &\sim \alpha(x).\end{aligned}$$

Приклад 19. Довести, що нескінченно малі при $x \rightarrow 0$ функції $\alpha(x) = \frac{x}{1-x}$ і $\beta(x) = \frac{x}{1+x^2}$ еквівалентні.

Обчислимо границю відношення цих функцій:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{1-x} = 1. \text{ Отже, } \frac{x}{1-x} \sim \frac{x}{1+x^2} \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Приклад 20. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x \ln(1+x)$ та $\beta(x) = x \sin x$ при $x \rightarrow 0$.

Обчислимо границю відношення цих функцій:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отже, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow 0$.

13. Які нескінченно малі функції називаються нескінченно малими одного порядку малості?

Приклад 21. Довести, що функції $\alpha(x) = \frac{8x^2}{1+x}$ та $\beta(x) = x^2$ при $x \rightarrow 0$ будуть нескінченно малими одного порядку.

Знайдемо границю відношення цих двох функцій:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8x^2}{1+x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{x^2 \cdot (1+x)} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 8 \neq 0.$$

Отже, задані функції є нескінченно малими одного порядку малості при $x \rightarrow 0$.

Приклад 22. Довести, що порядок функції $\alpha(x) = \frac{x^3}{7-x}$ вище, ніж порядок малості функції $\beta(x) = x^2$ при $x \rightarrow 0$.

Знайдемо границю відношення цих двох функцій:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{7-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 \cdot (7-x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{7-x} = 0,$$

тобто функція $y = \alpha(x)$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж функція $y = \beta(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Приклад 23. Довести, що функція $\alpha(x) = 1 - \cos x$ буде нескінченно малою другого порядку щодо функції $y = \beta(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x/2) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Далі обчислимо границю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже, функція $\alpha(x) = 1 - \cos x$ є нескінченно малою другого порядку щодо функції $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

Приклад 24. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \ln(1 + 3x \sin x)$ і $\beta(x) = \operatorname{tg} x^2$ при $x \rightarrow 0$.

Обчислимо границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

Замінімо чисельник і знаменник дробу еквівалентними:

$$\ln(1 + 3x \sin x) \sim 3x \sin x, \operatorname{tg} x^2 \sim x^2 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

За умови заміни нескінченно малих еквівалентними функціями границя відношення не змінюється, тому:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3.$$

14. Яку функцію називають неперервною, а яку – розривною?

15. Яка класифікація точок розриву функції?

16. Яку функцію називають неперервною у точці?

17. Які розриви може мати функція?

Приклад 25. Задано функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} \cdot x - 2, & \text{якщо } x \neq -2, \\ -2, & \text{якщо } x = -2. \end{cases}$$

Знайти точки розриву функції і встановити характер розриву.

Задану функцію визначено для всіх $x \in \mathbf{R}$.

Якщо $x > -2$, то $x + 2 > 0$, $|x + 2| = x + 2$ та $\frac{|x + 2|}{x + 2} = 1$. У цьому випадку $f(x) = \frac{|x + 2|}{x + 2} \cdot x - 2 = x - 2$. Тому для всіх $x > -2$ функція неперервна як многочлен першого степеня.

Аналогічно, якщо $x < -2$, $(x + 2) < 0$, $|x + 2| = -x - 2$, $\frac{|x + 2|}{x + 2} = -1$, то $f(x) = \frac{|x + 2|}{x + 2} \cdot x - 2 = -x - 2$ неперервна як многочлен першого степеня.

Розглянемо точку $x_0 = -2$.

Обчислимо односторонні границі при $x \rightarrow -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} (-x - 2) = 2 - 2 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} (x - 2) = -2 - 2 = -4.$$

Отже, односторонні границі функції $f(x)$ у точці $x_0 = -2$ існують, але не рівні, тому у цій точці функція має розрив першого роду (рис. 5.34):

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{при } x > -2, \\ -2 & \text{при } x = -2, \\ -x - 2 & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

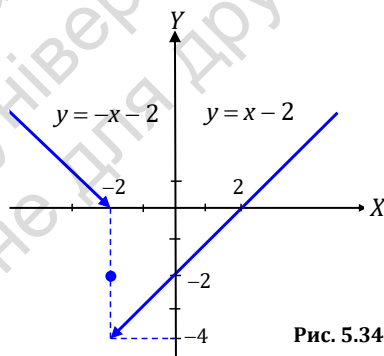


Рис. 5.34

Приклад 26. Задано функцію $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/(x-1)}}$.

Знайти точки розриву функції та встановити характер розриву. Її можна подати як складну функцію:

$$y = \frac{1}{1 + 2^u}, \text{ де } u = \frac{1}{x - 1}.$$

Оскільки $1 + 2^u > 0$, то функція $y = \frac{1}{1 + 2^u}$ неперервна для будь-якого u , а $u = \frac{1}{x - 1}$ – неперервна для всіх значень x , крім $x = 1$. Отже, задана складна функція неперервна для всіх $x \neq 1$.

Якщо $x \rightarrow 1-0$, то $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, $2^{1/(x-1)} \rightarrow 0$ (рис. 5.35, 5.36),
то $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}} = \frac{1}{1+0} = 1$.

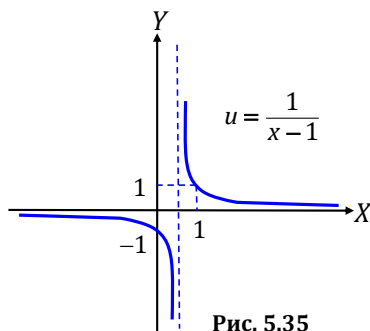


Рис. 5.35

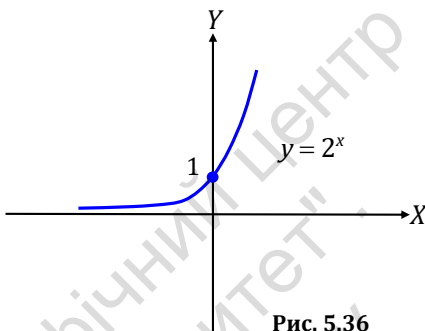


Рис. 5.36

Якщо $x \rightarrow 1+0$, то $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$, $2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty$, тому $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}} = 0$.

Отже, $f(1-0) \neq f(1+0)$.

Таким чином, односторонні границі існують, але не рівні, тому точка $x_0 = 1$ є точкою розриву першого роду (див. графік цієї функції на рис. 5.37).

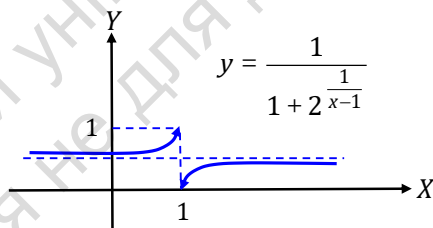


Рис. 5.37

Приклад 27. Задано функцію $f(x) = e^{1/(x+1)}$. Знайти точки розриву функції та встановити характер розриву.

Задана функція неперервна скрізь, крім точки $x = -1$. Для визначення характеру розриву обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} e^{1/(x+1)} = 0$$

(якщо $x \rightarrow -1-0$, то $1/(x+1) \rightarrow -\infty$, $e^{1/(x+1)} \rightarrow 0$);

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} e^{1/(x+1)} = +\infty$$

(якщо $x \rightarrow -1+0$, то $1/(x+1) \rightarrow +\infty$, $e^{1/(x+1)} \rightarrow +\infty$) (рис. 5.38, 5.39).

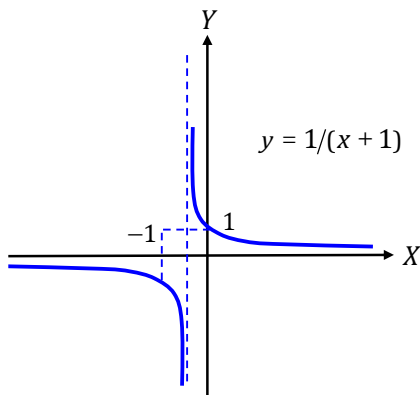


Рис. 5.38

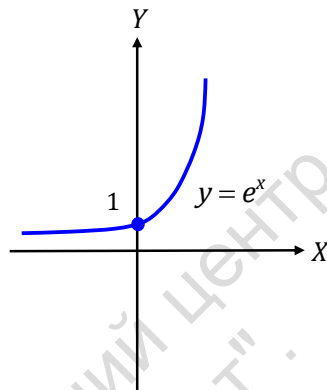


Рис. 5.39

Отже, точка $x_0 = -1$ є точкою розриву другого роду, оскільки права границя нескінченна (рис. 5.40).

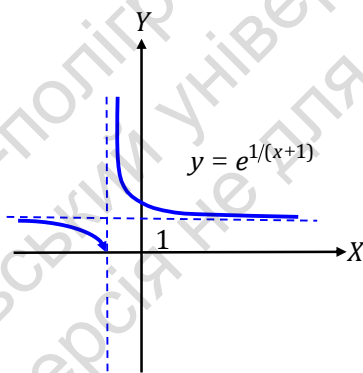


Рис. 5.40

Приклад 28. Задано функцію $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$. Знайти точки розриву функції та встановити характер розриву.

Задана функція є дробово-раціональною, тому вона неперервна у всіх точках, в яких знаменник відмінний від нуля. У точках $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ функція не визначена, тому вона розривна. Легко перевірити, що односторонні границі нескінченні (рис. 5.41, 5.42).

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x+2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

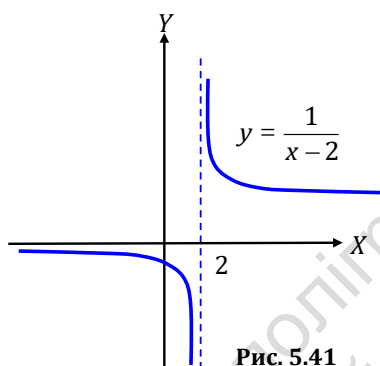


Рис. 5.41

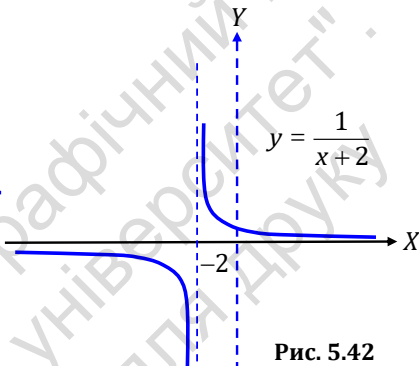


Рис. 5.42

Отже, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ - точки розриву другого роду (рис. 5.43).

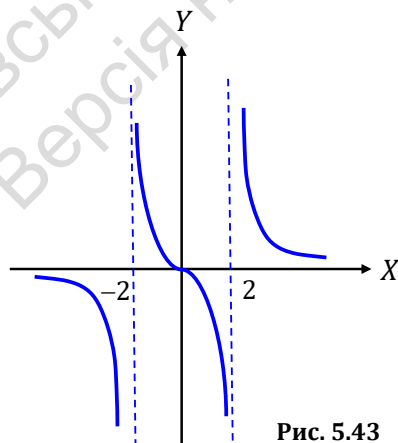


Рис. 5.43

Розділ 6

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення – математичний апарат, що широко застосовують для економічного аналізу. За економічного аналізу виникають питання: як зміниться дохід держави за збільшення податків або введення імпортного мита? Збільшиться чи зменшиться прибуток фірми за збільшення ціни на її продукцію? В економіці дуже часто потрібно знайти найкраще або оптимальне значення того чи іншого показника, наприклад, найвищу продуктивність праці, максимальний прибуток, мінімальні витрати тощо. Кожен показник являє собою функцію однієї або багатьох змінних. Подібні задачі породжують клас екстремальних задач в економіці, розв'язання яких потребує використання методів диференціального числення.

6.1. Похідна функції

6.1.1. Поняття похідної

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на деякому проміжку $X = (a; b)$ (можливо, нескінченному). Виберемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо приросту аргументу $\Delta x = x_1 - x_0$ так, щоб точка $x_1 = x_0 + \Delta x$ також належала проміжку X (рис. 6.1).

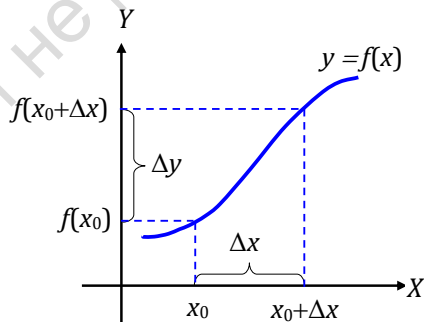


Рис. 6.1

Приріст аргументу $\Delta x = x_1 - x_0$. Очевидно $\Delta x > 0$, якщо $x_1 > x_0$ і $\Delta x < 0$, якщо $x_1 < x_0$. Тоді **приростом функції** буде:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення. Якщо існує границя відношення приросту функції у точці x_0 до приросту аргументу при $\Delta x \rightarrow 0$, то її називають **похідною функції** $y = f(x)$ у точці x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6.1)$$

Похідну позначають різними символами:

$$y'(x_0), y', f'(x_0), f'_x, \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{Відношення} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (6.2)$$

називають **диференціальним**.

У випадку, за якого границя диференціального відношення (6.2) не існує, вважають, що функція не має похідної у точці x_0 .

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну у кожній точці множини X , то похідна $y = f(x)$ також є функцією аргументу x , що визначена на проміжку X .

Приклад 6.1. Знайти похідну функцію $y = x^2$ у точці x_0 , використовуючи означення.

$$\begin{aligned} \text{Надамо приросту аргументу } \Delta x, \text{ тоді функція має приріст:} \\ \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \\ = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Знайдемо диференціальне відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

та його границю при $\Delta x \rightarrow 0$. Дістанемо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

$$\text{Отже, } f'(x_0) = 2x_0^2.$$

6.1.2. Задачі, що приводять до поняття похідної

Задача про дотичну

Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$ на заданому проміжку, що має похідну на ньому. Для з'ясування геометричного змісту похідної введемо означення дотичної до графіка функції у заданій точці.

Означення. Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 називають граничне положення січної M_0M_1 , коли точка M_1 прямує до точки M_0 за графіком $y = f(x)$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці $M_0(x_0; f(x_0))$.

Надамо приросту аргументу Δx і перейдемо за кривою $y = f(x)$ із точки $M_0(x_0; f(x_0))$ до точки

$$M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)).$$

Проведемо січну M_0M_1 (рис. 6.2).

Рівняння прямої, що проходить через точку M_0 , має вигляд:

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \Delta \varphi$, де $\Delta \varphi$ – кут нахилу січної M_0M_1 .

$$\text{У трикутнику } M_0PM_1: M_0P = \Delta x, M_1P = \Delta y, \operatorname{tg} \Delta \varphi = \frac{M_1P}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Нехай тепер $\Delta x \rightarrow 0$, тоді $M_1 \rightarrow M_0$, січна M_0M_1 прямує до дотичної, що проведена до графіка функції у точці M_0 . Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \operatorname{tg} \Delta \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

$$\text{Отже, } k = f'(x_0).$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст похідної**.

Похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, що проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$.

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (6.3)$$

Означення. Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику M_0 .

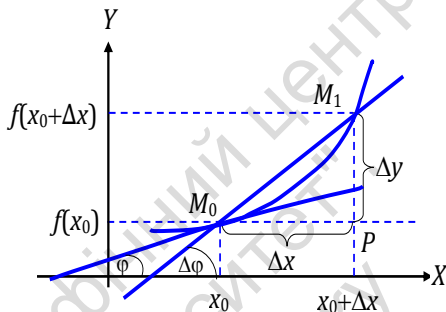


Рис. 6.2

Оскільки нормаль і дотична до графіка функції перпендикулярні та проходять через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, то їх кутові коефіцієнти k_1 і $k = f'(x_0)$ пов'язані співвідношенням $k_1 k = -1$. Знайдемо кутовий коефіцієнт нормалі:

$$k_1 = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Рівняння нормалі має вигляд:

(6.4)

Означення. Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ у точці їх перетину M_0 називають кут між дотичними, що проведені до цих кривих у заданій точці.

Використовуючи формулу обчислення кута між прямими (3.14), дістанемо **формулу обчислення кута між кривими**:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)} \right|. \quad (6.5)$$

Задача про миттєву швидкість

Розглянемо нерівномірний прямолінійний рух тіла, яке починає рух у момент часу t_0 . Нехай $S(t)$ – шлях, що проходить тіло за час t . Функцію $S = S(t)$ називають законом руху тіла. Тоді шлях, який пройде тіло за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$:

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0).$$

Середня швидкість руху V_c за проміжок часу Δt – це відношення:

$$V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t},$$

в якому легко впізнати диференціальне відношення.

Але середня швидкість дає лише наближене уявлення про рух в окремий момент часу. Оскільки тіло рухається нерівномірно, то на початку проміжку тіло могло рухатись прискорено, а наприкінці цього проміжку – уповільнено.

Миттєвою швидкістю руху $V(t_0)$ у момент часу t_0 називають границю диференціального відношення при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Ця рівність виражає **фізичний зміст похідної**: похідна від шляху за часом $S'(t_0)$ дорівнює миттєвій швидкості у момент часу t_0 тіла, що рухається за законом $S = S(t)$:

$$V(t_0) = S'(t_0). \quad (6.6)$$

Задача про продуктивність праці

Розглянемо **однофакторну** або **одноресурсну виробничу функцію** $u = u(x)$, яка виражає обсяг продукції, що випускають за одиницю часу t залежно від обсягу x витраченого ресурсу. Цей ресурс часто позначає кількість людської праці, що виражена в людино-годинах або в кількості співробітників, що зайняті у виробництві. Нехай x_0 – кількість співробітників фірми.

Виробнича функція має похідну, тобто існує границя:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0),$$

де $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ – приріст обсягу продукції, яку випустила фірма. Тут Δx – кількість нових робочих місць.

У цьому випадку $u'(x_0)$ – **додаткова продукція**, яку випускають нові співробітники фірми за одиницю часу.

Нехай p – ціна одиниці продукції за одиницю часу, а z – зарплата співробітника. Якщо $pu'(x_0) > z$, то необхідно найняти ще одного співробітника, оскільки він приносить фірмі більше, ніж вона йому платить. Це правило, яке називають **золотим правилом економіки**, має універсальний характер.

У ситуації, яку ми розглядаємо, похідну виробничої функції у точці x_0 в економіці називають **граничною продуктивністю праці**.

Нехай тепер виробнича функція $u = u(t)$ виражає обсяг виробленої продукції u за час t . Необхідно знайти продуктивність праці в момент часу t_0 . За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість продукції зміниться від $u(t_0)$ до $u(t_0 + \Delta t)$. Тоді $\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$.

Середня продуктивність праці за період часу Δt становить:

$$\pi_{cp} = \Delta u / \Delta t. \quad (6.7)$$

Очевидно, що продуктивність праці в момент часу t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності праці за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\pi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \pi_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0). \quad (6.8)$$

Отже похідна від обсягу продукції $u'(t_0)$ виражає продуктивність праці в момент часу t_0 .

Задача про витрати виробництва

Розглядатимемо витрати деякого виробництва $C = C(x)$ як функцію x обсягу продукції, яку воно випускає. Нехай Δx – приріст продукції, а ΔC – приріст витрат виробництва.

Середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції Δx становить:

$$C_{cp} = \frac{\Delta C}{\Delta x}.$$

Тоді похідна $C'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$ виражає **граничні витрати виробництва** та наближено характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

В аналогічний спосіб можна визначити граничний дохід, граничний продукт, граничну корисність тощо.

Середні витрати виробництва на одиницю випуску продукції визначають так:

$$C_{cp} = \frac{C(x)}{x}.$$

Отже, маємо **економічний зміст похідної**: похідна характеризує швидкість зміни деякого економічного об'єкта або процесу щодо часу або іншого досліджуваного фактора.

Наприклад, якщо розглядати **функцію попиту** $q = q(p)$ – залежність попиту q на деякий товар від ціни p , то похідна $q'(p)$ характеризує швидкість зміни попиту за зміни ціни p на одиницю продукції.

Якщо розглядати **функцію пропозиції** $s = s(p)$ – залежність пропозиції деякого товару s від його ціни p , то похідна $s'(p)$ характеризує швидкість зміни пропозиції товару з боку виробників за зміни ціни на одиницю товару.

Якщо розглянути **функції споживання та збереження** (x – національний дохід, $C = C(x)$ – функція споживання частини

доходу, що витрачають, а $S = S(x)$ функція збереження), то має місце рівність $x = C(x) + S(x)$. Продиференціюємо її та дістанемо $1 = C'(x) + S'(x)$, тут $C'(x)$ – *гранична схильність до споживання*, а $S'(x)$ – *гранична схильність до збереження*.

6.1.3. Односторонні похідні

За аналогією із поняттям односторонніх границь функції вводять поняття лівої і правої похідних функції у точці.

Означення. Якщо існують односторонні границі:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ та } \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то їх називають *лівою та правою похідними функції* $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають, відповідно:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ та } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (6.9)$$

Якщо існують ліва та права похідні й $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то існує похідна функції $y = f(x)$, причому:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0). \quad (6.10)$$

Приклад 6.2. Показати, що функція $y = |x|$ не має похідної у точці $x_0 = 0$.

Надамо приросту аргументу Δx , тоді функція отримає приріст:

$$\Delta y = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|.$$

Запишемо диференціальне відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отже, $f'_+(x_0) = 1$, $f'_-(x_0) = -1$ і $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, тобто функція $y = |x|$ не має похідної у точці $x_0 = 0$.

Загалом функція типу $y = |f(x)|$ не має похідних у точках, які є дійсними коренями рівняння $f(x) = 0$, оскільки, відповідно до означення модуля, для цих функцій характерно $f'_+ \neq f'_-$.

6.1.4. Диференційованість функції

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *диференційованою* у точці x_0 , якщо її приріст Δy в цій точці можна подати у вигляді:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (6.11)$$

де A – деяке число, що не залежить від Δx , $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \rightarrow 0$.

Оскільки добуток двох нескінченно малих функцій $\alpha(\Delta x)$ і Δx є нескінченно малою функцією більш високого порядку малості при $\Delta x \rightarrow 0$, то (6.11) можна записати у вигляді:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \quad (6.12)$$

ТЕОРЕМА

Для того, щоб функція $y = f(x)$ була диференційована у точці x_0 , необхідно та достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну та $f'(x_0) = A$.

Доведення. Необхідність. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у точці x_0 , тоді приріст функції можна подати у вигляді (6.11). Поділивши цю рівність на $\Delta x \neq 0$, одержимо диференціальне відношення:

$$\Delta y / \Delta x = A + \alpha(\Delta x).$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Це означає, що існує похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 і

$$f'(x_0) = A. \quad (6.13)$$

Достатність. Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у точці x_0 і $f'(x_0) = A$. Із означення похідної (6.1) випливає, що функція

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$$

нескінченно мала при $\Delta x \rightarrow 0$. Помножимо обидві частини цієї рівності на $\Delta x \neq 0$, отримаємо рівність:

$$\alpha(\Delta x)\Delta x = \Delta y - A\Delta x,$$

яка рівносильна (6.11). Отже, функція $y = f(x)$ диференційована у точці x_0 . Теорему доведено.

Твердження теореми дає можливість надалі ототожнювати диференційованість та існування похідної для функції однієї змінної. Операцію знаходження похідної функції називають **диференціюванням**.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну у кожній точці деякого проміжку X , то кажуть, що вона **диференційована** на проміжку X .

ТЕОРЕМА

(зв'язок між поняттям диференційованості та неперервності функції)

Якщо функція диференційована у точці x_0 , то вона й неперервна у цій точці.

Доведення. Оскільки функція $y = f(x)$ диференційована у точці x_0 , то $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ і дістанемо:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = \\ &= f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0,\end{aligned}$$

тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, а це означає, що функція $y = f(x)$ неперервна у точці x_0 . Теорему доведено.

Обернене твердження невірне: **функція $y = f(x)$, що неперервна у точці, може не мати похідної у цій точці**. Наприклад, $y = |x|$ неперервна у точці $x_0 = 0$, але не має похідної у цій точці.

Таким чином, вимога диференційованості функції сильніша за умову неперервності, оскільки із диференційованості випливає неперервність.

Таким чином, неперервність функції – **необхідна, але не достатня умова диференційованості функції**.

Зауваження. Похідна неперервної функції не обов'язково неперервна. Якщо функція має неперервну похідну на деякому проміжку X , то функцію називають **гладенькою** на цьому проміжку. Якщо похідна функції має скінчене число точок розриву (причому першого роду), то таку функцію називають **кусково-гладенькою** на проміжку X .

6.2. Диференціал функції

6.2.1. Означення та геометричний зміст диференціала

Для функції $y = f(x)$, що диференційована у точці x_0 , приріст функції має вигляд:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad (6.14)$$

Функція диференційована у точці x_0 , тому вона неперервна у цій точці, але тоді, при $\Delta x \rightarrow 0$, величини Δy , $f'(x_0)\Delta x$ та $\alpha(\Delta x)\Delta x$ є нескінченно малими. Порядок малості цих величин різний: $f'(x_0)\Delta x$ і Δy мають однаковий порядок малості із Δx , а величина $\alpha(\Delta x)\Delta x$ є нескінченно малою величиною вищого порядку при $\Delta x \rightarrow 0$. Іншими словами, величина $f'(x_0)\Delta x$ є головною частиною приросту Δy та лінійною щодо Δx .

Означення. Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають головну, лінійну щодо Δx , частину приросту функції у цій точці, яку позначають:

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \quad (6.15)$$

Диференціалом dx незалежної змінної x називають приріст цієї змінної Δx :

$$dx = \Delta x, \quad (6.16)$$

і співвідношення (6.15) набуває вигляду:

$$dy = f'(x_0)dx. \quad (6.17)$$

Із (6.17) випливає, що $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, тобто похідну $f'(x_0)$ обчислюють як відношення диференціала функції dy до диференціала аргументу dx .

Рівність (6.14) можна записати у вигляді:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x). \quad (6.18)$$

Диференціал функції має **геометричний зміст**.

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ (рис. 6.3), на якому позначено точки $M_0(x_0; f(x_0))$ і $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо дотичну до графіка у точці M_0 . Із трикутника ΔM_0NP маємо:

$$NP = M_0P \cdot \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)\Delta x = dy.$$

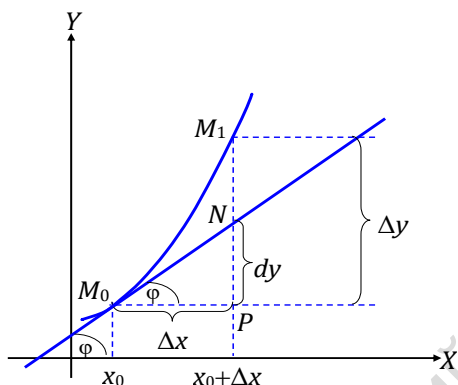


Рис. 6.3

Отже, диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної, що проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 .

Для складної функції $y = f(\varphi(x))$, де $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції, має місце рівність:

$$dy = f'_x[\varphi(x)]dx = f'_u(u)\varphi'_x(x)dx = f'(u)du.$$

Таким чином, зовнішній вигляд диференціала функції $y = f(x)$ зберігається у випадку, за якого u є функцією, а не незалежною змінною. Цю важливу властивість диференціала називають **інваріантністю його форми**.

6.2.2. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Наближені обчислення за допомогою диференціала функції базуються на наближеній заміні приросту функції у точці на її диференціал:

$$\Delta y \approx dy. \quad (6.19)$$

Абсолютна похибка за такої заміни $|\Delta y - dy|$ при $\Delta x \rightarrow 0$ є нескінченно малою більш високого порядку, порівняно із Δx , тому:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (6.20)$$

Формула (6.20) є основною в наближених обчисленнях.

Приклад 6.3. Обчислити наближено значення $\arcsin 0,51$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin(x)$. Покладемо $x_0 = 0,5$, а $\Delta x = 0,01$ і застосуємо (6.20). Дістанемо:

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,01 \approx 0,513.$$

6.2.3. Економічне застосування диференціала. Мультиплікатор

Розглянемо найпростішу економічну модель, яка описує динаміку зростання прибутку, залежно від інвестицій: $P = C + I$, де P – прибуток, C – споживання, I – інвестиції. Нехай $P = P(I)$ і $C = C(P)$. Виникає питання: як впливає зміна інвестицій dI на зміну прибутку? Оскільки $dP = P'(I)dI$, то із рівняння $P = C(P(I)) + I$ знайдемо залежність між інвестиціями та швидкістю зростання прибутку:

$$P'(I) = \frac{dC}{dP} P'(I) + 1, \quad P'(I) = \frac{1}{1 - (dC/dP)},$$

або у диференціалах: $dP = \frac{1}{1 - (dC/dP)} dI = \mu dI$.

Вираз $\mu = \frac{1}{1 - (dC/dP)}$ називають мультиплікатором.

Мультиплікатор – це числовий коефіцієнт, який вказує, у скільки разів сума приросту або скорочення прибутку перевищує початкову суму інвестицій. Цей термін, що уперше було введено 1931 року Ф. Каюмом, набув подальшого розвитку в моделі Кейнса з визначення рівня рівноваги прибутку. У цій моделі: якщо $0 < (dC/dP) = C'(P) < 1$, то $\mu > 1$. Отже, додаткові інвестиції збільшуватимуть прибуток.

6.3. Правила диференціювання

6.3.1. Диференціювання суми, добутку та частки функцій

ТЕОРЕМА

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані у точці x_0 , то функції $y = u(x) \pm v(x)$, $y = u(x)v(x)$ і $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ ($v(x) \neq 0$)

також диференційовані у цій точці та мають місце формули:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (6.21)$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u, \quad (6.22)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad v(x) \neq 0. \quad (6.23)$$

Доведення. Доведемо (6.21). Розглянемо функцію:
 $y = u(x) \pm v(x)$.

Надамо приросту аргументу Δx , тоді функція отримає приріст:

$$\begin{aligned}\Delta y &= [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v.\end{aligned}$$

Використовуючи означення похідної (6.1) і теорему про арифметичні дії із границями, дістанемо:

$$\begin{aligned}y' &= (u(x) \pm v(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).\end{aligned}$$

Для доведення формули (6.22) розглянемо функцію $y = u(x)v(x)$. Надамо приросту аргументу Δx , тоді функція отримає приріст: $\Delta y = [u(x + \Delta x)v(x + \Delta x)] - [u(x)v(x)]$.

Додавши та віднявши вираз $u(x)v(x + \Delta x)$, дістанемо:

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] = \\ &= \Delta u v(x + \Delta x) + u(x)\Delta v.\end{aligned}$$

Використовуючи означення похідної (6.1) і теорему про арифметичні дії із границями, дістанемо:

$$\begin{aligned}y' &= (u(x) \cdot v(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u v(x + \Delta x) + u(x)\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

Для доведення (6.23) розглянемо функцію $y = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Надамо приросту аргументу Δx . Тоді функція отримає приріст:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - [v(x + \Delta x) - v(x)]u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)}.\end{aligned}$$

Використовуючи означення похідної (6.1) і теорему про арифметичні дії з границями, дістанемо:

$$y' = \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - \frac{\Delta v}{\Delta x} u(x)}{v(x + \Delta x) v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Наслідок. Сталій множник можна виносити за знак похідної.

6.3.2. Диференціювання складної та оберненої функції

ТЕОРЕМА

(правило диференціювання складної функції)

Нехай функція $u = \varphi(x)$ має похідну у точці x , а функція $y = f(u)$ – похідну у відповідній точці $u = \varphi(x)$.

Тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну у точці x і має місце формула

$$y' = (f_x(\varphi(x)))' = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x). \quad (6.24)$$

Доведення. Надамо приросту $\Delta x \neq 0$, тоді функція $u = \varphi(x)$ отримає приріст Δu , а функція $y = f(u)$ – приріст Δy . За умови $\Delta u \neq 0$ дістанемо диференціальне відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ у цій рівності, дістанемо:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x).$$

Тобто має місце формула (6.25). Теорему доведено.

ТЕОРЕМА

(правило диференціювання оберненої функції).

Нехай функція $x = \varphi(y)$ обернена щодо функції $y = f(x)$, причому функції $f(x)$ і $\varphi(y)$ мають відмінні від нуля похідні у точках x та $y = f(x)$, відповідно. Тоді має місце рівність

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (6.25)$$

Доведення. Нехай Δy – приріст змінної y , а Δx – приріст змінної x . Тоді:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}, \text{ звідки } x'_y = \varphi'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x}.$$

Оскільки обернена функція також неперервна, то $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$.

$$\text{Отже, } x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x} = \frac{1}{y'_x}.$$

Таким чином, має місце (6.25). Теорему доведено.

6.3.3. Диференційованість елементарних функцій

Використовуючи означення похідної, можна легко обчислити похідні всіх основних елементарних функцій.

Таблиця похідних:

1. $(C)' = 0$, де $C = \text{const}$.

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, зокрема $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ і $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, зокрема $(e^x)' = e^x$.

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, зокрема $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$.

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Формули таблиці похідних разом із формулами, що виражають правила диференціювання, є **основними формулами диференціального числення**. Можна дійти важливого висновку: оскільки похідна довільної елементарної функції також є елементарною функцією, то операція диференціювання не виводить функцію із класу елементарних.

6.3.4. Похідна показниково-степеневі функції

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають похідні у точці x . Знайдемо похідну показниково-степеневі функції:

$$y = u(x)^{v(x)}.$$

Алгоритм диференціювання показниково-степеневі функції:

Крок 1. Скористаємося основною логарифмічною тотожністю $x = e^{\ln x}$ для функції $y = u(x)^{v(x)}$. Дістанемо:

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Крок 2. Використовуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо похідну показниково-степеневі функції за формулою:

$$(u(x)^{v(x)})' = (u(x))^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)v(x)}{u(x)} \right), u(x) > 0. \quad (6.26)$$

Приклад 6.4. Знайти похідну показниково-степеневі функції $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

Використовуючи (6.26), дістанемо:

$$\begin{aligned} y' &= \left((x^2 + 1)^{\sin x} \right)' = \left(e^{\sin x \ln(x^2 + 1)} \right)' = \\ &= e^{\sin x \ln(x^2 + 1)} \left[\cos x \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right] = \\ &= (x^2 + 1)^{\sin x} \left[\cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

6.3.5. Похідна неявної функції

Вище було розглянуто диференціювання явних функцій, що задані у вигляді $y = f(x)$. Розглянемо диференціювання неявної функції, що задана рівнянням $F(x, y) = 0$. Якщо для кожного x (на деякому проміжку X) існує одне або кілька значень y , які разом з x задовольняють таке рівняння, то це визначає: однозначна або багатозначна функція $y = f(x)$, для якої рівність

$$F(x; f(x)) = 0 \quad (6.27)$$

має місце уже тотожно щодо x . Похідну функції, що задана неявно, можна знайти із рівняння $\frac{d}{dx}(F(x; y)) = 0$, де $F(x; y)$, яку розглядають як складну функцію аргументу x .

Алгоритм диференціювання неявної функції:

Крок 1. Продиференціювати обидві частини рівності $F(x; y) = 0$ за змінною x , яка визначає залежність $y(x)$, застосовуючи правило диференціювання складної функції.

Крок 2. Розв'язати отримане рівняння щодо шуканої похідної та із здобутого рівняння знайти похідну y'_x .

Приклад 6.5. Рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 0$ визначає y як неявну функцію від x . Диференціюючи обидві частини рівності та зважаючи на правила диференціювання складної функції, дістанемо $2x + 2y \cdot y'_x = 0$ або $y'_x = -(x/y)$.

Приклад 6.6. Функція задана неявно: $e^y - e^x + xy = 0$. Знайти y'_x .

Диференціюємо обидві частини рівняння та враховуємо правило диференціювання складної функції, дістаємо:

$$e^y y'_x - e^x + y + xy'_x = 0 \text{ або } y'_x(e^y + x) = e^x - y, \text{ тобто } y'_x = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

6.3.6. Похідна функції, що задана параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$. Диференціювання функції, що задана параметрично, базується на такій теоремі.

ТЕОРЕМА

Нехай виконуються такі умови:

- 1) функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ визначені та неперервні на заданому проміжку T ;
- 2) функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ диференційовані у точці $t \in T$;
- 3) функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна на T і $\varphi'(t) \neq 0$;
- 4) функція $t = \alpha(x)$ обернена до функції $x = \varphi(t)$.

Тоді функція $y = \psi(\alpha(x))$ диференційована у точці $x = \varphi(t)$, причому має місце формула:

$$y'_x = \frac{\psi'(\alpha(x))}{\varphi'(\alpha(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (6.28)$$

Доведення. Оскільки функція $y = \psi(\alpha(x))$ складна, а $t = \alpha(x)$ – функція, обернена до функції $x = \varphi(t)$, то за теоремою про диференціювання складної та оберненої функції маємо:

$$y'_x(x) = \psi_t(\alpha(x))\alpha'_x(x) = \frac{\psi'_t(\alpha(x))}{\varphi'_t(\alpha(x))} = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}.$$

Теорему доведено.

Алгоритм диференціювання функції, що задана параметрично:

Крок 1. Знайдемо похідні функцій $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$ за аргументом $t \in T$.

Крок 2. За формулою (6.28) знайдемо похідну функції y'_x .

Приклад 6.7. Обчислити похідну функції, що задана параметрично $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0; \pi]$.

Обчислимо похідні:

$$\varphi'_t = -3a\cos^2 t \sin t, \quad \psi'_t = 3a\sin^2 t \cos t.$$

Підставимо їх до (6.28), дістанемо:

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{3a\sin^2 t \cos t}{-3a\cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

6.4. Похідні та диференціали вищих порядків

6.4.1. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну на проміжку $X = (a; b)$. Якщо у точці $x_0 \in (a; b)$ похідна $y = f'(x)$, своєю чергою, диференційована, то її похідну називають **похідною другого порядку** або **другою похідною** функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають одним із символів:

$$f''(x)_0, \quad y''(x)_0, \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Похідну від другої похідної називають **третьою похідною** або **похідною третього порядку**. Якщо цей процес можна продовжити, то отримаємо похідні четвертого, п'ятого і т. д. – n -ого порядків.

Означення. **Похідними вищих порядків** називають похідні, що мають порядок, вищий від першого, тобто починаючи із другої. Для їх позначення використовують символи:

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}.$$

Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку X похідні до $(n-1)$ порядку $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$.

Означення. Якщо у точці $x_0 \in X$ існує похідна функції $f^{(n-1)}(x)$, то її називають **похідною n -го порядку** функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають одним із символів:

$$f^{(n)}(x_0), \quad y^{(n)}(x_0), \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Отже, якщо функція $y = f(x)$ має у точці x_0 похідні до n -го порядку включно, то $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x_0) \right)'$.

Означення. Функцію $y = f(x)$, яка має на деякому проміжку X похідні до n -го порядку включно, називають **n разів диференційованою** на проміжку X . Функцію, яка має на X похідні всіх порядків, називають **нескінченно диференційованою** на X . Наприклад, функція $y = e^x$ є нескінченно диференційованою на $X \in (-\infty; +\infty)$.

У загальному випадку для обчислення похідної вищого порядку потрібно попередньо знайти похідні всіх нижчих порядків. В окремих випадках вдається встановити загальний вираз для похідної n -го порядку.

Приклад 6.8. Знайти похідну n -го порядку функції $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$, $x > 0$.

Послідовно диференціюючи функцію, маємо похідні:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \dots, \\ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. \quad (6.29)$$

$$\text{Якщо } \alpha = -1, \text{ то } \left(\frac{1}{x} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

$$\text{Якщо } \alpha = m, \text{ то } (x^m)^{(n)} = 0 \text{ при } m > n.$$

Приклад 6.9. Знайти похідну n -го порядку функції $y = a^x$ ($a > 0$).

Послідовно диференціюючи функцію, отримаємо похідні:

$$y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x (\ln a)^2, \quad y''' = a^x (\ln a)^3, \dots, \\ (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n. \quad (6.30)$$

Приклад 6.10. Знайти похідну n -го порядку функції $y = \sin x$.

Послідовно диференціюючи функцію, отримаємо похідні:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \\ y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Можна помітити, що кожне диференціювання додає до аргументу синуса $\pi/2$, тому:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \quad (6.31)$$

Аналогічно можна дістати формулу:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \quad (6.32)$$

Приклад 6.11. Знайти похідну n -го порядку функції $y = \ln x$.

Ураховуючи, що $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, дістанемо:

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \quad (6.33)$$

6.4.2. Похідні вищих порядків функцій, що задані параметрично та неявно

Нехай функція $y = y(x)$ задана параметрично $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$. Якщо функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ двічі диференційовані на заданому проміжку T і $\varphi'(t) \neq 0$, то похідна y'_x функції $y = y(x)$ є також функцією, що задана параметрично. Знайдемо другу похідну функції, використовуючи (6.28), після диференціювання чисельника як частки двох функцій:

$$y''_{xx} = \frac{\psi''_{tt}\varphi'_t - \varphi''_{tt}\psi'_t}{(\varphi'_t)^3}. \quad (6.34)$$

Приклад 6.12. Обчислити другу похідну функції, що задана параметрично, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Послідовно диференціюючи, дістанемо:

$$\varphi'_t = -a \sin t, \quad \varphi''_{tt} = -a \cos t, \quad \psi'_t = b \cos t, \quad \psi''_{tt} = -b \sin t.$$

Підставимо до (6.34):
$$y''_{xx} = -\frac{absin^2t + abcos^2t}{a^3sin^3t} = -\frac{b}{a^2sin^3t}.$$

Нехай функція $y = y(x)$ неявно задана рівнянням $F(x; y) = 0$.

Похідну y''_{xx} функції, що задана неявно, у цьому випадку можна знайти за таким алгоритмом.

Алгоритм обчислення другої похідної неявної функції:

Крок 1. Визначимо похідну від обох частин рівняння:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)(F(x, y)) = 0,$$

причому функцію $F(x; y(x))$ розглядатимемо як складну функцію аргументу x .

Крок 2. Розв'яжемо отримане рівняння щодо y'_x , дістанемо першу похідну $y'_x = f(x, y)$.

Крок 3. Для визначення другої похідної y''_{xx} від неявної функції диференціюємо одержану рівність (знову розглядаючи y як функцію від x), а потім замінюємо y'_x його знайденим на кроці 2 виразом.

Приклад 6.13. Знайти y''_{xx} , якщо функцію $y = y(x)$ задано неявно: $\arctg y - y + x = 0$.

Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x :

$$\frac{y'_x}{1+y^2} - y'_x + 1 = 0,$$

домножимо рівність на $(1+y^2)$, дістанемо рівняння:

$$y'_x - y'_x - y^2 y'_x + 1 + y^2 = 0.$$

Виразимо y'_x із заданого рівняння:

$$y'_x = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

Далі знаходимо:

$$y''_{xx} : y''_{xx} = -2y^{-3} y'_x.$$

До правої частини останньої рівності підставимо одержане значення y'_x . Остаточно:

$$y''_{xx} = -2y^{-3} y'_x = -\frac{2}{y^3} \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

6.4.3. Формула Лейбніца для похідної n -го порядку добутку двох функцій

Нехай $y = uv$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, що мають похідні довільного порядку. Послідовне диференціювання функції дає:

$$y' = u'v + uv', y'' = u''v + 2u'v' + uv'', y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Праві частини рівностей аналогічні розкладанню за формулою бінома Ньютона для випадків $n=2$ та $n=3$, тільки показники степенів замінено на порядки похідних, а самі функції u та v розглядатимемо як похідні нульового порядку $u = u^{(0)}$, $v = v^{(0)}$.

Методом математичної індукції можна довести справедливність загальної формули для похідної n -го порядку:

$$(y)^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}. \quad (6.35)$$

Формулу (6.35) називають **формулою Лейбніца**.

Коефіцієнти у (6.35) обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

причому має місце властивість $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Формулу Лейбніца зручно застосовувати, зокрема у випадках, за яких один із співмножників є многочленом.

Приклад 6.14. Знайти похідну 10-го порядку функції $y = x^3 e^x$.

Позначимо $u = u^{(0)} = x^3$ і $v = v^{(0)} = e^x$. Послідовно знаходимо похідні:

$$u' = 3x^2, u'' = 6x, u''' = 6, u^{(4)} = \dots = u^{(n)} = 0; v^{(k)} = e^x, k = 0, 1, \dots, n;$$

$$C_{10}^0 = \frac{10!}{0! 10!} = 1, C_{10}^1 = \frac{10!}{1! 9!} = 10, C_{10}^2 = \frac{10!}{2! 8!} = 45, C_{10}^3 = \frac{10!}{3! 7!} = 120.$$

Підставивши ці вирази до (6.35), дістанемо:

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= (x^3 e^x)^{(10)} = x^3 e^x + 10 \cdot 3x^2 e^x + 45 \cdot 6x e^x + 120 \cdot 6 e^x = \\ &= e^x (x^3 + 30x^2 + 270x + 720). \end{aligned}$$

Приклад 6.15. Знайти похідну n -го порядку від функції

$$y = e^{5x} \sin x.$$

Позначимо $u = u^{(0)} = e^{5x}$ і $v = v^{(0)} = \sin x$. Знайдемо похідні $u^{(n)} = 5^n e^{5x}$, $v^{(n)} = \sin(x + n \cdot (\pi/2))$ і підставимо значення відповідних похідних до (6.35), маємо при $n = 5$:

$$y^{(5)} = e^{5x} (5^5 \sin x + 5 \cdot 5^4 \cos x - 10 \cdot 5^3 \sin x - 10 \cdot 5^2 \cos x + 5 \cdot 5 \sin x + \cos x) = 25e^{5x} (76 \sin x + 116 \cos x).$$

6.4.4. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована n разів на проміжку X . Тоді у кожній точці $x \in X$ існує її диференціал $dy = f'(x)dx$, який називатимемо **диференціалом першого порядку** функції $y = f(x)$ або **першим диференціалом**. Оскільки диференціал аргументу dx є величиною сталою, то dy є функцією однієї змінної x . Диференціал цієї функції називатимемо **диференціалом другого порядку** функції $y = f(x)$ і позначатимемо: $d^2 y$ або $d^2 f(x)$. Отже, $d^2 y = d(dy)$:

$$d^2 y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2.$$

Диференціал третього порядку або **третій диференціал**:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3.$$

Продовжуючи цей процес, визначимо диференціал n -го порядку (n -й диференціал).

Означення. Якщо для функції $y = f(x)$ визначено диференціал $(n-1)$ -го порядку $d^{n-1} y$, то **диференціалом n -го порядку** $d^n y$ функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціалу $(n-1)$ -го порядку, тобто $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

За методом математичної індукції дістанемо:

$$d^n y = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (6.36)$$

Із (6.36) випливає вираз для похідної n -го порядку:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Зауважимо, що (6.36) справедлива при $n > 1$ тільки у випадку незалежної змінної x , тобто **диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми**.

Дійсно, уже при $n=2$, з одного боку, якщо u – незалежна змінна, маємо $d^2y = f''(u)du^2$.

З іншого боку, для складної функції $y = f(x)$, де $u = \varphi(x)$, маємо:

$$d^2y = d(f'(u)du) = d(f'(u)du + f'(u)d(du)) = f''(u)du^2 + f''(u)d^2u, \\ d^2y = f''(u)du^2 + f'''(u)d^2u, \quad (6.37)$$

де $d^2u = \varphi''(x)dx^2$.

Приклад 6.16. Знайти диференціал другого порядку функції

$$y = e^{-x^2}.$$

Оскільки $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, то у випадку, коли x – незалежна змінна, за (6.36) маємо:

$$d^2y = (e^{-x^2})''dx^2 = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)dx^2.$$

Якщо вважати, що x – функція деякої незалежної змінної, то за (6.37) маємо: $d^2y = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)dx^2 - 2xe^{-x^2}d^2x$.

6.5. Застосування похідних до дослідження функцій

6.5.1. Основні теореми диференціального числення

ТЕОРЕМА Ферма

Якщо диференційована на проміжку $(a; b)$ функція $y = f(x)$ досягає найменшого або найбільшого значення у внутрішній точці $x_0 \in (a, b)$ цього проміжку, то похідна у цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на проміжку $(a; b)$ і набуває у точці $x_0 \in (a; b)$ найменшого значення. Тоді $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, якщо $x_0 + \Delta x \in (a; b)$ (рис. 6.4) і приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$ за достатньо малих Δx , незалежно від знаку Δx . Звідси $(\Delta y / \Delta x) \geq 0$ при $\Delta x > 0$ і $(\Delta y / \Delta x) \leq 0$ при $\Delta x < 0$. Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0+0$ і $\Delta x \rightarrow 0-0$, дістанемо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{та} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

Оскільки за умовою теореми функція $y = f(x)$ диференційована у точці x_0 , то дістанемо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Це означає, що $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно можна довести випадок, за якого функція $y = f(x)$ набуває у точці x_0 найбільшого значення. Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми

Ферма. У точці, де функція набуває свого найбільшого або найменшого значення, яке досягається всередині проміжку $(a; b)$, дотична до графіка функції паралельна осі абсцис.

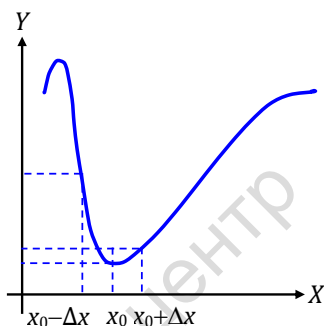


Рис. 6.4

ТЕОРЕМА Ролля

Нехай функція $y = f(x)$:

- 1) неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) диференційована на проміжку $(a; b)$;
- 3) $f(a) = f(b)$.

Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Доведення. Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, тоді за теоремою Вєрштрасса вона набуває найбільшого та найменшого значень: $\max_{x \in [a; b]} f(x) = M$, $\min_{x \in [a; b]} f(x) = m$.

Розглянемо випадки:

1) якщо $m = M$, то $f(x) = M$ – стала для всіх $x \in [a; b]$, і за точку c можна взяти будь-яку точку із проміжку $(a; b)$;

2) якщо $m < M$, то принаймні одне зі значень m або M досягається у внутрішній точці c відрізка $[a; b]$, тобто $c \in (a; b)$.

Тоді за теоремою Ферма $f'(c) = 0$. Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо функція неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційована у кожній точці $(a; b)$ і на кінцях набуває однакового значення, то щонайменше в одній внутрішній точці проміжку дотична до графіка функції паралельна осі OX (рис. 6.5, 6.6).

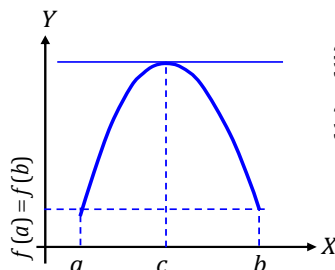


Рис. 6.5

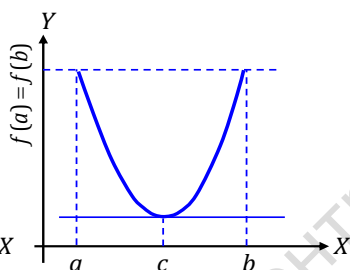


Рис. 6.6

Зауважимо, що всі умови теореми Ролля є суттєвими. Розглянемо кілька прикладів, за яких умови теореми Ролля порушуються.

Приклад 6.17. Функція $f(x)=x^2$, $x \in [0; 1]$ неперервна на відрізку та диференційована на проміжку $(0;1)$, але $f(0) \neq f(1)$ (порушена третя умова), тому для неї не існує внутрішньої точки $c \in (0;1)$, в якій $f'(c)=0$, і дотична була б паралельна до осі OX (рис. 6.7).

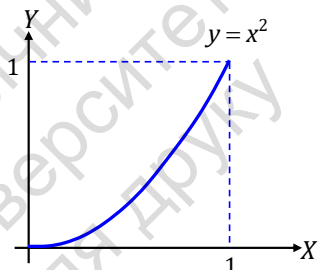


Рис. 6.7

Приклад 6.18. Функція $f(x)=|x|$ неперервна на відрізку $[-1; 1]$ і $f(-1)=f(1)=1$, але ця функція не має похідної у точці $x=0$ (порушена друга умова), тому не існує внутрішньої точки $c \in (0;1)$, в якій похідна перетворюється на нуль (рис. 6.8).

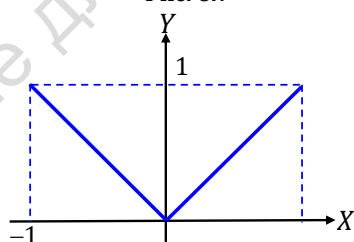


Рис. 6.8

Приклад 6.19. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (0; 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

диференційована на $(0;1)$ і $f(0)=f(1)=0$. Але ця функція не є неперервною на відрізку $[0;1]$ (порушена перша умова), тому не існує такої внутрішньої точки $c \in (0;1)$, в якій $f'(c)=0$ (рис. 6.9).

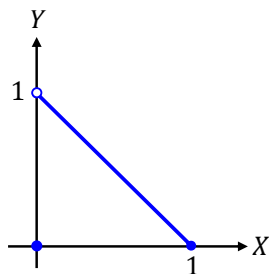


Рис. 6.9

ТЕОРЕМА Лагранжа

Нехай функція $y = f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a; b]$;

2) диференційована на проміжку $(a; b)$.

Тоді існує щонайменше одна точка $c \in (a; b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (6.38)$$

Доведення. Розглянемо на $[a; b]$ допоміжну функцію:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функція $y = F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля:

1) неперервна на відрізку $[a; b]$ як різниця неперервних

на $[a; b]$ функцій $y = F(x)$ і $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$;

2) диференційована на проміжку $(a; b)$, причому:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

$$3) F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0, \text{ тобто } F(a) = F(b) = 0.$$

Тоді за теоремою Ролля існує щонайменше одна точка $c \in (a; b)$ така, що:

$$F'(c) = 0, \text{ тобто } f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

$$\text{звідки дістанемо: } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорему доведено.

Оскільки відношення

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

є кутовим коефіцієнтом січної AB , а $f'(c)$ – кутовий коефіцієнт дотичної, що проведена до графіка функції, і вони рівні, то січна AB і дотична до графіка функції, що проведена у точці c , є паралельними.

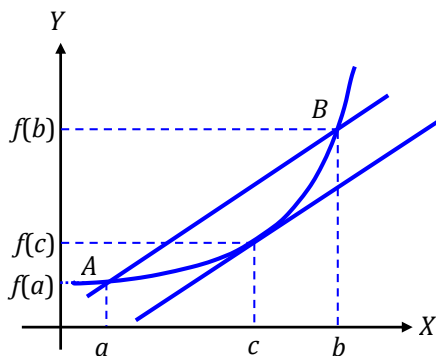


Рис. 6.10

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Теорема Лагранжа означає, що серед усіх дотичних до графіка функції $y = f(x)$ знайдеться щонайменше одна, паралельна січній AB , що сполучає точки $A(a; f(a))$ та $B(b; f(b))$ (рис. 6.10).

Зауваження. Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, якщо $f(a) = f(b)$. Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad c \in (a; b) \quad (6.39)$$

називають **формулою Лагранжа**. Її можна переписати в іншому вигляді. Очевидно, що $c = a + \theta(b - a)$, де $\theta \in (0; 1)$. Тому:

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad \theta \in (0; 1).$$

Поклавши $a = x$, $b = x + \Delta x$, дістанемо формулу, яку називають **формулою скінчених приростів**:

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad \theta \in (0; 1). \quad (6.40)$$

ТЕОРЕМА Коші

Нехай функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$:

- 1) неперервні на відрізку $[a; b]$;
- 2) диференційовані на $(a; b)$, причому $g'(x) \neq 0$ при всіх $x \in (a; b)$.

Тоді існує щонайменше одна точка $c \in (a; b)$, така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (6.41)$$

Формулу (6.41) називають **формулою Коші** або **узагальненою формулою скінчених приростів**.

Доведення. Спочатку зауважимо, що $g(b) - g(a) \neq 0$, оскільки у протилежному випадку за теоремою Ролля для функції $y = g(x)$ знайдеться щонайменше одна точка $c \in (a; b)$ така, що $g'(c) = 0$. А це суперечить тому, що $g'(c) \neq 0$ в усіх точках $(a; b)$.

Розглянемо допоміжну функцію:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Очевидно, що функція $y = F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля:

1) вона неперервна на відрізку $[a; b]$ як різниця двох неперервних функцій:

$$y = f(x) \text{ та } y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a));$$

2) диференційована на проміжку $(a; b)$, причому:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x);$$

3) $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля існує щонайменше одна точка $c \in (a; b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$.

Звідси, оскільки $g'(c) \neq 0$, дістанемо формулу Коші:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a; b).$$

Зауваження. Теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші, якщо $g(x) = x$.

6.5.2. Формула Тейлора

Один з основних принципів математики – подання складного через простіше. Саме формула Тейлора й є реалізацією цього принципу. Функції, що задовольняють умовам теореми Тейлора, із достатньою точністю можуть бути подані у вигляді многочлена n -го степеня. Многочлени є найпростішими елементарними функціями, над якими зручно виконувати арифметичні дії, обчислювати значення у будь-якій точці. Формула Тейлора – одна з основних формул диференціального числення та має широке застосування.

ТЕОРЕМА

Нехай функція $y = f(x)$ має у точці x_0 і деякому її околі похідні до $n + 1$ порядку.

Нехай x – деяке значення аргументу із цього околу x_0 .
Тоді існує таке число θ : $\theta \in (0; 1)$, що справедливою є формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (6.42)$$

або у короткій формі:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x), \quad (6.43)$$

Доведення. Розглянемо многочлен:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Його називають **многочленом Тейлора n -го степеня** для функції $y = f(x)$ у точці x_0 . Позначимо $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ – залишковий член у формулі Тейлора. Тоді $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$. Теорему буде доведено, якщо встановити, що:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Оцінимо величину члена:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} r(x),$$

де $r(x)$ – шукана функція. Зафіксуємо значення x із вказаного околу. Для визначеності прийmemo $x > x_0$, позначимо t змінну величину $t \in [x_0; x]$ і розглянемо на відрізку $[x_0; x]$ допоміжну функцію:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} r(x).$$

Очевидно, що функція $y = F(t)$ на $[x_0; x]$ задовольняє вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на відрізку $[x_0; x]$ і

диференційована на проміжку $(x_0; x)$, причому легко показати, що:

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} r(x) \text{ та } F(x_0) = F(x) = 0.$$

Тому, за теоремою Ролля існує точка $c \in (x_0; x)$ така, що:

$$F'(c) = 0 \text{ і } -\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + \frac{(x-c)^n}{n!} r(x) = 0$$

$$\text{або } \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) = \frac{(x-c)^n}{n!} r(x).$$

Отже, $r(x) = f^{(n+1)}(c)$.

Таким чином, функцію $r(x)$ визначено та

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Оскільки $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, де $\theta \in (0; 1)$, то:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \quad (6.44)$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають **залишковим членом у формі Лагранжа**.

Якщо $f^{(n+1)}(x)$ при $x \rightarrow x_0$ обмежена, то очевидно, залишковий член $R_n(x)$ при $x \rightarrow x_0$ – нескінченно мала вищого порядку, порівняно із $(x-x_0)^n$, тобто:

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0. \quad (6.45)$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають **залишковим членом у формі Пеано**.

6.5.3. Формула Маклорена

Формула Маклорена – це формула Тейлора, в якій $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x). \quad (6.46)$$

Залишковий член має вигляд:

$$1) \text{ у формі Лагранжа } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \theta \in (0; 1);$$

$$2) \text{ у формі Пеано } R_n(x) = o(x^n), x \rightarrow 0.$$

Розкладання функцій за формулою Маклорена

1. Розкладемо функцію $f(x) = e^x$ за формулою Маклорена.

Оскільки $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(n+1)}(x) = e^x$ та

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n+1)}(0) = 1, \text{ то:}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \quad (6.47)$$

2. Розкладемо функцію $f(x) = \sin x$ за формулою Маклорена.

За (6.31) маємо $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, тому:

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m+1, \end{cases} \quad m=0,1,2,\dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2}). \quad (6.48)$$

3. Розкладемо функцію $f(x) = \cos x$ за формулою Маклорена.

Оскільки $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ та

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2m-1, \\ (-1)^{n/2}, & n = 2m, \end{cases} \quad m=1,2,3,\dots$$

то

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}). \quad (6.49)$$

4. Розкладемо функцію $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$ за формулою Маклорена. Оскільки за формулою (6.29) маємо

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \text{ та}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1), \text{ то:}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (6.50)$$

У випадку, за якого $\alpha = n \in \mathbf{N}$, дістанемо $f^{(n+1)}(x) = 0$ і $R_{n+1}(x) = 0$ - **формулу бінома Ньютона**:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + x^n. \quad (6.51)$$

5. Розкладемо функцію $f(x) = \ln(1+x)$, $x > 0$ за формулою Маклорена. За формулою (6.33):

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f(0)=0, \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \text{ та}$$

$$f(0)=0, \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

Тоді

$$\ln(1+x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 - \dots + (1/n)(-1)^{n-1}x^n + o(x^n). \quad (6.52)$$

6.6. Застосування похідної до обчислення границь

6.6.1. Правила Лопіталю.

Розкриття невизначеностей виду $0/0$ та ∞/∞

При дослідженні функцій часто виникає необхідність знаходження границі дробу $f(x)/g(x)$, коли чисельник і знаменник при $x \rightarrow x_0$ одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають **розкриттям невизначеностей**. Найбільш простими та ефективними методами розкриття невизначеностей є **правила Лопіталю**.

ТЕОРЕМА

(перше правило Лопіталю)

Нехай функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ визначені та диференційовані в околі деякої точки x_0 , за винятком, можливо самої точки x_0 .

Нехай існують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$

та якщо існує границя (скінченна або нескінченна) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і виконується рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (6.53)$$

Доведення. Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовані в околі точки x_0 , тоді вони неперервні в околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 . Довизначимо функції у

точці $x = x_0$. Нехай $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тоді вони, очевидно, неперервні на відрізку $[x_0; x]$ і задовольняють умови теореми Коші. Тому існує така точка $c \in (x_0; x)$, що має місце рівність:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Переходячи до границі в останній рівності, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження. Теорема залишається справедливою й у випадку, за якого $x \rightarrow x_0 - 0$ або $x \rightarrow x_0 + 0$, тобто за односторонніх границь, а також у випадку, коли $x_0 = \pm\infty$.

Приклад 6.20. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

У чисельнику та знаменнику дробу стоять функції, диференційовані та нескінченно малі при $x \rightarrow 0$. Границі існують. Має місце невизначеність $(0/0)$. Застосовуємо правило Лопітала:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(\operatorname{tg} x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1/\cos^2 x) - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)\cos^2 x}{1 - \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА

(друге правило Лопітала)

Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовані в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty, \quad g'(x) \neq 0.$$

І якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$,

і має місце рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження. Якщо для похідних $f'(x)$ і $g'(x)$ виконуються умови теореми, то правило Лопітала можна застосувати повторно:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Приклад 6.21. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$, де $n \in \mathbb{N}$.

У чисельнику та знаменнику дробу стоять функції, диференційовані та нескінченно великі при $x \rightarrow \infty$. Границі існують. Має місце невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Застосуємо

правило Лопітала n разів, дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Зауваження. Слід зазначити, що (6.53) має місце тільки тоді, коли границя у правій частині рівності існує. Бувають випадки, за яких границя у лівій частині рівності існує, але у той самий час границя у правій частині рівності не існує. Наведемо приклад.

Приклад 6.22. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \sin x}{x}\right)$.

Ця границя існує та дорівнює 1. Дійсно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \sin x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Але відношення похідних $\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$ при $x \rightarrow \infty$ не прямує до жодної границі, а коливається між 0 і 2.

6.6.2. Розкриття невизначеностей виду

$0 \cdot \infty, (\infty - \infty), 0^0, \infty^0, 1^\infty$

1. Невизначеність виду $0 \cdot \infty$ зводиться до невизначеностей виду ∞/∞ або $0/0$ за допомогою перетворень:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}, \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Приклад 6.23. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - (\pi/2)) \operatorname{ctg} 2x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - (\pi/2)) \operatorname{ctg} 2x &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - (\pi/2)}{\operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{2 / \cos^2 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos^2 2x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Невизначеність вигляду $(\infty - \infty)$ зводиться до невизначеностей вигляду ∞/∞ або $0/0$ за допомогою перетворення:

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) : \frac{1}{f(x)g(x)}.$$

Приклад 6.24. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{\ln x \cdot (x-1)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1/x) - 1}{(x-1)/x + \ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x-1+x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+\ln x+1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Невизначеність вигляду $0^0, \infty^0, 1^\infty$ за допомогою перетворення $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ зводиться до невизначеності $(0 \cdot \infty)$ у показнику.

Приклад 6.25. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x^x &= (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x} \right] = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{(-1/x^2)} \right] = \exp \left[- \lim_{x \rightarrow 0+} x \right] = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Приклад 6.26. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = (\infty^0)$.

$$\text{Оскільки } (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^{2 \cos x \ln(\operatorname{tg} x)} = \exp \left[\frac{2 \ln(\operatorname{tg} x)}{1/\cos x} \right], \text{ то:}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{2 \ln(\operatorname{tg} x)}{1/\cos x} \right] &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\sin x / \cos^2 x} \right] = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \sin x} \right] = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{\cos x}{\sin^2 x} \right] = 0.\end{aligned}$$

Тоді шукана границя: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^0 = 1$.

Приклад 6.27. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = (1^\infty)$.

Якщо зробити перетворення:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = \exp \left(\frac{1}{e^x-1-x} \cdot \ln(1+x^2) \right), \text{ то}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} \right] &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x}{(1+x^2)(e^x-1)} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x(1+x^2) + (e^x-1)2x} = 2.\end{aligned}$$

Тоді $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^2$.

6.7. Дослідження функцій і побудова їх графіків

За допомогою похідної функції проводять аналіз поведінки та побудови графіка функції. Розглянемо низку важливих теорем, які дають можливість будувати графіки функцій і проводити дослідження для розв'язування економічних задач.

6.7.1. Умови монотонності функції

З'ясуємо, як за допомогою похідної функції можна дійти висновків про зростання (спадання) самої функції на заданому проміжку.

ТЕОРЕМА

(ознака монотонності функції)

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на $(a; b)$ та:

- 1) $f'(x) > 0$, то функція $y = f(x)$ зростає на проміжку $(a; b)$;
- 2) $f'(x) < 0$, то функція $y = f(x)$ спадає на проміжку $(a; b)$.

Доведення. Нехай для визначеності $f'(x) > 0$ на $(a; b)$. Виберемо дві довільні точки $x_1, x_2 \in (a; b)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$ для функції $y = f(x)$ виконано всі умови теореми Лагранжа, у силу якої:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad c \in (a; b).$$

За умовою теореми $f'(x) > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$, тоді $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція зростає на $(a; b)$.

Аналогічно доводять випадок, за якого $f'(x) < 0$ на $(a; b)$.

Означення. Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають *стаціонарними*.

Означення. Точки області визначення функцій, в яких похідна функції дорівнює нулю, а також точки, де похідної функції не існує, називають *критичними точками першого роду*.

Алгоритм дослідження функції на монотонність:

Крок 1. Знайти область визначення функції $D(f)$.

Крок 2. Знайти $f'(x)$ і критичні точки першого роду із умов $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує.

Крок 3. На кожному проміжку, на які критичні точки першого роду та точки розриву розбивають область визначення, знайти знак похідної.

Крок 4. Зробити висновки на підставі ознаки монотонності функції.

6.7.2. Умови локального екстремуму

Означення. Точку x_0 називають *точкою локального мінімуму* функції $y = f(x)$, якщо за всіх $x \neq x_0$ із деякого її околу $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.

Означення. Точку x_0 називають **точкою локального максимуму** функції $y = f(x)$, якщо за всіх $x \neq x_0$ із деякого її околу $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

Означення. Точки локального мінімуму та локального максимуму називають **точками локального екстремуму**, а значення функції у цих точках – її **локальними екстремумами** (мінімумами $f_{\min}$ та максимумами $f_{\max}$).

ТЕОРЕМА

(необхідні умови локального екстремуму)

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована у точці x_0 і має у цій точці локальний екстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. За означенням локального екстремуму існує $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такий δ -оکیل точки x_0 , в якому значення функції $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим. Тоді за теоремою Ферма похідна функції у цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Геометричний зміст теореми. У точках локального екстремуму дотичні до графіка функції $y = f(x)$ паралельні до осі OX (рис. 6.11).

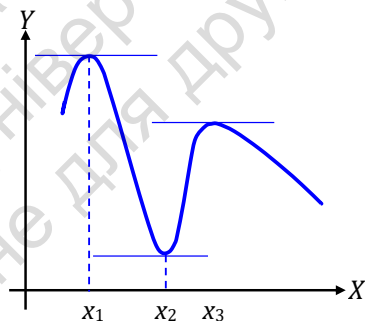


Рис. 6.11

Зауваження 1. Якщо $f'(x_0) = 0$, то звідси не випливає, що x_0 – точка локального екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$. Але $x_0 = 0$ не є точкою локального екстремуму (рис. 6.12).

Зауваження 2. Точка x_0 , в якій функція недиференційована, також може бути точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = |x|$ не має похідної у точці

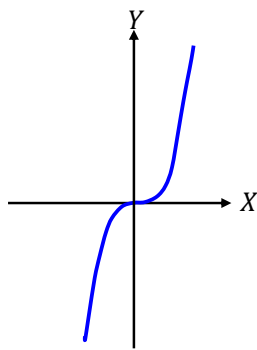


Рис. 6.12

$x_0 = 0$, але ця точка є для неї точкою локального мінімуму (рис. 6.8). Таким чином, теорема дає необхідні, але не достатні умови локального екстремуму.

ТЕОРЕМА

(достатні умови локального екстремуму першого типу)

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому околі x_0 , диференційована у цьому околі, за винятком, можливо, самої точки x_0 . Тоді:

- 1) якщо у точці x_0 похідна змінює свій знак з плюса на мінус, то x_0 – точка локального максимуму;
- 2) якщо у точці x_0 похідна змінює свій знак з мінуса на плюс, то x_0 – точка локального мінімуму;
- 3) якщо $f'(x)$ не змінює свій знак в околі точки x_0 , то задана функція не має локального екстремуму у точці x_0 .

Доведення. Нехай, для конкретності, похідна для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ змінює свій знак з мінуса на плюс, тобто $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Розглянемо спочатку випадок, за якого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$. Застосуємо формулу Лагранжа до функції $y = f(x)$ на відрізку $[x; x_0]$.

Маємо: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ $c \in (x_0 - \delta; x_0)$. Оскільки ліворуч $f'(x) < 0$ та $x - x_0 < 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$, тобто $f(x) > f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$.

Застосовуючи теорему Лагранжа до функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_0; x]$ у випадку, за якого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, одержимо: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ $c \in (x_0; x)$. Оскільки праворуч $f'(c) > 0$ і $x - x_0 > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$, тобто $f(x) > f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Отже, для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $x \neq x_0$ виконується умова локального мінімуму.

Випадок локального максимуму (якщо знак $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус) доводять аналогічно.

Якщо $f'(x)$ не змінює знак при переході через точку x_0 , то функція є монотонною на $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, отже не має локального екстремуму у точці x_0 . Теорему доведено.

ТЕОРЕМА

(достатні умови локального екстремуму другого типу)

Нехай x_0 – стаціонарна точка для функції $y = f(x)$,
і функція має у точці x_0 похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно,
причому $f^{(n+1)}(x)$ – неперервна у точці x_0 .

Тоді, якщо $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$,
то за парного $n + 1$ точка x_0 є точкою локального екстремуму,
причому, якщо $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ – точкою локального мінімуму,
а якщо $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ – точкою локального максимуму.

За непарного $n + 1$ точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

Доведення. Оскільки $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, то формула Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0 має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ де } 0 < \theta < 1$$

$$\text{або } f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Похідна $f^{(n+1)}(x)$ неперервна у точці x_0 , тому існує такий δ -окіл цієї точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в якому $f^{(n+1)}(x)$ зберігає знак.

Зважаючи на те, що $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, маємо $(x - x_0)^{n+1} > 0$ за парного $n + 1$. Якщо $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$ або $f(x) > f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Це й означає, що x_0 є точкою локального мінімуму.

Випадок $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ досліджують аналогічно.

За непарного $n + 1$ вираз $(x - x_0)^{n+1}$ змінює свій знак на проміжках $(x_0 - \delta; x_0)$ та $(x_0; x_0 + \delta)$. При цьому на цих проміжках змінює свій знак і різниця $f(x) - f(x_0)$. Отже, точка x_0 не є точкою локального екстремуму. Теорему доведено.

Зауваження 1. Найчастіше цю теорему використовують для випадку, коли $n = 1$. Якщо $f'(x_0) = 0$ (точка x_0 – стаціонарна), а $f''(x_0) \neq 0$, то у точці x_0 буде локальний мінімум при $f''(x_0) > 0$ і локальний максимум – при $f''(x_0) < 0$.

Зауваження 2. У випадку, за якого $f''(x_0)=0$, теорему про достатні умови другого типу застосовувати не можна, і дослідження проводять за теоремою про достатні умови першого типу.

Алгоритм дослідження функції на екстремум:

Крок 1. Знайти область визначення функції $D(f)$.

Крок 2. Знайти $f'(x)$ та критичні точки першого роду з умов $f'(x_0)=0$ або $f'(x)$ не існує.

Крок 3. Позначити критичні точки на числовій прямій і визначити знак похідної на кожному із проміжків, на які критичні точки першого роду та точки розриву розбивають область визначення.

Крок 4. Зробити висновки на підставі теорем про достатні умови локального екстремуму для кожної критичної точки.

6.7.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ та існує така точка $x_0 \in [a; b]$, що для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується умова $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$), то число $f(x_0)$ називають **найменшим (найбільшим) значенням функції на відрізку $[a; b]$** .

Означення. Найменше (найбільше) значення функції на відрізку $[a; b]$ називають **глобальним екстремумом**. Використовують позначення $\max_{x \in [a; b]} f(x) = M$, $\min_{x \in [a; b]} f(x) = m$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває найбільшого та найменшого значень на цьому відрізку або в критичних точках першого роду, які належать цьому відрізку або на кінцях відрізка. Точка, у якій спостерігається найбільше (найменше) значення, може збігатися з відповідною точкою локального екстремуму (якщо така точка існує для заданого відрізка) або лежати на його кінцях.

Алгоритм обчислення глобальних екстремумів:

Крок 1. Знайти $f'(x)$ та критичні точки першого роду, які належать відріzkу $[a; b]$ з умов $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує.

Крок 2. Знайти локальні екстремуми функції на цьому відріzkі функції $y = f(x)$.

Крок 3. Обчислити значення функції $y = f(x)$ на кінцях відрізка $f(a)$ та $f(b)$.

Крок 4. Порівняти отримані значення та вибрати серед них найбільше та найменше.

Приклад 6.28. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x - x^3$ на відріzkі $[-2; 3]$.

Крок 1. Знаходимо похідну функції та критичні точки:

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = -3(x-1)(x+1).$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Його розв'язки: $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Крок 2. Запишемо до таблиці результати дослідження.

x	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 3)$
y'	-	0	+	0	-
y		-2 <i>loc min</i>		2 <i>loc max</i>	

Із даних таблиці дістанемо екстремуми функції: локальний максимум $f(1) = 2$ і локальний мінімум $f(-1) = -2$.

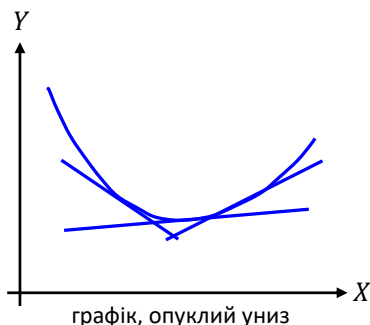
Крок 3. Обчислимо значення цієї функції на кінцях відрізка $[-2; 3]$. Дістанемо: $f(-2) = 2, f(3) = -18$.

Крок 4. З отриманих значень вибираємо найбільше та найменше:

$$\max_{x \in [-2; 3]} f(x) = f(-2) = f(1) = 2, \quad \min_{x \in [-2; 3]} f(x) = f(3) = -18.$$

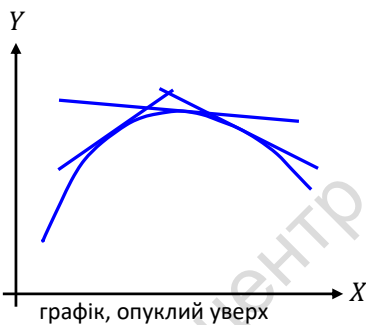
6.7.4. Умови опуклості та точки перегику графіка функції

Означення. Графік функції $y = f(x)$ на $(a; b)$ називають **опуклим униз** (крива угнута), якщо він розміщений не нижче від довільної дотичної, що проведена до графіка функції на $(a; b)$ (рис. 6.13), і називають **опуклим уверх** (крива опукла), якщо графік функції розміщений не вище від довільної дотичної, що проведена до графіка функції на $(a; b)$ (рис. 6.14).



графік, опуклий униз

Рис. 6.13



графік, опуклий уверх

Рис. 6.14

ТЕОРЕМА

Якщо функція $y = f(x)$ на $(a; b)$ неперервна,
двічі диференційована і $f''(x) \geq 0$ на $(a; b)$,
то графік функції опуклий униз на $(a; b)$;
якщо ж $f''(x) \leq 0$, то графік функції опуклий уверх на $(a; b)$.

Доведення. Розглянемо випадок, за якого $f''(x) \geq 0$ на $(a; b)$. Виберемо на проміжку $(a; b)$ довільну точку x_0 . Запишемо рівняння дотичної, яка проведена до графіка функції $y = f(x)$, що проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$:

$$y_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (6.54)$$

Розкладемо функцію $y = f(x)$ в околі точки x_0 за формулою Тейлора; при $n = 1$ для всіх $x \in (a; b)$ за теоремою Лагранжа існує $c \in (x_0; x)$ таке, що:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2. \quad (6.55)$$

Віднімаємо (6.54) від (6.55) та дістанемо:

$$f(x) - y_0 = \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2!}. \quad (6.56)$$

За умовою теореми $f''(x) \geq 0$ на $(a; b)$. Отже права частина рівності (6.56) невід'ємна, і $f(x) \geq y_0$ для всіх $x \in (a; b)$. Ця нерівність доводить теорему: графік функції скрізь на проміжку $(a; b)$ лежить не нижче від дотичної у довільній точці цього проміжку. Доведення у випадку, коли $f''(x) \leq 0$ на $(a; b)$, проводять аналогічно.

Означення. Точку $M_0(x_0; f(x_0))$ називають **точкою перегину** графіка функції $y = f(x)$, якщо у цій точці графік має дотичну та існує такий окіл точки x_0 , у межах якого графік функції $y = f(x)$ має різний характер опуклості (рис. 6.15).

У точці перегину дотична перетинає графік функції, оскільки він переходить з одного боку дотичної на інший, "перегинається" через неї.

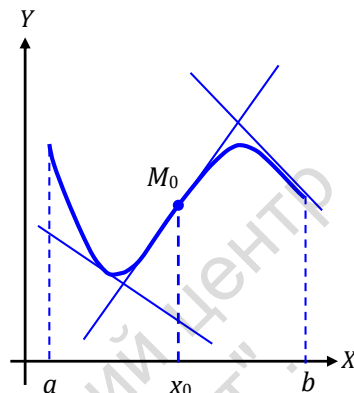


Рис. 6.15

ТЕОРЕМА

(необхідні умови точки перегину)

Нехай графік функції $y = f(x)$ має перегин у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, і функція $y = f(x)$ має у точці x_0 неперервну другу похідну, тоді $f''(x_0) = 0$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто $f''(x_0) \neq 0$. Тоді існує окіл точки x_0 , в якому $f''(x_0) > 0$ або $f''(x_0) < 0$, і графік функції має певний напрямок опуклості у цьому околі, що суперечить умові теореми, оскільки у точці x_0 графік функції має перегин. Одержана суперечність доводить теорему.

Зауваження. Не завжди умова $f''(x_0) \neq 0$ означає наявність точки перегину на графіку функції $y = f(x)$.

Приклад 6.29. Функція $y = x^{2n}$ не має перегину у точці $x_0 = 0$, хоча:

$$y'' = 2n(2n-1)x^{2n-2} \text{ та } y''(0) = 0.$$

(рис. 6.16). Тому рівність $f''(x_0) = 0$ є необхідною, але недостатньою умовою точки перегину.

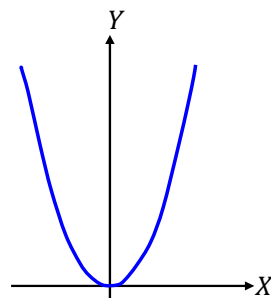


Рис. 6.16

Означення. Точки, в яких $f''(x)$ не існує або $f''(x_0)=0$, називатимемо **критичними точками другого роду**.

У кожній такій точці необхідно додатково дослідити питання про існування перегину.

ТЕОРЕМА

(достатні умови точок перегину)

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна та двічі диференційована в деякому околі точки x_0 , і друга похідна має різні знаки ліворуч і праворуч від точки x_0 , то точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y=f(x)$.

Доведення. Оскільки напрямки опуклості графіка функції ліворуч і праворуч від точки x_0 є різними, то за означенням точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y=f(x)$.

Теорема справедлива й для випадку, за якого $f''(x)$ існує в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , та існує дотична до графіка функції у точці x_0 .

Алгоритм знаходження проміжків опуклості графіка функції:

Крок 1. Знайти область визначення функції $D(f)$.

Крок 2. Знайти $f''(x)$ та критичні точки другого роду із умов $f''(x)=0$ або $f''(x)$ не існує.

Крок 3. Визначити знак другої похідної на кожному проміжку, на які ці точки розбивають область визначення функції.

Крок 4. Застосувати теорему про достатні умови точок перегину та зробити висновки.

Приклад 6.30. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$.

Крок 1. Знаходимо область визначення функції $D(f)=R$.

Крок 2. Обчислимо похідні:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-(2/3)}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}, f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-(5/3)}=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^5}}.$$

У точці $x=0$ похідні не існують; у точці $x=0$ дотична збігається із віссю OY .

Крок 3. Графік цієї функції має перегин у точці $(0;0)$ (рис. 6.17), оскільки

$$f''(x) = -\left(\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}\right)$$

має різні знаки ліворуч і праворуч від точки $x = 0$.

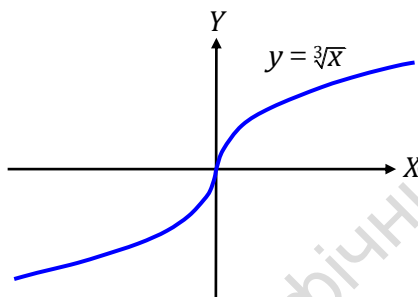


Рис. 6.17

6.7.5. Асимптоти графіка функції

Означення. *Асимптотою* графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, якщо графік функції необмежено наближається до цієї прямої, але не перетинає її.

Необмеженість наближення графіка функції до асимптоти означає, що відстань від точок графіка до цієї прямої (довжина перпендикуляра, що опущений із довільної точки графіка на пряму) прямує до нуля.

Означення. Пряму $x = a$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо щонайменше одна із границь $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ дорівнює або $+\infty$, або $-\infty$.

Вертикальні асимптоти зазвичай відповідають точкам розриву другого роду.

Приклад 6.31. Для функції $y = e^{1/x}$ обчислимо односторонні границі у точці $x = 0$, дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{1/x} = e^{+\infty} = \infty.$$

Отже, $x=0$ – вертикальна асимптота.

Означення. Пряму $y = kx + b$ називають *похилою асимптотою* графіка функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо її можна подати у вигляді:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad (6.57)$$

де $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

У випадку, за якого кутовий коефіцієнт прямої $k=0$, пряма має вигляд $y = b$, і графік функції має *горизонтальну асимптоту*.

Поділимо обидві частини (6.57) на x :

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$$

і перейдемо до границі при $x \rightarrow \infty$. Дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k, \\ k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (6.58)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (kx + b + \alpha(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (b + \alpha(x)) = b,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (6.59)$$

Зауваження. Якщо щонайменше одна із границь (6.58) або (6.59) не існує або нескінченна, то графік функції не має похилих (горизонтальних) асимптот.

6.7.6. Побудова графіка функції

Уміння знаходити значення аргументу x , в яких задана функція $y = f(x)$, має екстремальні значення та точки перегину, можна використати для побудови графіка функції. За допомогою вказаних раніше методів можна встановити певне число "опорних" точок, які характеризують графік функції.

Для побудови графіка функції необхідно здійснити кроки такого алгоритму.

Алгоритм дослідження функції та побудови її графіка:

Крок 1. Знайти область визначення функції $D(f)$.

Крок 2. Дослідити функцію на парність, періодичність.

Крок 3. Знайти точки перетину з осями координат (із віссю OX покладемо $y = 0$, а з віссю OY : $x = 0$).

Крок 4. Знайти асимптоти графіка функції (якщо вони існують).

Крок 5. Дослідити функцію на монотонність і знайти її екстремуми. Для цього потрібно знайти першу похідну $y'(x)$, проміжки монотонності, критичні точки першого роду, точки локального екстремуму екстремуми функції і значення функції у цих точках (екстремуми).

Крок 6. Знайти другу похідну $y''(x)$, критичні точки другого роду, установити напрямки опуклості й точки перегину графіка функції.

Крок 7. Побудувати графік функції із врахуванням проведеного дослідження.

Приклад 6.32. Побудувати графік функції $y = x^2 e^{-x^2}$.

Крок 1. Область визначення $D(y) = \mathbf{R}$.

Крок 2. Оскільки $y(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = y(x)$, то функція парна, її графік симетричний щодо осі OY . Функція не періодична.

Крок 3. Точка перетину з осями координат: $x = 0$, $y = 0$.

Крок 4. Вертикальних асимптот немає, оскільки функція неперервна.

Знайдемо похилі $y = kx + b$ і горизонтальні $y = b$ асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0, \quad k = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Отже, рівняння горизонтальної асимптоти $y = 0$ (вісь OX).

Крок 5. Знайдемо першу похідну функції:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} (-2x) = 2xe^{-x^2} (1 - x^2) = \\ &= 2xe^{-x^2} (1 - x)(1 + x) = -2xe^{-x^2} (x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Знаходимо критичні точки першого роду (точки "можливого" екстремуму). Стаціонарні точки знаходимо з умови $y' = 0$. Ця рівність виконується при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Обчислимо тепер значення функції, що відповідають знайденим значенням:

$$y(0) = 0, \quad y(-1) = (-1)^2 e^{-1} = 1/e, \quad y(1) = e^{-1} = 1/e.$$

Результати дослідження зручно записати у вигляді таблиці:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+	0	-
y		$1/e$ <i>loc max</i>		0 <i>loc min</i>		$1/e$ <i>loc max</i>	

Крок 6. Знаходимо другу похідну функції:

$$y'' = 2e^{-x^2} (2x^4 - 5x^2 + 1)$$

і критичні точки другого роду. Оскільки $y'' = 0$ тоді й тільки тоді, коли $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$, то критичні точки другого роду:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2},$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}, \quad x_4 = \frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}.$$

Перевіримо знак другої похідної на проміжках. Результати запишемо до таблиці. Графік функції подано на рис. 6.18.

x	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; x_3)$	x_3	$(x_3; x_4)$	x_4	$(x_4; +\infty)$
y''	+	0	-	0	+	0	-	0	+
y		точка перегину		точка перегину		точка перегину		точка перегину	

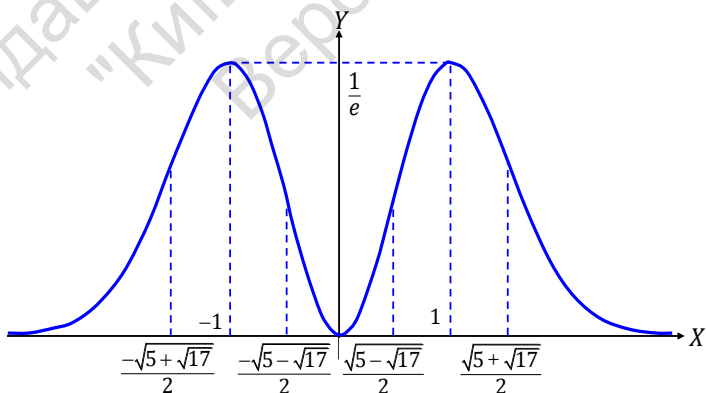


Рис. 6.18

**Запитання для самоконтролю
та приклади розв'язування задач**

1. Що таке похідна функції однієї змінної?
2. Яку операцію називають диференціюванням функції?
3. За якими правилами обчислюють похідну суми, добутку, частки двох функцій?
4. За яким правилом обчислюють похідну складної функції?

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$.

Введемо допоміжну внутрішню функцію $u = x^2 + 3x + 1$.
Тоді, очевидно, можна записати зовнішню функцію $y = \sqrt{u}$.
За правилом диференціювання складної функції дістанемо:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x})$.

Застосуємо правило диференціювання складної функції:

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \frac{\frac{(\sqrt{x})'}{(x+1)}}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \frac{1/2(\sqrt{x})}{(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}.$$

5. Як обчислюють похідну показниково-степеневої функції?

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (x^3 + x^2)^{\cos x}$.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, цю показниково-степеневу функцію можна подати у вигляді:

$$y = e^{\cos x \cdot \ln(x^3 + x^2)}.$$

Тоді за правилом диференціювання складної функції дістанемо:

$$\begin{aligned} y' &= e^{\cos x \cdot \ln(x^3 + x^2)} \left(\cos x \cdot \ln(x^3 + x^2) \right)' = \\ &= e^{\cos x \cdot \ln(x^3 + x^2)} \left(-\sin x \cdot \ln(x^3 + x^2) + \cos x \cdot \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2} \right) = \\ &= (x^3 + x^2)^{\cos x} \cdot \left(\frac{(3x + 2)\cos x}{x(x + 1)} - \sin x \cdot \ln(x^3 + x^2) \right). \end{aligned}$$

6. Як обчислюють похідну функції, що задана неявно?

Приклад 4. Знайти похідну y'_x , якщо функцію $y = y(x)$ задано неявно $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Крок 1. Диференціюємо обидві частини рівності:

$$3x^2 + \frac{y'_x}{y} - x^2 e^y y'_x - 2x e^y = 0.$$

Крок 2. Виразимо y'_x із цієї рівності, дістанемо:

$$y'_x \left(\frac{1}{y} - x^2 e^y \right) = 2x e^y - 3x^2 \Rightarrow y'_x \left(\frac{1 - x^2 y e^y}{y} \right) = 2x e^y - 3x^2,$$

Остаточно маємо: $y'_x = \frac{xy(2e^y - 3x^2)}{1 - x^2 y e^y}.$

7. Як обчислюють похідну функції, що задана параметрично?

Приклад 5. Знайти похідну y'_x , якщо функцію $y = y(x)$ задано параметрично: $x = \ln t$, $y = \sin^2 t$.

Диференціюємо $(dy/dt) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$, $(dx/dt) = 1/t$, тоді:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2t}{1/t} = t \sin 2t.$$

8. Що таке односторонні похідні? Як їх обчислюють?

Приклад 6. Для функції $y = |\sin 3x|$ знайти $y'_+(0)$ і $y'_-(0)$.

Згідно з означенням:

$$y'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\sin 3\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\sin 3\Delta x}{\Delta x} = 3,$$

$$y'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\sin 3\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{-\sin 3\Delta x}{\Delta x} = -3.$$

9. У чому полягає геометричний зміст похідної?

10. Який вигляд має рівняння дотичної до кривої?

11. Який вигляд має рівняння нормалі до кривої?

Приклад 7. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 + 2x$ у точці $M(1; 3)$.

Для визначення кутового коефіцієнта дотичної знайдемо похідну даної функції $y' = 3x^2 + 2$. Значенням похідної у точці $M(1; 3)$ є шуканий кутовий коефіцієнт $k = y'(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$. Підставивши значення до (6.3), отримаємо рівняння дотичної:

$$y - 3 = 5(x - 1) \Rightarrow 5x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 5x - 2;$$

і з (6.4) – рівняння нормалі:

$$y - 3 = -(1/5)(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{16}{5}.$$

12. Як обчислити кут між двома кривими?

Приклад 8. Знайти кут між параболою $y_1(x) = 8 - x^2$ та $y_2(x) = x^2$.

Знайдемо точки перетину цих парабол із системи:

$$\begin{cases} y = 8 - x^2, \\ y = x^2, \end{cases} \begin{cases} 2x^2 = 8, \\ y_2 = x^2, \end{cases} \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Отже, точки перетину парабол $A(2; 4)$ та $B(-2; 4)$.

Продиференціюємо рівняння парабол $y'_1 = -2x$, $y'_2 = 2x$. Знайдемо значення цих похідних при $x = 2$. Дістанемо: $k_1 = y'_1(2) = -4$ та $k_2 = y'_2(2) = 4$.

Використовуючи формулу обчислення кута між кривими (6.5), дістанемо кут, що утворюють параболи у точці $A(2; 4)$:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4 + 4}{1 - 16} = -\frac{8}{15}, \text{ тоді } \varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{8}{15}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{8}{15}.$$

Аналогічно можна визначити кут між кривими у точці $B(-2; 4)$. Це кут $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$.

13. У чому полягає фізичний зміст похідної?

Приклад 9. За параболою $y = x(8 - x)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється, залежно від часу t , за законом $x = t\sqrt{t}$ (t у секундах, x – у метрах). Яка швидкість зміни ординати у точці $M(1; 7)$?

Знайдемо закон зміни ординати, замінивши у рівнянні параболи x на $t\sqrt{t}$, дістанемо: $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. Швидкістю зміни ординати є похідна за часом $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$. У точці $M(1; 7)$ значення $t = 1$. Тому $y'(1) = 9$, тобто швидкість зміни ординати дорівнює 9 м/с.

Приклад 10. Точка рухається за законом:

$$s(t) = \frac{1}{4} \cdot t^4 + \frac{1}{3} \cdot t^3 - 7 + 2,$$

де відстань s (м), t – час (с). Визначити швидкість і прискорення точки через 2 с після початку руху.

Швидкість руху точки визначають за формулою (6.5):

$$v(t) = s'(t) = t^3 + t^2 - 7 \text{ (м/с)}.$$

Отриманий вираз виражає загальну формулу для швидкості руху точки. Щоб визначити швидкість руху точки за 2 с після початку руху, підставимо $t = 2$. Дістанемо:

$$v(2) = 2^3 + 2^2 - 7 = 5 \text{ м/с.}$$

Прискорення точки:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 3t^2 + 2t, a(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16.$$

14. Що називають диференціалом функції?

15. Як обчислюють диференціал функції?

Приклад 11. Знайти диференціал функції

$$y = \ln(\arctg(\sin x)).$$

Застосуємо формулу (6.17) для обчислення диференціала:

$$dy = \frac{d(\arctg(\sin x))}{\arctg(\sin x)} = \frac{\frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot d(\sin x)}{\arctg(\sin x)} = \frac{\cos x \, dx}{(1 + \sin^2 x) \cdot \arctg(\sin x)}.$$

16. Яку формулу застосовують за наближених обчислень за допомогою диференціала?

Приклад 12. Наближено обчислити значення $\sqrt[3]{26,19}$.

Використовуватимемо наближену формулу (6.20). У цьому прикладі: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$.

Покладемо $x_0 = 27$, $\Delta x = -0,81$, тоді $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{26,19}$,

$$f(x_0) = \sqrt[3]{27} = 3, df(x_0) = \frac{dx}{3 \cdot \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{\Delta x}{3 \cdot \sqrt[3]{27^2}}.$$

За формулою (6.20):

$$\sqrt[3]{26,19} = \sqrt[3]{27 - 0,81} \approx \sqrt[3]{27} - \frac{0,81}{3 \cdot \sqrt[3]{27^2}} = 3 - \frac{0,81}{3 \cdot 9} = 3 - 0,03 = 2,97.$$

17. Як визначають похідні 2-го, 3-го, ..., n -го порядків?

Приклад 13. Знайти похідну n -го порядку для функції

$$y = \ln(2x + 3).$$

Обчислимо похідні:

$$y' = \frac{2}{2x + 3}, y'' = \frac{-2^2 \cdot 1}{(2x + 3)^2}, y''' = \frac{2^3 \cdot 2}{(2x + 3)^3}, y^{(4)} = \frac{-2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(2x + 3)^4},$$

$$\text{тоді } y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! \cdot 2^n}{(2x + 3)^n}.$$

18. Якою є формула Лейбніца для обчислення похідної n -го порядку добутку двох функцій?

Приклад 14. Використовуючи формулу Лейбніца, знайти похідну четвертого порядку від функції $y = x^7 e^{5x}$.

У формулі Лейбніца (6.35) покладемо $u = x^7$, $v = e^{5x}$. Послідовно знаходимо похідні функцій:

$$\begin{aligned} u' &= 7x^6, u'' = 42x^5, u''' = 210x^4, u^{(4)} = 840x^3, \\ v' &= 5e^{5x}, v'' = 25e^{5x}, v''' = 125e^{5x}, v^{(4)} = 625e^{5x}. \end{aligned}$$

При $n = 4$ формула Лейбніца набуває вигляду:

$$(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + v^{(4)}u.$$

Підставивши відповідні похідні, дістанемо:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= 840x^3 e^{5x} + 4 \cdot 210x^4 \cdot 5e^{5x} + 6 \cdot 42x^5 \cdot 25e^{5x} + \\ &+ 4 \cdot 7x^6 \cdot 125e^{5x} + x^7 \cdot 625e^{5x} = \\ &= x^3 e^{5x} (840 + 4200x^3 + 6300x^2 + 3500x^3 + 625x^4). \end{aligned}$$

19. Як обчислюють похідну другого порядку функції, що задана неявно?

Приклад 15. Знайти y''_{xx} , якщо функцію задано неявно рівнянням $x^2 - y^2 = a^2$.

Крок 1. Знайдемо першу похідну y'_x . Для цього продиференціюємо обидві частини рівності $2x - 2y \cdot y'_x = 0$ або $x - y \cdot y'_x = 0$, звідки:

$$y'_x = x/y.$$

Крок 2. Повторно диференціюємо рівність $x - y \cdot y'_x = 0$:

$$1 - (y')^2 - y \cdot y''_{xx} = 0. \text{ Виражаємо } y''_{xx} = \frac{1 - (y')^2}{y}.$$

Крок 3. Підставимо $y'_x = x/y$ до отриманого виразу:

$$y''_{xx} = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{x^2 - y^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

20. Як обчислюють похідну другого порядку функції, що задана параметрично?

Приклад 16. Знайти y''_{xx} для функції $y = y(x)$, що задана параметрично: $x = \varphi(t) = \ln t$, $y = \psi(t) = \sin 2t$.

Крок 1. Обчислимо похідні:

$$\varphi'_t = \frac{1}{t}, \quad \varphi''_{tt} = -\frac{1}{t^2}, \quad \psi'_t = 2\cos 2t, \quad \psi''_{tt} = -4\sin 2t.$$

Крок 2. Використовуючи формулу (6.34) для обчислення другої похідної функції, що задана параметрично, дістанемо:

$$y''_{xx} = \frac{-4\sin 2t \cdot (1/t) - \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot 2\cos 2t}{1/t^3} = t(2\cos 2t - 4t\sin 2t).$$

21. Як обчислюють диференціали 1-го, 2-го, ..., n-го порядків?

Приклад 17. Для функції $y = e^x \ln x$ знайти диференціал третього порядку.

Формула Лейбніца (6.35) при $n=3$ має вигляд:

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''''.$$

Поклавши $u = e^x$ та $v = \ln x$, дістанемо:

$$u' = u'' = u''' = e^x, \quad v' = 1/x, \quad v'' = -1/x^2, \quad v''' = 2/x^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } y''' &= e^x \cdot \ln x + 3 \cdot e^x \cdot (1/x) + 3 \cdot e^x \cdot \left(-1/x^2\right) + e^x \cdot (2/x^3) = \\ &= e^x \left(\ln x + (3/x) - (3/x^2) + (2/x^3) \right), \\ d^3 y &= e^x \left(\ln x + (3/x) - (3/x^2) + (2/x^3) \right) dx^3. \end{aligned}$$

22. Як формулюють теорему Ролля?

Приклад 18. Використовуючи теорему Ролля, довести, що для многочлена $P(x) = (x+3)(x+2)(x-1)$ на проміжку $(-3;1)$ знайдеться корінь рівняння $P''(x) = 0$.

Многочлен перетворюється на нуль у точках $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. На кожному проміжку $(-3; -2)$ і $(-2; 1)$ функція $y = P(x)$ диференційована та набуває значень $P(-3) = P(-2) = 0$ і $P(1) = P(-2) = 0$. Тому за теоремою Ролля знайдуться такі точки $c_1 \in (-3; -2)$ і $c_2 \in (-2; 1)$, що $P'(c_1) = P'(c_2) = 0$.

До функції $y = P'(x)$ на відрізку $[c_1; c_2]$ можна знову застосувати теорему Ролля, тому існує така точка $c \in [c_1; c_2]$, в якій $P''(c) = 0$.

23. Як формулюють теорему Лагранжа?

Приклад 19. Оцінити значення $\ln(1+e)$, застосовуючи формулу Лагранжа.

Розглянемо функцію $f(x) = \ln x$. Вона диференційована при $x > 0$ і $f'(x) = 1/x$. Запишемо формулу Лагранжа (6.38), поклавши $b = x$, дістанемо: $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$, де $c \in (a; x)$. На відрізку $[e; e+1]$ застосуємо цю формулу для заданої функції:

$$\ln(1+e) = \ln e + (1/c)(e+1-e) = 1 + (1/c), \text{ де } c \in (e; e+1).$$

Оцінимо вираз $1 + (1/c)$, дістанемо:

$$1 + (1/c) < 1 + (1/e), \text{ оскільки } c > e;$$

$$1 + \frac{1}{c} > 1 + \frac{1}{e+1}, \text{ оскільки } c < e+1.$$

Таким чином, $1 + \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}$. Підставивши до цієї оцінки $e \approx 2,7$, остаточно дістанемо: $1,27 < \ln(1+e) < 1,37$.

24. Як формулюють теорему Коші?

Приклад 20. Перевірити, що функції $f(x) = \sin x$ і $g(x) = \cos x$ задовольняють умови теореми Коші на відрізку $[\pi/6; \pi/3]$, знайти точку c , яка фігурує у формулі Коші.

Функції $f(x) = \sin x$ і $g(x) = \cos x$ неперервні на відрізку $[\pi/6; \pi/3]$, їх похідні $f'(x) = \cos x$ і $g'(x) = -\sin x$ існують в усіх точках проміжку $[\pi/6; \pi/3]$, і похідна $g'(x) = -\sin x \neq 0$ на цьому проміжку. За теоремою Коші існує точка $c \in (\pi/6; \pi/3)$ така, що має місце (6.41). У нашому прикладі:

$$\frac{\sin(\pi/3) - \sin(\pi/6)}{\cos(\pi/3) - \cos(\pi/6)} = -\frac{\cos c}{\sin c}.$$

Звідси $\operatorname{ctg} c = -1$, тобто $c = -\pi/4$.

25. Яким є формулювання правил Лопіталя? В яких випадках ці правила застосовують?

Приклад 21. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Функції у чисельнику та знаменнику диференційовані в околі точки $x = 1$ і прямують до нуля при $x \rightarrow 1$, тому маємо невизначеність виду $(0/0)$. За правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + (1/x)}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Приклад 22. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Має місце невизначеність виду $(0/0)$. Функції у чисельнику та знаменнику диференційовані, границі існують. Застосувавши правило Лопіталя тричі, дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Приклад 23. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$.

У чисельнику та знаменнику стоять функції, диференційовані та нескінченно великі при $x \rightarrow 1$. Границі існують. Має місце невизначеність виду (∞/∞) . Застосувавши правило Лопіталя, дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/(x-1)}{(-\pi)/(\sin^2 \pi x)} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{x-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2\pi x}{1} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 24. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2 \ln x)$.

У цьому прикладі має місце невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність (∞/∞) , застосуємо правило Лопіталя. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2 \ln x) &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{\ln x}{1/x^2} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1/x}{-(2/x^3)} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 = 0. \end{aligned}$$

Приклад 25. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Має місце невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Для того, щоб знайти границю, зведемо дробі до спільного знаменника, а потім, діставши невизначеність виду $(0/0)$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2+x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 26. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

У прикладі має місце невизначеність вигляду (0^0) . Позначимо $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, тоді за основною логарифмічною тотожністю дістанемо $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$. У нашому випадку $(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)}$.

У показнику степеня має місце невизначеність $(0 \cdot \infty)$. Обчислимо границю показника, користуючись правилом Лопіталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\sin x) &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\sin x)}{1/x} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x / \sin x}{-(1/x^2)} \right) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 \cos x}{\sin x} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} \right) = -\frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(\sin x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\sin x)} = e^0 = 1$.

Приклад 27. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(1/x))^x$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(1/x)) = +\infty$, то має місце невизначеність вигляду (∞^0) .

Позначимо $f(x) = \ln(1/x)$, $g(x) = x$, тоді за основною логарифмічною тотожністю дістанемо $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$.

Запишемо $(\ln(1/x))^x = e^{x \ln(\ln(1/x))}$. Зробимо заміну $t = 1/x$.

При $x \rightarrow 0+$, $t \rightarrow +\infty$. Обчислимо границю показника степеня, застосовуючи правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\ln(1/x))}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln t)}{t} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t \ln t} = 0.$$

Остаточню маємо: $\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(1/x))^x = e^0 = 1$.

26. Як записують формулу Тейлора? В якій формі можна записати залишкові члени?

Приклад 28. Розкласти многочлен $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ за степенями двочлена $(x - 2)$.

Многочлен має похідні довільного порядку. Покладемо у формулі Тейлора (6.42) $x_0 = 2$. Обчислимо значення функції, її похідні та коефіцієнти у формулі:

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4 \quad f(2) = 0$$

$$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8 \quad f'(2) = 0$$

$$f''(x) = 24x^2 - 30x - 6 \quad f''(2) = 30$$

$$f'''(x) = 48x - 30 \quad f'''(2) = 66$$

$$f^{(4)}(x) = 48 \quad f^{(4)}(2) = 48$$

$$f^{(5)}(x) = 0 \quad f^{(5)}(2) = 0$$

Запишемо формулу Тейлора для цієї функції:

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 0(x-2) + \frac{1}{2!} \cdot 30(x-2)^2 + \frac{1}{3!} \cdot 66(x-2)^3 + \frac{1}{4!} \cdot 48(x-2)^4,$$

тобто $f(x) = 15(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + 2(x-2)^4$ і $R_5(x) = 0$,

оскільки $f^{(5)}(x) = 0$.

27. Як записують формулу Маклорена?

Приклад 29. Розкласти функцію $f(x) = \sqrt{1+x}$ за формулою Маклорена у точці $x_0 = 0$ та записати залишковий член у формі Пеано.

Обчислимо значення функції та її похідні у точці $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = (1/2)(1+x)^{-1/2} \quad f'(0) = 1/2$$

$$f''(x) = 1/2 \cdot (-1/2)(1+x)^{-3/2} = -(1/2^2)(1+x)^{-3/2} \quad f''(0) = -(1/2^2)$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2^k} (1+x)^{-\frac{2k+1}{2}} \quad f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k+1} (2k-3)!!}{2^k}$$

Тоді за формулою Маклорена (6.46) маємо:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} x - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^3} x^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} x^n + o(x^n).$$

Приклад 30. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Запишемо для неї формулу Маклорена (6.48):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}).$$

Залишковий член у формі Лагранжа має вигляд:

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \theta \in (0;1),$$

і похибку наближення оцінити легко:

$$|R_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Якщо обмежитися одним членом, поклавши $\sin x \approx x$, то для того, щоб похибка була меншою, наприклад за 0,001, достатньо взяти, вважаючи $x > 0$, $(x^3/6) < 0,001$ або $x < 0,1817$, що наближено дорівнює 10° . При застосуванні формули $\sin x \approx x - (x^3/6)$ для досягнення тієї самої точності достатньо взяти $(x^5/120) < 0,001$ або $x < 0,6544 (\approx 37,5^\circ)$.

Якщо обмежитися кутами $x < 0,4129 (\approx 23,5^\circ)$, то похибка буде навіть менше 0,0001 і т. д. Бачимо, що зі збільшенням числа членів многочлена Тейлора він із більшою точністю та на більшому проміжку відтворює цю функцію (рис. 6.19), де, поряд

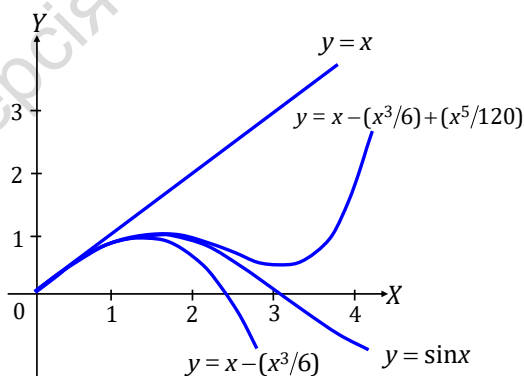


Рис. 6.19

із графіком функції $y = \sin x$, подамо графіки:

$$y = x, \quad y = x - (x^3/6), \quad y = x - (x^3/6) + (x^5/120).$$

28. Яка ознака монотонності функції?

Приклад 31. Знайти проміжки монотонності функції

$$y = x^2 \cdot 2^{-x}.$$

Крок 1. Область визначення функції: $D(y) = \mathbf{R}$.

Крок 2. Обчислимо похідну заданої функції:

$$y' = (x^2 \cdot 2^{-x})' = 2x \cdot 2^{-x} + x^2 \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1) = x \cdot 2^{-x} (2 - x \cdot \ln 2).$$

Знаходимо критичні точки першого роду з умов $y' = 0$ або y' не існує. Маємо:

$$\begin{cases} x = 0, \\ (2 - x \cdot \ln 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{2}{\ln 2}. \end{cases}$$

Крок 3. Розв'яжемо нерівність:

$$2x \cdot 2^{-x} \left(1 - \frac{x}{2} \cdot \ln 2 \right) > 0.$$

Оскільки $2^{-x} > 0$ за всіх x , то $x(2 - x \cdot \ln 2) > 0$, тобто при

$$x \in \left(0; \frac{2}{\ln 2} \right) y'(x) > 0,$$

це означає, що функція зростає, а при

$$x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{\ln 2}; +\infty \right) y'(x) < 0,$$

і це означає, що на цих проміжках функція спадає.

29. Якими є необхідні, а якими – достатні умови локального екстремуму функції?

Приклад 32. Знайти точки локального екстремуму функції $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

Крок 1. Задану функцію визначено на множині: $D(y) = \mathbf{R}$.

Крок 2. Знайдемо критичні точки першого роду, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

Оскільки $y'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x} (3 - x)$, то $y'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$. Ці точки є критичними.

Крок 3. Функція диференційована скрізь, тому зручно застосувати другу достатню умову локального екстремуму. Визначимо:

$$y''(x) = 2xe^{-x}(3-x) - x^2e^{-x}(3-x) - x^2e^{-x} = xe^{-x}(x^2 - 6x + 6).$$

Крок 4. Оскільки у критичних точках друга похідна

$$y''(0) = 0, y''(3) = 3e^{-3}(9 - 18 + 6) < 0,$$

то у точці $x_2 = 3$ функція має локальний максимум:

$$y_{\max} = y(3) = 27e^{-3}.$$

Характер критичної точки $x_1 = 0$ ще не визначено, оскільки $f'''(0) = 0$. Для визначення її характеру знаходимо $y'''(x)$:

$$\begin{aligned} y'''(x) &= -e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x) + e^{-x}(3x^2 - 12 + 6) = \\ &= e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6). \end{aligned}$$

Таким чином, $y'''(0) = 6 \neq 0$. У точці $x_1 = 0$ перша, відмінна від нуля, похідна третього порядку (непарного), тому критична точка $x_1 = 0$ не є точкою локального екстремуму.

Приклад 33. Знайти точки локального екстремуму функції:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}.$$

Крок 1. Функція визначена скрізь, крім точки $x = -2$, тобто $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Крок 2. Визначимо критичні точки першого роду. Для цього знайдемо $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(x^{2/3} \cdot \frac{1}{x+2} \right)' = \frac{(2/3)x^{-(1/3)}(x+2) - x^{2/3}}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{2x+4-3x}{3x^{1/3}(x+2)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x-4}{\sqrt[3]{x}(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Оскільки $y'(x) = 0$ при $x = 4$ та $y'(x)$ не існує при $x = -2$ і $x = 0$, то точки $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$ є критичними точками першого роду для заданої функції.

Крок 3. При $x = -3$ $y'(-3) < 0$, тому $y'(x) < 0$ на проміжку $(-\infty; -2)$. Аналогічно визначаємо знаки $y'(x)$ на інших інтервалах. Результати $y'(x)$ запишемо до таблиці.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	-	не існує	-	не існує	+	0	-
y		не існує		0 loc min		$\sqrt[3]{2}/3$ loc max	

Із таблиці видно, що $(0; 0)$ – точка локального мінімуму (оскільки $y'(x)$ змінює свій знак з мінуса на плюс), а $(4; \sqrt[3]{2}/3)$ – точка локального максимуму ($y'(x)$ змінює свій знак з плюса на мінус).

У цьому прикладі не можна скористатися другою достатньою умовою для визначення характеру критичної точки $x=0$, оскільки у цій точці функція не диференційована.

30. Як можна знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку?

Приклад 34. Знайти найбільше значення функції

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

на проміжку $(0; +\infty)$.

Крок 1. На проміжку $(0; +\infty)$ функція диференційована та її похідна:

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Крок 2. Знайдемо критичні точки першого роду з умов $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує. Оскільки $f'(x)=0$ при $1 - \ln x = 0$, то $x = e$, а $f'(x)$ не існує при $x=0$, але ця точка не є критичною, адже при $x=0$ функція не визначена.

Крок 3. Знайдемо $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-(1/x) \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x(3 - \ln x)}{x^4} = \frac{\ln x - 3}{x^3}.$$

Оскільки $f''(e) < 0$, то у точці $x = e$ функція досягає максимуму $f(e) = 1/e$. Тому:

$$\max_{x \in (0; +\infty)} f(x) = 1/e.$$

31. Які можуть бути асимптоти графіка функції? Як їх знайти?

Приклад 35. Знайти асимптоти графіка функції:

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}.$$

Область визначення функції:

$$D = [-\infty; 0] \cup (2; +\infty).$$

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty,$$

то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

Горизонтальних асимптот немає, оскільки:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \infty \text{ і } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \infty.$$

Визначимо, чи існують похилі асимптоти. Використовуючи (6.58) і (6.59), знаходимо:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1-(2/x)}} = 1,$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x - x + 2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1-(2/x)}(1 + \sqrt{1-(2/x)})} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, існує права похила асимптота $y = x + 1$.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x/(x-2)}}{-1}$$

(чисельник і знаменник поділено на додатну величину $(-x)$),

$$k_2 = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{1-(2/x)}} = -1,$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-x - 2 + x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x})} = -1. \end{aligned}$$

Таким чином, існує ліва похила асимптота:

$$y = -x - 1.$$

32. Як знайти напрямки опуклості й точки перегину графіка функції?

Приклад 36. Знайти напрямки опуклості та точки перегину графіка функції $y = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$ (рис. 6.20).

Крок 1. Функцію визначено на проміжку $(0; +\infty)$.

Крок 2. Обчислимо першу та другу похідні функції:

$$y'(x) = \left(3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)' = 3 \frac{(1/x) \cdot \sqrt{x} - (1/2\sqrt{x}) \cdot \ln x}{x} = 3 \frac{1 - (1/2)\ln x}{x^{3/2}}.$$

$$y''(x) = 3 \left(\frac{1 - (1/2)\ln x}{x^{3/2}} \right)' = 3 \frac{-(1/2) \cdot (1/x) \cdot x^{3/2} - (3/2)x^{1/2} (1 - (1/2)\ln x)}{x^3} =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{8 - 3\ln x}{x^{5/2}}.$$

Крок 3. Знаходимо критичні точки другого роду $y''(x) = 0$ при $8 - 3\ln x = 0$ або $x = e^{8/3}$, $y'(x)$ не існує при $x = 0$. Але $x = 0$ не є критичною точкою, оскільки не належить області визначення функції. Результати дослідження запишемо до таблиці.

x	$(0; e^{8/3})$	$e^{8/3}$	$(e^{8/3}; +\infty)$
y''	-	0	+
y		точка перегину	

Отже, $x = e^{8/3}$ є точкою перегину. При $x \in (0; e^{8/3})$ графік функції опуклий уверх, а при $x \in (e^{8/3}; +\infty)$ – опуклий униз.

32. Який алгоритм побудови графіка функції?

Приклад 37. Побудувати графік функції $y = (1/x)e^{1/x}$.

Крок 1. Область визначення:

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Крок 2. Оскільки $y(-x) = -(1/x)e^{-(1/x)} \neq \pm y(x)$, то функція ні парна, ні непарна, тобто загального вигляду й неперіодична.

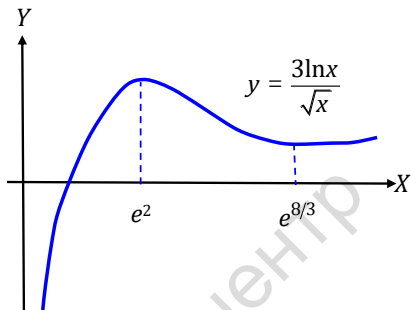


Рис. 6.20

Крок 3. Точок перетину з осями координат немає.

Крок 4. Знаходимо асимптоти. Єдина точка розриву $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} ye^y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = 0.$$

Таким чином, вертикальна асимптота $x=0$ (вісь ординат), але асимптотична поведінка функції спостерігається тільки праворуч від осі ординат ($x > 0$).

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x}}{x} = 0,$$

то рівняння горизонтальної асимптоти $y = 0$ (вісь OX).

Крок 5. Знаходимо критичні точки першого роду (точки можливого екстремуму). Для цього обчислимо першу похідну функції:

$$y'(x) = -(1/x^2)e^{1/x} + (1/x)e^{1/x} \cdot (-1/x^2) = -(1/x^2)e^{1/x}(1 + 1/x).$$

Стаціонарні точки знаходимо із умови $y' = 0$. Тоді $(1 + (1/x)) = 0$, тобто при $x = -1$. При $x = 0$ похідна не існує. Обчислимо тепер значення функції:

$$y(-1) = -e^{-1} = -(1/e).$$

Результати дослідження зручно записати у вигляді таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$-$	$-$
y		$-(1/e)$ <i>loc min</i>		$-$	

Отже, функція зростає на проміжку $(-1; 0)$ і спадає – на проміжках $(-\infty; -1)$ та $(0; +\infty)$. Точка $(-1; -(1/e))$ є точкою локального мінімуму.

Крок 6. Знаходимо критичні точки другого роду – точки, в яких y'' не існує або $y'' = 0$. Обчислимо другу похідну функції:

$$y'' = -\frac{x^3 - 3x^2(x+1)}{x^6} \cdot e^{1/x} - \frac{x+1}{x^3} \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x} \cdot \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^5}.$$

При $x=0$ другої похідної не існує, а $y''=0$ при $2x^2 + 4x + 1 = 0$.

$$\text{При } x_1 = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, критичні точки другого роду:

$$x_1 = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = 0.$$

Перевіримо знак другої похідної на проміжках. Результати запишемо до таблиці. Графік функції подано на рис. 6.21.

x	$(-\infty; -x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	-	0	+	0	-	-	+
y	$\cap$	точка перегину	$\cup$	точка перегину	$\cap$	$\cap$	$\cup$

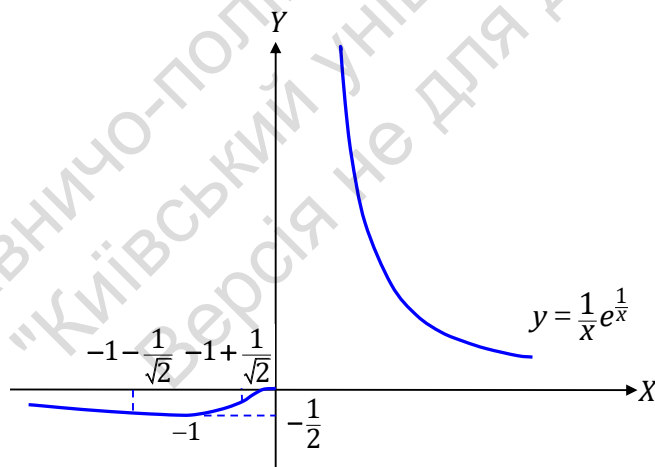


Рис. 6.21

Розділ 7

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

7.1. Еластичність

7.1.1. Еластичність функції. Основні поняття

Важливим напрямком застосування диференціального числення в економіці є введення за його допомогою поняття *еластичності*. Коефіцієнт еластичності показує відносну зміну досліджуваного економічного показника під дією одиничної відносної зміни економічного фактора, від якого він залежить, за незмінних інших факторів, що впливають на нього.

Нехай задано функцію $y = f(x)$. Зміна незалежної змінної x на Δx спричиняє зміни функції y на Δy . Виникає запитання: як суттєво змінюється функція y залежно від зміни аргументу x ? Одним із показників реагування однієї змінної на зміну іншої змінної є похідна

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

яка характеризує швидкість зміни функції за зміни аргументу. Але в економіці цей показник незручний, оскільки він залежить від вибору одиниці вимірювання. Наприклад, розглянемо функцію попиту на цукор $q = q(p)$ від його ціни p і побачимо, що значення похідної

$$q'_p = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

за кожної ціни p (гривень) залежить від того, як вимірюється попит на цукор (у кілограмах або тонах). У першому випадку похідну вимірюють у кг/грн, у другому – у т/грн, відповідно її значення за однієї тієї самої ціни будуть різними, залежно від одиниць вимірювання величини попиту. Тому для якісного вимірювання зміни функції щодо зміни аргументу в економіці вивчають зв'язок не абсолютних змін величин x та y (Δx та Δy), а їх відносних або відсоткових змін.

Означення. Еластичністю функції $y = f(x)$ називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту аргументу x при $\Delta x \rightarrow 0$ і позначають так:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right). \quad (7.1)$$

Еластичність функції виражає наближено, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ за зміни незалежної змінної x на 1 %, тобто:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y) \frac{\Delta x}{x}.$$

Із означення еластичності та похідної випливає, що:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y',$$

або

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (7.2)$$

Оскільки для функції $y = f(x)$ має місце формула:

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))/x},$$

то коефіцієнт еластичності $E_x(y)$ виражає відношення граничного значення $f'(x)$ до середнього значення $f_{\text{сер}} = \frac{f(x)}{x}$ функції $y = f(x)$ у точці x .

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' \text{ та } x = \frac{1}{1/x} = \frac{1}{(\ln x)'},$$

тому

$$E_x(y) = \frac{(\ln y)'}{(\ln x)'}, \quad (7.3)$$

тобто еластичність можна подати у вигляді так званої "логарифмічної похідної".

7.1.2. Геометричний зміст еластичності функції

Розглянемо *геометричний зміст еластичності*. Як і похідна, еластичність має простий геометричний зміст. Оскільки $y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут нахилу дотичної, що проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці x , то за означенням (7.1):

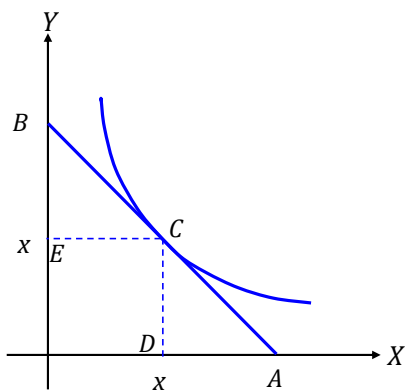


Рис. 7.1

$$E_x(y) = (x/y) \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Знайдемо еластичність функції у довільній точці $C(x; y)$, для чого проведемо дотичну AB до графіка функції $y = f(x)$ у точці C . Нехай точки перетину дотичної з осями OX та OY відповідно A та B .

Розглянемо спадну функцію, графік якої опуклий униз: $y = f(x)$ (рис. 7.1).

Із $\triangle ACD$ дістанемо:

$$\frac{CD}{AD} = \operatorname{tg} \angle DAC = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \Rightarrow AD = \frac{CD}{-\operatorname{tg} \alpha}; \quad CD = f(x),$$

тобто,

$$AD = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Із подібності трикутників CBE та CDA випливає, що:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CE}{AD} = -\frac{f'(x)x}{f(x)} = -E_x(y).$$

Таким чином:

$$E_x(y) = -\frac{CB}{CA}, \quad (7.4)$$

тобто геометрично еластичність спадної функції дорівнює відношенню відстаней за дотичною від точки C до точок перетину з осями OY та OX , що взяті зі знаком мінус. У випадку зростаючої функції, що опукла вниз (рис. 7.2) або опукла вгору (рис. 7.3), еластичність функції також дорівнюватиме відношенню CB/CA (пропонуємо це зробити самостійно), а знак еластичності визначатиметься розміщенням точок B та A . Якщо точки A та B лежать по один бік від точки C на дотичній (як на рис. 7.2 та 7.3), то у рівності (7.4) необхідно брати знак плюс. Якщо точки A та B лежать по різні боки від точки C (рис. 7.1), то у рівності (7.4) необхідно брати знак мінус.

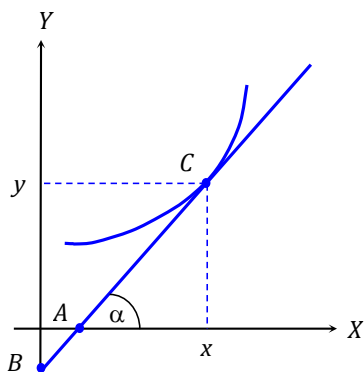


Рис. 7.2

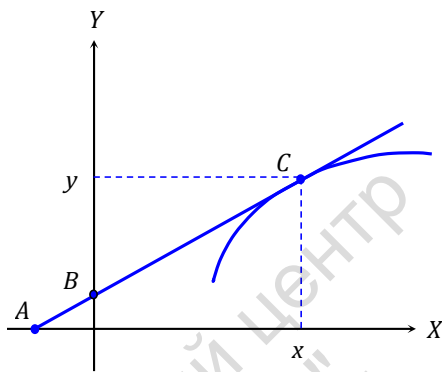


Рис. 7.3

Отже, еластичність функції (за абсолютною величиною) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від заданої точки графіка функції до точок її перетину з осями OY та OX .

Зауваження. Еластичність функції на рис. 7.2 більше одиниці (адже $CB > CA$), а на рис. 7.3 – менше одиниці (адже $CB < CA$).

7.1.3. Властивості еластичності

1. Еластичність – безрозмірна величина, значення якої не залежить від того, в яких одиницях вимірюють величини y та x .

$$E_{ax}(by) = E_x(y). \quad (7.5)$$

Дійсно,
$$E_{ax}(by) = \frac{ax}{by} \cdot \frac{d(by)}{d(ax)} = \frac{ax}{by} \cdot \frac{b(dy)}{a(dx)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = E_x(y).$$

2. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = y'/y$, тобто:

$$E_x(y) = x \cdot T_y. \quad (7.6)$$

3. Еластичності взаємно обернених функцій – взаємно обернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \quad (7.7)$$

Дійсно,
$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}.$$

4. Еластичність добутку двох функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$, що залежать від одного й того самого аргументу x , дорівнює сумі еластичностей:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v). \quad (7.8)$$

Дійсно,
$$E_x(uv) = \frac{x}{uv} \cdot \frac{d(uv)}{dx} = \frac{x}{uv} \cdot \left[v \left(\frac{du}{dx} \right) + u \left(\frac{dv}{dx} \right) \right] =$$
$$= \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{x}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = E_x(u) + E_x(v).$$

5. Еластичність частки двох функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$, що залежать від одного й того самого аргументу x , дорівнює різниці еластичностей:

$$E_x(u/v) = E_x(u) - E_x(v). \quad (7.9)$$

Дійсно,
$$E_x(u/v) = \frac{x}{u/v} \cdot \frac{d(u/v)}{dx} = \frac{xv}{u} \cdot \frac{vdu - u dv}{v^2 dx} =$$
$$= \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{x}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = E_x(u) - E_x(v)$$

6. Еластичність алгебраїчної суми двох функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$ обчислюють за формулою:

$$E_x(u \pm v) = \frac{uE_x(u) \pm vE_x(v)}{u \pm v}. \quad (7.10)$$

Дійсно,
$$E_x(u \pm v) = \frac{x}{u \pm v} \cdot \frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{x}{u \pm v} \cdot \left[\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \right] =$$
$$= \frac{\frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx} u \pm \frac{x}{v} \cdot \frac{dv}{dx} v}{u \pm v} = \frac{uE_x(u) \pm vE_x(v)}{u \pm v}.$$

Приклад 7.1. Еластичність степеневі функції $y = x^\alpha$ стала й дорівнює показнику степеня α : $E_x(x^\alpha) = \alpha$.

Дійсно,
$$E_x(x^\alpha) = \frac{x}{x^\alpha} \cdot \frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x}{x^\alpha} = \alpha.$$

Приклад 7.2. Еластичність показникової функції $y = a^x$ ($a > 0$):

$$y = x^\alpha \quad (a > 0)$$

пропорційна x : $E_x(x^\alpha) = x \ln a$.

Дійсно,
$$E_x(a^x) = \frac{x}{a^x} \cdot \frac{da^x}{dx} = \frac{x}{a^x} \cdot a^x \ln a = x \ln a.$$

Приклад 7.3. Еластичність лінійної функції $y = kx + b$:

$$E_x(kx + b) = \frac{kx}{kx + b}.$$

Дійсно,

$$E_x(kx + b) = \frac{x}{kx + b} \cdot \frac{d(kx + b)}{dx} = \frac{x}{kx + b} \cdot k = \frac{kx}{kx + b}.$$

Якщо лінійна функція спадна (кутовий коефіцієнт від'ємний $k < 0$), то еластичність функції змінюється від нуля у точці y_m перетину із графіком осі OY до $-\infty$ у точці x_m перетину осі OX , проходячи через граничне значення (-1) у середній точці $((x_m/2); (y_m/2))$. Отже, еластичність лінійної функції залежить не лише від кута нахилу прямої, а і від того, в якій точці x оцінюють еластичність (рис. 7.4).

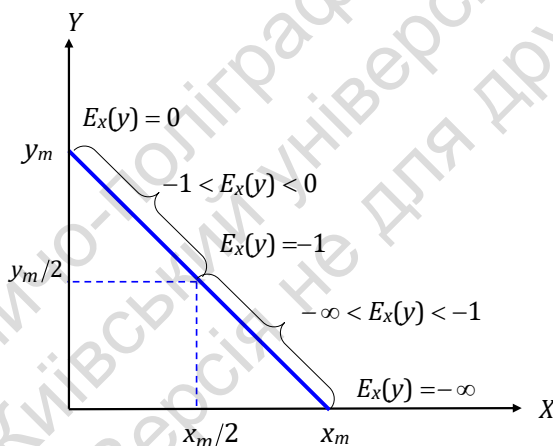


Рис. 7.4

Означення. Якщо $|E_x(y)| < 1$, то функцію називають **нееластичною** (її відносний приріст спадає). Якщо $|E_x(y)| > 1$, то функцію називають **еластичною** (її відносний приріст зростає).

Означення. Функцію із нескінченною еластичністю в усіх точках називають **цілком еластичною**, а з нульовою еластичністю в усіх точках – **цілком нееластичною**.

7.1.4. Застосування еластичності в економічному аналізі

Еластичність функцій застосовують при аналізі попиту та споживання, прогнозах цінової політики. Нехай $q = q(p)$ – функція попиту товару ціною p за одиницю.

Якщо $|E_p(q)| < 1$, то попит вважають нееластичним, якщо $|E_p(q)| = 1$, то – нейтральним, якщо $|E_p(q)| > 1$, то – еластичним щодо ціни.

1. Еластичність попиту за ціною

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} \cdot q' \quad (7.11)$$

виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-яке благо або товар зі зміною ціни на 1 % і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

Приклад 7.4. Установлено залежність ціни p за одиницю товару, яка представлена функцією $p(q) = 2400 - 0,2 \cdot q$, де p вимірюють у гривнях, q – кількість одиниць товару, що користується попитом у споживачів. Фірма хоче визначити еластичність попиту для обсягу випуску товару 2000 одиниць.

Спочатку обчислимо $p(2000) = 2400 - 0,2 \cdot 2000 = 2000$, а потім еластичність ціни за попитом:

$$E_q(p) = \frac{q}{p} \cdot p' = \frac{q}{2400 - 0,2 \cdot q} \cdot (-0,2) = \frac{-0,2 \cdot q}{-0,2 \cdot (q - 12000)} = \frac{q}{(q - 12000)},$$
$$E_{2000}(p) = \frac{2000}{(2000 - 12000)} = -0,2.$$

Це означає: якщо ціну однієї одиниці товару зменшити на 0,2 %, то попит на товар збільшиться приблизно на 1 % (із 2000 до 2020 од.).

Можна розглядати й обернену залежність:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{1}{E_q(p)}.$$

Тоді дістанемо еластичність попиту для обсягу випуску товару 2000 од.:

$$E_p(q) = \frac{1}{-0,2} = -5.$$

Це означає, що збільшення ціни на одиницю товару на 1 % спричинить зменшення попиту на товар приблизно на 5 % (з 2000 до 1900 од.).

Приклад 7.5. Установлено функції:

$$\text{попиту } q = \frac{p+8}{p+2} \text{ та пропозиції } s = p + \frac{1}{2},$$

де q і s – обсяги, а p – ціна товару.

Знайти рівноважну ціну; еластичність попиту та пропозиції за рівноважної ціни.

Рівноважну ціну p^* можна знайти із умови рівноваги $q(p) = s(p)$, яку в нашому прикладі можна переписати у вигляді:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + \frac{1}{2} \text{ або } 2p^2 + 3p - 14 = 0.$$

Маємо розв'язки: $p_1 = -3,5$ і $p_2 = 2$.

З економічних міркувань $p_1 = -3,5 < 0$ – сторонній розв'язок. Отже, рівноважна ціна становить $p^* = 2$.

Обчислимо:

- еластичність попиту $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'_p$, $E_p(q) = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}$;

- еластичність пропозиції $E_p(s) = \frac{p}{s} s'_p$, $E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}$.

За рівноважної ціни $p^* = 2$ маємо $E_2(q) = -0,3$; $E_2(s) = 0,8$.

Попит і пропозиція за рівноважної ціни нееластичні. Це означає, що зміна ціни не спричинить різкої зміни попиту та пропозиції. Наприклад, за збільшення ціни на 1 % попит зменшиться на 0,3 %, а пропозиція збільшиться на 0,8 %.

Приклад 7.6. Нехай функцію попиту на товар, що випускає деяка фірма, змодельовано залежністю $q(p) = q_0 e^{-kp^2}$, де $q_0 > 0$ і $k > 0$ – відомі величини. За яких значень ціни p попит буде еластичним?

Обчислимо еластичність попиту за формулою:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'_p, E_p(q) = \frac{-2kpq_0 e^{-kp^2}}{q_0 e^{-kp^2}} \cdot p = -2kp^2.$$

Для того, щоб попит був еластичним, необхідно виконання нерівності:

$$|E_p(s)| > 1 \text{ або } 2kp^2 > 1. \text{ Отже, } p > 1/\sqrt{2k}.$$

2. Еластичність попиту за доходом

$$E_R(q) = \frac{dq}{q} : \frac{dR}{R} = \frac{R}{q} \cdot \frac{dq}{dR} \quad (7.12)$$

виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-яке благо або товар за зміни доходу споживачів на 1 %.

Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні (якісні) товари, а від'ємна – малоцінні (низько-якісні) товари. Наприклад, високий додатний коефіцієнт еластичності попиту за доходом у галузі означає, що її внесок до економічного зростання більший, ніж частка у структурі економіки, і вона має шанси на розширення та розвиток у майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від'ємне значення, то на неї очікує застій і перспектива скорочення виробництва.

Приклад 7.7 (зв'язок еластичності із доходом). У ситуації, що складається на ринку, функція попиту $q = q(p)$ на певний товар, який випускає фірма, є монотонно спадною, тому підвищення ціни на одиницю товару спричиняє зменшення споживання товару, тобто попит на цей товар зменшується. На практиці дуже важливим є питання: як змінюватиметься *дохід фірми*?

Оскільки дохід фірми $R = R(p)$ дорівнює добутку ціни одиниці товару p на величину попиту $q = q(p)$ та залежить як від ціни товару, так і від попиту на цей товар на ринку, то дохід фірми може зростати або спадати. Для визначення розглянемо таку ситуацію детальніше. Очевидно, що відповідь на це запитання залежить також від припущення про місце фірми на ринку. Якщо фірма є *монополією*, тобто сама випускає та продає продукцію на ринку, то її керівництво може прийняти рішення про підвищення ціни на товар без погодження з іншими фірмами-виробниками.

Розглянемо функцію доходу фірми: $R(p) = q(p) \cdot p$. Обчислимо її похідну:

$$R'(p) = q + p \cdot q'_p = q \left(1 + \frac{p}{q} q'_p \right) = q (1 + E_p(q)).$$

Для збільшення доходу фірми необхідно, щоб функція доходу зростала, тобто її похідна була додатною.

Проаналізуємо всі варіанти еластичності попиту:

1. $E_p(q) < -1$. Тоді $R'(q) < 0$. Таким чином, за еластичного попиту збільшення ціни p спричиняє зниження доходу. І навпаки, зниження ціни на товар збільшує доход.

2. $E_p(q) = -1$. Тоді $R'(q) = 0$ – за нейтрального попиту зміна ціни на товар не впливає на доход.

3. $E_p(q) > -1$. Тоді $R'(q) > 0$ – за нееластичного попиту збільшення ціни на товар p спричиняє збільшення доходу.

Еластичність попиту за ціною завжди від'ємна, оскільки $q'(p) < 0$. Отже, еластичність доходу за ціною від'ємна ($E_p(R) < 0$) для товарів, попит на які еластичний, і додатна ($E_p(R) > 0$) для товарів, попит на які нееластичний. Це означає: якщо попит нееластичний, то зміна ціни спричиняє зміну доходу у тому самому напрямку, і продавцям вигідно підвищувати ціну (що збільшує їх дохід). Для еластичного попиту зміна доходу відбувається у напрямку, що є протилежним до зміни ціни, і для підвищення доходу продавцям вигідно знижувати ціну. Аналогічно підвищення податку на товар з еластичним попитом і спричиняє скорочення доходу від оподаткування.

За еластичного попиту доход збільшується зі збільшенням кількості або зменшенням ціни; за нееластичного – зменшується. Наприклад, доходи фермерів скорочуватимуться за високого врожаю, оскільки еластичність попиту на сільськогосподарську продукцію достатньо низька. Аналогічно підвищення цін на залізничні квитки може спричинити скорочення надходжень до бюджету, якщо попит на відповідну послугу виявиться еластичним.

7.1.5. Еластичність і податкова політика

Коли уряд держави вводить податки на деякі товари, він має знати відповіді на запитання:

- на які товари вводити податок;
- з кого стягувати податок: з виробників чи споживачів?
- якою буде величина податкових надходжень до бюджету?
- на кого ляже основний податковий тягар?

• якщо податок уже стягується, то чи варто збільшувати податкову ставку для покриття дефіциту бюджету?

Інтуїтивно здавалось би, що основний податковий тягар ляже на тих, з кого стягуватимуться податки, і що більшою буде податкова ставка, то більшими будуть надходження від податків до бюджету.

Детальніший економічний аналіз показує, що величину податкового тягара визначають не формальні платники податку, а величини еластичності попиту та пропозиції. Аналогічно збільшення податкової ставки, що еквівалентне збільшенню ціни оподатковуваного товару, може спричинити як збільшення податкових надходжень до бюджету, так зменшення, знову ж таки залежно від еластичності.

Розглянемо детальніше **модель стягування податку**.

Нехай p – ціна товару на деякому ринку, $s = s(p)$ – пропозиція товару, $q = q(p)$ – попит. Рівноважну ціну p_0 визначають із рівняння рівноваги: $s(p_0) = q(p_0)$.

Припустимо, що вводять додатковий податок з виробників у розмірі t із кожної одиниці товару. Оскільки залежність пропозиції від ціни визначає прибуток, а за ціни p і податку t прибуток такий самий, як і за ціни $p - t$ та відсутності додаткового податку, то $s_t(p) = s(p - t)$, де $s_t(p)$ – функція пропозиції після введення податку. Таким чином, крива пропозиції після введення податку посувається вгору на t одиниць (рис. 7.5).

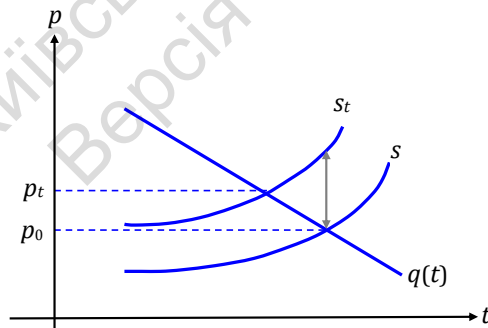


Рис. 7.5

Нехай p_t – нова рівноважна ціна. Її знаходять із рівнянням рівноваги: $s_t(p_t) = q(p_t)$, яке еквівалентно:

$$s(p_t - t) = q(p_t). \quad (7.13)$$

За відомих приростів функцій $q = q(p)$ і $s = s(p)$ у точці p_0 , використовуючи їх диференціали, дістанемо наближені рівності:

$$s(p_0 + \Delta p) \approx s(p_0) + s'(p_0)\Delta p, \quad (7.14)$$

$$q(p_0 + \Delta p) \approx q(p_0) + q'(p_0)\Delta p, \quad (7.15)$$

в яких $\Delta p = p_t - p_0$ – зміна рівноважної ціни. Ураховуючи (7.14) і (7.15), рівність (7.13) можна записати у вигляді:

$$s(p_0) + s'(p_0)(\Delta p - t) = q(p_0) + q'(p_0)\Delta p.$$

Оскільки $s(p_0) = q(p_0)$, то остання рівність набуває вигляду:

$$s'(p_0)(\Delta p - t) = q'(p_0)\Delta p,$$

звідки маємо:

$$\Delta p = \frac{ts'(p_0)}{s'(p_0) - q'(p_0)}. \quad (7.16)$$

Таким чином, після введення додаткового податку на закупівлю одиниці товару витрати споживача збільшуватимуться на величину Δp , яку можна наближено розрахувати за (7.16). Відповідно дохід виробника (також на одиницю продукції) зменшиться на:

$$t - \Delta p = \frac{-tq'(p_0)}{s'(p_0) - q'(p_0)}.$$

Отже, додатковий податок поділяється між споживачами та виробниками продукції у відношенні:

$$\frac{\Delta p}{t - \Delta p} = \frac{s'(p_0)}{-q'(p_0)}.$$

Оскільки у точці p_0 попит дорівнює пропозиції, то:

$$\frac{s'(p_0)}{-q'(p_0)} = \frac{s'(p_0)p_0}{s(p_0)} \cdot \frac{-q'(p_0)p_0}{q(p_0)} = -\frac{E_s(p)}{E_q(p)},$$

де $E_s(p)$ і $E_q(p)$ – коефіцієнти еластичності пропозиції та попиту у точці p_0 .

При аналізі цього співвідношення бачимо, що майбутній податковий тягар припадає на економічного агента з меншою еластичністю, в якого менше можливостей для відходу від податкового тягаря. Зокрема, якщо еластичність попиту дорівнює нулю, то весь податковий тягар лягає на плечі споживачів, оскільки, незалежно від величини податку (от-

же й від ціни), споживачі не змінять обсягу покупок. Якщо ж попит на який-небудь товар характеризує цілковита еластичність, то програють виробники, оскільки споживачі відходять від податку, знижують величини попиту та переходять до споживання інших товарів. У цьому випадку весь податковий тягар лягає на плечі виробників.

Приклад 7.8. Нехай цінова еластичність попиту становить $E_q(p) = -3$, а цінова еластичність пропозиції $E_s(p) = 2$, податок, що вводять, $t = 100$. Тоді ціна після введення всього податку збільшиться на:

$$\frac{2}{2+3} \cdot 100 = 40,$$

а прибуток виробників від одиниці продукції зменшиться на:
 $100 - 40 = 60$ гр./од.

7.2. Теорія одноресурсної фірми

Припустимо, що фірма випускає один товар, обсяг якого позначимо q . Для випуску товару використовують тільки один ресурс обсягу x . Фірму цілковито характеризує виробнича функція $q = f(x)$, що виражає залежність обсягу товару q , який випускає фірма, від обсягу витраченого ресурсу x .

Далі вважатимемо, що виробнича функція двічі диференційована та задовольняє дві умови:

Умова 1. В області D , $D \in D(f)$ – області визначення функції $q = f(x)$, яку називають **економічною областю**, задана функція неспадна, тобто збільшення обсягу ресурсу не спричиняє зменшення випуску товару. Математично це означає, що для двох довільних точок $x_1, x_2 \in D$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$. Отже, в області D похідна $f'(x)$ невід'ємна, тобто $f'(x) \geq 0$. Похідну $f'(x)$ називають **граничним продуктом**.

Умова 2. Існує підмножина E економічної області D , $E \subset D$ така, що для всіх $x \in E$: $f''(x) \leq 0$.

Економічний зміст цих умов:

- перша умова стверджує, що виробнича функція – не якась абстрактна функція, придумана теоретиком-математиком.

Вона відображає економічно важливе та водночас тривіальне твердження: у розумній економіці збільшення витрат ресурсу не може спричинити зменшення випуску товару;

• другу умову в економіці називають **законом спадної доходності**: за збільшення обсягу ресурсу з деякого моменту (при вході до області E) починає зменшуватись граничний продукт.

Розглянемо дії фірми. Нехай p – ціна одиниці ресурсу, w – ціна одиниці товару, який випускає фірма. Отже, прибуток фірми $\Pi = \Pi(x)$ у результаті є функцією від обсягу ресурсу та цін (але їх вважають сталими). Тоді функція прибутку має вигляд:

$$\Pi(x) = wf(x) - px.$$

Розглянемо **задачу фірми**: знайти максимальне значення прибутку фірми – функції $\Pi = \Pi(x)$ за умови, що $x > 0$, тобто:

$$\Pi(x) \rightarrow \max, x > 0. \quad (7.17)$$

Обчислимо похідну функції прибутку, знайдемо критичні точки:

$$\Pi'(x) = w \cdot f'(x) = p \Leftrightarrow w \cdot f'(x) - p = 0,$$

звідки
$$f'(x^*) = \frac{p}{w}. \quad (7.18)$$

Очевидно, що обсяг ресурсу додатний, отже точка x^* , яку визначають із співвідношенням (7.18), є точкою екстремуму. Оскільки ми припустили, що $f''(x) \leq 0$, то це точка максимуму.

Точку x^* , яку визначають із співвідношення (7.18), називають **оптимальним розв'язком задачі фірми**.

Розглянемо економічний зміст співвідношення (7.18). Оскільки $f'(x)$ називають **граничним продуктом**, то $w \cdot f'(x)$ є вартістю граничного продукту, що додатково отриманий з одиниці ресурсу. Але ціна одиниці ресурсу дорівнює p , тобто отримано рівновагу: можна залучити до виробництва додаткову одиницю ресурсу, витративши на її закупівлю p грошових одиниць, але в результаті виграшу не буде, оскільки після переробки та реалізації товару буде отримано стільки саме коштів, скільки витрачено на придбання одиниці ресурсу. Отже, оптимальна точка, яку визначає (7.18), є точкою рівноваги (вже неможливо "вижати" із товарів-ресурсів більше, ніж витрачено на їх закупівлю).

Очевидно, що нарощування випуску товарів фірми відбувалось поступово: спочатку вартість граничного продукту була більшою від купівельної ціни ресурсів, що потрібні для його виробництва. Нарощування обсягу виробництва відбувається до моменту, поки не починає виконуватись співвідношення (7.18): *рівність вартості граничного продукту та купівельної ціни ресурсу, що потрібний для його виробництва.*

За певних умов, які накладені на виробничу функцію, оптимальний розв'язок задачі фірми, що визначається співвідношенням (7.18), єдиний для всіх p і w .

Приклад 7.9. Обсяг добування щебню q (т/год.) залежить від кількості праці x (люд./год.) і $q = 6\sqrt{x}$. Ціна щебню становить 40 грн/т, зарплата робітника – 30 грн/год. Крім заробітної плати інші витрати не враховують. Знайти оптимальну кількість робітників для фірми.

За кількості робітників x прибуток фірми виражає функція:

$$\Pi(x) = w \cdot f(x) - p \cdot x,$$

у нашому випадку: $\Pi(x) = 40 \cdot 6\sqrt{x} - 30x = 240\sqrt{x} - 30x = 30(8\sqrt{x} - x)$.

Отже, $\Pi(x) = 30(8\sqrt{x} - x)$.

Знайдемо похідну функції прибутку:

$$\Pi'(x) = 30 \left(8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \right) = 30 \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

і стаціонарні точки з умови $\Pi'(x) = 0$, маємо:

$$\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1 \right) = 0,$$

звідки $\sqrt{x} = 4$, тобто $x^* = 16$. Знайдемо другу похідну:

$$\Pi''(x) = 30 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}^3} = -60 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}^3} = -60 \cdot \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$$

та її значення у стаціонарній точці $x^* = 16$:

$$\Pi''(16) = -60 \cdot \frac{1}{16 \cdot \sqrt{16}} = -60 \cdot \frac{1}{16 \cdot 4} = -\frac{15}{16} < 0.$$

Тому $x^* = 16$ – точка максимуму і $\Pi_{\max} = 480$ ум. гр. од.

7.3. Прийняття оптимальних рішень в економічних дослідженнях

7.3.1. Оптимальні ціна, граничні витрати та обсяг виробництва фірми

Нехай, наприклад, монополіст, що обізнаний (із маркетингових досліджень) із функцією попиту на свій товар, вирішує, який обсяг товару випускати та за якою ціною його продавати. Якщо він установить високу ціну, то споживачі за певний період придбають не дуже багато товару. Якщо він вироблятиме більше, то йому доведеться знизити ціну, щоб продати всю продукцію за певний період часу. При цьому прибуток збільшиться за рахунок обсягу продажу (дохід) та одночасно зменшиться за рахунок зменшення ціни (витрати). Результат залежатиме від того, що виявиться більшим: дохід чи витрати. Для визначення оптимального обсягу випуску продукції монополіст має визначити залежність прибутку (із врахуванням витрат випуску) від обсягу продукції.

Нехай задано функцію доходу фірми $R = R(q)$ і функцію її витрат $C = C(q)$, тоді функція її прибутку від обсягу випуску продукції q має вигляд:

$$\Pi = \Pi(q) = R(q) - C(q) = p(q) \cdot q - C(q).$$

Потрібно визначити, за якого обсягу продукції прибуток фірми буде максимальним.

7.3.2. Задача вибору фірмою оптимального обсягу виробництва

Розглянемо, як приклад, задачу вибору оптимального обсягу виробництва фірмою, з якого буде видно, наскільки важливим є дослідження функцій для прийняття оптимальних рішень. Отримання максимального прибутку є одним з основних критеріїв діяльності виробничої або комерційної структури. Прибуток Π є деякою функцією від обсягу q реалізованої продукції, тобто $\Pi = \Pi(q)$.

Для отримання максимального прибутку фірма має випускати продукцію обсягом q_0 таким чином, щоб значення

$\Pi(q_0) = \Pi_{\max}$ було максимальним. Практично обсяг продукції становить $q \in [0; Q]$, де Q – верхня його межа, що може випускати фірма.

Математично задача зводиться до знаходження максимуму функції прибутку $\Pi = \Pi(q)$ на відрізку $[0; Q]$. Оскільки функція прибутку $\Pi = \Pi(q)$ може теоретично досягати максимального значення, і на кінцях проміжку при $q = 0$ та $q = Q$, то обидві ці ситуації, за яких фірма загалом не випускає продукції $q = 0$ або випускає обсяг найбільший, який тільки може $q = Q$, є крайніми. Не розглядатимемо їх і припустимо, що функція прибутку досягає максимуму у внутрішній точці $q_0 \in (0; Q)$, тобто виконуються такі умови:

1. Функції доходу $R = R(q)$ і витрат $C = C(q)$ визначені та диференційовані на відрізку $(0; Q)$.

2. Функція прибутку досягає максимуму у деякій внутрішній точці q_0 ($q_0 \neq 0$ та $q_0 \neq Q$).

У випадку, за якого максимум прибутку $\Pi(q_0) > 0$, умова $q_0 \neq 0$ природно виконується, оскільки $\Pi \leq 0$ (немає випуску – немає доходу; немає доходу – немає прибутку).

Якщо виконуються обидві умови, то функція $\Pi = \Pi(q)$ диференційована та досягає на проміжку $(0; Q)$ найбільшого значення у точці $q_0 \neq 0$. Тоді за теоремою Ферма $\Pi'(q_0) = 0$. Оскільки $\Pi'(q) = R'(q) - C'(q)$, то у точці $q = q_0$ маємо рівність:

$$R'(q_0) = C'(q_0). \quad (7.19)$$

Згадаємо, що похідна функції витрат C' виражає **граничні витрати**, а похідна R' – **граничний дохід**. Тоді, використовуючи цю економічну термінологію, дістанемо базовий **економічний принцип**: *фірма досягає оптимального продуктивного рівня, коли граничний дохід дорівнює граничним витратам.*

В економічній теорії рівність (7.19) визначає **правило**, відповідно до якого *фірма, яка максимізує свій прибуток, установлює обсяг виробництва таким чином, що граничний дохід дорівнює граничним витратам.*

Якщо згадати економічний граничний (маржинальний) аналіз, що базується на використанні граничних величин, то в економічних дослідженнях широко застосовують виробничі функції для встановлення різноманітних економічних залежностей (напр., випуску продукції – від витрат ресурсів, витрат виробництва – від обсягу продукції, доходу – від продажу товару тощо). У припущенні диференційованості виробничих функцій важливого значення набувають їхні диференціальні характеристики, що пов'язані з поняттям похідної.

Приклад 7.10. Базуючись на використанні граничних величин для дослідження економічних процесів *граничного* або *маржинального аналізу* розглянемо похідні для різних типів виробничих функцій.

1. Нехай виробнича функція $TC = TC(q)$ є функцією сукупних витрат виробництва (*total cost*), що залежить від обсягу продукції q . Припустимо, що обсяг продукції збільшується на Δq . Обсягу продукції $q + \Delta q$ відповідають витрати виробництва $TC(q + \Delta q)$, тоді $\Delta TC = TC(q + \Delta q) - TC(q)$ приріст сукупних витрат виробництва продукції, що відповідає приросту обсягу продукції Δq .

Середній приріст сукупних витрат виробництва визначають як відношення $\Delta TC / \Delta q$. Це відношення приросту сукупних витрат виробництва на одиницю приросту кількості продукції.

Граничними витратами виробництва (*marginal cost*) називають границю:

$$MC = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta TC}{\Delta q}.$$

Граничні витрати виробництва збігаються зі швидкістю зміни витрат виробництва. Величина MC характеризує наближено додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

2. Нехай $TR = TR(q)$ – сукупний дохід (*total revenue*) від продажу q одиниць товару.

Граничним доходом (*marginal revenue*) називають границю:

$$MR = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta TR}{\Delta q}.$$

Середній дохід визначають як відношення $\Delta TC / \Delta q$. Це відношення приросту сукупного доходу виробництва на одиницю приросту кількості продукції. Тоді, використовуючи цю економічну термінологію, співвідношення (7.19) перепишемо у вигляді:

$$MR = MC.$$

У випадку, за якого обсяг виробництва q не залежить від ціни продукції p , маємо $R = R(q) = p \cdot q$, $R'(q) = p$. Рівність (7.19) набуває вигляду:

$$p = C'(q_0). \quad (7.20)$$

Приклад 7.11. Знайти оптимальний обсяг виробництва продукції фірми, якщо відомі ціна одиниці продукції $p = 15$ грн/од. і функція витрат $C(q) = q^3 + 3q$.

Запишемо функцію прибутку фірми при виробництві q одиниць продукції:

$$\Pi(q) = 15q - q^3 - 3q = q(12 - q^2).$$

Очевидно, що $\Pi(q) > 0$, якщо $q \in (0; \sqrt{12})$.

Оскільки $\Pi = \Pi(q)$ – неперервна функція, то на проміжку $(0; \sqrt{12})$ у деякій точці q_0 вона набуде найбільшого значення.

$\Pi(q) \leq 0$ при $q > \sqrt{12}$, тому $\Pi(q_0)$ – найбільше значення за будь-якого $q \geq 0$. Використовуючи (7.20), дістанемо:

$$15 = C'(q_0) = 3(q_0)^2 + 3, \text{ звідки } q_0 = 2.$$

Оскільки фірма намагається отримати максимальний прибуток, то вона випускатиме 2 одиниці продукції. Фактично з'ясовано, що за ціни $p = 15$ грн/од. фірмі вигідно випускати на продаж $q_0 = 2$ одиниці продукції.

Оскільки дохід і прибуток фірми залежать від припущень, що зроблені про місце фірми на ринку, то маємо розглянути іншу ситуацію – випадок **монополії**, коли фірма постачає повний обсяг товару під реалізацію. За цієї ситуації ціну визначає функція попиту. Іншими словами, ціна товару, за якою споживачі купують його, залежить від попиту $p = p(q)$, де q – стала. Якщо відомо функцію ціни $p = p(q)$, то функція прибутку $\Pi(q) = q \cdot p(q) - C(q)$, і необхідною умовою

максимуму функції прибутку є умова $\Pi'(q)=0$, яку можна записати у вигляді:

$$q \cdot p'(q) + p(q) - C'(q) = 0. \quad (7.21)$$

Слід зауважити, що не всі критичні точки функції прибутку $\Pi = \Pi(q)$, де $q \in [0, q]$ є максимальними, оскільки умова (7.21) є необхідною, але не достатньою.

Розглянемо тепер більш загальний випадок, за якого ціна продукції p є диференційованою функцією $p = p(q)$ від обсягу випуску продукції q . Обчислимо похідну функції доходу фірми $R(q) = p(q) \cdot q$, дістанемо:

$$R'(q) = q \cdot p'(q) + p(q) = p(q)(E_q(p) + 1).$$

Тоді рівність (7.19) можна записати у вигляді:

$$p(q_0)(E_q(p) + 1) = C'(q_0),$$

звідки отримаємо рівняння для ціни:

$$p(q_0) = \frac{C'(q_0)}{E_q(p) + 1}. \quad (7.22)$$

Оскільки $E_q(p) < 0$, то із (7.22) випливає, що ціна $p(q_0)$ – не нижче від граничних витрат $C'(q_0)$. Насправді, якщо фірма займає суттєву частку ринку, то збільшення її випуску спричиняє насичення ринку та падіння ціни; у цьому випадку $E_q(p) > 0$ та із (7.22) випливає, що ціна $p(q_0)$ більша від граничних витрат $C'(q_0)$.

Приклад 7.12. Розглянемо задачу вибору оптимального обсягу виробництва фірмою, функцію прибутку якої можна змодельовати залежністю:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10.$$

Знаходимо граничний прибуток – похідну $\Pi'(q) = 2q - 8$. Перевіряємо необхідні умови локального екстремуму, для чого прирівнюємо похідну до нуля $\Pi(q) = 0$, звідки дістаємо $2q - 8 = 0$. Отже, $q_0 = 4$.

Чи є обсяг випуску $q_0 = 4$ оптимальним для фірми? Щоб відповісти на це запитання, необхідно проаналізувати характер зміни знаку похідної при переході через точку q_0 (тобто перевірити достатні умови локального екстремуму):

- при $q < q_0$ маємо $\Pi'(q) < 0$, і функція прибутку спадає;
- при $q > q_0$ маємо $\Pi'(q) > 0$, і функція прибутку зростає.

Отже, у точці $q_0 = 4$ функція прибутку набуває мінімального значення, таким чином обсяг виробництва не є оптимальним.

Яким же має бути оптимальний обсяг випуску фірми? Відповідь на це запитання залежить від додаткового дослідження виробничих потужностей фірми. Якщо фірма не може виробляти за період, який ми розглядаємо, більше 8 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для неї є цілковите припинення виробництва, здавання в оренду приміщення або обладнання та отримання доходу. Якщо фірма може виробляти більше 8 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для неї буде випуск на межі виробничих можливостей.

Приклад 7.13. Фірма реалізує свою продукцію за ціною p за одиницю продукції, витрати виробництва при цьому задає кубічна залежність $C(x) = ax + \lambda x^3$ (де $a < p$, $\lambda > 0$). Знайти оптимальний для фірми обсяг продукції, яку вона випускає, і відповідний йому прибуток.

Позначимо обсяг продукції x . Запишемо функцію прибутку:

$$\Pi(x) = R(x) - C(x),$$

де $R(x)$ – дохід від обсягу продукції x , яку реалізує фірма.

У нашому прикладі $\Pi(x) = px - (ax + \lambda x^3)$. Знаходимо похідну функції прибутку $\Pi'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2$ і критичні точки першого роду з умови $\Pi'(x) = 0$. Тоді $(p - a) - 3\lambda x^2 = 0$, звідки $3\lambda x^2 = p - a$.

Отже, $x^2 = \frac{p-a}{3\lambda}$ та $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} < 0$ – сторонній розв'язок з економічних міркувань.

Знаходимо $\Pi''(x) = -6\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$. Дістаємо:

$$\Pi''\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = -6\lambda \cdot \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} < 0 \text{ за всіх } x.$$

Отже, при $x = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток буде максимальним. Знаходимо максимальний прибуток:

$$P_{\max} = P\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = \frac{2(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}.$$

7.3.3. Закон спадної ефективності виробництва

Закон спадної ефективності виробництва стверджує, що за збільшення одного з основних факторів виробництва, наприклад, капітальних витрат k , приріст виробництва, починаючи з деякого значення k , є спадною функцією. Іншими словами, обсяг продукції q , що випускають, як функцію $q = q(k)$ описує графік зі зміною характеру опуклості.

Приклад 7.14. Характерний вигляд функції:

$$q(k) = \frac{q_{\lim}}{1 + a \cdot e^{-bk+c}},$$

де a, b, c – відомі додатні числа (визначаються структурою організації виробництва), $q_{\lim}$ – гранично можливий випуск продукції.

Обчислимо похідні функції:

$$\begin{aligned} q'(k) &= q_{\lim} [(1 + a \cdot e^{-bk+c})^{-1}]' = \\ &= q_{\lim} \cdot (-1) \cdot (1 + a \cdot e^{-bk+c})^{-2} \cdot a e^{-bk+c} \cdot (-b) = \\ &= q_{\lim} \cdot a b e^{-bk+c} (1 + a e^{-bk+c})^{-2}, \\ q''(k) &= q_{\lim} a b \left[e^{-bk+c} \cdot (-b) (1 + a e^{-bk+c})^{-2} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-bk+c} \cdot (-2) (1 + a e^{-bk+c})^{-3} \cdot a e^{-bk+c} \cdot (-b) \right] = \\ &= q_{\lim} a b^2 e^{-bk+c} \left[\frac{-1}{(1 + a \cdot e^{-bk+c})^2} + \frac{2a e^{-bk+c}}{(1 + a \cdot e^{-bk+c})^3} \right] = \\ &= q_{\lim} a b^2 e^{-bk+c} \cdot \frac{2a e^{-bk+c} - 1 - a e^{-bk+c}}{(1 + a e^{-bk+c})^3} = \frac{q_{\lim} a b^2 e^{-bk+c} \cdot (a e^{-bk+c} - 1)}{(1 + a e^{-bk+c})^3}. \end{aligned}$$

Критичну точку другого роду можна знайти з умови $q''(k) = 0$, дістанемо:

$$a e^{-bk+c} - 1 = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння:

$$e^{-bk+c} = 1/a, -bk + c = -\ln a, bk = \ln a + c.$$

Отримаємо:

$$k_{кр} = \frac{\ln a + c}{b}.$$

Графік функції змінює характер опуклості у точці перегику $k_{кр}$ (рис. 7.6). До цієї точки ($k < k_{кр}$) збільшення капітальних витрат викликає інтенсивне зростання обсягу продукції, а після цієї точки ($k > k_{кр}$) приріст обсягу продукції знижується, $q''(k) < 0$, тобто ефективність капіталовкладень витрат падає.

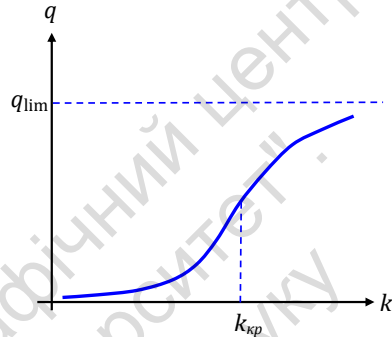


Рис. 7.6

Таким чином, у стратегії капіталовкладень дуже важливим моментом є визначення критичного обсягу витрат, більше від якого додаткові витрати поступово призведуть до зменшення віддачі за наявної структури виробництва.

За подібного прогнозу можна вдосконалювати та змінювати структуру організації виробництва, "покращуючи" показники $a, b, c, q_{\lim}$ у бік підвищення ефективності капіталовкладень.

Базовим поняттям економічної теорії є функція корисності:

$$U = U(q),$$

де q обсяг товару, а U – корисність. Ця величина дуже суб'єктивна для кожного окремого споживача, але досить об'єктивна для суспільства у цілому.

Закон спадної корисності звучить так: зі зростанням обсягу товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає. Математично цей закон можна пояснити так: функція корисності є опуклою вгору.

7.4. Оптимізація оподаткування підприємств

Розглянемо економічну задачу про дії уряду при оподаткуванні підприємств і фірм; визначимо, як пов'язаний прибуток фірми та обсяг податків, що надходять державі, за заданої податкової ставки.

Нехай ціна на продукцію визначає функція:

$$p(q) = a - bq, \quad a > 0 \text{ та } b > 0,$$

яка лінійно спадає зі збільшенням обсягу готової продукції на ринку, а витрати $C = C(q)$ залежать від обсягу продукції q таким чином:

$$C(q) = cq^2 + dq + e,$$

де c, d, e – деякі додатні числа. Нехай податок є акцизом зі ставкою t , тобто з кожної проданої одиниці товару держава отримує податок t , і податкова сума дорівнює $T = tq$. Тоді фірма має прибуток:

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= pq - C(q) - T = q(a - bq) - cq^2 - dq - e - tq = \\ &= (a - d - t)q - (b + c)q^2 - e. \end{aligned}$$

Для максимізації прибутку фірма шукає оптимальний обсяг виробництва. Обчислимо похідну функції прибутку:

$$\Pi'(q) = a - d - t - 2q(b + c).$$

Перевіримо необхідні умови екстремуму, для чого дорівнюємо до нуля похідну функції прибутку $\Pi'(q) = 0$, звідки $2q(b + c) = a - d - t$ і дістанемо критичну точку:

$$q^* = \frac{a - d - t}{2(b + c)}.$$

Оскільки $\Pi''(q) = -2(b + c) < 0$, то, згідно із достатніми умовами локального екстремуму, q^* – дійсно точка максимуму.

Оскільки $t > 0$, то така податкова ставка спричиняє зниження оптимального випуску продукції.

Для прогнозування дій уряду зі встановлення податкової ставки t обчислимо податковий дохід уряду (держави):

$$T = t \cdot q = \frac{t(a - d - t)}{2(b + c)} = \frac{(a - d)t - t^2}{2(b + c)},$$

тобто у країні крива доходів уряду (держави) є параболою, гілки якої спрямовано вниз (рис. 7.7).

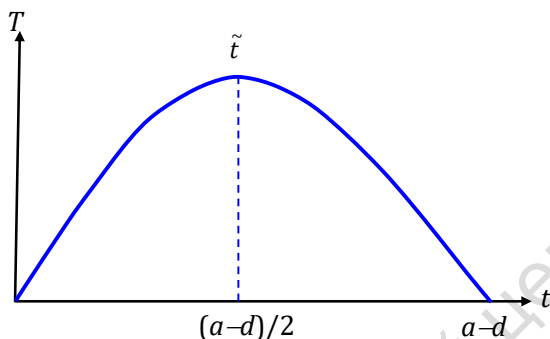


Рис. 7.7

Знайдемо похідну:

$$T' = \frac{(a-d-2t)}{2(b+c)}$$

і визначимо критичні точки із умови $T' = 0$, яка в нашому випадку набуває вигляду:

$$2t = a-d \text{ або } t = (a-d)/2.$$

Оскільки друга похідна:

$$T'' = \frac{-1}{(b+c)} < 0,$$

то максимум досягається у точці $t^* = \frac{a-d}{2}$ та

$$T^* = t^* q^* = \frac{(a-d)^2}{8(b+c)}.$$

Оптимальний випуск продукції за цього значення t^* :

$$q_1 = \frac{a-d}{4(b+c)},$$

а прибуток фірми:

$$\Pi(q_1) = \frac{(a-d)^2}{16(b+c)} - e.$$

Загалом прибуток фірми за податкової ставки t :

$$\Pi(q^*) = \frac{(a-d-t)^2}{4(b+c)} - e,$$

звідки випливає, що зі збільшенням податкової ставки t прибуток фірми зменшується, якщо $0 \leq t \leq a-d$ та існує об-

ласть значень податкової ставки при $t \geq \tilde{t} = a - d - \sqrt{4e(b+c)}$, в якій прибуток фірми від'ємний, хоча доходи уряду додатні.

Це відбувається тому, що за критерій вибору обсягу випуску було взято максимум прибутку фірми, але не було зумовлено, що цей максимум має бути додатним.

Якщо вважати, що при $t \geq \tilde{t}$ випуск продукції дійсно стане рівним нулю, то дохід уряду при $t \geq \tilde{t}$ також стане рівним нулю. Зрозуміло, що вже при наближенні значень податкової ставки до $\tilde{t}$ відбувається різке скорочення ділової активності.

Приклад 7.15. Нехай t – податкова ставка. Відома функції доходу фірми: $R(q) = 16q - q^2$ і витрат фірми: $C(q) = q^2 + 1$. Яким має бути податок t , щоб величина сумарного податку T з усієї продукції була найбільшою?

Запишемо функцію прибутку фірми:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) - T.$$

У нашому прикладі:

$$\Pi(q) = 16q - q^2 - q^2 - 1 - tq = 16q - 2q^2 - tq - 1.$$

Знайдемо, за якого значення функція прибутку набуває максимального значення. Оскільки необхідна умова максимуму прибутку $\Pi'(q) = 0$, то знаходимо похідну:

$$\Pi'(q) = 16 - 4q - t$$

і розв'яжемо рівняння:

$$16 - 4q - t = 0,$$

звідки $q^* = 4 - (t/4)$.

Оскільки $\Pi''(q) = -4 < 0$, то q^* – точка максимуму і $q^* = q_{onm}$.

Підставимо значення обсягу продукції до виразу сумарного доходу:

$$T = q^* \cdot t = t(4 - (t/4)) = 4t - (1/4)t^2$$

і, у свою чергу, знайдемо умови, за яких дохід T буде максимальним.

Знайдемо стаціонарні точки з умови $T' = 4 - (1/2)t = 0$, дістанемо:

$$4 - (1/2)t = 0, t = 8. \text{ Тоді } q^* = 4 - (8/4) = 4 - 2 = 2.$$

Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$\Pi_{onm} = \Pi(q_{onm}) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = 32 - 8 - 16 - 1 = 7.$$

Оптимальний із погляду податкового законодавства податковий збір становить:

$$T_{onm} = 2 \cdot 8 = 16 \text{ ум. гр. од.}$$

Цікаво порівняти ці цифри із цифрами за відсутності оподаткування. При $t = 0$ розв'язок задачі на знаходження максимуму функції прибутку дав би:

$$q_{onm} = 4 \text{ ум. од.}, P_{onm} = 31 \text{ ум. гр. од.}$$

Таким чином, зменшення оподаткування стимулює збільшення випуску продукції, що спричиняє при цьому збільшення прибутку від її реалізації. Зрозуміло, чому виробники докладають стільки зусиль задля зниження податкової ставки.

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. У чому економічний зміст похідної?

2. Як визначають граничні витрати фірми?

Приклад 1. Для функції витрат підприємства:

$$C(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 40x + 1000 \text{ (грн)}$$

знайти граничні витрати при випуску:

$$x_1 = 50, x_2 = 100, x_3 = 150 \text{ одиниць продукції.}$$

Обчислимо граничні витрати:

$$C'(x) = 3 \cdot 0,001x^2 - 0,6x + 40.$$

$$C'(50) = 0,003 \cdot 50^2 - 0,6 \cdot 50 + 40 = 7,5 - 30 + 40 = 17,5;$$

$$C'(100) = 0,003 \cdot 100^2 - 0,6 \cdot 100 + 40 = 30 - 60 + 40 = 10;$$

$$C'(150) = 0,003 \cdot 150^2 - 0,6 \cdot 150 + 40 = 67,5 - 90 + 40 = 17,5.$$

Отже, граничні витрати виготовлення 51-ї та 151-ї одиниць продукції становлять 17 грн 50 коп., а вартість 101-ї одиниці продукції – лише 10 грн.

Приклад 2. Для функції витрат виробництва x одиниць продукції $C(x) = 1000 + 10x + 0,1x^2$ (грн) знайти граничні та середні витрати виробництва одного виробу.

Граничні витрати виробництва у цьому прикладі:

$$C'(x) = 10 + 0,2x.$$

Середні витрати виробництва одиниці продукції:

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1000}{x} + 10 + 0,1x.$$

Ці величини зовсім різні.

3. Як визначають граничний дохід і прибуток фірми?

Приклад 3. Визначити граничний дохід виробництва 300 од. продукції, якщо обсяг виражає залежність:

$$q = 1000 - 100p,$$

де p – ціна одиниці продукції.

Спочатку визначимо ціну p одиниці продукції як функцію обсягу q . Для цього із рівності $q = 1000 - 100p$ виразимо p . Дістанемо $p = 10 - 0,01 \cdot q$. Тоді функція доходу набуває вигляду:

$$R(q) = q \cdot p = q \cdot (10 - 0,01 \cdot q) = 10q - 0,01 \cdot q^2.$$

Знайдемо граничний дохід $R'(q) = 10 - 0,02q$. Дістанемо:

$$R'(300) = 10 - 0,02 \cdot 300 = 10 - 6 = 4 \text{ ум. грн/од.}$$

за обсягу продукції $q = 300$ од.

Приклад 4. Фірма виготовляє q одиниць продукції, ціна кожної з яких p , причому $p = -0,1 \cdot q + 80$, а функція витрат $C(q) = 5000 + 20 \cdot q$ (грн). Знайти граничний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 одиниць продукції.

Функція доходу має вигляд:

$$R(q) = q \cdot p = q \cdot (80 - 0,1 \cdot q) = 80 \cdot q - 0,1 \cdot q^2,$$

а функція прибутку фірми від продажу x одиниць продукції:

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= R(q) - C(q) = 80 \cdot q - 0,1 \cdot q^2 - \\ &\quad - (5000 + 20 \cdot q) = 60 \cdot q - 0,1 \cdot q^2 - 5000. \end{aligned}$$

Знайдемо граничний прибуток для довільного x :

$$\Pi'(q) = (60 \cdot q - 0,1 \cdot q^2 - 5000)' = 60 - 0,2 \cdot q.$$

Тоді:

$$\Pi'(150) = 60 - 0,2 \cdot 150 = 30, \quad \Pi'(400) = 60 - 0,2 \cdot 400 = -20.$$

Підприємство матиме збитки 20 грн за кожен одиницю продукції, що буде виготовлена та продана за зростання обсягу виробництва.

Приклад 5. Дослідження, що проведені фірмою, показали: тижневий продаж обсягу q продукції, залежно від щотижневого прибутку $\Pi = \Pi(q)$, описує співвідношення, що представлено у вигляді функції:

$$\Pi = \Pi(q) = -0,005q^2 + 20q - 5000.$$

Визначимо, за яких умов фірма матиме максимальний щотижневий прибуток. Знайдемо всі стаціонарні точки з умови рівності нулю похідної функції прибутку:

$$\Pi'(q) = -0,01q + 20 = 0, q^* = 2000.$$

З метою ідентифікації цієї точки знаходимо другу похідну $\Pi''(q) = -0,01 < 0$. Це означає, що $q^* = 2000$ є точкою локального максимуму. Обчислимо максимальний прибуток:

$$\Pi_{\max} = \Pi(2000) = -0,005 \cdot 2000^2 + 20 \cdot 2000 - 5000 = 1500.$$

Таким чином, для максимізації прибутку фірма має щотижня реалізовувати 2000 одиниць своєї продукції. При цьому її прибуток буде максимальним і становитиме 1500 грн.

Приклад 6. Мале підприємство може виготовляти та продавати кожну одиницю продукції із прибутком 10 грн. Якщо підприємство витрачатиме x гривень на рекламу, то кількість проданих товарів:

$$q = 1000 \cdot (1 - e^{-0,001x}).$$

Знайти швидкість зміни прибутку щодо зміни витрат на рекламу при $x = 1000$ грн та $x = 3000$ грн.

Кожна одиниця продукції дає 10 грн прибутку, тоді прибутком від реалізації x одиниць продукції є функція:

$$\Pi(x) = 10000 \cdot (1 - e^{-0,001x}) - x$$

із врахуванням витрат на рекламу. Швидкість зміни прибутку щодо зміни витрат на рекламу визначає похідна, яку ми обчислюємо:

$$\Pi'(x) = -10000 \cdot (-0,001) \cdot e^{-0,001x} - 1 = 10e^{-0,001x} - 1,$$

$$\Pi'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10 \cdot 0,3679 - 1 = 2,679,$$

$$\Pi'(3000) = 10e^{-3} - 1 = 10 \cdot 0,0498 - 1 = -0,502.$$

Отже, за витрат на рекламу 3000 грн прибутки зменшуються, оскільки похідна від'ємна та функція прибутку спадає.

Приклад 7. Нехай валовий продукт деякої держави змінюється із часом t за формулою ВВП $= 100 + t$, а кількість населення змінюється за законом $K(t) = 120 + 2t$. Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

Позначимо через $y(t)$ частину валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина. За умовою задачі:

$$y(t) = \frac{\text{ВВП}}{K(t)} = \frac{100+t}{120+2t}.$$

Швидкість зміни частини валового продукту є похідною:

$$y'(t) = \frac{(100+t) \cdot (120+2t) - (100+t) \cdot (120+2t)'}{(120+2t)^2} = \frac{-80}{4(60+t)^2} = \frac{-20}{(60+t)^2}.$$

Оскільки похідна від'ємна, то частина валового продукту, що припадає на одного громадянина, із часом зменшується.

Приклад 8. Обсяг продукції q , що випущена бригадою робітників, описує функція:

$$q = -(5/6)t^3 + (15/2)t^2 + 100t + 50 \text{ (од.)}, t \in [0;8],$$

де t – робочий час. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни за 1 год. після початку роботи та за 1 год. – перед її закінченням.

Продуктивність праці виражають похідною від обсягу виробництва: $z(t) = q'(t) = -(5/2)t^2 + 15t + 100$.

Швидкість і темп $T_z(t)$ продуктивності праці $z = z(t)$ виражають похідною $z'(t)$ та "логарифмічною похідною", відповідно:

$$T_z(t) = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

Тоді:

$$z'(t) = -5t + 15, \text{ а } T_z(t) = \frac{-5t + 15}{-(5/2)t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}.$$

У моменти часу $t_1 = 1$ та $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо:

$$\begin{aligned} z(1) &= 112,5, \quad z'(1) = 10, \quad T_z(1) = 0,09; \\ z(7) &= 82,5, \quad z'(7) = -20, \quad T_z(7) = -0,24. \end{aligned}$$

Таким чином, наприкінці робочого дня продуктивність праці суттєво знижується, при цьому зміна знаку $z'(t)$ і $T_z(t)$ із плюса на мінус означає, що збільшення швидкості та темпу продуктивності праці у перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

Приклад 9. Нехай r – ставка банківського відсотка (за рік). Знайти кількість років T , протягом яких початкова сума внеску збільшиться удвічі.

Оскільки за 1 рік внесок збільшиться у $(1 + (r/100))$ разів, то за T років внесок збільшиться в $(1 + (r/100))^T$ разів.

Фактично потрібно розв'язати рівняння:

$$(1 + (r/100))^T + 2.$$

Прологарифмуємо його та дістанемо:

$$T \ln(1 + (r/100)) = \ln 2.$$

Розв'язком цього рівняння буде:

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + (r/100))}.$$

Розглянемо функцію $y = \ln(1 + x)$. Оскільки:

$$y' = \frac{1}{1+x}, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = \ln 1 = 0,$$

то за достатньо малих x маємо $\ln(1 + x) \approx x$. Використовуючи цю наближену рівність, дістанемо, що $\ln(1 + (r/100)) \approx r/100$.

Таким чином:

$$T \approx \frac{\ln 2}{r/100} = \frac{100 \ln 2}{r}.$$

Оскільки $\ln 2 \approx 0,7$, то час подвоєння внеску становить $T \approx 70/r$ (**правило 70**).

Правило 70 – це правило-розрахунок для визначення кількості років, які необхідні для того, щоб гроші подвоїлись за заданої норми прибутку. Це правило зазвичай використовують для порівняння інвестицій із різними річними складними відсотками, аби швидко визначити, скільки потрібно часу для зростання інвестицій. Якщо, наприклад, відсоткова ставка становить 10 % річних, то час подвоєння внеску – близько семи років.

Крім того, правило 70 – це наближений спосіб розрахунку терміну подвоєння рівня цін за незмінного рівня інфляції. Термін подвоєння (у роках) визначають як такий, що дорівнює числу 70, яке поділене на річний рівень інфляції. Якщо рівень інфляції становить від 1 до 100 % на рік, то термін подвоєння за правилом 70 обчислюють з абсолютною похибкою, яка не перевищує 4 місяці. Якщо ж рівень інфляції становить від 1 до 26 % на рік, то за правилом 70 термін подвоєння обчислюють з абсолютною похибкою, яка не перевищує 10 % річних.

4. Як визначають граничну схильність до споживання?

5. Як визначають граничну схильність до збереження?

Приклад 10. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 0,36x^{4/3} + 0,25x + 15$, де x – сукупний національний дохід (гр. од.).

Знайти граничні схильності: 1) до споживання; 2) до збереження, якщо національний дохід становить 27 гр. од.

1) Обчислимо граничну схильність до споживання:

$$C'(x) = 0,48x^{1/3} + 0,25, \quad C'(27) = 0,48 \cdot \sqrt[3]{27} + 0,25 = 1,69.$$

2) Обчислимо граничну до збереження:

$$S' = 1 - C'(x) = 0,75 - 0,48x^{1/3}, \quad S'(27) = 1 - 1,69 = -0,69.$$

Приклад 11. За допомогою диференціала можна розв'язати задачу визначення абсолютної та відносної похибки функції за заданої похибки вимірювання аргументу.

Нехай потрібно обчислити значення функції $y = f(x)$ за деякого значення x_0 , дійсна величина якого невідома, відомо лише його наближене значення x з абсолютною похибкою $|\Delta x| = |x - x_0|$. Якщо замість дійсного значення $y = f(x)$ взяти величину $f(x)$, то станеться помилка:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| \approx dy = f'(x)\Delta x.$$

При цьому відносна похибка функції $\delta_y = |\Delta y/y|$ можна обчислити за формулою:

$$\delta_y = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{f'(x)dx}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right|,$$

тобто $\delta_y = |E_x(y)|\delta_x$, де $E_x(y)$ – еластичність функції, а

$\delta_x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$ – відносна похибка вимірювання аргументу.

Приклад 12. Витрати пального $C = C(v)$ автомобіля на 100 км шляху, залежно від швидкості руху v (км/год.), описує функція $C(v) = 18 - 0,3v + 0,003v^2$. Оцінити відносну похибку обчислення витрат пального за швидкості $v = 90$ км/год. із точністю до 5 %.

Знайдемо еластичність функції:

$$|E_v(y)| = \left| \frac{vf'(v)}{f(v)} \right| = \left| \frac{v(-0,3 + 0,006v)}{18 - 0,3v + 0,003v^2} \right|; \quad |E_{90}(y)| = 1,41,$$

тоді відносна похибка становить:

$$\delta_y = 1,41 \cdot 5 \approx 7,1\%.$$

Приклад 13. Капітал в 1 млн грн можна покласти у банк під 10 % річних або інвестувати у виробництво, причому ефективність вкладення очікується у розмірі 20 %, а витрати виражено квадратичною залежністю. Прибуток оподатковується під p %. За яких значень p вкладення у виробництво є більш ефективнішим за розміщення капіталу у банку?

Нехай x (млн грн) інвестуються у виробництво, тоді $(1-x)$ – розміщується під відсотки. Визначимо розміщений капітал за рік:

$$(1 - x(1 + 10/100)) = 1,1 - 1,1x,$$

тоді капітал, що вкладений у виробництво:

$$x(1 + 20 / 100) = 1,2x.$$

Якщо витрати виражає квадратична залежність $C(x) = ax^2$, то прибуток і податки від вкладення капіталу у виробництво:

$$\Pi(x) = 1,2x - ax^2, \quad T(x) = (1,2x - ax^2) \cdot p / 100,$$

відповідно, тобто чистим прибутком є функція:

$$P(x) = (1 - p/100)(1,2x - ax^2),$$

і загальна сума за рік становить:

$$\begin{aligned} S(x) &= 1,1 - 1,1x + (1 - p/100)(1,2x - ax^2) = \\ &= 1,1 + (1,2(1 - p/100) - 1,1)x - a(1 - p/100)x^2. \end{aligned}$$

Знайдемо максимальне значення цієї функції на відрізку $[0,1]$:

$$S'(x) = 1,2(1 - p/100) - 1,1 - 2a(1 - p/100)x,$$

$$\text{Умова } S'(x) = 0 \text{ виконується при } x_0 = \frac{1,2(1 - p/100) - 1,1}{2a(1 - p/100)}.$$

Оскільки $S''(x) = -2a(1 - p/100) < 0$, то x_0 – точка максимуму.

Для того, щоб точка $x_0 \in (0;1)$, необхідно виконання умов $0 < x_0 < 1$, звідси $0 < 1,2(1 - p/100) - 1,1 < 2a(1 - p/100)$, тобто:

$$\begin{cases} 1,2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - 1,1 > 0, \\ 1,2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - 1,1 < 2a\left(1 - \frac{p}{100}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < \frac{25}{3}, \\ p > \frac{2a - 0,1}{2a - 1,2} \cdot 100. \end{cases}$$

Очевидно, що при всіх $a > 0$ виконується умова:

$$\frac{2a - 0,1}{2a - 1,2} \cdot 100 > \frac{25}{3}.$$

Отже, при $p > (25/3)$ вигідно весь капітал розміщувати у банку під відсотки, а при $p < (25/3)$ – певну частину інвестувати у виробництво.

Приклад 14. Підприємство виготовляє q одиниць продукції, ціна кожної з яких p , причому $p(q) = 50 - 0,1 \cdot q$, а функція витрат становить $C(q) = 0,02 \cdot q^2 + 14 \cdot q + 800$ (грн). Знайти оптимальний для підприємства випуск продукції та відповідний йому максимальний випуск.

Нехай $R(q) = q \cdot p(q)$ – функція доходу, який отримує підприємство, а $\Pi(q) = R(q) - C(q)$ – функція прибутку від реалізації q одиниць продукції за ціною $p = p(q)$. Для розв'язання слід дослідити функцію $\Pi = \Pi(q)$ на екстремум. При цьому прибуток буде максимальним для обсягу q випуску продукції, для якого $\Pi'(q) = 0$, $\Pi''(q) < 0$.

Диференціюємо рівність:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q),$$

дістанемо:

$$\Pi'(q) = R'(q) - C'(q).$$

Оскільки $\Pi'(q) = 0$, то $R'(q) = C'(q)$.

Підставимо похідні відомих функцій:

$$R(q) = 50 \cdot q - 0,1 \cdot q^2, \quad C(q) = 0,02 \cdot q^2 + 14 \cdot q + 800$$

до отриманої рівності й дістанемо:

$$50 - 0,2 \cdot q = 0,04 \cdot q + 14 \quad \text{або} \quad 0,24 \cdot q = 36,$$

тобто $q = 150$ – критична точка.

Обчислимо $\Pi'(q)$ і визначаємо її знак при $q = 150$:

$$\Pi''(q) = R''(q) - C''(q) = -0,2 - 0,04 = -0,24 < 0.$$

Отже, $q = 150$ – точка максимуму функції прибутку, тобто оптимальний обсяг виробництва становить 150 од. продукції.

Таким чином:

- ціна продукції $p(150) = 50 - 0,1 \cdot 150 = 35$,
- дохід $R(150) = 50 \cdot 150 - 0,1 \cdot 150^2 = 5250$,
- витрати $C(150) = 0,02 \cdot 150^2 + 14 \cdot 150 + 800 = 3350$,
- максимальний прибуток $\Pi_{\max} = \Pi(150) = 1900$ ум. гр. од.

Розділ 8

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Раніше ми вивчали функції однієї змінної, тобто за значенням незалежної змінної x визначали певне значення залежної змінної y . У науці та в економічних дослідженнях часто трапляються випадки кількох незалежних змінних, і для визначення значення функції необхідно попередньо встановити значення, яких набувають ці змінні одночасно. Наприклад, розподіл певного товару на різних ринках із різним попитом, визначення прибутку фірми, залежно від певних факторів виробництва ціни на працю та капітальних витрат тощо.

8.1. Основні поняття функції багатьох змінних

8.1.1. Означення функції двох змінних

Введемо поняття функції двох незалежних змінних.

Нехай задано дві множини X та Y , а також:

$$D = X \times Y = \{(x; y) | x \in X, y \in Y\}$$

– деяка множина впорядкованих пар дійсних чисел.

Означення. Якщо кожній парі $(x; y) \in D$ поставлено у відповідність певним способом число z із множини Z , то кажуть, що на множині D *задано функцію двох змінних* $z = f(x; y)$.

Змінні x та y називають *незалежними* або *аргументами*; змінну z називають *залежною*. Множину D називають *областю визначення функції*. Усі значення, яких набуває функція $z = f(x; y)$ при $(x; y) \in D$, утворюють *область значення функції* z .

У випадку функції однієї змінної областю визначення зазвичай є проміжок (скінченний або нескінченний). Областю визначення двох змінних може бути деяка обмежена або не обмежена частина площини, яку зазвичай позначають:

$$D \in R^2.$$

Означення. Якщо D – обмежена множина точок площини, то лінію, яка обмежує область, називають **межею області визначення**. Точки області визначення функції двох змінних, які не належать межі, називають **внутрішніми точками** області D . Область, яка містить тільки внутрішні точки, називають **відкритою областю**. Якщо межа належить області визначення D , то її називають **замкненою областю**.

У випадку функції двох змінних має місце різноманітність і складність областей визначення функцій. Тому розглядати ці області набагато простіше, якщо використовувати їх геометричну інтерпретацію. Якщо на площині вибрати прямокутну систему координат, то множина пар точок із координатами $(x; y)$, для яких функцію визначено, утворює певну фігуру на площині.

Алгоритм знаходження області визначення функції:

Крок 1. Записати нерівності або систему нерівностей, що відповідає області визначення елементарних функцій, які утворюють аналітичний вираз функції $z = f(x; y)$.

Крок 2. Розв'язати аналітично отримані нерівності або систему нерівностей і побудувати область визначення.

Приклад 8.1. Знайти область визначення функції:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Крок 1. Областю визначення функції є множина всіх точок, для яких визначено вираз:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Крок 2. Розв'язавши нерівність $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, отримаємо $x^2 + y^2 \leq 4$ (рис. 8.1).

Множина точок площини, координати яких задовольняють цю нерівність, є кругом із центром $(0; 0)$ радіуса 2, що включає і його межу (коло). Область визначення є замкненою.

Приклад 8.2. Знайти область визначення функції $z = 1/xy$.

Очевидно, що цю функцію визначено, якщо $x \neq 0$, $y \neq 0$. Тоді множина D – це площина XOY за винятком координатних осей OX та OY (рис. 8.2).

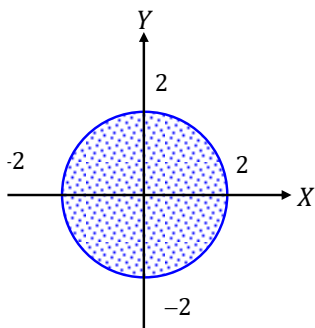


Рис. 8.1

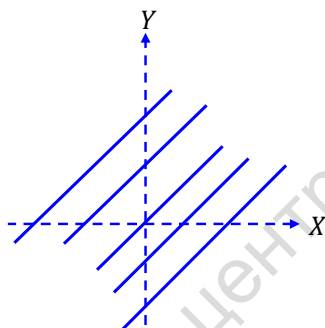


Рис. 8.2

8.1.2. Означення функції багатьох змінних. Способи задання функції

Введемо поняття функції n змінних ($n \geq 3$).

Розглянемо n -вимірний простір R^n та область $D \subset R^n$.

Означення. Нехай маємо упорядкований набір n величин $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, і кожному набору відповідає певне значення змінної z . Тоді кажуть, що на множині D **задано функцію багатьох змінних** $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають **незалежними** або **аргументами**, z – **залежною**, символ f означає закон відповідності.

Множину наборів $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z\}$ називають **областю визначення функції** та позначають $D = D(f)$.

Відповідну множину значень змінної z називають **областю значень функції** та позначають $E = E(f)$.

Приклад 8.3. Фірма випускає n видів товарів, які реалізує за цінами $p_1, p_2, \dots, p_n$. За обсягів реалізації товарів $x_1, x_2, \dots, x_n$ дохід фірми визначає функція багатьох змінних:

$$R = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

Приклад 8.4. Квартирна плата залежить від кількості метрів житлової або зальної площі, тарифів на електроенергію, газ, холодну та гарячу воду, пільг, які мають мешканці квартири. Але, якщо для двох квартир у будинку ці показники є однаковими, то й плата за квартиру буде однаковою. Отже, розмір квартирної плати є функцією від цих показників.

Приклад 8.5. Податок, який має сплатити фірма, розраховують за спеціальною методикою. Але якщо у двох фірм показники однакові, то й податки мають бути однаковими. Отже, величиною податку є функція від цих показників.

Як і функції однієї змінної, функції багатьох змінних можна задавати аналітично, за допомогою таблиць, графіків.

За **аналітичного способу** задання функції її значення визначає формула від аргументів функції. У прикладі 8.1 функцію задано саме так, а в прикладах 8.2 і 8.3 за бажання також можна задати функцію формулою залежності від відповідних показників.

Табличний спосіб задання функції застосовують в економіці дуже часто. У вигляді таблиць подають різноманітні звіти, баланси, економічні показники підприємств. Табличний спосіб часто необхідний за складних розрахунків на комп'ютері.

Графічний спосіб задання функції більш ніж двох змінних майже не застосовують через труднощі подання графіка такої функції. Визначимо поняття графіка у випадку функції двох змінних.

Означення. Множину всіх точок $(x; y; z)$ простору R^3 таких, що $(x; y) \in D$, а $z = f(x; y)$, називають **графіком функції** $z = f(x; y)$ і позначають:

$$\Gamma_f = \{(x; y; z) \mid (x; y) \in D, z = f(x; y)\}.$$

Графіком функції двох змінних є поверхня, яке задає рівняння $z = f(x; y)$ у просторі R^3 . Наприклад, графіком функції $z = ax + by + c$ є площина $z - ax - by - c = 0$, а графіком функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ – напівсфера радіуса $R = 1$ із центром у початку координат.

При побудові графіків функції двох змінних у багатьох випадках виникають значні труднощі. Тому для визначення характеру поведінки функції багатьох змінних використовують поняття лінії заданого рівня.

Означення. **Лінією рівня функції** $z = f(x; y)$ називають множину точок площини, в яких функція набуває одного й того самого значення C , що визначають як $z = f(x; y) = C$, $C = \text{const}$.

Надаючи різних значень C і щоразу будуючи лінію із заданим рівнем C , одержують сукупність ліній рівня, що дає уявлення про характер зміни функції $z = f(x; y)$.

У випадку $n \geq 3$ розглядають не лінії, а **поверхні рівня функції** $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, на яких $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, $C = \text{const}$.

Прикладами ліній рівня є паралелі та меридіани на глобусі – лінії рівня функції широти та довготи. Синоптики публікують карти із зображенням **ізотерм** та **ізобар** – ліній рівня температури. В економіці прикладом ліній рівня служать **ізокванти** – лінії, уздовж яких виробнича функція набуває сталого значення.

За різних значень C одержують різні лінії рівня заданої функції. Вони утворюють топологічну карту графіка функції $z = f(x; y)$. Якщо вибирати числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію із різницею d , то одержують ряд ліній рівня, за взаємним розміщенням яких можна отримати уявлення про поведінку та графік функції.

Приклад 8.6. Побудувати лінії рівня функції:

$$z = x^2 + y^2 - 2y.$$

Лінії рівня функції визначають із рівності $x^2 + y^2 - 2y = C$, або $x^2 + y^2 - 2y + 1 = C + 1$, або $x^2 + (y - 1)^2 = C + 1$.

Це рівняння кола із центром у точці $(0; 1)$ радіуса $R = \sqrt{C + 1}$, $C \geq -1$.

Точка $(0; 1)$ – вироджена лінія рівня, що відповідає значенню $z = -1$. Лініями рівня є концентричні кола, радіус яких збільшується зі збільшенням значення c (рис. 8.3).

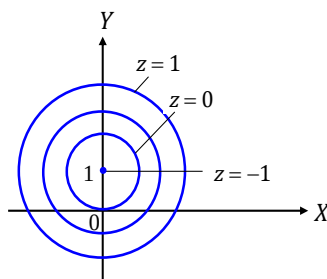


Рис. 8.3

8.1.3. Функції багатьох змінних, які використовують в економічній теорії

1. Функцію вигляду:

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = \sum_{k=1}^n a_kx_k + b,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – деякі числа, називають *лінійною* або гіперплощиною в евклідовому просторі R^{n+1} .

2. Функцію вигляду:

$$z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j,$$

де a_{ij} – деякі числа, називають *квадратичною формою* змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3. *Функція корисності* (одне із базових понять економічної теорії) – це функція вигляду:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

що виражає корисність від n куплених товарів. Це суб'єктивна оцінка індивідом корисності z набору товарів $x_1, x_2, \dots, x_n$, яку застосовують у задачах *споживчого вибору*.

Часто зустрічають такі види функції корисності:

• *логарифмічна*
$$z = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i), \quad a_i > 0, x_i > c_i \geq 0;$$

• *сталой еластичності*
$$z = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - b_i} (x_i - c_i)^{1 - b_i},$$

де $a_i > 0, 0 < b_i < 1, x_i > c_i \geq 0$.

Лінії рівня функції корисності називають *кривими байдужості*.

4. На випадок n змінних узагальнюють *виробничу функцію*, яка є результатом виробничої діяльності від n факторів $x_1, x_2, \dots, x_n$, які її зумовлюють.

Лінії рівня виробничої функції називають *ізоквантами*.

При $n = 2$ розглядають такі види виробничої функції:

• *Кобба-Дугласа*:

$$z = b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}, \quad \text{де } z = x(x_1; x_2),$$

яка виражає вартість випуску продукції залежно від вартості основного капіталу x_1 і трудових ресурсів x_2 , $b_0 > 0$ – параметр продуктивності конкретно взятої технології, $0 < b_1 < 1$ – частка капіталу у доході, $b_1 + b_2 = 1$;

• *зі сталою еластичністю заміщення:*

$$z = e_0 (e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta})^{-(h/\beta)},$$

де z – величина суспільного продукту, x_1 – обсяг виробничих фондів, x_2 – витрати праці.

У класичній економічній теорії відомо співвідношення $MV = PY$, яке називають *рівнянням обміну Фішера* або основним рівнянням класичної кількісної теорії грошей. У цьому рівнянні літерою M позначено загальну кількість грошей, V – швидкість обігу грошей (скільки разів кожна грошова одиниця бере участь у розрахунках у середньому за рік), P – національний продукт або дохід (національний продукт, що виражений вартістю, збігається із національним доходом), Y – рівень цін (середнє вагоме значення цін готових товарів і послуг, що виражають щодо базового показника, який прийнято за одиницю).

Указане співвідношення пов'язує чотири величини, і якщо його розв'язати щодо однієї із них (яке розглядають як залежну змінну), то вона залежатиме від трьох інших (які будуть незалежними змінними – аргументами).

8.2. Границя та неперервність функції

8.2.1. Границя функції двох змінних

Надалі розглядатимемо функції двох змінних ($n=2$) для уникнення громіздких позначень. Випадок двох змінних дає можливість використовувати наочну геометричну ілюстрацію основних понять. При цьому всі означення та теореми легко узагальнити на випадок $n > 2$.

Розглянемо функцію $z = f(x; y)$. Нехай її область визначення: $D \subset R^2$, тобто D є підмножиною координатної площини.

Відстань між точками $M(x; y)$ та $M_0(x_0; y_0)$ визначають за формулою:

$$\rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Означення. δ -околом точки $M_0(x_0; y_0)$ називають множину всіх точок площини, координати яких задовольняють нерівності:

$$\rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Геометрично – це множина точок площини, що лежать усередині кола із центром у точці M_0 радіуса δ . Внутрішністю кола є двовимірний аналог відкритого проміжку $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ – δ -околу точки M_0 на числовій прямій і $\rho(M; M_0) = |x - x_0| < \delta$.

У випадку функції трьох змінних $u = f(x; y; z)$ δ -околом точки M_0 є відкрита куля (без сфери) із центром у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ радіуса δ :

$$\rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta.$$

У випадку функції n змінних δ -окол точки M_0 – множина

$$\rho(M; M_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2} < \delta.$$

Більшу частину понять аналізу, які були введені для функції однієї змінної, можна перенести на випадок функції двох змінних.

Означення. Число A називають *границею функції* $z = f(x; y)$ при $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$, якщо для довільного, як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$), яке для всіх точок $M(x; y)$ із δ -околу точки $M_0(x_0; y_0)$ таких, що:

$$0 < \rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

виконується нерівність $|f(x; y) - A| < \varepsilon$. Символічно записують:

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\varepsilon)) \forall M(x; y) \in D(f):$$

$$0 < \rho(M; M_0) < \delta : |f(x; y) - A| < \varepsilon.$$

Наведене означення можна перефразувати, використовуючи геометричні терміни: число A називають **границею функції** $z = f(x; y)$, якщо точка $M(x; y)$ прямує до точки $M_0(x_0; y_0)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що $|f(x; y) - A| < \varepsilon$ як тільки відстань $0 < \rho(M; M_0) < \delta$.

Розглянемо внутрішню точку $M_0(x_0; y_0) \in D$ і послідовність точок $M_i(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$.

Сформулюємо інше означення границі функції.

Означення. Число A називають **границею функції** $z = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$, якщо для довільної послідовності точок $\{M_n\}$, яка збігається до точки M_0 при $n \rightarrow \infty$ відповідна послідовність значень функції $\{f(M_n)\}$ збігається до числа A при $n \rightarrow \infty$. Символічно записують так:

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \Leftrightarrow \forall \{M_n\} : M_n \rightarrow M_0, n \rightarrow \infty, M_n \neq M_0 :$$

$$\{f(M_n)\} \rightarrow A, n \rightarrow \infty.$$

Перше означення границі називають означенням "мовою ε - δ " (**границя функції за Коші**), а друге – "мовою послідовностей" (**границя функції за Гейне**).

Зауваження. Між поняттями границі для функції однієї змінної та функції багатьох змінних є багато спільного, але існує й принципова різниця. Наприклад, для функції однієї змінної $z = f(x)$ існування $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ означає наявність

односторонніх, рівних між собою границь, і навпаки.

Для функції двох змінних $z = f(x; y)$ наближення до точки $(x_0; y_0)$ можливе у різні способи: і праворуч, і ліворуч, і зверху, і знизу, і під деяким кутом прямою, і за певною лінією (траєкторією). Отже, наявне істотне обмеження, порівняно із рівністю двох односторонніх границь у випадку функції однієї змінної. Використовують ще таке позначення границі функції:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A.$$

Число A не залежить від того, яким шляхом наближається точка $M(x; y)$ до точки $M_0(x_0; y_0)$.

Приклад 8.7. Довести, що $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Нехай точка $M(x; y)$ прямує до точки $M_0(0; 0)$ прямою $y = kx$. Тоді:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2},$$

тобто значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої. Наприклад,

- при $k = 1$: $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = 1$;
- при $k = 2$: $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \frac{4}{5}$ і т. д.

Отже, наближаючись до точки $M_0(0; 0)$ різними напрямками, дістанемо різні значення границі. Це означає, що задана функція не має границі у точці $M_0(0; 0)$.

Крім границі функції $z = f(x; y) = f(M)$ за одночасного прямування аргументів $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$ доводиться мати справу із **повторними границями**, які є результатом граничних переходів із кожного аргументу окремо.

Припустимо, що область визначення функції така, що змінна x (незалежно від змінної y) може набувати довільних значень на множині X та $x \rightarrow x_0$. Аналогічно змінна y (незалежно від змінної x) змінюється у множині Y та $y \rightarrow y_0$. Якщо за довільно фіксованого y із Y існує для функції $z = f(x; y)$ (що виявляється функцією тільки від x) границя при $x \rightarrow x_0$, то вона, загалом, залежатиме від наперед фіксованого y :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) = \varphi(y).$$

Далі можна ставити запитання про границю функції $\varphi(y)$ при $y \rightarrow y_0$. Дістанемо:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) \right)$$

– одну із двох повторних границь. Іншу границю можна отримати, якщо граничні переходи провести у зворотному порядку:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \right).$$

Сформулюємо без доведення важливі теореми про границі для функції двох змінних.

ТЕОРЕМА (про єдиність границі)

Якщо функція $z = f(M)$ має границю при $M \rightarrow M_0$,
то ця границя єдина.

ТЕОРЕМА

Якщо функція $z = f(M)$ має границю при $M \rightarrow M_0$,
то вона обмежена у деякому околі точки M_0 .

ТЕОРЕМА (про арифметичні дії з границями)

Якщо $\exists \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ та $\exists \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = B$, то:

$$1) \exists \lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B;$$

$$2) \exists \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \cdot g(M) = A \cdot B;$$

$$3) \exists \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}, B \neq 0.$$

Для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ поняття границі та її властивості вводять аналогічно. Твердження теорем також справедливі. Для позначення границі функції у точці використовують символіку:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A, \text{ де } M(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Розглянемо приклади обчислення границь.

Приклад 8.8. Обчислити границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Зробимо заміну та перейдемо до границі функції однієї змінної, а далі застосуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 - \rho^2))'}{\rho'} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - \rho^2} \cdot (-2\rho)}{1} = -2 \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{1 - \rho^2} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 8.9. Обчислити границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 3xy}{xy}$.

Зробимо відповідну заміну, дістанемо:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 3xy}{xy} = \left| xy = t \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} = 3.$$

Приклад 8.10. Довести, що $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Виберемо дві послідовності:

$$(x_n; y_n) = (1/n; 1/n) \text{ та } (x_n^{(1)}; y_n^{(1)}) = (-(1/n); 2/n);$$

послідовності $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ та $x_n^{(1)} \rightarrow 0$, $y_n^{(1)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

але
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n; y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/n) \cdot (1/n)}{((1/n))^2 + ((1/n))^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{(1)}; y_n^{(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(1/n) \cdot (2/n)}{(-(1/n))^2 + ((2/n))^2} = -\frac{2}{5}.$$

Отже, за теоремою про єдиність границі, функція не має границі.

Приклад 8.11. Обчислити границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

Обчислимо границю як повторну:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin xy}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 5y}{y} = 5 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 5y}{5y} = 5.$$

8.2.2. Неперервність функції двох змінних

Означення. Функцію $z = f(x; y)$ називають *неперервною у точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо вона визначена у точці M_0 і має у цій точці границю, причому:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Важливо зазначити, що точка M може прямувати до точки M_0 у довільний спосіб, але весь час залишатися в області визначення функції.

Означення. Функцію $z = f(x; y)$ називають **неперервною в замкненій області D** , якщо вона неперервна у кожній внутрішній точці цієї області та на її межі.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ є **точкою розриву** функції $z = f(x; y)$, якщо:

1) функція $z = f(x; y)$ не визначена у точці $M_0(x_0; y_0)$;

2) функція $z = f(x; y)$ визначена у точці $M_0(x_0; y_0)$, але:

• або не має границі у цій точці, тобто $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$ не існує;

• або границя $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ існує, але $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0; y_0)$.

Приклад 8.12. Розглянемо функцію двох змінних:

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & (x; y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці $(0; 0)$, оскільки у цій точці функція не має границі.

Для функцій багатьох змінних виконуються теореми про неперервність алгебраїчної суми, добутку й частки, які були встановлені раніше (розд. 5) для функції однієї змінної.

Властивості для функцій, що є неперервними у замкненій області, також справедливі. Зокрема, якщо функція $z = f(M)$ визначена та неперервна в замкненій області D , то знайдеться щонайменше одна така точка M_1 , що для всіх інших точок виконується нерівність $f(M) \leq f(M_1)$. Значення функції у цій точці є **найбільшим в області D** . Використовують таке позначення:

$$\max_{M \in D} f(M) = f(M_1).$$

І знайдеться щонайменше одна точка M_2 така, що для всіх інших точок виконується нерівність $f(M) \geq f(M_2)$. Значення функції у цій точці є **найменшим в області D** .

Використовують таке позначення:

$$\min_{M \in D} f(M) = f(M_2).$$

8.2.3. Прирости функції

Нехай задано функцію двох змінних $z = f(x; y)$, яка визначена у деякому околі точки $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Зафіксуємо змінну y так, щоб $y = y_0$ і розглянемо функцію однієї змінної $z = f(x; y_0)$, у точці x_0 . Надамо приросту Δx , тоді функція одержить приріст:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0; y_0), \quad (8.1)$$

який називають **частинним приростом функції** $z = f(x; y)$ за змінної x у точці $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно, якщо зафіксувати змінну x так, щоб $x = x_0$ і розглядати функцію $z = f(x_0; y)$ у точці y_0 та надати приросту Δy , то функція дістане приросту:

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0), \quad (8.2)$$

який називають **частинним приростом функції** $z = f(x; y)$ за змінної y у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо надати приросту обом змінним Δx і Δy одночасно, то функція дістане **повного приросту функції** $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0). \quad (8.3)$$

Зауваження. Для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відповідні **частинні прирости** у точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ позначають:

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де точка $M_i(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n)$, $i = 1, n$ розташована в області визначення функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Повний приріст позначають так:

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Повний приріст функції, загалом кажучи, не дорівнює сумі частинних приростів.

Сформулюємо інше означення неперервності функції у точці.

Означення. Функцію $z = f(M)$ називають **неперервною у точці** M_0 , якщо існує границя:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0. \quad (8.4)$$

8.3. Диференційованість функції багатьох змінних

8.3.1. Частинні похідні першого порядку

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x; y)$ та виберемо точку $M_0(x_0; y_0) \in D$ із області визначення функції.

Означення. Якщо існують границі:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} = z'_x,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y} = z'_y,$$

то їх називають **частинними похідними за змінними x та y функції $z = f(x; y)$** , відповідно.

Для частинних похідних першого порядку використовують такі позначення:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) \text{ та } z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y).$$

Із означення випливає, що частинна похідна функції $z = f(x; y)$ за змінної x є звичайною похідною від функції змінної x за фіксованого значення змінної y , а частинна похідна за змінної y є звичайною похідною за змінної y за фіксованого значення змінної x . Тобто для знаходження $f'_x(x; y)$ потрібно вважати сталою змінну y , а для знаходження $f'_y(x; y)$ – змінну x і диференціювання здійснювати із застосуванням таблиці похідних основних елементарних функцій однієї змінної та правил диференціювання.

Аналогічно вводять поняття частинної похідної за змінної x_i , $i = 1, n$ для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Означення. Якщо існують границі:

$$z'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то їх називають **частинними похідними за змінними x_i , $i = 1, n$ функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$** .

Приклад 8.13. Задано функцію:

$$f(x; y) = 4x^2y + 5xy^3 - 3x + 2y - 6.$$

Обчислити частинні похідні $f'_x(x; y)$ та $f'_y(x; y)$.

Якщо змінну y вважати сталою, то, продиференціювавши функцію за змінною x , дістанемо:

$$f'_x(x; y) = 8xy + 5y^3 - 3.$$

Якщо змінну x вважати сталою, то продиференціювавши функцію за змінною y , дістанемо:

$$f'_y(x; y) = 4x^2 + 15xy^2 + 2.$$

Приклад 8.14. Задано функцію $f(x; y) = x^y$.

Обчислити похідні $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$.

Маємо $f'_x(x; y) = y \cdot x^{y-1}$, $f'_y(x; y) = x^y \ln x$.

Приклад 8.15. Задано функцію $f(x; y) = x \ln y + (y/x)$.

Обчислити похідні $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$.

Продиференціювавши функцію за змінними x та y , відповідно. Дістанемо:

$$f'_x(x; y) = \ln y - y/x^2, \quad f'_y(x; y) = (x; y) + (1/x).$$

8.3.2. Необхідні умови диференційованості функції двох змінних

Означення. Функцію $z = f(x; y)$ називають *диференційованою у точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y) \cdot \Delta y, \quad (8.5)$$

де A та B – деякі числа, $\alpha(\Delta x; \Delta y)$ і $\beta(\Delta x; \Delta y)$ – нескінченно малі функції при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Відомо, що для функції однієї змінної необхідною та достатньою умовою диференційованості функції у точці є існування похідної у цій точці. У випадку функції двох і більшої кількості змінних з існування частинних похідних не впливає навіть неперервність функції.

Приклад 8.16. Розглянемо функцію:

$$f(x; y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } xy = 0, \\ 1, & \text{якщо } xy \neq 0. \end{cases}$$

Функція має частинні похідні у точці $(0; 0)$, причому $f'_x(0; 0) = f'_y(0; 0) = 0$ та $f(x; 0) = f(0; y) = 0$.

З іншого боку, $f(0;0)=0$, і в кожному околі, що містить точку $(0;0)$, є точки $(x;y)$ такі, що $f(x;y)=1$. А це означає, що ця функція розривна у точці $(0;0)$.

ТЕОРЕМА

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$, то у цій точці існують частинні похідні першого порядку z'_x і z'_y , причому $z'_x(x_0; y_0) = A$, $z'_y(x_0; y_0) = B$, де A та B – коефіцієнти у рівності (8.5).

Доведення. Оскільки $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$, то справедлива рівність (8.5):

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y) \cdot \Delta y.$$

За фіксованого $y = 0$ запишемо частинний приріст функції за змінною x :

$$\Delta_x z = A \cdot \Delta_x + \alpha(\Delta_x; 0) \cdot \Delta_x.$$

Поділимо цю рівність на Δ_x і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, дістанемо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x; 0)] = A.$$

За означенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z'_x$, тому $z'_x(x_0; y_0) = A$.

Аналогічно можна показати, що $z'_y(x_0; y_0) = B$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Умова теореми є необхідною, але не достатньою.

Зауваження 2. Якщо частинні похідні функції двох змінних у заданій точці не існують, то така функція не диференційована у заданій точці.

ТЕОРЕМА

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$, то вона неперервна у цій точці.

Доведення. Якщо функція диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$, то має місце рівність (8.5), з якої випливає, що:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0,$$

а за означенням (8.4) це свідчить, що функція $z = f(x; y)$ неперервна у точці $M_0(x_0; y_0)$. Теорему доведено.

Зауваження. Обернені твердження до теорем невірні, тобто із неперервності функції двох змінних або із існування її частинних похідних у точці не випливає диференційованості функції у цій точці.

8.3.3. Достатні умови диференційованості функції

ТЕОРЕМА

Якщо функція $z = f(x; y)$ має неперервні частинні похідні першого порядку z'_x і z'_y у деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$, і ці похідні неперервні у точці $M_0(x_0; y_0)$, то функція диференційована у цій точці.

Доведення. Надамо змінним x і y приростів Δx і Δy так, щоб точка $M_0(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ не вийшла за межі околу точки $M_0(x_0; y_0)$, про який ідеться у теоремі. Тоді повний приріст функції можна подати у вигляді:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = \quad (8.6)$$

$$= [f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0 + \Delta y)] - [f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)].$$

Різниця у перших квадратних дужках у (8.6) – це різниця значень функції $f(x_0; y_0 + \Delta y)$ однієї змінної x на кінцях відрізка $[x_0; x_0 + \Delta x]$. За умовою теореми ця функція має похідну на $[x_0; x_0 + \Delta x]$, тому вона неперервна на цьому відрізку. Тоді існує така точка $c_1 \in (x_0; x_0 + \Delta x)$, що має місце формула Лагранжа:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0 + \Delta y) = f'_x(c_1; y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x.$$

Аналогічно існує така точка $c_2 \in (y_0; y_0 + \Delta y)$, що різницю у других квадратних дужках у (8.6) можна подати за формулою Лагранжа: $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = f'_y(x_0; c_2) \cdot \Delta y$.

Отже, $\Delta z = f'_x(c_1; y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0; c_2) \Delta y$.

Оскільки частинні похідні неперервні у точці $(x_0; y_0)$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(c_1; y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0; y_0) \text{ та } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x_0; c_2) = f'_y(x_0; y_0).$$

Це означає, що:

$$f'_x(c_1; y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0; y_0) + \alpha(\Delta x; \Delta y),$$

$$f'_y(x_0; c_2) = f'_y(x_0; y_0) + \beta(\Delta x; \Delta y),$$

де $\alpha(\Delta x; \Delta y) \rightarrow 0, \beta(\Delta x; \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Підставимо ці значення до (8.6), дістанемо:

$$\Delta z = f'_x(x_0; y_0) \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y) \Delta y. \quad (8.7)$$

Із означення випливає, що функція диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$. Теорему доведено.

Наслідок:

Із існування та неперервності частинних похідних
функції двох змінних у заданій точці
випливає неперервність самої функції у цій точці.

Дійсно, якщо $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, то очевидно, що й $\Delta z \rightarrow 0$.

Аналогічно можна ввести поняття диференційованості функції багатьох змінних.

Означення. Функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційована у точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо її повний приріст можна подати так:

$$\Delta z = f'_{x_1}(M) \cdot \Delta x_1 + f'_{x_2}(M) \cdot \Delta x_2 + \dots + f'_{x_n}(M) \cdot \Delta x_n +$$

$$+ \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \cdot \Delta x_n,$$

де α_i – нескінченно малі функції при $\Delta x_i \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, n$.

8.3.4. Повний диференціал функції двох змінних

Означення. Повним диференціалом функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають головну, лінійну щодо приростів Δx та Δy , частину повного приросту функції в $M_0(x_0; y_0)$ у рівності (8.7).

Оскільки $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, то повний диференціал функції $z = f(x; y)$ обчислюють за формулою:

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy. \quad (8.8)$$

Приклад 8.17. Знайти диференціал функції $z = xy + x^2 - 2y$.

Обчислимо частинні похідні:

$$z'_x = y + 2x, z'_y = x - 2.$$

Тоді за (8.8) дістанемо:

$$dz = (2x + y)dx + (x - 2)dy.$$

Зауваження. Диференціал (8.8) ще називають **диференціалом першого порядку** або **першим диференціалом**.

Диференціал функції двох змінних $z = f(x; y)$ інваріантний, тобто (8.8) зберігає свій вигляд, незалежно від того, є x та y незалежними змінними чи функціями інших змінних. Цю властивість називають властивістю **інваріантності форми першого диференціала**.

8.3.5. Застосування повного диференціала функції двох змінних у наближених обчисленнях

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$, то із (8.7) і (8.8) випливає, що:

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x; \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y) \cdot \Delta y,$$

тому при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, має місце наближена рівність:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)dx + f'_y(x_0; y_0)dy. \quad (8.9)$$

Формулу (8.9) застосовують у наближених обчисленнях.

Приклад 8.18. Наближено обчислити значення $(1,04)^{2,02}$.

Розглянемо функцію:

$$f(x; y) = x^y, \quad x > 0.$$

Виберемо $x_0 = 1, y_0 = 2$, тоді

$$\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04, \Delta y = 2,02 - 2 = 0,02.$$

Обчислимо:

$$f'_x = y \cdot x^{y-1}, f'_y = x^y \ln x, f(x_0; y_0) = f(1, 2) = 1^2 = 1,$$

$$f'_x(x_0; y_0) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, f'_y(x_0; y_0) = 1^2 \cdot \ln 1 = 0,$$

тоді $df(x_0, y_0) = 2 \cdot 0,04 + 0 \cdot 0,02 = 0,08$.

Застосуємо (8.9), дістанемо наближено:

$$(1,04)^{2,02} \approx 1 + 0,08 = 1,08.$$

8.3.6. Похідна за напрямком

Нехай функцію $z = f(x; y)$ визначено в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0) \in D$. Частинні похідні f'_x і f'_y виражають швидкість зміни функції у додатному напрямку осі OX та OY , відповідно. Але для функції $z = f(x; y)$ можна поставити запитання про швидкість її зміни у точці у довільному напрямку.

Розглянемо деякий напрямок, що задає одиничний вектор:

$$\vec{l} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}, \text{ де } |\vec{l}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Виберемо на прямій, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, довільну точку $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і знайдемо довжину відрізка:

$$M_0M_1: \Delta \vec{l} = M_0M_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (\text{рис. 8.4}).$$

Рухатимемося у напрямку вектора $\vec{l}$ від точки $M_0(x_0; y_0)$ до точки $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$.

Тоді функція отримає приріст у цьому напрямку вектора $\vec{l}$.

Означення. Приріст

$$\Delta_{\vec{l}} z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$

де Δx і Δy пов'язані співвідношеннями $\Delta x = \Delta \vec{l} \cos\alpha$ і

$\Delta y = \Delta \vec{l} \cos\beta$, називають **приростом функції $z = f(x; y)$ у заданому напрямку вектора $\vec{l}$ у точці $M_0(x_0; y_0)$** . Приріст функції у напрямку вектора $\vec{l}$ тоді має вигляд:

$$\Delta_{\vec{l}} z = f(x_0 + \Delta \vec{l} \cos\alpha; y_0 + \Delta \vec{l} \cos\beta) - f(x_0; y_0). \quad (8.10)$$

Означення. Похідною z'_l за напрямом вектора $\vec{l}$ функції двох змінних $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають границю відношення приросту функції у цьому напрямку до $\Delta \vec{l}$ при $\Delta \vec{l} \rightarrow 0$, якщо вона існує, і позначають:

$$z'_l = \lim_{\Delta \vec{l} \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\vec{l}} z}{\Delta \vec{l}}.$$

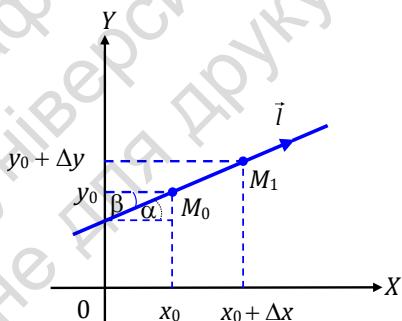


Рис. 8.4

Похідна z'_l характеризує *швидкість зміни функції за напрямком вектора $\vec{l}$* .

Зауваження. Якщо напрямок вектора $\vec{l}$ збігається із додатнім напрямком осі OX , то похідна за напрямком $z'_l(x_0; y_0)$ перетворюється на частинну похідну $z'_x(x_0; y_0)$.

Якщо напрямок вектора $\vec{l}$ збігається із додатнім напрямком осі OY , то похідна за напрямком у точці $z'_l(x_0; y_0)$ перетворюється на частинну похідну $z'_y(x_0; y_0)$.

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$, то її приріст можна записати так:

$$\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + o(\Delta \vec{l}) = z'_x \Delta \vec{l} \cos \alpha + z'_y \Delta \vec{l} \cos \beta + o(\Delta \vec{l}).$$

Поділимо цю рівність на $\Delta \vec{l}$, дістанемо:

$$\frac{\Delta z}{\Delta \vec{l}} = z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta + \frac{o(\Delta \vec{l})}{\Delta \vec{l}}.$$

Тоді при $\Delta \vec{l} \rightarrow 0$ маємо:

$$z'_l = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta. \quad (8.11)$$

Зауваження. Очевидно, що всі поняття, які введені для функції двох змінних, переносять на функції багатьох змінних. Аналогічно для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначають похідну за напрямком n -вимірного вектора $\vec{l} = \{\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n\}$ у точці $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ простору R^n :

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cos \alpha_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cos \alpha_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \cos \alpha_i,$$

де $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1$.

Приклад 8.19. Знайти похідну функції $z = x^2 + y^2$ у точці $M(-2; 1/\sqrt{3})$ за напрямком вектора, що утворює із віссю OX кут $\alpha = \pi/3$.

Оскільки із віссю OX вектор утворює кут $\alpha = \pi/3$, то із віссю OY він утворює кут $\beta = (\pi/2) - (\pi/3) = \pi/6$, тому за (8.11) дістанемо:

$$z'_l = 2x \cdot \cos(\pi/3) + 2y \cdot \cos(\pi/6) = 2x \cdot \frac{1}{2} + 2y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x + \sqrt{3}y.$$

Обчислимо похідну за напрямком у точці:

$$z'_l \left(-2; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -1.$$

8.3.7. Градієнт функції

Нехай функція $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$. Тоді у цій точці існує похідна функції за напрямком будь-якого вектора. Виникає важливе запитання: *в якому напрямку похідна функції буде найбільшою?* Виявляється, що можна дати відповідь, якщо ввести поняття вектора-градієнта.

Означення. *Градiєнтом функції* $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають вектор, координати якого дорівнюють частинним похідним першого порядку функції у цій точці.

Використовують позначення:

$$\nabla z = \text{grad } z = \left\{ \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}; \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \right\}. \quad (8.12)$$

Оскільки одиничний вектор $\vec{l}$ має координати $\{\cos\alpha; \cos\beta\}$, то похідну за напрямом вектора $\vec{l}$ визначають за формулою:

$$z'_l = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta = \text{grad } z \cdot \vec{l}.$$

Похідна за напрямом є **скалярним добутком векторів** $\vec{l}$ і $\text{grad } z$. Оскільки $|\vec{l}| = 1$, то:

$$z'_l = \vec{l} \cdot \text{grad } z = |\vec{l}| \cdot |\text{grad } z| \cdot \cos\varphi = |\text{grad } z| \cdot \cos\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{l}$ і $\text{grad } z$.

Відомо, що скалярний добуток двох векторів максимальний, якщо вектори однаково направлені, тобто кут між ними $\varphi = 0$. Тоді $z'_l|_{\max} = |\text{grad } z|$.

Отже, *градієнт функції характеризує напрямок і величину максимальної швидкості зміни функції у заданій точці.*

Градiєнт функції не залежить від вибору системи координат. Тому за відомого градiєнта функції у кожній точці можна будувати локально лінії рівня функції.

Розглянемо лінії рівня функції $z = f(x; y)$, тобто множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння $f(x; y) = C$, де $C = \text{const}$ – фіксоване число.

Оскільки лінію рівня можна подати як графік диференційованої функції, то тепер можна знайти рівняння дотичної до лінії рівня, яка задається рівнянням $f(x; y) = C$, а точка $M_0(x_0; y_0)$ – точка на цій лінії рівня, тобто $f(x_0; y_0) = C$. Припустимо для визначеності, що $f'_y(x_0; y_0) \neq 0$. Тоді рівняння $f(x; y) = C$ можна записати у вигляді $y = \varphi(x)$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції $y = \varphi(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$y = y_0 + \varphi'_x(x_0)(x - x_0).$$

Але така форма запису не є достатньо ефективною, оскільки $y = \varphi(x)$ – відома функція. Дійсно, знаходити явний вигляд функції $y = \varphi(x)$ необов'язково, адже похідну $y = \varphi'(x_0)$ можна виразити через частинні похідні функції $f(x; y)$. Для цього знайдемо похідну складної функції $z = f(x; \varphi(x))$ двома способами. З одного боку:

$$\frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = f'_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + f'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

з іншого:

$$\frac{d}{dx} f(x; \varphi(x)) = \frac{d}{dx} C = 0.$$

Отже,

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x_0; y_0)}{f'_y(x_0; y_0)}.$$

Підставивши значення $\varphi'_x(x_0)$ до рівняння дотичної, дістанемо:

$$f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) = 0.$$

З аналітичної геометрії відомо, що вектор коефіцієнтів при x та y у рівнянні прямої перпендикулярний до заданої прямої; його називають вектором нормалі. Тому можна дійти висновку: *градієнт функції $\text{grad } z(M_0)$ є вектором нормалі дотичної, що проведена до лінії рівня у точці $M_0(x_0; y_0)$.*

Приклад 8.20. Знайти рівняння дотичної до лінії рівня функції $z = \sqrt[3]{xy^2}$ у точці $M_0(1;1)$.

Запишемо рівняння дотичної:

$$z'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0; y_0)(y - y_0) = 0.$$

Обчислимо частинні похідні у точці $M_0(1;1)$:

$$z'_x = (1/3)x^{-(2/3)}y^{2/3}, \quad z'_x|_{(1;1)} = 1/3; \quad z'_y = (2/3)x^{1/3}y^{-(1/3)}, \quad z'_y|_{(1;1)} = 2/3.$$

Підставивши значення частинних похідних і координати точки $M_0(1;1)$, дістанемо:

$$(1/3)(x - 1) + (2/3)(y - 1) = 0 \quad \text{або} \quad x + 2y - 3 = 0.$$

ТЕОРЕМА

Нехай задано диференційовану функцію $z = f(x; y)$,
й у точці $M_0(x_0; y_0)$ величина градієнта не дорівнює нулю.

Тоді градієнт перпендикулярний до лінії рівня,
що проходить через задану точку.

Доведення. Лінію рівня L_c задає рівняння $f(x; y) = C$, де $C = f(x_0; y_0)$. Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно $y = g(x)$ на L_c . Таким чином, вектор дотичної має координати $(1; g'(x))$. Помноживши його компоненти на dx , одержимо, що вектор $(dx; g'(x)dx)$, тобто вектор $(dx; dy)$, що направлений за дотичною до лінії рівня L_c . На лінії рівня L_c функція $f(x; y) = \text{const}$, тому $df|_{L_c} = 0$.

Отже, на L_c : $z'_x dz + z'_y dy = 0$.

Але вираз $z'_x dz + z'_y dy$ – скалярний добуток вектора градієнта $\text{grad} f = (f'_x; f'_y)$ і вектора $(dx; dy)$, що дотичний до ліній рівня L_c , тобто вектори перпендикулярні (рис. 8.5).

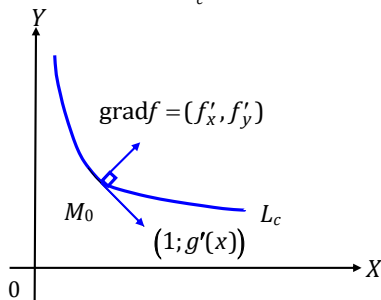


Рис. 8.5

8.3.8. Економічне застосування градієнта

Нагадаємо, що **функція корисності** $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – це суб'єктивна числова оцінка певним індивідом корисності u набору $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ товарів. Вона спадна та опукла вниз. Крім того, припустимо, що кожен товар бажаний, тобто якщо для двох наборів товарів x та y виконується умова $x > y$ ($x_i > y_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$), то й $u(x) > u(y)$. Припустимо, що функція корисності $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційована.

Означення. Частинну похідну u'_{x_i} називають **граничною корисністю** i -го товару, а вектор **граничних корисностей** $(u'_{x_1}, u'_{x_2}, \dots, u'_{x_n})$ – це вектор-**градієнт** gradu .

Зазвичай граничні корисності задовольняють умови:

$$u'_{x_i} > 0, i = \overline{1, n}.$$

Приклад 8.21. Для функції корисності $u(x_1; x_2) = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$ накреслити **криві байдужості** (лінії рівня функції корисності) та знайти вектор граничних корисностей у точці $M(4; 1)$.

Побудуємо криві сталої корисності – криві байдужості (рис. 8.6):

$$U_c = \{(x_1; x_2) | \sqrt{x_1} \sqrt{x_2} = C\}.$$

У рівнянні лінії рівня $u = C$, константа C дорівнює значенню функції $u = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$ у точці $M(4, 1)$. Дістанемо:

$$C = \left(\sqrt{x_1} \sqrt{x_2} \right) \Big|_{(4; 1)} = \sqrt{4} \sqrt{1} = 2.$$

Побудуємо на площині лінію:

$$\sqrt{x_1} \sqrt{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4/x_1.$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2}}{2 \cdot \sqrt{x_1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1}}{2 \cdot \sqrt{x_2}}.$$

Дістанемо вектор граничних корисностей (градієнт) для заданої функції:

$$\text{gradu} = \left(\frac{\sqrt{x_2}}{2 \cdot \sqrt{x_1}}; \frac{\sqrt{x_1}}{2 \cdot \sqrt{x_2}} \right).$$

Обчислимо значення частинних похідних і градієнта у точці $M(4; 1)$, дістанемо:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{(4,1)} = \frac{\sqrt{1}}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{4} \quad \text{та} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{(4,1)} = \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot \sqrt{1}} = 1.$$

Отже, $\text{gradu}(4; 1) = (1/4; 1)$.

Побудуємо вектор-градієнт, що виходить із точки $(0;0)$, а потім – із точки $(1/4; 1)$ (рис. 8.6).

У точці $M(4; 1)$ градієнт перпендикулярний до дотичної, що проведена до графіка функції у заданій точці. Лінії рівня можна побудувати таким чином. Припустимо, що ми починаємо із точки $M_0(x_1^0; x_2^0)$. Будуємо вектор-градієнт у цій точці. Задаємо напрямок, що перпендикулярний до вектора градієнта.

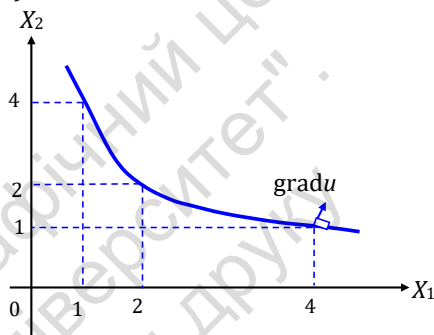


Рис. 8.6

Розглянемо точку:

$$M_0(x_1^1; x_2^1),$$

близьку до $M_0(x_1^0; x_2^0)$, і побудуємо вектор-градієнт у цій точці. Продовжуючи цей процес, можна побудувати (із певною похибкою) лінії рівня (рис. 8.7).

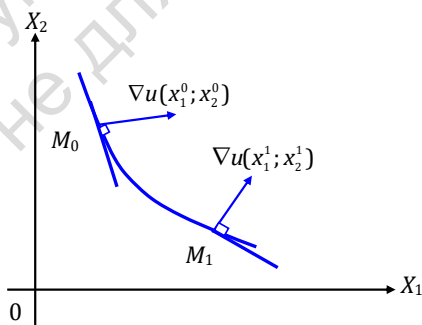


Рис. 8.7

8.3.9. Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в області $D \in \mathbb{R}^2$. Припустимо, що у кожній точці області D існують частинні похідні $f'_x(x; y)$ та $f'_y(x; y)$. Тоді їх природно вважати функціями з областю визначення D . Їх називають **частинними**

похідними першого порядку (або **першими похідними**). Ці похідні, що розглядають як функції від змінних x та y , у свою чергу можуть мати частинні похідні за змінними x та y . Частинні похідні від функцій $f'_x(x; y)$ та $f'_y(x; y)$ називають **частинними похідними другого порядку** (або **другими похідними**) від функції $z = f(x; y)$ (їх чотири). Якщо процес подальшого диференціювання можливий, то частинні похідні від похідних другого порядку називають **частинними похідними третього порядку** (або **третіми похідними**) тощо.

Якщо першу похідну функцію $z = f(x; y)$ взято, припустимо, за змінною x , то її частинні похідні у точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають так:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = f''_{xx}(x_0; y_0); \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = f''_{xy}(x_0; y_0) \text{ або}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y \partial x^2}.$$

Аналогічні позначення використовують і для інших частинних похідних. Наприклад:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x, \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y, \quad z'''_{xyx} = ((z'_x)'_y)'_x \text{ і т. д.}$$

Означення. Частинні похідні другого порядку z''_{xy} і z''_{yx} називають **мішаними частинними похідними другого порядку**.

Приклад 8.22. Обчислити частинні похідні другого порядку функції $z = x^3 - xy^2 + x + 5y - y^4 + 2$.

Знаходимо частинні похідні:

• першого порядку: $z'_x = 3x^2 - y^2 + 1$; $z'_y = -2xy + 5 - 4y^3$;

• другого порядку:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = -2y, \quad z''_{yx} = -2y, \quad z''_{yy} = -12y^2 - 2x.$$

Приклад 8.23. Обчислити частинні похідні другого порядку функції $z = e^{3x} \cos 2y$.

Знаходимо частинні похідні:

• першого порядку: $z'_x = 3e^{3x} \cos 2y$, $z'_y = -2e^{3x} \sin 2y$;

• другого порядку:

$$z''_{xx} = 3^2 e^{3x} \cos 2y, \quad z''_{xy} = 3e^{3x} (-2 \sin 2y) = -6e^{3x} \sin 2y,$$

$$z''_{yx} = -2e^{3x} \sin 2y \cdot 3 = -6e^{3x} \sin 2y, \quad z''_{yy} = -4e^{3x} \cos 2y.$$

У наведених прикладах мішані похідні виявились рівними. Виникає запитання: чи завжди мішані похідні рівні? Відповідь надає наступна теорема.

ТЕОРЕМА

Якщо функція $z = f(x; y)$ має частинні похідні другого порядку у деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і мішані похідні f''_{xy} і f''_{yx} неперервні у самій точці, то має місце рівність

$$f''_{xy}(x_0; y_0) = f''_{yx}(x_0; y_0). \quad (8.13)$$

Аналогічно вводять поняття частинних похідних для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Якщо існують частинні похідні першого порядку $u'_{x_i}, i = 1, n$ у кожній точці області $D \in R^n$, і вони є функціями цих змінних у заданій області, то можна визначити частинні похідні від функції $u'_{x_i}, i = 1, n$ за аргументом x_k у деякій точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ області D . Спочатку її беруть за аргументом x_i , а потім – за аргументом x_k і позначають:

$$u''_{x_i x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \text{ або } f''_{x_i x_k} \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}.$$

При $i \neq k$ частинну похідну називають **мішаною частинною похідною** другого порядку.

Після визначення поняття частинної похідної другого порядку можна послідовно ввести поняття частинної похідної третього порядку, потім четвертого й т. д.

Нехай введено поняття $(n-1)$ частинної похідної функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінними $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}})$, причому окремі або навіть усі номери аргументів можуть збігатися. Нехай ця $(n-1)$ похідна має у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ частинну похідну, тоді її називають n -ю частинною похідною або **частинною похідною n -го порядку** функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за аргументами $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}})$. Таким чином, співвідношення, що визначає n -у частинну похідну, має вигляд:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right). \quad (8.14)$$

Якщо не всі індекси аргументів, за якими береться частинна похідна (8.14), збігаються, то її називають **мішаною частинною похідною n -го порядку**.

Тепер введемо поняття n разів диференційованої функції багатьох змінних.

Означення. Функцію $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають **n разів диференційованою у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$** , якщо всі її частинні похідні $(n-1)$ порядку є диференційованими функціями у цій точці.

ТЕОРЕМА

Для того, щоб функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ була n разів диференційована у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, достатньо, щоб її частинні похідні n -го порядку були неперервними функціями у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Приклад 8.24. Обчислити частинні похідні четвертого порядку $u_{xyzx}^{(4)}, u_{yxxz}^{(4)}, u_{zxyx}^{(4)}$ для функції $u = u(x; y; z) = x^4 y^3 z^2$.

$$\begin{aligned} u'_x &= 4x^3 y^3 z^2, \quad u''_{xy} = 12x^3 y^2 z^2, \quad u'''_{xyz} = 24x^3 y^2 z, \quad u^{(4)}_{xyzx} = 72x^2 y^2 z, \\ u'_y &= 3x^4 y^2 z^2, \quad u''_{yx} = 12x^3 y^2 z^2, \quad u'''_{yxz} = 36x^2 y^2 z^2, \quad u^{(4)}_{yxxz} = 72x^2 y^2 z, \\ u'_z &= 2x^4 y^3 z, \quad u''_{zx} = 8x^3 y^3 z, \quad u'''_{zxy} = 24x^3 y^2 z, \quad u^{(4)}_{zxyx} = 72x^2 y^2 z. \end{aligned}$$

8.3.10. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M(x; y)$ та у деякому її околі. Тоді повний диференціал функції у цій точці обчислюють за формулою:

$$du = f'_x(x; y)dx + f'_y(x; y)dy. \quad (8.15)$$

Його називають **диференціалом першого порядку** або **першим диференціалом**. Нехай функція двічі диференційована у точці $M(x; y)$. Покладемо у цій формулі диференціали незалежних змінних dx і dy сталими, тоді диференціал функції du є функцією змінних x та y , що диференційована у точці $M(x; y)$. Її диференціал у точці $M(x; y)$ має вигляд:

$$\delta(du) = \delta(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x \delta x + (f'_x dx + f'_y dy)'_y \delta y.$$

Цей вираз називають **диференціалом другого порядку** або **другим диференціалом функції** і позначають:

$$d^2u \text{ при } \delta x = dx \text{ та } \delta y = dy.$$

Виконуючи диференціювання в останній формулі із врахуванням рівності мішаних похідних, дістанемо вираз для обчислення другого диференціала:

$$d^2u = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2. \quad (8.16)$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього порядку:

$$\begin{aligned} d^3u &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 u = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3 \right) u \end{aligned}$$

та n -го порядку:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u. \quad (8.17)$$

Приклад 8.25. Знайти d^4u для функції:

$$u = x^2y + 2xy^2 + 3x + y^4.$$

За (8.17) необхідно отримати вирази для всіх частинних похідних четвертого порядку. Обчислимо частинні похідні:

$$u'_x = 2xy + 2y^2 + 3, \quad u'_y = x^2 + 4xy + 4y^3,$$

$$u''_{xx} = 2y, \quad u''_{yy} = 4x + 12y^2, \quad u''_{xy} = 2x + 4y,$$

$$u'''_{y^3} = 24y, \quad u^{(4)}_{y^4} = 24, \quad u'''_{x^3} = u^{(4)}_{x^4} = u^{(4)}_{x^3y} = u^{(4)}_{x^2y^2} = u^{(4)}_{xy^3} = 0.$$

Отже, за (8.17) при $n = 4$ дістанемо: $d^4u = 24dy^4$.

За аналогією із розглянутим випадком функції двох змінних індуктивно також можна ввести поняття диференціала n -го порядку для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Для зручності запам'ятовування введемо символ:

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n,$$

тоді
$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^n u.$$

8.3.11. Формула Тейлора для функції двох змінних

Нехай функцію $z = f(x; y)$ визначено у деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$, і вона має неперервні похідні всіх порядків до m включно. Тоді у цьому околі має місце рівність:

$$f(x; y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k f(x_0; y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + R_m(x; y). \quad (8.18)$$

Означення. Многочлен

$$f(x; y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k f(x_0; y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$

називають **многочленом Тейлора m -го порядку** функції $z = f(x; y)$, а функцію $R_m(x; y) = f(x; y) - P_m(x; y)$ – **залишковим членом m -го порядку** у формулі Тейлора. Формулу (8.18) називають **формулою Тейлора** функції $z = f(x; y)$ в околі точки $M_0(x_0; y_0)$. При $x_0 = y_0$ (8.18) називають **формулою Маклорена**.

Оскільки функція $z = f(x; y)$ має в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ неперервні похідні до $(m + 1)$ порядку включно, то для будь-якої точки $M(x; y)$ із цього околу знайдеться точка $(c; d) = (x_0 + \theta(x - x_0); y_0 + \theta(y - y_0))$, де $\theta \in (0; 1)$ така, що:

$$R_m(x; y) = \frac{1}{(m + 1)!} \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^i \frac{\partial^{m+1} f(c, d)}{\partial x^{m+1-i} \partial y^i} (x - x_0)^{m+1-i} (y - y_0)^i.$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають **залишковим членом у формі Лагранжа**.

Якщо в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x; y)$ має неперервні частинні похідні до $(m + 1)$ порядку включно, то при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ залишковий член $R_m(x)$ є нескінченно малою величиною вищого порядку, порівняно із величиною $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ і $R_m(x, y) = o(\rho^m)$ при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$. Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають **залишковим членом у формі Пеано**.

Для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ формулу Тейлора записують у вигляді:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^k f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} + o(\rho^m),$$

де
$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}, \quad x_i \rightarrow x_i^0, \quad i = \overline{1, n},$$

а суму беруть за всіма цілими невід'ємними α_i такими, що:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = k.$$

8.4. Локальні екстремуми

8.4.1. Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена та неперервна в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$.

Означення. Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають *точкою локального максимуму* функції $z = f(x; y)$, якщо існує такий δ -оکیل точки $M_0(x_0; y_0)$, що для всіх точок $M(x; y)$ із цього околу виконується нерівність $f(x_0; y_0) \geq f(x; y)$.

Означення. Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають *точкою локального мінімуму*, якщо існує такий δ -оکیل точки $M_0(x_0; y_0)$, що для всіх точок $M(x; y)$ із цього околу виконується нерівність $f(x_0; y_0) \leq f(x; y)$.

Означення. Точки локального мінімуму та локального максимуму називають *точками локального екстремуму функції* $z = f(x; y)$, а значення функції у цих точках – *екстремумами функції*.

Зауважимо, що поняття екстремуму функції має локальний характер, тому мінімум функції у деяких випадках може бути більший за максимум. Відповідно до цього означення локального екстремуму (мінімуму або максимуму), повний приріст функції $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0)$ задовольняє одній із умов в околі точки $M_0(x_0; y_0)$:

- $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) \leq 0$, якщо $M_0(x_0; y_0)$ – точка максимуму;
- $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) \geq 0$, якщо $M_0(x_0; y_0)$ – точка мінімуму.

8.4.2. Необхідні та достатні умови локального екстремуму функції двох змінних

Припустимо, що функція $z = f(x; y)$ має в деякій точці $M_0(x_0; y_0)$ екстремум.

ТЕОРЕМА

(необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних)
Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована у точці $M_0(x_0; y_0)$
і має екстремум, то частинні похідні першого порядку
у цій точці дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0; y_0) = 0, \quad f'_y(x_0; y_0) = 0. \quad (8.19)$$

Зауваження. Якщо функція диференційована у точці, то у точці локального екстремуму:

$$df(M_0) = 0, \quad \text{grad } f(M_0) = \vec{0}.$$

Зазначимо, що умови (8.19) не є достатніми умовами екстремуму.

Означення. Точки, які задовольняють систему рівнянь (8.19), називають **стаціонарними точками функції** $z = f(x; y)$.

Як й у випадку функції однієї змінної, у стаціонарній точці не обов'язково забезпечено наявність екстремуму.

Якщо для прикладу взяти просту функцію $z = xy$, то для неї частинні похідні $z'_x = y$, $z'_y = x$ перетворюються на нуль у критичній точці $(0, 0)$, в якій функція набуває значення $z = 0$. У той самий час безпосередньо видно, що в довільному околі цієї точки функція набуває як додатних, так і від'ємних значень, тому екстремуму немає. Інколи трапляються ситуації, за яких в окремих точках деякі частинні похідні мають нескінченні значення або геть не існують. Такі точки також необхідно зарахувати до "підозрілих" на екстремум разом зі стаціонарними точками.

Означення. Стаціонарні точки й точки, в яких частинні похідні не існують, називають точками можливого екстремуму функції $z = f(x; y)$ або **критичними точками**.

Зауваження. Кожна точка екстремуму є критичною, але не кожна критична точка є точкою екстремуму.

ТЕОРЕМА

(достатні умови локального екстремуму функції двох змінних)

Нехай функція $z = f(x; y)$ має в деякому δ -околі
стаціонарної точки $M_0(x_0; y_0)$

неперервні частинні похідні другого порядку,
причому $f''_{xx}(x_0; y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0; y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0; y_0) = C$,

Запишемо визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тоді:

- 1) якщо $\Delta > 0$, то у точці $M_0(x_0; y_0)$ функція має екстремум:
 - при $A < 0$ – локальний максимум,
 - при $A > 0$ – локальний мінімум;
- 2) якщо $\Delta < 0$, то у точці $M_0(x_0; y_0)$ функція екстремуму не має.

Зауваження. Якщо $\Delta = AC - B^2 = 0$, то для з'ясування питання про існування екстремуму необхідно проводити додаткове дослідження, оскільки теорема відповіді на це питання не дає.

8.4.3. Дослідження функції двох змінних на екстремум

Для дослідження функції двох змінних і з'ясування питання про існування екстремумів у критичних точках можна запропонувати такий алгоритм.

Алгоритм дослідження на екстремум функції двох змінних:

Для того, щоб знайти локальні екстремуми функції $z = f(x; y)$ потрібно виконати такі кроки:

Крок 1. Знайти частинні похідні першого порядку f'_x та f'_y .

Крок 2. Записати необхідні умови $f'_x = 0$ та $f'_y = 0$, і з цих умов знайти критичні точки функції $M_i(x_i; y_i)$.

Крок 3. Знайти частинні похідні другого порядку:

$$f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.$$

Крок 4. Обчислити для кожної критичної точки $M_i(x_i; y_i)$ значення $A_i = f''_{xx}(M_i)$, $B_i = f''_{xy}(M_i)$, $C_i = f''_{yy}(M_i)$, а також визначник $\Delta_i = A_i \cdot C_i - B_i^2$. Зробити висновки на підставі теореми про достатні умови локального екстремуму щодо наявності екстремуму у точці $M_i(x_i; y_i)$.

Крок 5. Знайти екстремуми (екстремальні значення) функції.

Приклад 8.26. Знайти точки локального екстремуму функції:

$$f(x; y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Крок 1. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad f'_y = 6xy - 12.$$

Крок 2. Знаходимо критичні точки, використовуючи необхідні умови екстремуму $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Дістаємо систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15, \\ 6xy = 12. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо чотири критичні точки:

$$M_1(2; 1), \quad M_2(-2; -1), \quad M_3(1; 2), \quad M_4(-1; -2).$$

Крок 3. Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x.$$

Крок 4. Перевіримо достатні умови.

Для точки $M_1(2; 1)$ обчислюємо:

$$A_1 = 12, \quad B_1 = 6, \quad C_1 = 12, \quad \Delta_1 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad A_1 > 0.$$

Отже, точка $M_1(2; 1)$ є точкою локального мінімуму та $z_{\min} = z(2; 1) = -28$.

Для точки $M_2(-2; -1)$ обчислюємо:

$$A_2 = -12, \quad B_2 = -6, \quad C_2 = -12, \quad \Delta_2 = 108 > 0, \quad A_2 = -12 < 0.$$

Точка $M_2(-2; -1)$ є точкою локального максимуму та $z_{\max} = z(-2; -1) = 28$.

Для точки $M_3(1; 2)$ обчислюємо:

$$A_3 = 6, \quad B_3 = 12, \quad C_3 = 6, \quad \Delta_3 = 6 \cdot 6 - 12^2 = -108 < 0.$$

Отже, у точці $M_3(1; 2)$ екстремуму немає.

Для точки $M_4(-1; -2)$ обчислюємо:

$$A_4 = -6, \quad B_4 = -12, \quad C_4 = -6, \quad \Delta_4 = (-6) \cdot (-6) - (-12)^2 = -108 < 0.$$

У точці $M_4(-1; -2)$ екстремуму також немає.

Зауваження. До формулювання необхідних і достатніх умов існування локального екстремуму функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ введемо деякі додаткові математичні поняття.

8.4.4. Квадратичні форми

Введемо поняття квадратичної форми та сформулюємо деякі додаткові математичні відомості про них.

Означення. Функцію

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad (8.20)$$

називають **квадратичною формою**, а числа a_{ik} – **коефіцієнтами квадратичної форми**. Якщо $a_{ik} = a_{ki}$, то квадратичну форму називають **симетричною**.

Означення. Квадратичну форму називають **додатно визначеною** (від'ємно визначеною), якщо для довільних значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, з яких щонайменше одне відмінне від нуля, квадратична форма набуває додатних (від'ємних) значень.

Обидва випадки об'єднують під назвою **знаковизначених квадратичних форм**.

Якщо квадратична форма має як додатні, так і від'ємні значення, то її називають **знакозмінною**.

Означення. Симетричну матрицю, що складена із коефіцієнтів квадратичної форми (8.20), називають **матрицею квадратичної форми** і позначають:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Визначники:

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають **головними мінорами матриці A**.

Необхідною та достатньою умовою знаковизначеності квадратичної форми є критерій Сильвестра.

ТЕОРЕМА (критерій Сильвестра)

Для того, щоб квадратична форма була додатно визначена, необхідно й достатньо, щоб усі головні мінори матриці A були додатними, тобто виконувались нерівності:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Для того, щоб квадратична форма була від'ємно визначена, необхідно й достатньо, щоб знаки головних мінорів чергувалися, починаючи з від'ємного, тобто:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0.$$

Поняття знаковизначеної та знакозмінної квадратичної форми застосовують при формулюванні достатніх умов локального екстремуму функції багатьох змінних.

8.4.5. Локальні екстремуми функції багатьох змінних

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена та неперервна у деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Означення. Точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ називають **точкою локального максимуму** функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо існує такий δ -окіл точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, що для всіх точок $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ із цього околу виконується нерівність:

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Означення. Точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ називають **точкою локального мінімуму** функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо існує такий δ -окіл точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, що для всіх точок $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ із цього околу виконується нерівність:

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Означення. Точки локального мінімуму та локального максимуму називають **точками локального екстремуму функції** $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а значення функції у цих точках – **екстремумами функції**.

8.4.6. Необхідні та достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних

ТЕОРЕМА

(необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних)

Якщо функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ локальний екстремум і частинні похідні першого порядку, то:

$$u'_{x_i}(M_0) = 0, i = \overline{1, n}. \quad (8.21)$$

Означення. Точки, які задовольняють систему рівнянь (8.21), називають **стаціонарними точками функції** $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Очевидно, що для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ другий диференціал:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u$$

є квадратичною формою щодо диференціалів незалежних змінних $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

Матриця цієї квадратичної форми – це матриця, елементи якої:

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}$$

є частинними похідними другого порядку функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Цю матрицю називають **матрицею Гессе**. Її позначають:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називають **гессіаном**.

ТЕОРЕМА

(достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних)

Якщо у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ можливого екстремуму

та в деякому її δ -околі функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

має неперервні частинні похідні другого порядку

та у точці M_0 другий диференціал $d^2u(M_0)$ є знаковизначеною квадратичною формою від диференціалів $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$

незалежних змінних,

то задана функція у точці M_0 має локальний екстремум.

При цьому:

1) якщо $d^2u(M_0) \geq 0$, то M_0 – точка локального мінімуму;

2) якщо $d^2u(M_0) \leq 0$, то M_0 – точка локального максимуму.

До того ж, нерівність виконується лише за умови:

$$\sum_{i=1}^n dx_i^2 = 0;$$

3) якщо у точці M_0 другий диференціал d^2u є знаковзмінною квадратичною формою у точці M_0 , то функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не має локального екстремуму.

Зауваження. Умови 1)-2) означають, що квадратична форма

$$d^2u(M_0) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k$$

щодо диференціалів незалежних змінних є додатно визначеною або від'ємно визначеною, відповідно.

Алгоритм дослідження на екстремум функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

Крок 1. Знайти частинні похідні першого порядку:

$$u'_{x_k}, k = \overline{1, n}.$$

Крок 2. Записати необхідні умови $u'_{x_k} = 0, k = \overline{1, n}$, розв'язати систему (8.21) і знайти критичні точки $M_i(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$.

Крок 3. Знайти частинні похідні другого порядку:

$$u''_{x_k x_j}, k, j = \overline{1, n}.$$

Крок 4. Обчислити в кожній точці $M_i(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ значення $u''_{x_k x_j}(M_i)$, $k, j = \overline{1, n}$ і визначник матриці Гессе.

Зробити висновки на підставі теореми про достатні умови локального екстремуму про наявність екстремуму у точці $M_i(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$.

Крок 5. Знайти екстремуми функції.

Приклад 8.27. Дослідити на екстремум функцію:

$$u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x.$$

Крок 1. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$u'_x = 2x - y + 1, \quad u'_y = 2y - x, \quad u'_z = 2(z + 1).$$

Крок 2. Знаходимо критичні точки, застосовуючи необхідні умови екстремуму. Дістаємо систему:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x = 0, \\ 2(z + 1) = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, маємо критичну точку $M_0(-2/3; -1/3; -1)$.

Крок 3. Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$u''_{xx} = 2, \quad u''_{yy} = 2, \quad u''_{zz} = 2, \quad u''_{xy} = -1, \quad u''_{yx} = -1, \quad u''_{xz} = 0, \quad u''_{yz} = 0, \quad u''_{zx} = 0.$$

Крок 4. Визначник матриці Гессе (гессіан) має вигляд:

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

У точці $M_0(-2/3; -1/3; -1)$ усі головні мінори додатні:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 3 > 0, \quad \Delta_3 = 6 > 0.$$

Отже, точка M – точка локального мінімуму та набуває найменшого значення $u_{\min} = -1/3$.

8.4.7. Найбільше та найменше значення функції в області

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена та неперервна у замкненій обмеженій області D . Тоді у такій області вона досягає найбільшого та найменшого значень. Виникає запитання: як знайти найбільше та найменше значення функції у заданій області D ?

Означення. Найменше значення функції двох змінних $z = f(x; y)$, що неперервна в замкненій обмеженій області D , називають **глобальним (абсолютним) мінімумом**, а найбільше – **глобальним (абсолютним) максимумом у заданій області**.

У загальному випадку для функцій багатьох змінних немає правила для визначення точок, у яких функція досягає найбільшого та найменшого значень. Однак для певних класів функцій, які, виникають, зокрема, у задачах економіки, таке правило існує. Це правило конструктивне та базується на алгоритмі.

Алгоритм знаходження глобального екстремуму у замкненій області:

Крок 1. Побудувати замкнену обмежену область D .

Крок 2. Знайти критичні точки, які лежать у середині області D . Обчислити значення функцій у цих точках (не вдаючись до з'ясування – буде в них екстремум функції чи ні).

Крок 3. Знайти значення функції на межі області D .

Крок 4. Порівняти отримані значення функції. Найбільше (найменше) з них і буде найбільшим (найменшим) значенням функції у всій області.

Використовують позначення:

$$\max_{(x;y) \in D} f(x;y) = M, \quad \min_{(x;y) \in D} f(x;y) = m.$$

Приклад 8.28. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y (2 - x - y)$ в області D , яка обмежена прямими лініями:
 $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

Крок 1. Будуємо область D : утворився трикутник, сторони якого лежать на прямих:

$$x = 0, y = 0, x + y = 6 \text{ (рис. 8.8).}$$

Крок 2. Знаходимо частині похідні першого порядку:

$$z'_x = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2 y = x^2(2 - x - 2y).$$

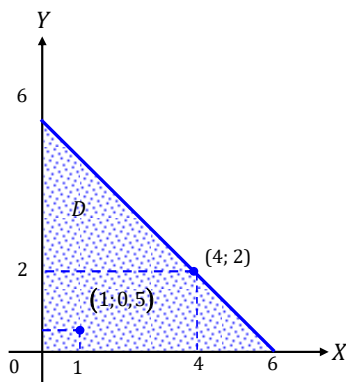


Рис. 8.8

Знаходимо критичні точки, які лежать усередині трикутника. Із умови $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ дістаємо систему двох алгебраїчних рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

На x та y рівності можна скоротити, оскільки усередині трикутника $x > 0$, $y > 0$. Розв'язавши систему, дістанемо критичну точку $(1; 0,5)$, яка лежить усередині трикутника. Значення функції у цій точці:

$$z(1; 0,5) = 1 \cdot 0,5 \cdot (2 - 1 - 0,5) = 0,25.$$

Крок 3. На сторонах трикутника $x = 0$ та $y = 0$ значення функції дорівнює нулю $z = 0$.

Знайдемо значення функції на стороні $x + y = 6$. Тут $y = 6 - x$, $0 \leq x \leq 6$, і наша функція двох незалежних змінних перетворюється на функцію однієї змінної x :

$$z_1 = z(x) = x^2(6 - x)(2 - x - (6 - x)) = -4x^2(6 - x).$$

На кінцях інтервалу $z(0; 6) = z(6; 0) = 0$. Досліджуючи функцію однієї змінної, знайдемо критичні точки. Із умови $z'_1(x) = 0$ дістанемо $-48x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x(x - 4) = 0$, звідки $x = 4$ (оскільки $x = 0$ – гранична точка), при цьому $y = 2$, $z = -128$.

Крок 4. Порівняємо отримані значення. Виберемо найменше та найбільше значення функції серед її значень $z(1; 0,5) = 0,25$ – усередині трикутника, $z = 0$ – у вершинах трикутника $z(0; 6) = z(6; 0) = 0$ і на сторонах трикутника $x = 0$ та $y = 0$, $z = z(4; 2) = -128$. Отже:

$$\min_{(x,y) \in D} z(x; y) = z(4; 2) = -128, \quad \max_{(x,y) \in D} z(x; y) = z(1; 0,5) = 0,25.$$

8.5. Метод найменших квадратів

8.5.1. Емпіричні формули

На практиці, зокрема, у прикладних економічних дослідженнях, часто виникає потреба знайти залежність між змінними на підставі проведених експериментів і спостережень.

Нехай потрібно якнайточніше визначити загальну тенденцію залежності між двома змінними u від x , для яких із практичних досліджень відомо, що значення x_i відповідають значенням u_i . Цю процедуру називають **згладжуванням** експериментальної залежності між змінними u та x .

Результати експерименту записують до таблиці:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
u_i	u_1	u_2	u_3	...	u_n

Точки із координатами $(x_1; u_1), (x_2; u_2), \dots, (x_n; u_n)$ на площині утворюють деяку лінію. Таку залежність намагаються подати у вигляді деякої формули $u = f(x)$, оскільки аналітичний вигляд залежності зручно використовувати для дослідження закономірностей зв'язку між змінними u та x .

Формули, які застосовують для аналітичного представлення дослідних даних, називають **емпіричними формулами**.

Певна річ, аналітична залежність указаних змінних заздалегідь не відома. Пошук за експериментальними даними вдалої (наближеної) формули є однією з важливих задач математики. Вдало підібрана аналітична залежність дає можливість заощаджувати кошти, що виділені на наукові дослідження. А цей факт, у свою чергу, заощаджує бюджет у масштабі міста, області та навіть країни у цілому.

Побудову емпіричних формул здійснюють таким чином. Спочатку визначають множину можливих функцій, до яких може (з урахуванням теоретичних припущень) належати шукана залежність між змінними, що є результатами експерименту. Вибір функції здійснюють на підставі результатів візуального аналізу розміщення точок на площині.

Кожну функцію характеризує набір числових параметрів $(a_1, a_2, \dots, a_s)$, кількість яких s залежить від виду функції. Наприклад, лінійна залежність $u = a_1 x + a_0$ має два параметри: a_1, a_0 , де a_1 – кутовий коефіцієнт прямої, а a_0 – відрізок, який відтинає пряма від осі ординат; квадратична залежність $u = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ має три параметри: a_1, a_0, a_2 . Значення функції, якого вона набуває за емпіричною формулою, зале-

жить і від значення аргументу, і від значення параметрів. Тому емпіричну формулу записують у вигляді:

$$\hat{y} = f(x, a_1, a_2, \dots, a_s).$$

Потім обчислюють значення числових параметрів, які визначають вибрану функцію $\hat{y} = f(x, a_1, a_2, \dots, a_s)$. Параметри добирають у такий спосіб, щоб функція найкраще описувала економічне явище, що вивчають.

Зауваження. Побудова емпіричних формул є однією із задач математичної статистики, зокрема регресійного аналізу.

Для знаходження параметрів емпіричних формул використовують **метод найменших квадратів (МНК)**: функцію вважають найкращою для **апроксимації** (наближеного опису результатів досліджень) емпіричних даних, якщо сума квадратів відхилень між емпіричними значеннями залежної змінної y_i і значеннями, що обчислені за допомогою функції $\hat{y} = f(x, a_1, a_2, \dots, a_s)$, за однакових значень аргументів x_i буде мінімальною.

Різниця між спостережуваними значеннями y_i , $i = \overline{1, n}$, які отримані в результаті економічних досліджень та обчислені за емпіричною формулою $\hat{y} = f(x, a_1, a_2, \dots, a_s)$ (теоретичні значення), є **відхиленнями** емпіричних значень від теоретичних або **похибками** моделі. Їх позначають:

$$l_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - f(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots, a_s), \quad i = \overline{1, n}.$$

Відхилення можуть бути як додатними, так і від'ємними, тому залежність добирають так, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною:

$$S = S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_s) = \sum_{i=1}^n l_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \text{ тобто}$$

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_s))^2 \rightarrow \min. \quad (8.21)$$

Алгоритм знаходження параметрів емпіричної формули:

Крок 1. Складають суму квадратів відхилень (8.21) між емпіричними значеннями y_i , $i = \overline{1, n}$ й теоретичними значеннями $\hat{y}_i = f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_s)$, тобто суму:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Крок 2. Записують необхідні умови локального екстремуму функції:

$$S = S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_s) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

як систему рівнянь $S'_{a_k} = 0, k = \overline{1, s}$. Розв'язують цю систему та знаходять критичні точки:

$$M_0(a_0^0; a_1^0; a_2^0; \dots; a_s^0).$$

Крок 3. Перевіряють достатні умови та переконуються, що числа $a_k^0, k = \overline{1, s}$ забезпечують мінімальне значення функції

$$S_{\min} = S(a_0^0, a_1^0, a_2^0, \dots, a_s^0).$$

8.5.2. Метод найменших квадратів можливої лінійної залежності між змінними

Розглянемо випадок, за якого виявилось, що точки $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$ групуються вздовж деякої прямої (рис. 8.9). Тоді природно шукати аналітичну залежність у вигляді лінійної функції $\hat{y} = a_1 x + a_0$, і задача зводиться до пошуку таких a_1 та a_0 , щоб шукана пряма найкращим чином наближалась до всіх точок $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$.

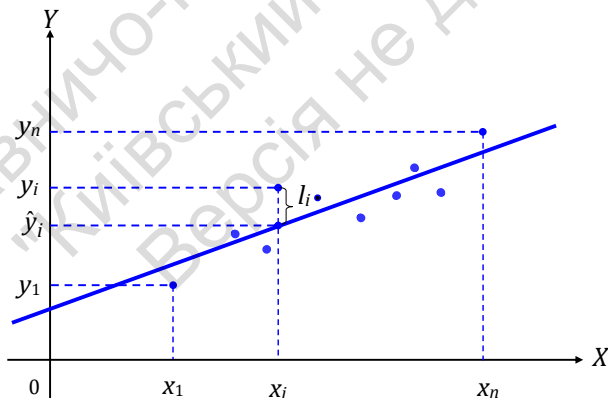


Рис. 8.9

Оскільки точки $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$ лежать не точно на прямій, а лише біля неї, то залежність $\hat{y} = a_1 x + a_0$ є наближеною.

Підставимо координати точок $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$ до заданої рівності дістанемо: $\hat{y}_i = a_1 x_i + a_0, i = \overline{1, n}$.

Діятимемо відповідно до алгоритму.

Алгоритм знаходження параметрів емпіричної формули у випадку лінійної залежності між змінними:

Крок 1. Розглянемо різницю між значеннями y_i та $\hat{y}$, тобто $l_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - a_1 x_i - a_0$ – **відхилення** або **похибки** спостережуваної точки $(x_i; y_i)$ від точки $(x_i; \hat{y}_i)$ згладжуваної прямої.

Складаємо суму квадратів відхилень:

$$\sum_{i=1}^n l_i^2.$$

Такою сумою буде функція двох змінних a_1 та a_0 :

$$S(a_1, a_0) = \sum_{i=1}^n l_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - a_0)^2.$$

Відповідно до **методу найменших квадратів** функціональну залежність добирають так, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною. Математично це означає, що коефіцієнти a_1 та a_0 прямої $\hat{y}_i = a_1 x_i + a_0$ мають бути підібрані так, щоб функція двох змінних $S(a_1; a_0)$ набувала мінімального значення, тобто:

$$S(a_1; a_0) = \sum_{i=1}^n l_i^2 \rightarrow \min.$$

Крок 2. Необхідною умовою мінімуму функції $S(a_1; a_0)$ є рівність нулю частинних похідних цієї функції за змінними a_1 та a_0 :

$$\begin{cases} S'_{a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - a_0) x_i = 0, \\ S'_{a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - a_0) = 0. \end{cases}$$

Після перетворень дістанемо **нормальну систему рівнянь МНК**:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \\ a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot a_0 = \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases} \quad (8.22)$$

яка має єдиний розв'язок:

$$a_1^0 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad a_0^0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - k \sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (8.23)$$

Таким чином, отримано єдину критичну точку $M_0(a_1^0; a_0^0)$.

Крок 3. Достатньою умовою існування екстремуму у критичній точці $M_0(a_1^0; a_0^0)$ є додатне значення визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} S''_{a_1 a_1} & S''_{a_0 a_1} \\ S''_{a_1 a_0} & S''_{a_0 a_0} \end{vmatrix} > 0,$$

причому, якщо $S''_{a_1 a_1} > 0$, то у точці $M_0(a_1^0; a_0^0)$ існує мінімум.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} S''_{a_1 a_1} &= \left(-2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - b) x_i \right)'_{a_1} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2; \\ S''_{a_0 a_0} &= \left(-2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - b) \right)'_{a_0} = 2n, \text{ оскільки } \sum_{i=1}^n 1 = n; \\ S''_{a_0 a_1} &= S''_{a_1 a_0} = \left(-2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - b) x_i \right)'_{a_0} = 2 \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

Ураховуючи, що для неперервної функції виконується умова $S''_{a_0 a_1} = S''_{a_1 a_0}$, запишемо визначник:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 & 2 \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2n \end{vmatrix} = 4 \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) = \\ &= 4n^2 \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right] = 4n^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 4n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0, \end{aligned}$$

де $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$.

Отже, у точці $M_0(a_1^0; a_0^0)$ функція двох змінних $S(a_1; a_0)$ набуває мінімального значення. Це означає, що пряма

$y = a_1^0 x + a_0^0$ найменше відхиляється від точок $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$, тобто є згладжуваною.

Приклад 8.29. Методом найменших квадратів знайти a_1 та b функції $y = a_1 x + a_0$ за результатами експерименту, що наведені у таблиці:

X	1	2	3	4	5	6
Y	-0,5	0,2	0,4	1	1,4	1,9

Побудуємо точки із координатами $(x_i; y_i), i = 1, 2, \dots, 6$ на координатній площині (рис. 8.10). Припустимо, що між змінними y та x існує лінійна залежність $y = a_1 x + a_0$.

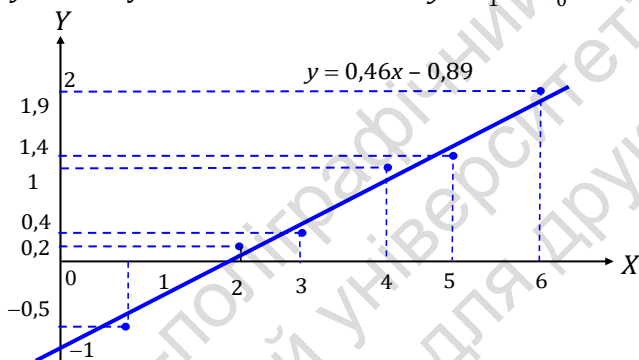


Рис. 8.10

Застосуємо метод найменших квадратів знаходження параметрів емпіричної формули $y = a_1 x + a_0$. Коефіцієнти a_1 та a_0 знаходимо із нормальної системи (8.22):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i = a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n y_i = a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_0 \cdot n. \end{cases}$$

Далі знаходимо відповідні суми:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91;$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = -0,5 + 0,2 + 0,4 + 1 + 1,4 + 1,9 = 4,4;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1 \cdot (-0,5) + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1,4 + 6 \cdot 1,9 = 23,5.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 23,5, \\ 21a + 6b = 4,4 \end{cases}$$

і розв'яжемо її за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 546 - 441 = 105; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 23,5 & 21 \\ 4,4 & 6 \end{vmatrix} = 141 - 92,4 = 48,6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 23,5 \\ 21 & 4,4 \end{vmatrix} = 400,4 - 493,5 = -93,1.$$

Отже:

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48,6}{105} \approx 0,46, a_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-93,1}{105} \approx -0,89.$$

Таким чином, шукана пряма (рис. 8.10) задає рівняння:
 $y = -0,89x + 0,46.$

8.5.3. Вирівнювання за допомогою кривих

У попередньому пункті ми розглянули випадок, за якого точки $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$ групують уздовж деякої прямої. У протилежному випадку виникає запитання: а що робити, коли точки $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$ групують уздовж деякої лінії, наприклад параболи, гіперболи або показникової кривої? У цих випадках ідеться про вирівнювання за допомогою кривих. Виникає задача: знайти аналітичну залежність між змінними y та x , яка "найкраще" (найточніше) виразить таку залежність.

Вирівнювання за допомогою параболи

Нехай точки із координатами $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ на площині утворюють деяку лінію. Припустимо, що між змінними існує залежність $\hat{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Тоді, підставивши значення емпіричних даних $(x_i; y_i), i = \overline{1, n}$, дістанемо систему:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Підібрана парабола буде "найкращою", відповідно до методу найменших квадратів, якщо сума квадратів відхилень заданих значень y_i від її відповідних точок $\hat{y}_i$ буде мінімальною. Тобто потрібно знайти такі значення невідомих коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 , за яких функція:

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

набувала б найменшого значення.

Запишемо необхідні умови існування мінімуму функції:

$$S'_{a_0} = 0, S'_{a_1} = 0, S'_{a_2} = 0.$$

Обчислимо частинні похідні першого порядку та складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 0. \end{cases}$$

Поділимо на 2 обидві частини кожної рівності та розіб'ємо кожну суму на доданки, дістанемо **нормальну систему рівнянь**:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (8.24)$$

Із цієї системи визначимо невідомі коефіцієнти a_0, a_1, a_2 . Перевіримо достатні умови та переконаємося, що критична точка $M(a_0; a_1; a_2)$ є точкою мінімуму функції $S(a_0; a_1; a_2)$. Розв'язок системи (8.24) дає найкращі значення шуканих параметрів для залежності між змінними $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, оскільки сума квадратів похибок буде найменшою.

Вирівнювання за допомогою показникової кривої

У випадках, коли залежність між змінними x та y апроксимується функцією, яка не є лінійною, застосування методу найменших квадратів потребує попередньої лінеаризації

моделі, тобто введення нових змінних для того, щоб залежність між ними була лінійною.

Нехай точки із координатами $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ на площині утворюють деяку лінію. Припустимо, що між змінними існує залежність $\hat{y} = ab^x$. Прологарифмуємо рівність, дістанемо: $\ln \hat{y} = \ln a + x \ln b$.

Позначимо нові змінні $Y = \ln y$, $\ln a = a_0$, $\ln b = a_1$, дістанемо лінійну залежність: $Y = a_0 + a_1 x$. Тоді, підставивши значення емпіричних даних $(x_i; y_i)$, $i = 1, n$, за допомогою методу найменших квадратів, коефіцієнти a_1 та a_0 знаходимо із нормальної системи (8.22). Дістанемо систему рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n Y_i = n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot Y_i = a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, визначаємо параметри невідомих коефіцієнтів a_0 та a_1 , робимо зворотну заміну й записуємо "найкраще" підібрану показникову криву.

8.6. Умовні екстремуми

8.6.1. Поняття умовного екстремуму функції двох змінних

У різноманітних економічних дослідженнях часто трапляються задачі про знаходження екстремумів функції багатьох змінних за наявності **додаткових умов зв'язку** на її аргументи. Такі екстремуми називаються **умовними**.

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в області D , і в цій області задано деяку лінію L , рівняння якої $\varphi(x; y) = 0$. Розглядаючи питання про екстремум функції $z = f(x; y)$ в області D , можна ставити дві задачі: визначити екстремум функції $z = f(x; y)$ в області D та екстремум функції на лінії L , яка належить цій області. У першому випадку кажуть про **безумовний екстремум**, а у другому – про **умовний екстремум**. Остання назва пов'язана з тим, що на змінні x та y накладено

додаткову умову $\varphi(x; y) = 0$. Функцію $\varphi(x; y) = 0$, яка визначає лінію L , називають **умовою зв'язку**. І в цьому випадку можна вважати, що аргументи функції $z = f(x; y)$ не є незалежними змінними, а пов'язані умовою зв'язку $\varphi(x; y) = 0$.

Нехай потрібно знайти екстремум функції $z = f(x; y)$ за умови, що на змінні x та y накладено умову зв'язку $\varphi(x; y) = 0$.

Означення. Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають **точкою умовного максимуму** для функції $z = f(x; y)$ за умови зв'язку $\varphi(x; y) = 0$, якщо існує такий окіл точки $M_0(x_0; y_0)$, що для всіх інших точок $M(x; y) \neq M_0(x_0; y_0)$, які задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$, виконується нерівність: $f(x_0; y_0) \geq f(x; y)$. Якщо за цих умов виконується протилежна нерівність: $f(x_0; y_0) \leq f(x; y)$, то точку $M_0(x_0; y_0)$ називають **точкою умовного мінімуму** функції $z = f(x; y)$ за умови зв'язку $\varphi(x; y) = 0$.

Означення. Точки умовного максимуму та мінімуму називають **точками умовного екстремуму функції** $z = f(x; y)$.

Дослідити функцію на умовний екстремум можна двома методами: методом зведення до задачі про безумовний екстремум (прямий метод) і методом невизначених множників Лагранжа.

8.6.2. Прямий метод знаходження точок умовного екстремуму

Перший метод дослідження функції на умовний екстремум – **прямий** або **метод зведення до задачі про безумовний екстремум**. Його застосовують, якщо рівняння $\varphi(x; y) = 0$ можна розв'язати щодо однієї зі змінних явно, наприклад $y = \psi(x)$. Тоді, підставляючи $y = \psi(x)$ до виразу функції $z = f(x; y)$, дістанемо складну функцію $z = f(x; \psi(x))$ однієї змінної x . Одержану функцію досліджують на екстремум. Знаходження її екстремуму проводять за відомим алгоритмом.

Приклад 8.30. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + y^2$, якщо її аргументи задовольняють умову зв'язку $x + y - 2 = 0$.

Екстремуми цієї функції шукають не на всій площині XOY , а тільки на прямій $x + y - 2 = 0$.

Підставимо до функції вираз для $y = 2 - x$ з умови зв'язку та зведемо задачу про визначення умовного екстремуму для функції $z = x^2 + y^2$ до задачі про безумовний екстремум для функції $z = x^2 + (2 - x)^2$. Ця функція має екстремум у точці $x = 1$, тобто функція $z = x^2 + y^2$ за наявності такого зв'язку має умовний мінімум $z = 2$ у точці $(1; 1)$, який не збігається з безумовним мінімумом функції у точці $(0; 0)$.

8.6.3. Метод множників Лагранжа

Розглянемо другий метод знаходження умовних екстремумів. Його часто використовують, коли рівняння зв'язку не можна розв'язати щодо однієї зі змінних. Для дослідження функції $z = f(x; y)$ на умовний екстремум за умови $\varphi(x; y) = 0$, де $\varphi(x; y)$ – диференційована функція двох аргументів x та y . Обчислимо повні диференціали функцій, застосовуючи (8.8):

$$dz = f'_x dx + f'_y dy, \quad d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy. \quad (8.25)$$

У стаціонарних точках $dz = 0$. Отже, $f'_x dx + f'_y dy = 0$ або:

$$f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (8.26)$$

Помножимо друге рівняння (8.25) на сталий множник λ і поділимо це рівняння на dx , після чого додамо його до (8.26):

$$f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} + \lambda \left(\varphi'_x + \varphi'_y \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

$$f'_x + \lambda \varphi'_x + (f'_y + \lambda \varphi'_y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (8.27)$$

Із (8.27) визначимо стаціонарні точки, обравши параметр λ так, щоб виконувалась умова $f'_y + \lambda \varphi'_y = 0$. Тоді (8.27) можна записати у вигляді:

$$f'_x + \lambda \varphi'_x = 0.$$

Умови об'єднаємо до системи:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (8.28)$$

Якщо розглянути функцію:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \quad (8.29)$$

то знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ зведеться до знаходження безумовного екстремуму функції (8.29), оскільки (8.28) рівносильна системі:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0. \end{cases} \quad (8.30)$$

Функцію (8.29) називають **функцією Лагранжа**, а розглянутий метод – **методом невизначених множників Лагранжа**.

Фактично ми довели теорему, яка визначає необхідні умови умовного екстремуму.

ТЕОРЕМА

(необхідні умови умовного екстремуму функції двох змінних).

Якщо функція $z = f(x, y)$ має у точці $M_0(x_0; y_0)$

умовний екстремум за умови $\varphi(x, y) = 0$

та існують неперервні частинні похідні першого порядку:

$$f'_x, f'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$$

у точці $M_0(x_0; y_0)$ і в деякому її околі, коли:

$$\varphi'_x(x_0; y_0) \neq 0, \quad \varphi'_y(x_0; y_0) \neq 0,$$

то існує таке число λ_0 , що точка $(x_0; y_0; \lambda_0)$

є стаціонарною точкою функції Лагранжа (8.29),

що задовольняє систему (8.30).

Система (8.30) виражає необхідні умови умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$. Точки $M_i(x_i; y_i)$, координати яких

задовольняють систему (8.30), називають **стаціонарними**. Стаціонарні точки та точки, в яких f'_x, f'_y не існують, називають **критичними точками**. Вони можуть бути точками екстремуму для функції $z = f(x; y)$.

ТЕОРЕМА

(достатні умови умовного екстремуму функції двох змінних)

Нехай виконуються такі умови:

- 1) точка $M_0(x_0; y_0)$ – критична точка функції Лагранжа (8.29) для деякого λ , яка задовольняє умови попередньої теореми;
- 2) функції $z = f(x; y)$ та $\varphi(x; y) = 0$ мають у деякому δ -околі критичної точки $M_0(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні

другого порядку та:

$$L''_{xx}(x_0; y_0) = A, \quad L''_{xy}(x_0; y_0) = B, \quad L''_{yy}(x_0; y_0) = C,$$

а повний диференціал $d^2L(M_0) = A(dx)^2 + 2Bdxdy + C(dy)^2$,

де диференціали dx і dy задовольняють умову зв'язку

$$\varphi'_x(x_0; y_0)dx + \varphi'_y(x_0; y_0)dy = 0.$$

- Тоді: 1) якщо $d^2L(M_0) > 0$, то функція $z = f(x; y)$ має у точці M_0 умовний мінімум;
- 2) якщо $d^2L(M_0) < 0$, то функція $z = f(x; y)$ має у точці M_0 умовний максимум.

Доведення. Очевидно, що функція Лагранжа (8.29) задовольняє для всіх x та y рівняння зв'язку:

$$\varphi(x; y) = 0.$$

Тому для таких x та y повний диференціал:

$$dL(x; y) = L'_x(x; y)dx + L'_y(x; y)dy$$

для всіх dx та dy , які задовольняють рівняння:

$$\varphi'_x(x; y)dx + \varphi'_y(x; y)dy = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } d^2L = & L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2 + L'_x d^2x + L'_y d^2y + \\ & + \varphi''_{xx}(dx)^2 + 2\varphi''_{xy}dxdy + \varphi''_{yy}(dy)^2 + \varphi'_x d^2x + \varphi'_y d^2y = 0. \end{aligned}$$

для всіх x та y , які задовольняють рівняння зв'язку:

$$\varphi(x; y) = 0.$$

У критичній точці $M_0(x_0; y_0)$ частинні похідні функції Лагранжа дорівнюють нулю. Тому в цій точці:

$$d^2L(M_0) = A(dx)^2 + 2Bdxdy + C(dy)^2,$$

де $L''_{xx}(x_0; y_0) = A$, $L''_{xy}(x_0; y_0) = B$, $L''_{yy}(x_0; y_0) = C$, а dx, dy задовольняють умову зв'язку:

$$\phi'_x(x; y)dx + \phi'_y(x; y)dy = 0.$$

За формулою Тейлора для функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ дістанемо:

$$\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) = (1/2)d^2L(M_0).$$

Якщо $d^2L(x_0; y_0) > 0$, де диференціали dx, dy задовольняють умову зв'язку:

$$\phi'_x(x; y)dx + \phi'_y(x; y)dy = 0 \text{ у точці } M_0(x_0; y_0),$$

то $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$. Отже, функція $z = f(x; y)$ має у точці $M_0(x_0; y_0)$ умовний мінімум.

Якщо $d^2L(x_0; y_0) < 0$, а диференціали dx, dy задовольняють умову зв'язку:

$$\phi'_x(x; y)dx + \phi'_y(x; y)dy = 0 \text{ у точці } M_0(x_0; y_0),$$

то $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$. Отже, функція $z = f(x; y)$ має у точці $M_0(x_0; y_0)$ умовний максимум.

Алгоритм знаходження умовного екстремуму методом невизначених множників Лагранжа:

Крок 1. Записати функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y).$$

Крок 2. Знайти частинні похідні L'_x, L'_y, L'_λ .

Крок 3. Записати необхідні умови умовного екстремуму та знайти критичні точки $M_i(x_i; y_i; \lambda_i)$ з умов (8.30):

$$L'_x = 0, L'_y = 0, L'_\lambda = 0.$$

Крок 4. Знайти частинні похідні другого порядку та другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2.$$

Крок 5. Продиференціювати умову зв'язку:

$$\phi'_x(x; y)dx + \phi'_y(x; y)dy = 0.$$

Крок 6. Обчислити для кожної критичної точки $M_i(x_i; y_i; \lambda_i)$ значення $d^2L(M_i)$ і зробити висновки на підставі теореми про достатні умови умовного екстремуму що-

до наявності екстремуму в цій точці, зважаючи на результати кроку 5.

Крок 7. Знайти екстремуми (екстремальні значення) функції $z = f(x; y)$ за заданої умови зв'язку $\varphi(x; y) = 0$.

Приклад 8.31. Знайти умовний екстремум функції:

$$f(x; y) = 5 - 3x - 4y \text{ за умови } x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Крок 1. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = 5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Крок 2. Знайдемо частинні похідні функції Лагранжа:

$$L'_x = -3 + 2\lambda x, L'_y = -4 + 2\lambda y, L'_\lambda = x^2 + y^2 - 25.$$

Крок 3. Запишемо необхідні умови умовного екстремуму:

$$L'_x = 0, L'_y = 0, L'_\lambda = 0.$$

Знаходимо критичні точки, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} -3 + 2\lambda x = 0, \\ -4 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

Із першого рівняння маємо $x = (3/2\lambda)$, із другого $y = (2/\lambda)$.

Підставляючи ці значення до третього рівняння, отримаємо:

$$\lambda_1 = -(1/2), \lambda_2 = (1/2).$$

Знайдемо відповідні значення x та y , отримаємо дві точки:

$$M_1(-3; -4; -1/2) \text{ і } M_2(3; 4; 1/2).$$

Крок 4. Необхідно з'ясувати, чи є знайдені точки точками умовного екстремуму. Для цього обчислимо значення другого диференціалу функції $L(x; y; \lambda)$ у цих точках, вважаючи λ параметром.

Знаходимо частинні похідні та диференціал другого порядку:

$$L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2\lambda.$$

Диференціюючи умови зв'язку $x^2 + y^2 - 25 = 0$, дістанемо:

$$2xdx + 2ydy = 0, \text{ звідки } dx = -\frac{y}{x}dy,$$

тоді $d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2 =$

$$= 2\lambda(dx^2 + dy^2) = 2\lambda\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)dy^2.$$

У точках $M_1(-3; -4; -1/2)$ і $M_2(3; 4; 1/2)$ диференціали dx та dy пов'язані рівністю:

$$dx = -\frac{8}{6}dy.$$

У разі виконання цієї умови другий диференціал функції Лагранжа $d^2L(M_1) < 0$, і задана функція у точці $M_1(-3; -4; -1/2)$ має умовний максимум.

Обчислюємо:

$$z_{\max} = z(-3; -4) = 5 - 3 \cdot (-3) - 4 \cdot (-4) = 30.$$

Відповідно у точці $M_2(3; 4; 1/2)$ другий диференціал $d^2L(M_1) > 0$, і задана функція у точці має умовний мінімум.

Обчислюємо:

$$z_{\min} = z(3; 4) = 5 - 3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = -20.$$

8.6.4. Умовні екстремуми функції багатьох змінних

У загальному випадку задачу знаходження умовного екстремуму формують так: для функції n змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка визначена в області $D \in \mathbb{R}^n$, знайти екстремум на деякій підмножині точок X в області D , координати яких задовольняють рівняння зв'язку або обмеження:

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}, m < n. \quad (8.31)$$

Означення. Точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in X$ називають *точкою умовного максимуму* функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ щодо рівняння зв'язку (8.31), якщо для всіх, достатньо близьких до неї точок $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in X$ виконується нерівність $f(M) \leq f(M_0)$.

Означення. Точку $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) \in X$ називають *точкою умовного мінімуму* функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ щодо рівняння зв'язку (8.31), якщо для всіх, достатньо близьких до неї точок $M_0(x_1; x_2; \dots; x_n) \in X$ виконується нерівність $f(M) \geq f(M_0)$.

Означення. Точки умовного максимуму та умовного мінімуму називають *точками умовного екстремуму*.

Відмінність умовного екстремуму від звичайного полягає в тому, що нерівність має виконуватись не для всіх загалом то-

Якщо рівняння зв'язку (8.31) можна розв'язати щодо t змінних явно, наприклад $x_1, x_2, \dots, x_m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ x_1 = g_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \end{array} \right.$$

Приклад 8.32. Знайти умовний екстремум функції:

$$Z = f(x_1; x_2; x_3) = x_1 x_2 x_3$$

Розв'яжемо рівняння зв'язку щодо змінних x_1 та x_2 і підставимо значення x_1 та x_2 до виразу функції, зведемо задачу дослідження на безумовний екстремум функції:

$$z = -3x_3(6 + x_3) = -18x_3 - 3x_3^2.$$

Обчислимо похідну $z' = -18 - 6x_3$. Оскільки $z' = 0$ при $x_3 = -3$, а $z'' = -6 < 0$, то $x_3 = -3$ - точка максимуму функції. Отже, задана функція у точці $(3; -3; -3)$ має умовний максимум, причому $z_{\max} = z(3; -3; -3) = 27$.

Для застосувань найбільш важливим є випадок, за якого множину X задають за допомогою деякої системи рівнянь і нерівностей.

Нехай для функції n змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, потрібно знайти умовний екстремум за наявності m умов зв'язку (8.31), і ці функції неперервно-диференційовані в деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, координати якої задовольняють умови зв'язку, і у цій точці ранг дорівнює m **матриці Якобі**:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Означення. Функцію

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8.32)$$

називають **функцією Лагранжа**, а параметри $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – **множниками Лагранжа**.

ТЕОРЕМА

(необхідні умови умовного екстремуму функції багатьох змінних)

Для того, щоб точка $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ була точкою умовного екстремуму функції (8.32) за умов зв'язку (8.31), необхідно, щоб її координати за деяких значень $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ задовольняли систему рівнянь:

$$\frac{\partial L(M_0)}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.33)$$

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}, m < n. \quad (8.34)$$

Умови (8.33) і (8.34) означають, що точка $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ є стаціонарною точкою функції Лагранжа, і її координати задовольняють умови зв'язку.

ТЕОРЕМА

(достатні умови умовного екстремуму функції багатьох змінних)

Нехай функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

$j = \overline{1, m}, m < n$, які входять до рівняння зв'язку (8.31), двічі неперервно-диференційовані в околі точки $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, і в цій точці виконуються необхідні умови (8.33)–(8.34).

Тоді у разі виконання умов:

$$d\varphi_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_k} dx_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n dx_k^2 > 0 \quad (8.35)$$

другий диференціал функції Лагранжа $d^2L(M_0)$ є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою.

Це означає, що функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має у точці

$M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ умовний мінімум (максимум).

Якщо за умов (8.35) другий диференціал $d^2L(M_0)$ є знакозмінною квадратичною формою, то у точці

$M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

умовного екстремуму немає.

Зауваження. У загальному випадку другий диференціал не має властивості інваріантності, та оскільки $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ є функціями незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, його запис має вигляд:

$$d^2L = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial \varphi_m} d\varphi_m \right)^2 L + \\ + \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} d^2\varphi_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \varphi_m} d^2\varphi_m.$$

Але оскільки у точці можливого умовного екстремуму M_0 мають місце рівності $L'_{\varphi_j} = 0, j = \overline{1, m}$, то другий диференціал функції Лагранжа у цій точці має такий самий вигляд, якщо б змінні $x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ були незалежними, тобто:

$$d^2L = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial \varphi_m} d\varphi_m \right)^2 L. \quad (8.36)$$

Оскільки необхідно встановити знаковизначеність d^2L лише за наявності умов зв'язку (8.34), то при проведенні обчислень до (8.35) потрібно підставити замість $d\varphi_1, d\varphi_2, \dots, d\varphi_m$ їх вирази, що визначені в єдиний спосіб із системи лінійних рівнянь. Тільки після цього можна вивчати питання про знаковизначеність d^2L у точці M_0 уже відомими методами із застосуванням матриці Гессе.

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Яким є означення функції багатьох змінних?
 2. Що називають областю визначення функції двох змінних?
- Приклад 1.** Знайти та зобразити область визначення функції:

$$z = \frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Для того, щоб значення функції z були дійсними числами, підкореневий вираз має бути невід'ємним, тобто: $x^2 - y^2 \geq 0$.

Крок 1. Оскільки жодних додаткових обмежень на аргументи x та y не накладено, то область визначення D складатиметься з усіх тих точок площини, для яких цей аналітичний вираз набуває дійсних значень.

Крок 2. Знайдемо геометричне місце точок, для яких виконується нерівність: $x^2 - y^2 \geq 0$. Якщо розглянути тільки знак рівності, то вийде рівняння межі області D :

$$y^2 = x^2 \text{ або } y = x \text{ та } y = -x.$$

Межа області D складається із двох бісектрис: $y = x$ та $y = -x$ координатних кутів. Для внутрішніх точок області D має виконуватись нерівність: $y^2 \leq x^2$ або $|y| \leq |x|$.

Точки, які задовольняють нерівність, розташовані між бісектрисами ближче до осі OX , оскільки $|y|$ є відстанню довільної точки $M(x; y)$ до осі OX і менша за відстань $|x|$ точки $M(x; y)$ до осі OY . Таким чином, область D складається з усіх точок двох кутів між бісектрисами $y = x$ та $y = -x$, що замикають усередині себе вісь OX (рис. 8.11).

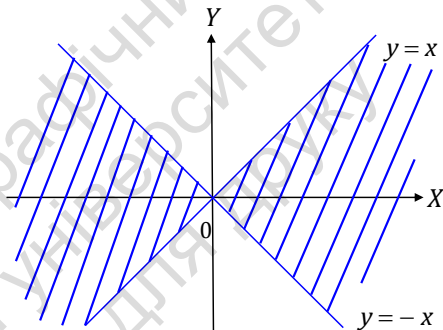


Рис. 8.11

Приклад 2. Знайти та зобразити область визначення функції:

$$z = \ln(4 + 4x - y^2).$$

Крок 1. Логарифм визначений тільки за додатного значення його аргументу, тому: $4 + 4x - y^2 > 0$ або $4 + 4x > y^2$. Жодних інших обмежень на аргументи x та y немає.

Крок 2. Щоб зобразити геометрично область D , знайдемо спочатку її межу: $4 + 4x = y^2$ або $y^2 = 4(x + 1)$. Одержане рівняння визначає параболу, вершина якої розташована у точці $(-1; 0)$, а вісь збігається додатнім напрямком осі OX . Точки перетину параболи із віссю OY можна отримати із умови $x = 0$, звідки $y^2 = 4$, тобто $y = \pm 2$. Маємо точки $(0; 2)$ і $(0; -2)$ (рис. 8.12).

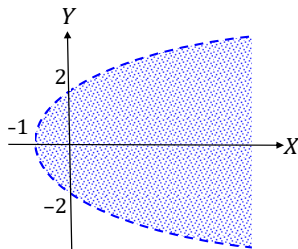


Рис. 8.12

Парабола ділить усю площину на дві частини – зовнішню (поза параболи) та внутрішню (усередині параболи). Для точок однієї із цих частин виконується нерівність $y^2 < 4 + 4x$, а для іншої – $y^2 > 4 + 4x$, на самій параболі – $y^2 = 4 + 4x$. Щоб установити, яка із двох частин є областю визначення цієї функції, тобто задовольняє умові $y^2 < 4 + 4x$, достатньо перевірити цю умову для будь-якої однієї точки, що не лежить на параболі. Наприклад, початок координат $O(0;0)$ лежить усередині параболи та задовольняє потрібній умові $0 < 4 + 4 \cdot 0$. Отже, область D складається із внутрішніх точок, які лежать усередині параболи. Сама парабола до області D входить не може, оскільки для точок параболи $4 + 4x - y^2 = 0$ і логарифм не визначений.

Приклад 3. Знайти та зобразити область визначення функції:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Крок 1. Функція визначена та набуває дійсних значень за умов $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ та $4 - x^2 - y^2 > 0$.

Запишемо рівняння межі області визначення D :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 4 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Таким чином, межа області D складається із двох кіл із центром у початку координат радіусами $R=1$ та $R=2$. Ці кола ділять усю площину на три частини. При цьому для внутрішніх точок області D мають одночасно виконуватись нерівності:

$$x^2 + y^2 \geq 1 \text{ та } 4 > x^2 + y^2.$$

Крок 2. Візьмемо три точки $O(0;0)$, $A(3/2;0)$ та $B(5/2;0)$, які лежать у різних частинах площини, і перевіримо, чи виконуються для них нерівності. Координати точки $O(0;0)$ не задовольняють першу нерівність, а точки $B(5/2;0)$ – другу. Координати точки $A(3/2;0)$ задовольняють обидві нерівності:

$$(3/2)^2 + 0 - 1 \geq 0 \text{ та } 4 - (3/2)^2 - 0 > 0.$$

Отже, шукана область D є кільцем, що розташоване між двома даними колами. При цьому внутрішнє коло необхідно включити до області D , оскільки рівність

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

є можливою, а зовнішнє коло до області D не входить (рис. 8.13).

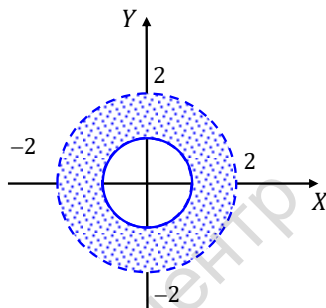


Рис. 8.13

3. Яке означення границі функції двох (багатьох) змінних?

Приклад 4. Обчислити границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2}$.

Цю границю можна знайти за умови $M(x; y) \rightarrow M_0(0; 2)$.

Відстань між цими точками:

$$\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \rightarrow 0, M(x; y) \rightarrow M_0(0; 2), \text{ тому}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\rho^2 + 1) - 1}{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 5. З'ясувати, чи існує границя $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Припустимо, що довільна точка $M(x; y)$ наближається до початку координат не довільним чином, а рухаючись за деякою прямою $y = kx$. Уздовж цієї прямої значення функції:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

є сталими, оскільки при $y = kx$ маємо:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2},$$

тому
$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \text{уздовж } y=kx}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Однак, якщо наближатися до початку координат із різних боків, то функція

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

прямуватиме до різних граничних значень. Дійсно, величина

$$\frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

набуває свого значення для кожного k . Наприклад, при $M \rightarrow 0$ уздовж осі OX ($k=0$) значення: $z \rightarrow 1$, а за руху вздовж бісектриси $y=x$ ($k=1$) значення: $z \rightarrow 0$. Доходимо висновку, що такої границі не існує.

3. Які похідні називають частинними похідними функції двох (багатьох) змінних?

Приклад 6. Обчислити значення частинних похідних функції $z = x^3 + y^3 - 3axy$ у точці $M_0(2; 1)$.

Знайдемо частинну похідну за змінною x , вважаючи змінну y сталою: $z'_x = (x^3 + y^3 - 3axy)'_x = 3x^2 + 0 - 3ay \cdot 1 = 3x^2 - 3ay$.

Знайдемо частинну похідну за змінною y , зафіксувавши аргумент x : $z'_y = (x^3 + y^3 - 3axy)'_y = 0 + 3y^2 - 3ax \cdot 1 = 3y^2 - 3ax$.

Обчислимо значення частинних похідних у точці $M_0(2; 1)$:

$$z'_x(2; 1) = 12 - 3a, \quad z'_y(2; 1) = 3 - 6a.$$

Приклад 7. Знайти значення частинних похідних функції $z = e^{-xy}$ у точці $M_0(0; 1)$.

Знаходимо спочатку частинні похідні, використовуючи формулу диференціювання складної функції:

$$z'_x = (e^{-xy})'_x = e^{-xy}(-xy)'_x = e^{-xy}(-y) = -ye^{-xy};$$

$$z'_y = (e^{-xy})'_y = e^{-xy}(-xy)'_y = e^{-xy}(-x) = -xe^{-xy}.$$

Підставимо координати точки $M_0(0; 1)$ до виразів частинних похідних, дістанемо:

$$z'_x(0; 1) = -1 \quad \text{та} \quad z'_y(0; 1) = 0.$$

Приклад 8. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ задовольняє рівняння:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} (x^2 + xy + y^2)'_x = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} (x^2 + xy + y^2)'_y = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2},$$

Підставимо їх до рівняння:

$$x \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2} + y \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} = 2, \quad \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2, \quad 2 = 2.$$

Одержана тотожність указує, що функція дійсно задовольняє це рівняння.

5. Що називають повним диференціалом функції двох (багатьох) змінних? За якою формулою обчислюють повний диференціал?

Приклад 9. Знайти повний диференціал функції:

$$z = x^2 y - y^2 x.$$

Знаходимо частинні похідні функції:

$$z'_x = (x^2 y - y^2 x)'_x = 2xy - y^2, \quad z'_y = (x^2 y - y^2 x)'_y = x^2 - 2xy.$$

Повний диференціал функції обчислюють за (8.8).

$$\text{Отже, } dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

Приклад 10. Знайти частинні похідні z'_x , z''_{xy} і повний диференціал dz для функції:

$$z = e^{x^2+3y} + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}.$$

Для заданої функції знайдемо частинні похідні:

$$z'_x = e^{x^2+3y} \cdot 2x + \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = 2xe^{x^2+3y} - \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = e^{x^2+3y} \cdot 3 + \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = 3xe^{x^2+3y} + \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Знайдемо повний диференціал функції:

$$dz = \left(2xe^{x^2+3y} - \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(3e^{x^2+3y} + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dy.$$

Диференціюючи z'_x , за змінною y , дістанемо:

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= \left(2xe^{x^2+3y} - \frac{y}{x^2+y^2} \right)'_y = 2x \cdot e^{x^2+3y} \cdot 3 - \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= 6xe^{x^2+3y} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

6. Як визначають частинні похідні другого, третього, ..., n -го порядків? Які похідні називаються мішаними?

Приклад 11. Знайти другі частинні похідні функції:

$$z = \ln(x^2 + y^2).$$

Переконаємося, що $z''_{yx} = z''_{xy}$.

Знаходимо спочатку перші частинні похідні функції:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Диференціюючи кожен з отриманих похідних за x та y , одержимо другі частинні похідні:

$$z''_{xx} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} \right)'_x = 2 \cdot \frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} \right)'_y = -2 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2} \right)'_x = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2} \right)'_y = 2 \cdot \frac{x^2+y^2 - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Отже, мішані частинні похідні z''_{yx} та z''_{xy} рівні. Варто зазначити, що для заданої функції похідні z''_{xx} та z''_{yy} відрізняються лише знаком.

Приклад 12. Знайти z'''_{xy} для функції $z = \sin xy$.

Диференціюємо задану функцію двічі за x , далі ще раз за y , дістаємо:

$$z'_x = (\sin xy)'_x = \cos xy \cdot (xy)'_x = y \cos xy,$$

$$z''_{xx} = (y \cos xy)'_x = -y^2 \sin xy,$$

$$z'''_{xy} = (-y^2 \sin xy)'_y = -2y \sin xy - xy^2 \cos xy.$$

7. Як обчислюють диференціали першого, другого, ..., n -го порядків для функції двох (багатьох) змінних?

Приклад 13. Знайти диференціал другого порядку функції:

$$z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1.$$

Знаходимо частинні похідні першого та другого порядків:

$$z'_x = 6xy - 2y, \quad z'_y = 3x^2 - 2x + 2y,$$

$$z''_{xy} = 6y, \quad z''_{yx} = z''_{xy} = 6x - 2, \quad z''_{yy} = 2.$$

Підставивши одержані частинні похідні другого порядку до (8.16), дістанемо%

$$d^2z = 6y dx^2 + 2(6x - 2) dx dy + 2dy^2.$$

Такий самий результат можна отримати й іншим шляхом. Знайдемо спочатку перший диференціал заданої функції:

$$\begin{aligned} dz &= 3d(x^2y) - 2d(xy) + d(y^2 - 1) = \\ &= 3x^2dy + 6xydx - 2xdy - 2ydx + 2ydy = \\ &= (6xy - 2y)dx + (3x^2 - 2x + 2y)dy. \end{aligned}$$

Знайдемо диференціал від dz , далі d^2z , при цьому dx та dy слід вважати сталими:

$$\begin{aligned} d^2z &= d[(6xy - 2y)dx + (3x^2 - 2x + 2y)dy] = \\ &= (6x dy + 6y dx - 2dy)dx + (6x dx - 2dx + 2dy)dy = \\ &= 6y dx^2 + (12x - 4)dx dy + 2dy^2. \end{aligned}$$

8. Що називають градієнтом функції? Який геометричний зміст градієнта?

9. Як знайти похідну функції за напрямком заданого вектора?

Приклад 14. Знайти $\text{grad} u$ для функції $u = y^2z - 2xy^2 + z^2$ у точці $M_0(3; 1; 1)$ та похідну за напрямком вектора $\vec{l}$, який утворює з координатними осями кути: $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$.

За умовою:

$$\cos \alpha = \cos(\pi/3) = 1/2, \cos \beta = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2.$$

Оскільки $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, де γ – гострий кут, то

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - (1/4) - (1/2)} = 1/2.$$

Обчислимо частинні похідні функції $u(x; y; z)$ у точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (-2y^2) \Big|_{M_0} = -2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (2yz - 4xy) \Big|_{M_0} = -10,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = (y^2 + 2z) \Big|_{M_0} = 3.$$

Похідну за напрямком вектора $\bar{l}$ обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

У нашому випадку:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = (-2) \cdot \frac{1}{2} + (-10) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - 10\sqrt{2}}{2}.$$

Знайдемо градієнт функції u у точці $M_0(3; 1; 1)$:

$$\text{gradu} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \bar{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \bar{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \bar{k}.$$

У нашому випадку:

$$\text{gradu} = -2\bar{i} - 10\bar{j} + 3\bar{k},$$

а його довжина:

$$|\text{gradu}| = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2 + (3)^2} = \sqrt{113}.$$

Напрямок вектора градієнта задають напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\text{gradu}|} = \frac{-2}{\sqrt{113}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\text{gradu}|} = \frac{-10}{\sqrt{113}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\text{gradu}|} = \frac{3}{\sqrt{113}}.$$

10. Яким є означення локального екстремуму функції двох змінних?

11. Якими є необхідні й достатні умови локального екстремуму функції?

Приклад 15. Знайти екстремуми функції:

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Крок 1. Знаходимо частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z'_y = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Крок 2. Запишемо необхідні умови $z'_x = 0, z'_y = 0$. Складемо відповідну систему:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Із системи рівнянь визначимо стаціонарні точки заданої функції. Додавши ці рівняння, дістанемо:

$$x^3 + y^3 = 0, \text{ тобто } y^3 = -x^3.$$

Отже, $y = -x$.

Підставимо $y = -x$ до першого із рівнянь, знайдемо значення:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}, \quad \text{тоді } y_1 = 0, \quad y_2 = -\sqrt{2}, \quad y_3 = \sqrt{2}.$$

Маємо стаціонарні точки:

$$M_1(0;0), \quad M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2}), \quad M_3(-\sqrt{2};\sqrt{2}).$$

Крок 3. Знайдемо другі частинні похідні функції:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z''_{xy} = 4, \quad z''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

Крок 4. Перевіримо достатні умови. Підставимо до похідних координати стаціонарних точок, дістанемо:

• для точки $M_1(0;0)$:

$$A_1 = -4, \quad B_1 = 4, \quad C_1 = -4, \quad \Delta_1 = AC - B^2 = 0;$$

• для точки $M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$:

$$A_2 = 20 > 0, \quad B_2 = 4, \quad C_2 = 20, \quad \Delta_2 = AC - B^2 = 384 > 0;$$

• для точки $M_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$:

$$A_3 = 20 > 0, \quad B_3 = 4, \quad C_3 = 20, \quad \Delta_3 = AC - B^2 = 384 > 0.$$

У точках M_2 і M_3 $\Delta > 0$ та $A > 0$, отже, це точки мінімуму функції. Знайдемо:

$$z_{\min} = z(M_2) = z(M_3) = -8.$$

У точці M_1 $\Delta = 0$ і достатні умови відповіді не дають. Додатковим дослідженням можна встановити, що у початку координат функція екстремуму не має. Дійсно, у цій точці $z = 0$, а у довільному околі початку координат наявні точки, в яких значення z можуть бути як додатними, так і від'ємними. Наприклад, уздовж осі OX (при $y = 0$):

$$z = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0$$

поблизу початку координат, а вздовж бісектриси $y = x$ значення функції:

$$z - x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 > 0.$$

Приклад 16. Знайти екстремуми функції:

$$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

Крок 1. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 6 - 2x - y, \quad z'_y = -x - 2y.$$

Крок 2. Запишемо необхідні умови: $z'_x = 0, z'_y = 0$. Координати критичних точок задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases}$$

розв'язком якої є $x_0 = 4, y_0 = -2$. Дістали тільки одну критичну точку $M_0(4; -2)$.

Крок 3. Знайдемо частинні похідні функції другого порядку. Оскільки другі частинні похідні є сталими:

$$z''_{xx} = -2, \quad z''_{xy} = -1, \quad z''_{yy} = -2,$$

то у довільній точці, отже й у точці $M_0(4; -2)$, маємо:

$$A = -2, \quad B = -1, \quad C = -2 \quad \text{та} \quad \Delta = AC - B^2 = 3.$$

Крок 4. Оскільки $\Delta > 0, A < 0$, то $M_0(4; -2)$ є точкою максимуму заданої функції, то обчислюємо:

$$z_{\max} = z(4; -2) = 1 + 6 \cdot 4 - 16 - 4 \cdot (-2) - 4 = 13.$$

Приклад 17. Знайти найбільше M і найменше m значення функції:

$$z = 2xy - x^2y - xy^2$$

в області D , що обмежена прямими $x = 1/2, y = 0, x + y = 6$.

Крок 1. Побудуємо замкнену обмежену область D (рис. 8.14).

Крок 2. Знайдемо критичні точки для нашої функції, які лежать усередині області D з умов:

$$z'_x = 0, \quad z'_y = 0.$$

Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2y - 2xy - y^2 = 0, \\ 2x - x^2 - 2xy = 0, \end{cases}$$

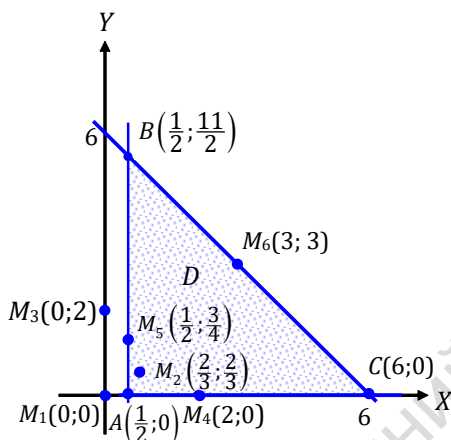


Рис. 8.14

Відніmemo від першого рівняння друге, дістанемо:

$$\begin{aligned} 2y - 2x - y^2 + x^2 &= 2(y - x) - (y - x)(y + x) = \\ &= (y - x)(2 - y - x) = 0. \end{aligned}$$

Отже, $y = x$ або $y = 2 - x$. Підставимо до першого рівняння системи $y = x$ і дістанемо:

$$2x - 2x^2 - x^2 = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x) = 0.$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 2/3$ і відповідно $y_1 = 0$, $y_2 = 2/3$.

Підставимо до другого рівняння $y = 2 - x$, дістанемо:

$$2x - x^2 - 2x(2 - x) = 2x - x^2 - 4x + 2x^2 = -2x + x^2 = x(x - 2) = 0.$$

Звідси $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, відповідно $y_3 = 2$, $y_4 = 0$.

Маємо критичні точки:

$$M_1(0;0), M_2(2/3; 2/3), M_3(0;2), M_4(2;0),$$

серед яких лише M_2 і M_4 належать заданій області D . Для визначення характеру цих точок (це не обов'язково робити відповідно до алгоритму) знайдемо другі частинні похідні:

$$z''_{xx} = -2y, \quad z''_{xy} = 2 - 2x - 2y, \quad z''_{yy} = -2x.$$

Для точки $M_2(2/3; 2/3)$ обчислимо:

$$A_2 = z''_{xx}(M_2) = -4/3, \quad B_2 = z''_{xy}(M_2) = -2/3, \quad C_2 = z''_{yy}(M_2) = -4/3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -(4/3) & -(2/3) \\ -(2/3) & -(4/3) \end{vmatrix} = (4/3) \cdot (4/3) - (2/3) \cdot (2/3) = 4 > 0.$$

Оскільки $A_2 < 0$, то у точці M_2 маємо локальний максимум. Обчислимо значення функції у цій точці:

$$z_{\max} = z(M_2) = 2 \cdot (2/3) \cdot (2/3) - (2/3)^2 \cdot (2/3) - (2/3) \cdot (2/3)^2 = 8/27.$$

Аналогічно й для точки M_4 :

$$A_4 = 0, B_4 = -2, C_4 = -4:$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Отже, у точці M_4 функція локального екстремуму не має.

Крок 3. Перейдемо до дослідження функції на межі області. Межа області складається із відрізків AC , AB і BC .

Дослідимо функцію на екстремум на кожному із відрізків області. На відрізку BC ($y = 6 - x, 1/2 \leq x \leq 6$) підставимо $y = 0$ до функції. Дістанемо $z = 0$, тобто на відрізку BC функція є сталою та скрізь дорівнює нулю.

На відрізку AB ($x = 1/2, 0 \leq y \leq 11/2$) підставимо $x = 1/2$ до виразу заданої функції, дістанемо:

$$z(1/2; y) = z_1(y) = (3/4)y - (1/2)y^2,$$

що є функцією однієї змінної.

Шукаємо критичні точки з умови $z'_1 = (3/4) - y = 0$. Звідси $y = 3/4$. Оскільки $z''_1 = -1 < 0$, то у точці $M_5(1/2; 3/4)$, яка належить відрізку, маємо локальний максимум. Обчислимо значення функції у точці:

$$z(1/2; 3/4) = 9/32.$$

На відрізку AC ($y = 0, 1/2 \leq x \leq 6$) підставимо $y = 6 - x$ до заданої функції, дістанемо функцію однієї змінної:

$$z(x; 6 - x) = z_2(x) = 2x(6 - x) - x^2(6 - x) - x(6 - x)^2 = -24x + 4x^2.$$

Шукаємо критичні точки з умови $z'_2 = -24 + 8x = 0$. Звідси $x = 3$. Оскільки $z''_2 = 8 > 0$, то у точці $M_6(3; 3)$, яка належить відрізку, маємо локальний мінімум. Обчислимо значення функції у точці:

$$z(3; 3) = -36.$$

Залишилось знайти значення функції на кінцях кожного із відрізків – у вершинах трикутника, який обмежує задану область.

Вершини трикутника:

$$A(1/2;0), C(6;0), B(1/2;11/2).$$

У точках A та C функція дорівнює нулю. У точці B :

$$z(1/2;11/2) = -11.$$

Крок 4. Щоб визначити найбільше та найменше значення функції у заданій області, порівнюємо значення функції у точках M_2, M_5, M_6, A, C, B і знайдемо ті точки, в яких функція набуває найбільшого та найменшого значень. Порівнюємо значення функції у перелічених точках:

$$8/27; 9/32; -36; 0; -11.$$

У результаті маємо:

$$\max_{(x,y) \in D} z = z(M_2) = z(2/3; 2/3) = 8/27, \quad \min_{(x,y) \in D} z = z(M_6) = z(3; 3) = -36.$$

Приклад 18. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в області $x^2 + y^2 \leq 1$.

Критичних точок функція не має, оскільки $z'_x = z'_y = 1 \neq 0$, тому найбільшого та найменшого значення вона може набувати тільки на межі області, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$.

Запишемо параметричні рівняння кола:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

На колі $z = x + y$ буде функцією від змінної t :

$$z = z(t) = \cos t + \sin t.$$

Шукаємо стаціонарні точки цієї функції:

$$z'(t) = -\sin t + \cos t = 0,$$

тобто $\sin t = \cos t$, звідки $t_1 = \pi/4$, $t_2 = 5\pi/4$.

Знайдемо значення функції у цих точках:

$$z_1 = z(\pi/4) = \cos(\pi/4) + \sin(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x_1 = y_1 = \sqrt{2}/2,$$

$$z_2 = z(5\pi/4) = \cos(5\pi/4) + \sin(5\pi/4) = -\sqrt{2}, \quad x_2 = y_2 = -(\sqrt{2}/2).$$

Отже, найбільшого та найменшого значень функція набуває у граничних точках, які лежать на колі $x^2 + y^2 = 1$:

$$\max_{(x,y) \in D} z = z(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}, \quad \min_{(x,y) \in D} z = z(-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}.$$

12. Які необхідні, а які достатні умови умовного екстремуму функції двох (багатьох) змінних?

Приклад 19. Знайти умовний екстремум функції $z = x + y$ за умови зв'язку $x^2 + y^2 = 1$.

Крок 1. Перепишемо нашу умову зв'язку у вигляді:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Крок 2. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$L'_x = 1 + 2\lambda x, \quad L'_y = 1 + 2\lambda y, \quad L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1.$$

Крок 3. Знаходимо критичні точки з умов:

$$L'_x = 0, \quad L'_y = 0, \quad L'_\lambda = 0.$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Маємо:

- із першого рівняння $x = -(1/2\lambda)$,
- із другого рівняння $y = -(1/2\lambda)$.

Підставляючи ці значення до третього рівняння, отримаємо:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0,$$

звідки знаходимо:

$$\lambda_1 = -(\sqrt{2}/2), \quad \lambda_2 = (\sqrt{2}/2).$$

Знайдемо відповідні значення x та y , маємо точки:

$$M_1\left(-(\sqrt{2}/2); -(\sqrt{2}/2); \sqrt{2}/2\right), \quad M_2\left(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; -(\sqrt{2}/2)\right).$$

Крок 4. Знаходимо частинні похідні другого порядку та другий диференціал функції Лагранжа для того, щоб з'ясувати, чи є знайдені точки точками екстремуму. Для цього обчислимо значення другого диференціалу функції $L(x, y, \lambda)$ у цих точках, вважаючи λ параметром. Диференціюючи умови зв'язку $x^2 + y^2 - 1 = 0$, дістанемо:

$$2x dx + 2y dy = 0, \quad \text{звідки} \quad dx = -\frac{y}{x} dy.$$

Знаходимо частинні похідні та диференціал другого порядку:

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 2\lambda;$$

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2) = 2\lambda\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)dy^2.$$

Оскільки другий диференціал $d^2L(M_1) > 0$, то у точці M_1 функція має умовний мінімум і

$$z_{\min} = z\left(-\left(\sqrt{2}/2\right); -\left(\sqrt{2}/2\right)\right) = -\left(\sqrt{2}/2\right) - \left(\sqrt{2}/2\right) = -\sqrt{2}.$$

Відповідно другий диференціал $d^2L(M_2) < 0$, тому у точці M_2 функція має умовний максимум і

$$z_{\max} = z\left(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\right) = \left(\sqrt{2}/2\right) + \left(\sqrt{2}/2\right) = \sqrt{2}.$$

13. Яка основна ідея методу найменших квадратів?

Приклад 20. За методом найменших квадратів знайти коефіцієнти a_2, a_1 та a_0 функції $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

X	1	2	3	4	5	6
Y	1,5	-4,5	-5	-2,7	5,3	17,4

Відповідно до методу найменших квадратів коефіцієнти a_2, a_1, a_0 визначають із системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_0 \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Знаходимо:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^4 = 1 + 16 + 81 + 256 + 625 + 1296 = 2275,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1,5 - 4,5 - 5 - 2,7 + 5,3 + 17,4 = 12,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1 \cdot 1,5 + 2 \cdot (-4,5) + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-2,7) + 5 \cdot 5,3 + 6 \cdot 17,4 = 97,6,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = 1 \cdot 1,5 + 4 \cdot (-4,5) + 9 \cdot (-5) + 16 \cdot (-2,7) + 25 \cdot 5,3 + 36 \cdot 17,4 = 654,2.$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases} 91a_2 + 21a_1 + 6a_0 = 12, \\ 441a_2 + 91a_1 + 21a_0 = 97,6, \\ 2275a_2 + 441a_1 + 91a_0 = 654,2. \end{cases}$$

Розв'язуємо її за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 & 6 \\ 441 & 91 & 21 \\ 2275 & 441 & 91 \end{vmatrix} = 753571 + 1166886 + 1003275 - 1242150 - \\ -842751 - 842751 = -3920,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 21 & 6 \\ 97,6 & 91 & 21 \\ 654,2 & 441 & 91 \end{vmatrix} = 99372 + 288502,2 + 258249,6 - 357193,2 - \\ -111132 - 186513,6 = -8715,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 12 & 6 \\ 441 & 97,6 & 21 \\ 2275 & 654,2 & 91 \end{vmatrix} = 808225,6 + 573300 + 1731013,2 - \\ -1332240 - 481572 - 1250176,2 = 48550,6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 91 & 21 & 12 \\ 441 & 91 & 97,6 \\ 2275 & 441 & 654,2 \end{vmatrix} = 5417430,2 + 4662840 + 2333772 - \\ -2484300 - 3916785,6 - 6058546,2 = -45589,6.$$

Знаходимо коефіцієнти:

$$a_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8715}{-3920} \approx 2,22, \quad a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{48550,6}{-3920} \approx -12,39,$$

$$a_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-45589,6}{-3920} = 11,63.$$

Отже, шукана залежність:

$$y = 2,22x^2 - 12,39x + 11,63.$$

Розділ 9

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

9.1. Аналіз економічних задач за допомогою виробничих функцій

9.1.1. Виробничі функції багатьох змінних

Важливим елементом мікро- та макроекономічної теорії раціонального ведення господарства є, з одного боку, виробник, що витрачає економічні ресурси для виготовлення продукції, товарів або послуг, а з іншого, – технологічні процеси, що пов'язані з виробництвом.

При вивченні економічних процесів у сучасному суспільстві для побудови економіко-математичної моделі, яка описує внутрішню сторону виробництва, потрібно зібрати необхідну інформацію про фактори та ресурси, що впливають на обсяг продукції, яку випускають.

Означення. Виробнича функція – це функція, незалежна змінна якої x набуває значення обсягу ресурсу, що використовують у виробництві (фактору виробництва), а залежна змінна y – значення обсягу продукції, яку випускає певне підприємство, галузь або фірма. Позначимо виробничу функцію так:

$$y = f(x). \quad (9.1)$$

Тут x ($x \geq 0$) та y ($y \geq 0$) – числові величини, тобто $y = f(x)$ є функцією однієї змінної x . Тому виробничу функцію називають *одноресурсною* або *однофакторною*. Її область визначення – множина додатних дійсних чисел. Запис $y = f(x)$ означає: якщо ресурс витрачають або використовують у кількості x одиниць, то продукцію випускають у кількості $y = f(x)$ одиниць. Символ f – знак функції – є характеристикою виробничої функції, яка перетворює ресурс на випуск. Символ f пов'язує незалежну змінну x із залежною змінною y .

Аналіз виробництва здійснюють за допомогою теорії виробничих функцій. Часом виникнення цієї теорії прийнято вважати 1928 рік, коли з'явилась стаття американських учених – економіста П. Дугласа та математика Д. Кобба "Теорія виробництва", де було здійснено спробу емпіричним шляхом визначити вплив величини витрачених капіталу та праці на обсяг випущеної продукції у переробній промисловості США. На основі статистичних даних за 1899-1922 роки було поставлено такі завдання:

1. Визначити клас функцій, який найкраще наближує співвідношення між вибраними характеристиками виробничої діяльності.
2. Знайти числові параметри, що задають конкретну функцію.
3. Порівняти отримані результати (значення функцій) із фактичними даними.

Д. Кобб запропонував функцію вигляду:

$$q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \quad (9.2)$$

де K – обсяг основного капіталу, L – витрати праці, q – обсяг випущеної продукції; A , α , β – додатні числові параметри, що задовольняють умови $A > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Вибір степеневі функції був зумовлений двома причинами:

1. Із нелінійних функцій степенева функція є однією серед найпростіших, яка за допомогою логарифмування зводиться до лінійної.
2. Вона враховує нульовий ефект виробництва: якщо один із факторів дорівнює нулю, то й виробнича функція дорівнює нулю. Економічно це означає: не витрачаючи жодного з видів ресурсів, неможливо отримати продукції.

Після логарифмування функції (9.2) маємо систему рівнянь:

$$\ln q_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t,$$

де q_t , K_t , L_t – фактичні значення відповідних величин за рік t .

Методом найменших квадратів знайдемо значення параметрів A , α , β , які мінімізують вираз:

$$\sum_t (\ln q_t - \ln A - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t)^2.$$

У результаті аналізу вчені виявили, що:

$$q_t = 0,01 \cdot K^{0,25} \cdot L^{0,75}.$$

Порівняння величини $q(K;L)$ за фактичними значеннями показало, що одержана залежність дає прийнятне наближення до реальної дійсності. Відхилення були пов'язані із періодами депресії і пожвавлення ділової активності.

Введемо поняття виробничої функції багатьох змінних за аналогією. Припустимо, що фірма випускає один товар, обсяг якого позначимо через q , а вектор ресурсів-витрат – через $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Означення. Виробнича функція багатьох змінних – це функція, незалежні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ якої набувають значень обсягів ресурсів, які використовують у виробництві (число змінних n дорівнює числу ресурсів), а значення функції виражає величину обсягу випуску продукції:

$$q = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9.3)$$

Тут $q (q \geq 0)$ – скалярна величина, $\bar{x}$ – векторна величина, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – координати вектора, тобто $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є числовою функцією n (багатьох) змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Її називають **багатофакторною виробничою функцією**. З економічних міркувань $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Отже, область визначення багатофакторної виробничої функції є множиною n -вимірних векторів $\bar{x}$, усі координати яких – невід'ємні числа, тобто:

$$D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, n\}.$$

Для окремого виробництва (фірми), виробнича функція $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може пов'язувати обсяг випуску (у натуральному або вартісному вираженні) із витратами робочого часу за різними видами трудової діяльності, різноманітними видами сировини, енергії, основного капіталу тощо. Виробничі функції такого типу характеризують *технологію* підприємства чи фірми.

При побудові виробничої функції для регіону або країни у цілому за величину річного випуску q (позначатимемо обсяг випуску або доходу на макрорівні) частіше приймають сукупний продукт (дохід) регіону або країни; як ресурси розглядають **основний капітал** ($K = x_1$ – обсяг основного капіталу, що використано протягом року) і **працю** ($L = x_2$ – кількість одиниць живої праці, що використано протягом року).

Таким чином, дістанемо двофакторну виробничу функцію:

$$q = f(x_1; x_2) = f(K; L) \text{ (напр., функцію Кобба–Дугласа).}$$

Від двофакторної виробничої функції переходять до трифакторної. За третій фактор іноді беруть обсяг природного ресурсу, що використовують у виробництві. Крім того, як особливий фактор зростання виробництва може бути включено науково-технічний прогрес.

9.1.2. Властивості виробничих функцій

Розглянемо багатофакторну виробничу функцію:

$$q = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Припустимо, що вона двічі диференційована та має **властивості**:

1. Функція $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неспадна в області визначення:

$$D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}.$$

Ця властивість означає, що зі зростанням витрат щонайменше одного ресурсу обсяг продукції зростає.

2. Функція $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має невід'ємні частинні похідні, які називають **граничними продуктами**, тобто:

$$f'_{x_i} \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

Ця властивість означає, що зі зростанням витрат одного ресурсу за незмінного обсягу – іншого обсяг випуску зростає.

3. Частинні похідні другого порядку задовольняють умови:

$$f''_{x_i x_i} \leq 0, f''_{x_i x_j} \geq 0, i; j = \overline{1, n}.$$

Ця властивість характеризує **закон спадної ефективності виробництва**: оскільки $f''_{x_i x_i} \leq 0, i = \overline{1, n}$, то це означає, що зі зростанням витрат одного i -го ресурсу обсяг продукції не зростає.

Оскільки $f''_{x_i x_j} \geq 0, i; j = \overline{1, n}$, то за збільшення обсягу одного ресурсу гранична ефективність іншого ресурсу зростає.

4. $f(0, 0, \dots, 0) = 0$. Ця властивість означає, що без ресурсів немає випуску продукції (нульовий ефект).

Приклад 9.1. Лінійна виробнича функція має вигляд:

• двофакторна $q = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad (9.4)$

• багатофакторна $q = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad (9.5)$

де $a_i > 0, i = \overline{1, n}$.

Для лінійної виробничої функції виконуються властивості 1–3, а властивість 4 виконується при $a_0 = 0$.

9.1.3. Економічні характеристики процесу виробництва

За економічного аналізу виробничого процесу за допомогою виробничих функцій використовують такі величини:

1. Середні та граничні ефективності.
2. Коефіцієнти еластичності.
3. Коефіцієнти заміщення.

Середні показники ефективності визначають за формулою:

$$\overline{q_i} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i}, \quad (9.6)$$

$\overline{q_i}$ ще називають **середньою продуктивністю i -го ресурсу** (фактора виробництва) або середнім випуском за i -м ресурсом (фактором виробництва).

Означення. Середня фондовіддача – це відношення обсягу виробленої продукції до величини основних фондів:

$$\overline{q_K} = \frac{f(K; L)}{K}. \quad (9.7)$$

Означення. Середня продуктивність праці – це відношення обсягу виробленої продукції до кількості витраченої праці:

$$\overline{q_L} = \frac{f(K; L)}{L}. \quad (9.8)$$

Зокрема, для функції (9.2) така залежність є спадною функцією від змінної L . Економічно це можна трактувати так: зі збільшенням витрат середня продуктивність праці спадає. Цей факт допускає природне пояснення. Оскільки величина другого фактора K залишається без змін, то нова робоча сила не буде забезпечена додатковими засобами виробництва, що призведе до зниження продуктивності праці.

Поряд із середніми характеристиками виробничої функції важливу роль відіграють **граничні характеристики**, які виражають частинні похідні першого порядку. Їх називають **граничними продуктами** або **граничними продуктивностями i -го ресурсу** та позначають:

$$M_i = f'_{x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.9)$$

Гранична продуктивність i -го ресурсу наближено показує, на скільки одиниць збільшиться обсяг випуску q , якщо обсяг витрат x_i i -го ресурсу зростає за незмінних обсягів інших ресурсів.

Означення. Вектор-градієнт називають граничним вектором-продуктом або **вектором граничних продуктів**. Цей вектор є відгуком випуску продукції на зміни вектора ресурсів-витрат.

З економічних міркувань виділяють множину:

$$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid f'_{x_1} \geq 0, f'_{x_2} \geq 0, \dots, f'_{x_n} \geq 0\}, \quad (9.10)$$

яку називають **економічною областю**.

Приклад 9.2. Для лінійної двофакторної виробничої функції:

$$q = f(x_1; x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \text{ де } a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0.$$

Знайти середні та граничні продуктивності факторів x_1 та x_2 .

Знайдемо середні показники ефективності за факторами x_1 та x_2 :

$$\begin{aligned} \overline{q_{x_1}} &= \frac{f(x_1; x_2)}{x_1} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + \frac{a_2 x_2}{x_1}, \\ \overline{q_{x_2}} &= \frac{f(x_1; x_2)}{x_2} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + \frac{a_1 x_1}{x_2} + a_2, \end{aligned}$$

Знайдемо граничні продуктивності за факторами x_1 та x_2 :

$$M_1 = \frac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_1} = a_1, \quad M_2 = \frac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_2} = a_2.$$

Видно, що

$$\frac{M_1}{\overline{q_{x_1}}} \leq 1; \quad \frac{M_2}{\overline{q_{x_2}}} \leq 1.$$

Отже, $M_1 \leq \overline{q_{x_1}}, M_2 \leq \overline{q_{x_2}}$.

Приклад 9.3. Для виробничої функції Кобба-Дугласа $f(x_1; x_2) = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, де $x_1 = K$ – витрати основного капіталу, $x_2 = L$ – величина трудових ресурсів, $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$, і $a_1 + a_2 = 1$. Знайти середні та граничні продуктивності.

Знайдемо середні показники ефективності за факторами x_1 та x_2 :

$$\overline{q_{x_1}} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}, \quad \overline{q_{x_2}} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1}.$$

Знайдемо граничні продуктивності за факторами x_1 та x_2 :

$$M_1 = \frac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_1} = a_1 \cdot a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} = a_1 \cdot \overline{q_{x_1}},$$

$$M_2 = \frac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_2} = a_2 \cdot a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} = a_2 \cdot \overline{q_{x_1}}.$$

Видно, що

$$\frac{M_1}{q_{x_1}} = a_1 \leq 1, \quad \frac{M_2}{q_{x_2}} = a_2 \leq 1.$$

Отже, $M_1 \leq \overline{q_{x_1}}$, $M_2 \leq \overline{q_{x_2}}$.

У наведених прикладах виконуються нерівності $M_i \leq \overline{q_{x_i}}$, $i = 1, n$, тобто гранична продуктивність i -го ресурсу не більша від середньої продуктивності цього ресурсу.

9.2. Еластичність функції багатьох змінних

9.2.1. Означення еластичності функції двох змінних

У розд. 7 було введено поняття еластичності функції однієї змінної. Аналогічно вводять поняття еластичності функції багатьох змінних. Введемо це поняття для функції двох змінних $z = f(x; y)$. Розглянемо її частинні прирости:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0; y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Означення. Еластичністю функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ за змінною x називають границю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \cdot \frac{x}{z} \right) = E_x(z(x_0; y_0)).$$

Еластичністю функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ за змінною y називають границю:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y} \cdot \frac{y}{z} \right) = E_y(z(x_0; y_0)).$$

$E_x(z)$ – коефіцієнт еластичності z за x , а $E_y(z)$ – коефіцієнт еластичності z за y (позначення точки часто опускають).

Із означення випливають наступні формули:

$$E_x(z(x; y)) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = x(\ln z)'_x, \quad (9.11)$$

$$E_y(z(x; y)) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = y(\ln z)'_y. \quad (9.12)$$

Приклад 9.4. Знайти коефіцієнти еластичності $E_x(z)$ і $E_y(z)$ функції $z = x^y$ у точці $M_0(4; 3)$.

Обчислимо коефіцієнти еластичності $E_x(z)$ та $E_y(z)$, застосовуючи (9.11) і (9.12):

$$E_x(z(x; y)) = \frac{x}{x^y} \cdot yx^{y-1} = y,$$

$$E_y(z(x; y)) = \frac{y}{x^y} \cdot x^y \cdot \ln x = y \cdot \ln x.$$

Отже, $E_x(z(4; 3)) = 3$ та $E_y(z(4; 3)) = 3 \ln 4$.

Економічний аналіз виробничого процесу за допомогою виробничих функцій використовує такі величини, як часткові еластичності за факторами виробництва та еластичність виробництва.

Означення. Відношення граничної продуктивності M_i i -го ресурсу до його середньої продуктивності $\bar{q}_i$ називають **частковою еластичністю випуску за i -м фактором виробництва** та позначають:

$$E_{x_i}(f) = \frac{M_i}{q_{x_i}} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.13)$$

Суму

$$E = \sum_{i=1}^n E_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (9.14)$$

називають **еластичністю виробництва**.

З економічних міркувань коефіцієнти еластичності характеризують відсоток приросту продукції за збільшення витрат ресурсу на 1 %.

Приклад 9.5. Знайти еластичність виробництва та часткові еластичності для двофакторної лінійної виробничої функції:

$$q = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

Використаємо (9.13) і (9.14), знайдемо часткові еластичності:

$$E_{x_1}(q) = \frac{x_1}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2}; \quad E_{x_2}(q) = \frac{x_2}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{a_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2};$$

$$E = \sum_{i=1}^2 E_{x_i}(q) = E_{x_1}(q) + E_{x_2}(q) = \frac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2} + \frac{a_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2} = 1.$$

Приклад 9.6. Знайти еластичність виробництва та часткові еластичності для виробничої функції Кобба–Дугласа:

$$q = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta, \quad A > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$$

$$E_K(q) = \frac{K}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial K} = \frac{K}{A \cdot K^\alpha L^\beta} \cdot \alpha \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\beta = \alpha,$$

$$E_L(q) = \frac{L}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{L}{A \cdot K^\alpha L^\beta} \cdot \beta \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\beta-1} = \beta, \quad E = \alpha + \beta = 1.$$

Приклад 9.7. Знайти швидкості зміни обсягу продукції $q = q(x_1; x_2)$ за зміни одного із факторів виробництва: обсяг фондів x_1 або обсяг трудових ресурсів x_2 для виробничої функції типу Кобба–Дугласа:

$$q = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2},$$

де $b_0 > 0$ – параметр продуктивності конкретно взятої технології, $0 < b_1 < 1$ – частка капіталу у доході, $b_1 + b_2 = 1$.

Обчислимо частинні похідні:

$$q'_{x_1}(x_1; x_2) = b_0 b_1 x_1^{b_1-1} x_2^{b_2}; \quad q'_{x_2}(x_1; x_2) = b_0 b_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2-1}.$$

Нехай для конкретності змінна x_1 – кількість верстатів, а x_2 – кількість робітників на підприємстві. Зафіксуємо поточний стан підприємства, тобто введемо фіксовані початкові величини x_1^0 та x_2^0 . Тоді економічний зміст частинних похідних у точці $M_0(x_1^0; x_2^0)$ буде такий: частинна похідна від виробничої функції за обсягом фондів у точці $M_0(x_1^0; x_2^0)$ наближено дорівнює додатковій вартості продукції за рахунок збільшення фондів підприємства на одну одиницю, а частинна похідна від виробничої функції за обсягом трудових ресурсів у точці $M_0(x_1^0; x_2^0)$ – додатковій вартості продукції, що вироблена ще одним робітником.

У функції Кобба–Дугласа показниками степені b_1 і b_2 – коефіцієнти еластичності:

$$E_{x_1}(q) = b_1 \quad \text{та} \quad E_{x_2}(q) = b_2.$$

9.2.2. Властивості еластичності

Оскільки формули для обчислення еластичності (див. п. 7.1.2) аналогічні формулам, що застосовують при доведенні властивостей еластичності функції однієї змінної, то

всі властивості справедливі й для функції двох змінних. Але форма запису властивостей є складнішою.

Зупинимося детально на окремих властивостях.

Розглянемо складну функцію двох змінних:

$$z = f(x; y),$$

де $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$.

Властивість. Еластичність функції $z = f(x(t); y(t))$ за змінною t у точці x можна знайти за формулою:

$$E_t(z) = E_x(z) \cdot E_t(x) + E_y(z) \cdot E_t(y),$$

де $E_x(z), E_y(z)$ – еластичності функції z за x та y у точці $(\varphi(t); \psi(t))$, а $E_t(x), E_t(y)$ – еластичності x та y за t у точці t .

Доведення. Обчислимо еластичності функції z за змінною t , використовуючи означення:

$$\begin{aligned} E_t(z) &= \frac{t}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{t}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{t}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = E_x(z) \cdot E_t(x) + E_y(z) \cdot E_t(y). \end{aligned}$$

Означення. Пару функцій $x_1 = g_1(y_1; y_2)$, $x_2 = g_2(y_1; y_2)$ називають оберненою для пари функцій $y_1 = f_1(x_1; x_2)$, $y_2 = f_2(x_1; x_2)$, що задані на множині $D \in \mathbb{R}^2$, якщо для довільної точки $(x_1; x_2)$ із множини D виконуються рівності:

$$x_1 = g_1(f_1(x_1; x_2), f_2(x_1; x_2)), \quad x_2 = g_2(f_1(x_1; x_2), f_2(x_1; x_2)).$$

Для довільної пари функцій $y_1 = f_1(x_1; x_2)$ та $y_2 = f_2(x_1; x_2)$ маємо чотири коефіцієнта еластичності:

$$E_{x_j}(y_i), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2.$$

Запишемо їх у вигляді таблиці – матриці розмірності 2×2 :

$$E_x(y) = \begin{pmatrix} E_{x_1}(y_1) & E_{x_2}(y_1) \\ E_{x_1}(y_2) & E_{x_2}(y_2) \end{pmatrix}.$$

Елементи цієї матриці, що розташовані на побічній діагоналі, називають **перехресними коефіцієнтами еластичності**.

Властивість. Нехай $x_1 = g_1(y_1; y_2)$, $x_2 = g_2(y_1; y_2)$ – пара обернених функцій для функції $y_1 = f_1(x_1; x_2)$, $y_2 = f_2(x_1; x_2)$. Тоді матриця коефіцієнтів еластичності $E_y(x)$ є оберненою до матриці $E_y(x)$.

Доведення. Перемножимо матриці $E_y(x)$ та $E_x(y)$, використовуючи попередню властивість:

$$\begin{aligned} E_y(x) \cdot E_x(y) &= \\ &= \begin{pmatrix} E_{y_1}(x_1)E_{x_1}(y_1) + E_{y_2}(x_1)E_{x_1}(y_2) & E_{y_1}(x_1)E_{x_2}(y_1) + E_{y_2}(x_1)E_{x_2}(y_2) \\ E_{y_1}(x_2)E_{x_1}(y_1) + E_{y_2}(x_2)E_{x_1}(y_2) & E_{y_1}(x_2)E_{x_2}(y_1) + E_{y_2}(x_2)E_{x_2}(y_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E_{x_1}(x_1) & E_{x_2}(x_1) \\ E_{x_1}(x_2) & E_{x_2}(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оскільки в результаті множення отримано одиничну матрицю, то матриці $E_y(x)$ та $E_x(y)$ взаємно обернені.

Коефіцієнти еластичності використовують при аналізі функцій попиту на різні товари.

9.2.3. Попит на конкурентні товари

Попит на будь-який товар залежить від ціни його одиниці, якості, пакування та інших факторів, зокрема, ціни іншого товару.

Розглянемо випадок двох товарів x та y . Нехай p_x та p_y – ціни одиниці відповідного товару, а q_x та q_y – кількісний попит на товари x та y , відповідно. Вважатимемо, що **товари x та y взаємопов'язані**, якщо попит на товар x залежить не тільки від його ціни, але й від ціни товару y . Для пари товарів, які доповнюють один одного (напр., чай і цукор), або пари товарів, які замінюють один одного (напр., масло та маргарин), природно вважати, що попит на кожний товар залежить від обох цін p_x та p_y . Нехай товари x та y взаємопов'язані, тоді q_x та q_y – функції двох змінних:

$$q_x = q_x(p_x; p_y), \quad q_y = q_y(p_x; p_y).$$

Припустимо, що не тільки ціни визначають попит, але й навпаки, попит визначає ціни. Іншими словами, вважатимемо, що ціни p_x та p_y виражають через попит, тобто є оберненими функціями:

$$p_x = p_x(q_x; q_y), \quad p_y = p_y(q_x; q_y).$$

Маємо дві пари взаємо-обернених функцій. Тоді матрицю коефіцієнтів еластичності цін за попитом можна знайти як обернену матрицю $E_q(p) = (E_p(q))^{-1}$ до матриці $E_p(q)$ коефіцієнтів еластичності попиту за цінами.

Частинні похідні функції попиту виражають:

$\frac{\partial q_x}{\partial p_x}$ – граничний попит на товар x щодо ціни p_x ,

$\frac{\partial q_x}{\partial p_y}$ – граничний попит на товар x щодо ціни p_y .

Означення. Товари x та y називають **конкурентними**, якщо:

$$\frac{\partial q_x}{\partial p_x} > 0, \quad \frac{\partial q_x}{\partial p_y} > 0.$$

Еластичність попиту товару x щодо ціни p_x обчислюють за формулою:

$$E_{p_x}(q_x) = \frac{p_x}{q_x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial p_x}. \quad (9.15)$$

Еластичність попиту товару x щодо ціни p_y обчислюють за формулою:

$$E_{p_y}(q_x) = \frac{p_y}{q_x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial p_y}, \quad (9.16)$$

тобто (9.16) задає **перехресний коефіцієнт еластичності попиту**, який наближено показує відсоткову зміну попиту на товар за зміни ціни альтернативного товару на 1 %.

Означення. Товари x та y називають **взаємозамінними**, якщо $E_{p_y}(q_x) > 0$. У цьому випадку збільшення ціни одного товару спричиняє збільшення попиту – на інший.

Означення. Товари x та y називають **взаємодоповнюючими**, якщо $E_{p_y}(q_x) < 0$. У цьому випадку збільшення ціни одного товару спричиняє зменшення попиту – на інший.

Приклад 9.8. Задано функцію попиту:

$$q_x = 500 + 3p_y - 6p_x^2$$

на товар x , де p_x та p_y – ціни товарів x та y , відповідно. Знайти еластичність попиту щодо ціни p_x та p_y , якщо $p_x = 5$, $p_y = 30$.

Знайдемо еластичності, використовуючи (9.15) і (9.16):

$$E_{p_x}(q_x) = \frac{p_x}{q_x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{500 + 3p_y - 6p_x^2} \cdot (-12p_x) = \frac{-12p_x^2}{500 + 3p_y - 6p_x^2},$$

$$E_5(q_x) = \frac{-12 \cdot 25}{500 + 3 \cdot 30 - 6 \cdot 25} = \frac{-300}{440} = -\frac{30}{44} = -\frac{15}{22} \approx -0,68,$$

$$E_{p_y}(q_x) = \frac{p_y}{q_x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial p_y} = \frac{3p_y}{500 + 3p_y - 6p_x^2},$$

$$E_{30}(q_x) = \frac{3 \cdot 30}{500 + 3 \cdot 30 - 6 \cdot 25} = \frac{90}{440} = \frac{9}{44} \approx 0,2.$$

Розглянемо ще один коефіцієнт еластичності, який характеризує виробничу функцію багатьох змінних і має важливе значення в економічній теорії.

Нехай $z = f(x; y)$ – виробнича функція, $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$ – граничні продукти, що відповідають витратам ресурсів x та y .

Означення. Коефіцієнтом еластичності заміщення називають:

$$\delta_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\frac{\Delta \ln(x/y)}{\Delta \ln \frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)}}}{\frac{d \ln(x/y)}{d \ln \frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)}}} \quad (9.17)$$

оскільки за незначних приростів аргументу Δt має місце наближена рівність $\Delta \ln t \approx \Delta t/t$.

Таким чином, величина, обернена до коефіцієнта еластичності заміщення, наближено показує, на скільки відсотків зміниться відношення граничних продуктів $f'_x(x; y)/f'_y(x; y)$ за зміни відношення витрат ресурсів на (x/y) на 1 %.

У загальному випадку коефіцієнт еластичності заміщення є функцією двох змінних. Розглянемо вираз цієї функції у точках ізокванти. Оскільки вздовж ізокванти значення функції $z = f(x; y) = C$, то повний диференціал $dz = f'_x dx + f'_y dy = 0$ та

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)},$$

тобто за збереження обсягу випуску продукції z величину $-(dy/dx)$ називають **граничною нормою заміщення ресурсу x ресурсом y** , яка дорівнює відношенню їх граничних продуктів:

$$\frac{1}{\delta_{xy}} = \frac{d\ln\left(-\frac{dy}{dx}\right)}{d\ln\left(\frac{y}{x}\right)}. \quad (9.18)$$

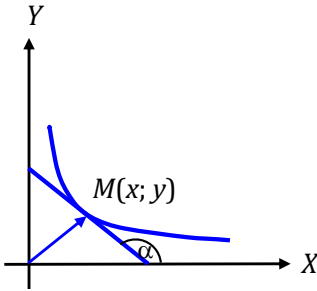


Рис. 9.1

Очевидно, що $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$, α – кут нахилу дотичної до ізокванти у точці $M(x; y)$, а y/x – тангенс кута нахилу радіуса-вектора точки $M(x; y)$ (рис. 9.1).

Таким чином, величина $1/\delta_{xy}$ характеризує відносну зміну кута нахилу дотичної до ізокванти за зміни кута нахилу її радіус-вектора, тобто кривизну ізокванти.

9.3. Задачі оптимізації виробництва

9.3.1. Задача багаторесурсної фірми

Ми вже розглядали теорію одноресурсної фірми. У загальному випадку (коли фірма використовує не один ресурс, а кілька) багато понять теорії є аналогічними.

Нехай фірма випускає один товар, обсяг якого q , і використовує для його виробництва певні ресурси. Позначимо $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги різних ресурсів, які використовує фірма для випуску продукції, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ – їх ціни, відповідно (усі p_i – сталі величини). Витрати виробництва однозначно визначають випуск продукції, і цей зв'язок визначає виробнича функція $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка виражає обсяг q продукції, яку випускають і продають через обсяги $x_1, x_2, \dots, x_n$ ресурсів, що використовують при виробництві.

Припустимо, що виробнича функція задовольняє необхідним умовам диференційованості, а також аналогічним умовам (див. п. 7.2), тобто вона не спадає в економічній області E . Звідси випливає, що частинні похідні виробничої

функції, які називають граничними продуктами, невід'ємні у цій області.

Означення. *Доходом* R фірми у певний період часу (напр., у певному році) називають добуток p_0q загального обсягу продукції q , що випускають, на (ринкову) ціну p_0 цієї продукції, тобто $R = p_0q$.

Означення. *Витратами* C фірми називають витрати на ресурси фірми за певний проміжок часу.

Очевидно, що $C = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги ресурсів, які використовує фірма (фактори виробництва), $p_1, p_2, \dots, p_n$ – ринкові ціни на ці ресурси (фактори виробництва).

Означення. *Прибутком* Π фірми за певний проміжок часу називають різницю між отриманим фірмою доходом та її витратами виробництва $\Pi = R - C$, тобто:

$$\Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) - (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n). \quad (9.19)$$

У теорії фірми вважають: якщо фірма функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ вона не може вплинути. Тобто фірма "погоджується" із цінами $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$. Випадки функціонування фірми в умовах чистої монополії, монополістичної конкуренції та олігополії розглядають в межах курсу мікроекономіки.

Основне завдання фірми – отримання максимального прибутку шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовують у виробництві. З математичного погляду це завдання зводиться до розв'язання задачі знаходження максимального значення функції прибутку:

$$\Pi = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Функцію прибутку досліджують на екстремум і визначають, за яких значень $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ вона набуває найбільшого значення.

Означення. Набір ресурсів $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який забезпечує фірмі максимальний прибуток, називають *оптимальним*.

Фірма може вільно вибирати вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ресурсів, причому $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Знайдемо оптимальну для

фірми комбінацію ресурсів $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, тобто розв'яжемо основну задачу багаторесурсної фірми.

Прирівняємо частинні похідні функції прибутку до нуля, дістанемо:

$$\Pi'_{x_1} = \frac{p_1}{p_0}, \Pi'_{x_2} = \frac{p_2}{p_0}, \dots, \Pi'_{x_n} = \frac{p_n}{p_0}. \quad (9.20)$$

Припустимо, що всі витрати ресурсів строго додатні (нульові можна не розглядати). Тоді точка $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, яку визначають із (9.20), є критичною. Припустимо, що умови, які накладаються на виробничу функцію, гарантують, що це – точка максимуму. Тоді точку $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ називають **оптимальним розв'язком фірми**.

Приклад 9.9. Нехай задано виробничу функцію фірми $f(x; y) = x^{1/4} y^{1/2}$, ринкові ціни продукції $p_0 = 2$ і факторів виробництва $p_1 = 1$, $p_2 = 1/2$ ум. гр. од., відповідно. Знайти комбінацію ресурсів $(x^*; y^*)$, за яких фірма отримує максимальний прибуток.

Запишемо функцію прибутку фірми:

$$\Pi(x; y) = 2x^{1/4} y^{1/2} - x - (1/2)y.$$

Дослідимо її на екстремум. Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні функції прибутку та дорівняємо їх до нуля.

$$\begin{cases} \Pi'_x = 2 \frac{1}{4} x^{-(3/4)} y^{1/2} - 1 = \frac{1}{2} x^{-(3/4)} y^{1/2} - 1 = 0, \\ \Pi'_y = 2 \frac{1}{2} x^{1/4} y^{-(1/2)} - \frac{1}{2} = x^{1/4} y^{-(1/2)} - \frac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{1/2} = 2x^{3/4}, \\ \frac{x^{1/4}}{2x^{3/4}} = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4x^{3/2} \\ x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отже, $M(1; 4)$ – критична точка.

Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та обчислимо їх значення у точці $M(1; 4)$:

$$\Pi''_{xx} = 1/2(-3/4)x^{-(7/4)}y^{1/2}, \quad \Pi''_{xy} = 1/2(1/2)x^{-(3/4)}y^{-(1/2)},$$

$$\Pi''_{yy} = -(1/2)x^{1/4}y^{-(3/2)}.$$

$$A = -(3/8) \cdot 1 \cdot 2 = -(3/4), \quad B = 1/4 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/8,$$

$$C = -(1/2) \cdot 1 \cdot (1/2^3) = -(1/16).$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(3/4) & 1/8 \\ 1/8 & -(1/16) \end{vmatrix} = 3/64 - 1/64 = 2/64 = 1/32 > 0 \quad \text{та} \quad A = -(3/4) < 0,$$

то $M(1; 4)$ – точка локального максимуму. Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$\Pi_{\max} = \Pi(1; 4) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 - (1/2) \cdot 4 = 4 - 1 - 2 = 1.$$

9.3.2. Задача оптимального розподілу ресурсів

Розглянемо задачу оптимального розподілу ресурсів у конкретному випадку, за якого функція випуску продукції має вигляд $q = f(x; y) = a_0 xy^2$, а функція витрат на ресурси x та y лінійна, тобто має:

$$C(x; y) = p_1 x + p_2 y,$$

де p_x та p_y – ціни на фактори x та y , відповідно.

У точці $(x_0; y_0)$ оптимального розподілу ресурсів лінії рівня функції випуску та витрат дотикаються (рис. 9.2). Ці лінії визначають рівняння:

$$a_0 xy^2 = C, \quad p_x x + p_y y = A.$$

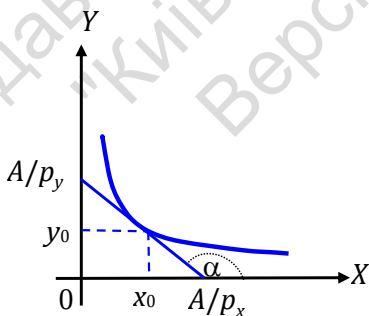


Рис. 9.2

Виразимо із цих рівностей змінну y :

$$y = \sqrt{b/x},$$

$$y = -(p_x/p_y)x + A/p_y,$$

де сталі $C > 0$, $A > 0$, $b = C/a_0$.

Лінії $y = \sqrt{b/x}$,

$$y = -(p_x/p_y)x + A/p_y$$

дотикаються за умови:

$$\left(\sqrt{b/x} \right)' \Big|_{x_0} = -(p_x/p_y).$$

Визначимо із цієї рівності x_0 , дістанемо:

$$x_0 = b^{1/3} (p_y / 2p_x)^{2/3}.$$

Тоді із рівняння лінії рівня функції випуску визначимо значення:

$$y_0 = (b/x_0)^{1/2} = b^{1/3} (2p_x / p_y)^{1/3}.$$

Отже, оптимальний розподіл ресурсів x_0/y_0 має бути визначений у відношенні цін $p_y/2p_x$ на ці ресурси.

9.3.3. Задача оптимального розподілу товарів

Розглянемо іншу економічну задачу. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги різних товарів, які випускає фірма, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ – їх ціни, відповідно (усі $p_i, i = \overline{1, n}$ – сталі величини).

Нехай витрати виробництва цих товарів задаються функцією витрат:

$$C = C(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тоді функція прибутку має вигляд:

$$\Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - C(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9.21)$$

Максимальний прибуток природно шукати як локальний екстремум функції багатьох змінних:

$$\Pi = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ (за відсутності інших обмежень).

Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму:

$$\Pi'_{x_i} = 0, i = \overline{1, n},$$

які приводять до системи алгебраїчних рівнянь щодо змінних x_i :

$$\begin{aligned} p_i - C'_{x_i} &= 0, i = \overline{1, n}, \\ p_i &= C'_{x_i}, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (9.22)$$

яка реалізує відоме **правило економіки**: ціна товару дорівнює граничним витратам на виробництво цього товару.

Розв'язком системи (9.22) є набори $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Варто зазначити, що сам процес знаходження розв'язку системи рівнянь (9.22) залежить від виду функції витрат і може виявитися достатньо складним.

Для знайдених наборів значень $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ необхідно перевірити достатні умови локального екстремуму. Для цього запишемо визначник (гессіан) для функції прибутку:

$$\det H = \|a_{ij}\|, \text{ де } a_{ij} = \begin{cases} \Pi''_{x_i^2}, & i = j, \\ \Pi''_{x_i x_j}, & i \neq j. \end{cases}$$

У цій задачі це буде визначник з елементами:

$$a_{ij} = \begin{cases} -C''_{x_i^2}, & i = j, \\ -C''_{x_i x_j}, & i \neq j. \end{cases}$$

Якщо знаки головних мінорів цього визначника чергуються, починаючи зі знака мінус, то розв'язок системи $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який перевіряється, є n -вимірною точкою локального максимуму функції прибутку (9.21).

Далі виберемо серед цих точок локального максимуму ту, в якій функція набуває найбільшого значення. Знайдені таким чином значення $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ визначають набір обсягів товарів x_i , які потрібні, щоб за заданої функції витрат на їх виробництво у спектрі цін (що склалися) забезпечити максимальний прибуток.

Приклад 9.10. Нехай фірма випускає два види товарів обсягами x та y . Ціни на ці товари становлять $p_x = 8$ та $p_y = 10$ гр. од., відповідно, а функція витрат:

$$C(x; y) = x^2 + xy + y^2.$$

Знайти максимальний прибуток, який може отримати фірма.

Запишемо функцію прибутку фірми:

$$\Pi(x; y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Обчислимо її частинні похідні першого порядку:

$$\Pi'_x = 8 - 2x - y, \quad \Pi'_y = 10 - x - 2y.$$

Використовуючи необхідні умови локального екстремуму $\Pi'_x = 0, \Pi'_y = 0$, розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 10 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є критична точка $M(2; 4)$.

Перевіримо достатні умови локального екстремуму. Знайдемо значення частинних похідних другого порядку у точці $M(2; 4)$, дістанемо:

$$A = \Pi''_{xx}(M) = -2, \quad B = \Pi''_{xy}(M) = -1, \quad C = \Pi''_{yy}(M) = -2.$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \quad A = -2 < 0.$$

Отже, $M(2; 4)$ – точка локального максимуму. Максимальний прибуток, який одержить фірма:

$$\Pi_{\max} = \Pi(2, 4) = 28 \text{ гр. од.}$$

9.3.4. Задача визначення мінімальних витрат фірми

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги різних ресурсів, які використовує фірма для виробництва своєї продукції, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ – їх ціни, відповідно (усі p_i – сталі величини). Загальні витрати виробництва фірми задає функція витрат:

$$C = C(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Визначимо мінімальні витрати ресурсів на виробництво фіксованого випуску продукції.

Мінімальні витрати фірми природно шукати як локальний мінімум функції багатьох змінних $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_i \geq 0$ (за відсутності інших обмежень).

Приклад 9.11. Нехай задано виробничу функцію Кобба-Дугласа, що залежить від двох змінних:

$$q = q(x; y) = Ax^\alpha \cdot y^{1-\alpha},$$

де A – стала конкретного виробництва, x – витрати капіталу, y – витрати людської праці. Знайти значення величин x та y , які забезпечують мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції, що використовують, якщо задано відповідні ціни на ресурси p_1 та p_2 .

Функцію витрат виражає формула:

$$C(x; y) = p_1 x + p_2 y.$$

Потрібно знайти мінімальне значення функції витрат за умови, що задано обсяг продукції $q(x; y) = q_0$.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = p_1 x + p_2 y + \lambda (Ax^\alpha y^{1-\alpha} - q_0).$$

Необхідні умови умовного екстремуму функції Лагранжа:

$$L'_x = 0, \quad L'_y = 0, \quad L'_\lambda = 0.$$

Знайдемо частинні похідні та запишемо необхідні умови екстремуму. Дістаємо систему:

$$\begin{cases} p_1 + \alpha \lambda A x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} = 0, \\ p_2 + (1-\alpha) \lambda A x^\alpha y^{-\alpha-1} = 0, \\ Ax^\alpha y^{1-\alpha} - q_0 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо:

$$\begin{cases} p_1 + \alpha \lambda q_0 x^{-1} = 0, \\ p_2 + (1-\alpha) \lambda q_0 y^{-1} = 0, \\ Ax^\alpha y^{1-\alpha} = q_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -\frac{p_1}{\alpha \lambda q_0}, \\ \frac{1}{y} = -\frac{p_2}{(1-\alpha) \lambda q_0}, \\ Ax^\alpha y^{1-\alpha} = q_0. \end{cases}$$

Розв'язок системи рівнянь – точка $M_0(x_0; y_0)$, де:

$$x_0 = \frac{q_0}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} \right)^{\alpha-1}, \quad y_0 = \frac{q_0}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} \right)^\alpha.$$

Оскільки $d^2 L|_{M_0} > 0$, то ця точка є точкою умовного мінімуму функції витрат.

9.3.5. Задача цінової дискримінації

Задача цінової дискримінації пов'язана із розподілом товару одного виду на різних ринках із різними попитом за максимізації загального прибутку фірми. Оскільки еластичність попиту на ринках різна, то на товар установлюють різні ціни, що спричиняє так звану цінову дискримінацію.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги одного й того самого товару, що продають на ринках за цінами $p_i(x_i)$, тобто ціна на кожному ринку залежить від обсягу товару, який продають. Припустимо, що функція витрат залежить від загального обсягу товару, що продає фірма на всіх ринках, тобто:

$$C = C(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тоді функція прибутку фірми має вигляд:

$$\Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - C(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Необхідні умови екстремуму $\Pi'_{x_i} = 0, i = \overline{1, n}$ приводять до системи рівнянь для визначення стаціонарних точок функції прибутку в області $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$:

$$p_i(x_i) + x_i p'_i(x_i) - C'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, n}. \quad (9.23)$$

Проаналізуємо доход R_i на i -тому ринку, залежно від ціни на товар обсягом x_i . Оскільки $R_i = x_i p_i$, то граничний доход дорівнює сумі перших двох доданків у (9.23):

$$R'_i = p_i + x_i p'_i = p_i (1 + (x_i / p_i) p'_i) = p_i (1 + (1/E_i)),$$

де E_i – еластичність попиту на i -тому ринку.

Оскільки E_i – зазвичай від'ємна величина, то останнє рівняння можна переписати у зручнішій формі:

$$R'_i = p_i \left(1 - \frac{1}{|E_i|} \right). \quad (9.24)$$

Якщо $|E_i| < 1$, то $R'_i < 0$, тобто ринок нееластичний; якщо $R'_i > 0$, – то потребує вибору ринку із додатним доходом або з еластичним попитом, тобто з умовою $|E_i| > 1$. Із (9.23):

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{|E_1|} \right) = p_2 \left(1 - \frac{1}{|E_2|} \right) = \dots = p_n \left(1 - \frac{1}{|E_1|} \right) = C'_{x_i}, \quad (9.25)$$

звідки виводять **умову "цінової дискримінації"**: що меншою є за абсолютною величиною еластичність ринку за певного обсягу товару, який продають на ринку, то вищою має бути ціна на товар на цьому ринку за умови отримання максимального прибутку фірми.

Гессіан для функції прибутку у скороченій формі має вигляд:

$$\det H = \|a_{ij}\|, \text{ де } |a_{ij}| = \begin{cases} p'_i x_i + 2p''_i - C''_{x_i^2}, & i = j, \\ -C''_{x_i x_j}, & i \neq j. \end{cases}$$

Приклад 9.12. Нехай фірма продає товар на трьох ринках, x_1, x_2, x_3 – обсяги товару на ринках, а $p_i = a_i - b_i x_i$ – ціни на ці товари, відповідно. Тоді дохід на i -тому ринку:

$$R_i = x_i(a_i - b_i x_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Нехай функція витрат фірми має вигляд:

$$C = A + B(x_1 + x_2 + x_3).$$

Знайти максимальний прибуток фірми (у співвідношеннях всі сталі – додатні).

Функцію прибутку фірми виразимо формулою:

$$\Pi = x_1(a_1 - b_1 x_1) + x_2(a_2 - b_2 x_2) + x_3(a_3 - b_3 x_3) - A - B(x_1 + x_2 + x_3).$$

Необхідні умови локального екстремуму приводять до системи рівнянь:

$$a_i - 2b_i x_i - B = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отже,

$$x_i = \frac{a_i - B}{2b_i}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ – єдина стаціонарна точка.}$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2b_3 \end{vmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра маємо точку максимуму, оскільки знаки головних мінорів чергуються та $b_i > 0, i = 1, 2, 3$.

Для конкретності візьмемо числові значення параметрів:

$$a_1 = 25, b_1 = 5, a_2 = 45, b_2 = 4, a_3 = 85, b_3 = 10, A = 10, B = 5.$$

Тоді одержимо розподіл товару між ринками $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 4$ за цін $p_1 = 15, p_2 = 25, p_3 = 45$. Відповідні еластичності:

$$|E_1| = 1,5, |E_2| = 1,25, |E_3| = 1,125$$

задовольняють принцип цінової дискримінації. Що меншою є еластичність $|E_i|$ i -го ринку, то вищою має бути ціна товару на ньому. Отже, $\Pi_{\max} = 270$ ум. гр. од.

9.4. Задачі теорії споживання

9.4.1. Гранична корисність і гранична норма заміщення

Основною метою підприємців є одержання максимально-го прибутку. Складніше визначити мотивацію поведінки споживачів. Можна, звичайно, припустити, що споживачі прагнуть максимально збільшити свої доходи. Але, якщо б це було єдиною метою, то всі б прагнули працювати сім днів на тиждень по двадцять чотири години на добу. Насправді це не так, і люди знаходять розумний компроміс між роботою, відпочинком і дозвіллям. Аналогічно споживачі здійснюють покупки, вибираючи різні товари із врахуванням ціни, якості тощо.

Спробуємо описати поведінку споживача. Споживанню благ або товарів ставиться у відповідність число u , яке називають **корисністю**. Що вищою є оцінка, яку дає споживач цим благам або товарам, то більшим є число u . Припустимо, що є два види товарів X та Y , і споживач купує ці товари у певних обсягах: x – обсяг товару X , y – обсяг товару Y . Тоді корисність виражає деяка функція двох змінних (число змінних може бути й більшим), яку позначатимемо:

$$u = u(x; y).$$

Таким чином, основним поняттям теорії споживання є функція корисності:

$$u = u(x; y).$$

Ми вже розглядали диференціальні властивості функції корисності. Нагадаємо, що ця функція виражає міру корисності набору $(x; y)$, де x – обсяг товару X , y – обсяг товару Y . Чутливість набору $(x; y)$ до незначної зміни x за фіксованого y називають **граничною корисністю** x і виражають як частинну похідну u'_x . Аналогічно **граничну корисність** y виражають як u'_y . Нагадаємо, що лінії рівня функції корисності називають **кривими байдужості**.

Вважатимемо, що для довільних точок $M_0(x_0; y_0)$ та $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, які розташовані на одній лінії рівня, прирости Δx та Δy мають різні знаки (рис. 9.3).

Нехай для визначеності $\Delta x > 0$, а $\Delta y < 0$. У цьому випадку кажуть, що Δx одиниць першого товару замінюється на $(-\Delta y)$ одиниць другого товару (розуміємо перехід від $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ до $M_0(x_0; y_0)$).

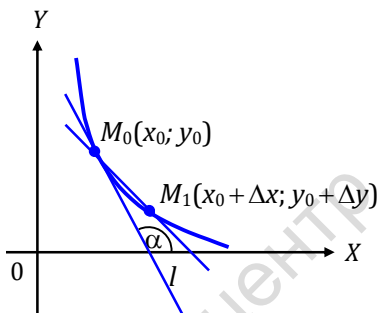


Рис. 9.3

Означення. *Граничною нормою заміщення x на y у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають границю відношення $-(\Delta x/\Delta y)$, за якого точка M_1 прямує до точки M_0 , залишаючись на одній лінії рівня функції $u = u(x; y)$ із точкою M_0 , і позначають:*

$$MRS_{xy} \text{ або } MRS_{xy}(M_0),$$

якщо необхідно явно вказати на її залежність від точки M_0 .

Нехай l – дотична до лінії рівня функції $u = u(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$. Із рис. 9.3 видно, що січна M_0M_1 прямує до дотичної l , коли точка M_1 прямує до точки M_0 , тому:

$$MRS_{xy}(M_0) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad (9.26)$$

де α – кут нахилу дотичної l .

Запишемо рівняння дотичної l у вигляді:

$$u'_x(M_0)(x - x_0) + u'_y(M_0)(y - y_0) = 0$$

$$\text{або} \quad y = y_0 - \frac{u'_x(M_0)}{u'_y(M_0)}(x - x_0). \quad (9.27)$$

Із рівняння (9.27) визначаємо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{u'_x(M_0)}{u'_y(M_0)}.$$

Використовуючи (9.26), дістанемо:

$$MRS_{xy}(M_0) = \frac{u'_x(M_0)}{u'_y(M_0)}. \quad (9.28)$$

Можна дійти такого **висновку**: гранична норма заміщення одного товару іншим дорівнює відношенню їх граничних коєрисностей.

Приклад 9.13. Знайти граничну норму заміщення x на y для функції корисності $u = u(x; y) = \ln x + \ln y$ у точках $A(3; 12)$, $B(2; 1)$.

За (9.28) дістанемо:

$$MRS_{xy} = (1/x) : (1/y) = y/x,$$

тому

$$MRS_{xy}(3; 12) = 4, \text{ а } MRS_{xy}(2; 1) = 0,5.$$

Із цього прикладу можна зрозуміти економічний зміст граничної норми заміщення. Якщо $MRS_{xy}(3; 12) = 4$, тобто одиниця товару X за внеском до загальної корисності набору еквівалентна чотирьом одиницям товару Y .

Нехай p_x – ціна товару X , а p_y – ціна товару Y . Тоді вартістю набору $(x; y)$ буде $p_x x + p_y y$. За заміни у цьому наборі однієї одиниці X на 4 одиниці Y вартість набору зміниться на величину $4p_y - p_x$. Якщо ж навпаки, 4 одиниці товару Y замінити на одну одиницю товару X , то вартість набору зміниться на $p_x - 4p_y$.

Припустимо, що $(x_0; y_0)$ – найдешевший набір за заданого рівня корисності:

$$u(x; y) = C \quad (C = \text{const}).$$

Тоді вказані вище зміни вартості мають бути невід'ємними:

$$4p_y - p_x \geq 0 \text{ і } p_x - 4p_y \geq 0.$$

Отже, $p_x = 4p_y$.

Ясно, що число 4 може бути замінено на інше. Фактично ми показали, що виконується рівність:

$$MRS_{xy}(x_0, y_0) = p_x / p_y. \quad (9.29)$$

9.4.2. Функції попиту споживача

Нехай p_x – ціна товару X , а p_y – ціна товару Y , R – доход споживача, а $u = u(x; y)$ – функція корисності. Вважатимемо, що споживач може купувати тільки такі набори товарів $(x; y)$, вартість яких не перевищує його доходу R , тобто:

$$p_x x + p_y y \leq R.$$

Означення. Нехай функція корисності $u = u(x; y)$ має єдину точку максимуму $(x^*; y^*)$ за довільних додатних $p_x > 0$, $p_y > 0$, $R > 0$ на множині

$$D = \{p_x x + p_y y \leq R, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Тоді функції $x^* = q_x(p_x; p_y; R)$ та $y^* = q_y(p_x; p_y; R)$ називають **функціями попиту**. Сенс цього означення: споживач прагне найбільшого задоволення від товарів, які придбаває за обмежених коштів.

Із геометричних міркувань множина D – трикутник із вершинами $O(0; 0)$, $A(R/p_x; 0)$, $B(0; R/p_y)$, а з економічних – бюджетна множина (рис. 9.4).

Зазвичай функція $u = u(x, y)$ зростає за збільшення x та y , найбільше значення функція $u = u(x; y)$ досягає на відрізку AB , і споживач витрачає на покупки весь свій дохід. Тому задача зводиться до знаходження умовного максимуму функції корисності за умов:

$$p_x x + p_y y \leq R, x \geq 0, y \geq 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = u(x, y) + \lambda_1(R - p_x x - p_y y) + \lambda_2 x + \lambda_3 y.$$

Перевіримо необхідні умови умовного екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$L'_x = 0, \quad L'_y = 0, \quad L'_{\lambda_1} = 0, \quad L'_{\lambda_2} = 0, \quad L'_{\lambda_3} = 0.$$

Дістанемо систему:

$$\begin{cases} u'_x(x, y) - \lambda_1 p_x + \lambda_2 = 0, \\ u'_y(x, y) - \lambda_1 p_y + \lambda_3 = 0, \\ R - p_x x - p_y y = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0. \end{cases} \quad (9.30)$$

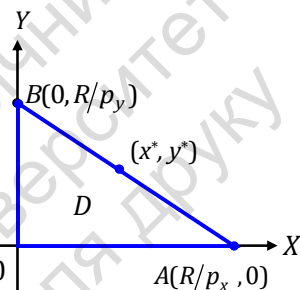


Рис. 9.4

Якщо відомо, що функція попиту не перетворюється на нуль, то із четвертого та п'ятого рівнянь (9.30) випливає $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. У цьому випадку система набуває вигляду:

$$\begin{cases} u'_x(x; y) = \lambda_1 p_x, \\ u'_y(x; y) = \lambda_1 p_y, \\ R = p_x x - p_y y, \\ \lambda_1 \geq 0. \end{cases} \quad (9.31)$$

Якщо $u'_x(x; y) > 0$ або $u'_y(x; y) > 0$ (найчастіше виконуються обидві умови), то із перших двох рівнянь випливає $\lambda_1 > 0$. Тоді λ_1 можна виключити із системи, у результаті дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} MRS_{xy} = \frac{u'_x(x; y)}{u'_y(x; y)} = \frac{p_x}{p_y}, \\ p_x x = p_y y = R. \end{cases} \quad (9.32)$$

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Яку функцію називають виробничою?
2. Які властивості виробничих функцій?
3. Яка основна задача теорії багаторесурсної фірми?
4. Яка основна мета функціонування фірми?

Приклад 1. Виробнича функція фірми має вигляд:

$$f(x; y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y},$$

де x – обсяг першого, а y – обсяг другого ресурсу. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 5$ ум. гр. од., другого – $p_y = 10$ ум. гр. од., а ціна продукції, яку випускає фірма, $p_0 = 30$ ум. гр. од. Знайти максимальний прибуток при використанні ресурсів.

Якщо виробнича функція задана у грошових одиницях, то вона виражає дохід від використання ресурсів. Запишемо функцію витрат виробництва на використання ресурсів і функцію прибутку, відповідно:

$$C(x; y) = 5x + 10y; \quad \Pi(x; y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 5x - 10y.$$

Знайдемо максимальне значення функції прибутку за умов $x > 0, y > 0$.

Обчислимо частинні похідні функції прибутку:

$$\Pi'_x = 15x^{-1/2}y^{1/3} - 5, \quad \Pi'_y = 10x^{1/2}y^{-2/3} - 10.$$

Запишемо необхідні умови екстремуму та дістанемо систему:

$$\begin{cases} 15x^{-1/2}y^{1/3} - 5 = 0, \\ 10x^{1/2}y^{-2/3} - 10 = 0, \end{cases}$$

розв'язок якої:

$$x = 81 \text{ та } y = 27.$$

Маємо критичну точку $M(81; 27)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\Pi''_{xx} = -\frac{15}{2}x^{-3/2}y^{1/3}, \quad \Pi''_{yx} = \Pi''_{xy} = 5x^{-1/2}y^{-2/3}, \quad \Pi''_{yy} = -(20/3)x^{1/2}y^{-5/3}.$$

Перевіримо достатні умови локального екстремуму. Для цього обчислимо значення частинних похідних другого порядку у точці $M(81; 27)$:

$$A = \Pi''_{xx}(81, 27) = -5/162, \quad B = \Pi''_{xy}(81, 27) = 5/81,$$

$$C = \Pi''_{yy}(81, 27) = -20/81.$$

Визначник:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{5}{162} & \frac{5}{81} \\ \frac{5}{81} & -\frac{20}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{162} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{20}{81} \end{pmatrix} - \left(\frac{5}{81} \right)^2 > 0, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{162} \end{pmatrix} < 0.$$

Отже, точка $M(81; 27)$ – точка локального максимуму, і максимальний прибуток фірми:

$$\Pi_{\max} = \Pi(81; 27) = 135 \text{ ум. гр. од.}$$

5. Основні поняття теорії оптимізації виробництва.

6. Який набір ресурсів називають оптимальним?

7. У чому суть задачі про оптимальний розподіл ресурсів?

Приклад 2. Виробнича функція фірми має вигляд:

$$f(x; y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y},$$

де x – обсяг першого, а y – обсяг другого ресурсу. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 5$ ум. гр. од., другого – $p_y = 10$ ум. гр. од., а ціна продукції, яку випускає фірма, $p_0 = 30$ ум. гр. од.

Через бюджетні обмеження на ресурси можна витратити не більше 600 ум. гр. од. Знайти оптимальний набір ресурсів.

Функція прибутку фірми у цьому випадку має вигляд:

$$\Pi(x; y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 5x - 10y.$$

Набір ресурсів буде оптимальний, якщо функція прибутку набуде максимального значення за умови $5x + 10y \leq 600$.

У попередньому прикладі було знайдено оптимальний розподіл ресурсів за відсутності обмежень. Виявляється, що оптимальні витрати на ресурси:

$$5 \cdot 81 + 10 \cdot 27 = 675 > 600.$$

Можна показати, що в умовах наявності обмежень на ресурси необхідно витратити всю можливу суму.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функції прибутку:

$$\Pi(x; y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 5x - 10y$$

за умов

$$5x + 10y = 600 \text{ або } x + 2y = 120, x > 0, 0 < y \leq 60.$$

Перший спосіб. Із умови зв'язку виразимо змінну $x = 120 - 2y$ та підставимо її до функції прибутку:

$$\Pi(y) = 30\sqrt{120 - 2y} \cdot \sqrt[3]{y} - 5(120 - 2y) - 10y = 30\sqrt{120 - 2y} \cdot \sqrt[3]{y} - 600.$$

Знайдемо похідну:

$$\Pi'(y) = \frac{-30\sqrt[3]{y}}{\sqrt{120 - 2y}} + \frac{10\sqrt{120 - 2y}}{\sqrt[3]{y^2}}.$$

Розв'яжемо рівняння $\Pi'(y) = 0$, дістанемо $y = 24$, тоді $x = 120 - 2 \cdot 24 = 72$. Максимальний прибуток фірми:

$$\Pi_{\max} = \Pi(72; 24) \approx 135,55 \text{ ум. гр. од.}$$

Другий спосіб. За умов

$$5x + 10y = 600, x > 0, 0 < y \leq 60$$

функція прибутку набуває вигляду:

$$\Pi(x; y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 600.$$

Очевидно, що за деякого значення константи C лінія рівня функції $\Pi(x; y) = C$ має перетинатися із прямою $5x + 10y = 600$, яка у спрощеному вигляді виглядає як:

$$x + 2y = 120.$$

Рівняння лінії рівня функції прибутку

$$30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 600 = C$$

можна записати так:

$$y = A/x^{3/2}, \text{ де } A = \frac{C + 600}{30}.$$

Максимального значення A , отже й C , досягають у випадку, за якого відповідна лінія рівня дотикається до прямої $x + 2y = 120$. Оскільки градієнт у кожній точці перпендикулярний до лінії рівня, то за умови максимальності прибутку вектор $(\Pi'_x; \Pi'_y)$ перпендикулярний до прямої $x + 2y = 120$.

Кутовий коефіцієнт цієї прямої:

$$k_1 = -(1/2), \text{ а } k_2 = \Pi'_x / \Pi'_y$$

– кутовий коефіцієнт прямої, на якій лежить вектор $(\Pi'_x; \Pi'_y)$.

Із умови перпендикулярності двох прямих маємо $\Pi'_x / \Pi'_y = 2$, тобто виконується співвідношення:

$$\frac{1/3 x^{1/2} y^{-2/3}}{1/2 x^{-1/2} y^{1/3}} = 2,$$

звідки $x = 2y$. Підставивши його до рівняння прямої $x + 2y = 120$, знаходимо $y = 24$, тоді $x = 120 - 2 \cdot 24 = 72$.

Максимальний прибуток в цьому випадку :

$$\Pi_{\max} = \Pi(72; 24) \approx 135,55 \text{ ум. гр. од.}$$

Приклад 3. Підприємство випускає x одиниць першого виду та y одиниць – другого виду продукції, ціни на які визначають співвідношення $p_x = 50 - x$, $p_y = 60 - 2y$, відповідно.

Функція загальних витрат має вигляд:

$$C(x; y) = 2xy.$$

Знайти максимальний прибуток підприємства, а також відповідні обсяги випуску та ціни продукції.

Для складання математичної моделі задачі знайдемо функцію прибутку підприємства, що визначають як різницю доходу від реалізації продукції та витрат.

Функція доходу від реалізації випускає x та y одиниць двох видів продукції за цінами p_x та p_y становитиме:

$$R(x; y) = p_x \cdot x + p_y \cdot y = (50 - x) \cdot x + (60 - 2y) \cdot y,$$

а функція прибутку:

$$\Pi(x; y) = R(x; y) - C(x; y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy.$$

Отже, задача зводиться до дослідження функції прибутку

$$\Pi = \Pi(x; y) \rightarrow \max, x \geq 0, y \geq 0$$

на екстремум.

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\Pi'_x = 50 - 2x - 2y, \quad \Pi'_y = 60 - 4y - 2x.$$

Похідні визначені у всій області визначення функції, тому серед критичних будуть лише стаціонарні точки, які знаходимо з необхідних умов $\Pi'_x = 0, \quad \Pi'_y = 0$.

Складаємо систему:

$$\begin{cases} 50 - 2x - 2y = 0, \\ 60 - 4y - 2x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 25, \\ x + 2y = 30, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, дістанемо стаціонарну точку $M(20;5)$, що за теоремою про необхідні умови екстремуму є "підозрілою" на точку екстремуму.

Скористуємось теоремою про достатні умови екстремуму функції двох змінних. Знаходимо значення частинних похідних другого порядку у точці $M(20;5)$:

$$\Pi''_{xx} = -2, \quad \Pi''_{xy} = \Pi''_{yx} = -2, \quad \Pi''_{yy} = -4,$$

та обчислюємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0, \quad A = -2 < 0.$$

Отже, стаціонарна точка $M(20;5)$ є точкою максимуму функції прибутку, максимальний прибуток підприємство отримає при випуску 20 одиниць першого виду та 5 одиниць – другого виду продукції і становитиме:

$$\Pi_{\max} = \Pi(20;5) = 650 \text{ гр. од.}$$

При цьому ціна одиниці першого виду продукції – $p_x = 50 - 20 = 30$ гр. од., а другого – $p_y = 60 - 2 \cdot 5 = 50$ гр. од.

8. Яку виробничу функцію називають функцією Кобба-Дугласа?

9. Який зв'язок існує між середньою та граничною продуктивністю капіталу (праці) у загальному випадку та у випадку виробничої функції Кобба–Дугласа?

Приклад 4. Виробництво деякого підприємства характеризує виробнича функція Кобба–Дугласа:

$$q = q(K; L) = AK^\alpha L^\beta, \quad A > 0, \alpha + \beta \leq 1,$$

де K – обсяг основних фондів, L – обсяг трудових ресурсів (кількість робітників). Визначити параметри виробничої функції Кобба–Дугласа A, α, β , якщо відомо, що $K = 25 \cdot 10^8$, $L = 1000$, і для збільшення випуску продукції на 5 % необхідно збільшити фонди на 10 % або кількість робітників – на 15 %. На момент дослідження один робітник за місяць виробляє продукцію на 100 000 грн, загальна кількість робітників на підприємстві – 1000 осіб.

Оскільки часткові еластичності

$$E_K(q) = \alpha, \quad E_L(q) = \beta,$$

то з умови задачі випливає, що:

$$\alpha = 5/10 = 1/2, \quad \beta = 5/15 = 1/3.$$

Тоді запишемо виробничу функцію:

$$q(K; L) = AK^{1/2}L^{1/3}.$$

Застосуємо інші дані задачі та отримаємо рівність:

$$100\,000 = A(25 \cdot 10^8)^{1/2} (1000)^{1/3} = A \cdot 5 \cdot 10^5,$$

звідки $A = 200$. Остаточно маємо:

$$q(K; L) = 200K^{1/2}L^{1/3}.$$

Приклад 5. Фірма вирішила асигнувати 100 000 грн на виробництво деякої продукції. Нехай середня заробітна плата у фірмі становить 2000 грн, а вартість одиниці сировини – 1000 грн.

Визначити, яку кількість робітників L та яку кількість сировини S треба придбати фірмі для отримання найбільшого обсягу продукції q , якщо відомо, що він прямо пропорційний їхньому добутку із коефіцієнтом пропорційності $k = 5$.

Запишемо виробничу функцію:

$$q(K; S) = 5 \cdot K \cdot S.$$

Маємо умови зв'язку:

$$2000K + 1000S = 100\,000, \quad x > 0, y > 0.$$

Першу умову перепишемо у вигляді:

$$2K + S = 100 \text{ або } 2K + S - 100 = 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(K, S, \lambda) = 5K \cdot S + \lambda(2K + S - 100).$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$L'_K = 5S + 2\lambda, \quad L'_S = 5K + \lambda, \quad L'_\lambda = 2K + S - 100$$

і критичні точки функції Лагранжа з умов:

$$L'_K = 0, \quad L'_S = 0, \quad L'_\lambda = 0.$$

У нашому прикладі дістанемо систему:

$$\begin{cases} 5S + 2\lambda = 0, \\ 5K + \lambda = 0, \\ 2K + S = 100. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, застосовуючи формули Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_K = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 100 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 500;$$

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 100 & 0 \end{vmatrix} = 1000; \quad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 100 \end{vmatrix} = -2500,$$

тоді

$$K = \frac{500}{20} = 25; \quad S = \frac{1000}{20} = 50; \quad \lambda = -\frac{2500}{20} = -125.$$

Критична точка $M(25; 50; -125)$.

Знаходимо частинні похідні та диференціал другого порядку:

$$L''_{KK} = L''_{SS} = 0, \quad L''_{KS} = 5; \quad d^2L = 10dKdS.$$

Виразимо dS через dK за допомогою рівняння зв'язку:

$$2dK = -dS.$$

Підставимо до $d^2L = 10 \cdot dK \cdot dS$, дістанемо:

$$d^2L = -2dK^2 < 0.$$

Тому в критичній точці $M(25; 50; -125)$ функція досягає умовного максимуму та

$$q_{\max} = q(25; 50) = 5 \cdot 25 \cdot 50 = 6250 \text{ (грн)}.$$

Приклад 6. Задано виробничу функцію, що залежить від двох змінних $q(x; y) = 5xy$, де x – витрати основних фондів, а

y – витрати людської праці та відповідні ціни на ресурси $p_x = 10$ ум. гр. од. та $p_y = 8$ ум. гр. од. Знайти значення величин x та y , які забезпечують мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції $q_0 = 1600$.

За умовою задачі маємо умови зв'язку:

$$5x - 1600 = 0, x > 0, y > 0.$$

Виразимо змінну y із першої умови зв'язку:

$$y = 320/x.$$

Запишемо функцію витрат фірми:

$$C(x; y) = 10x + 8y.$$

Підставивши значення $y = 320/x$ до функції витрат, дістанемо функцію однієї змінної:

$$C(x) = 10x + 8 \cdot (320/x).$$

Тепер застосуємо стандартний метод визначення мінімального значення функції. Знайдемо похідну функції витрат:

$$C'(x) = 10 - 2560/x^2,$$

Критичні точки визначаємо із необхідної умови екстремуму:

$$10 - 2560/x^2 = 0,$$

звідки $10x^2 = 2560$. Дістанемо:

$$x_1 = -16, x_2 = 16.$$

Із економічних міркувань $x_1 = -16$ – сторонній корінь, тому критична точка $M(16; 20)$.

Оскільки $C''(x) = 5120x^{-3}$ і $C''(16) > 0$, то у точці $M(16; 20)$ функція досягає мінімуму. Знайдемо мінімальні витрати:

$$C_{\min} = C(16; 20) = 320 \text{ (ум. гр. од.)}.$$

10. Які властивості повинна мати функція корисності?

11. Які функції називають функціями попиту споживача?

12. Які лінії називають кривими байдужості?

Приклад 7. Задано $u(x; y) = 2\ln(x - 1) + 3\ln(y - 1)$ – функцію корисності. Ціни одиниці товарів x та y , відповідно:

$$p_x = 8 \text{ ум. гр. од. та } p_y = 16 \text{ ум. гр. од.}$$

На придбання цих товарів можна витратити 1000 ум. гр. од. Визначити, як розподілити цю суму між двома товарами x та y , щоб корисність придбання була найбільшою.

Розглянемо лінії рівні функції корисності $u(x; y) = C$. Це лінії, рівняння яких мають вигляд:

$$2\ln(x-1) + 3\ln(y-1) = C.$$

Використовуючи властивості логарифмів, дістанемо $\ln(x-1)^2(y-1)^3 = C$, звідки:

$$(y-1)^3 = \frac{A}{(x-1)^2}, \text{ де } A = e^C.$$

Отже, лініями рівня є графіки функцій:

$$y = \frac{\sqrt[3]{A}}{(x-1)^{2/3}} + 1.$$

У точці $(x; y)$, де функція корисності досягає максимального значення, лінія рівня дотикається до прямої

$$8x + 16y = 1000 \text{ або } x + 2y = 125$$

і градієнт перпендикулярний до цієї лінії. Градієнт функції корисності у довільній точці:

$$\text{gradu} = \left(\frac{2}{x-1}; \frac{3}{y-1} \right).$$

Кутовий коефіцієнт прямої:

$$k_1 = -(1/2).$$

Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих, маємо:

$$\text{gradu} = \frac{3(x-1)}{2(y-1)} = 2 \text{ або } 3x - 4y = -1.$$

Знайдемо точку перетину прямих, яка є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y = 125, \\ 3x - 4y = -1, \end{cases}$$

звідки $x = 49,8$; $y = 25,4$. Отже, оптимальний розподіл споживання товарів знайдено.

13. У чому суть задачі, що пов'язана із розподілом товару одного виду на різних ринках із різним попитом?

14. Якою є умова цінової дискримінації?

Приклад 8. Фірма продає товар на трьох ринках. Обсяги товару – x_1, x_2, x_3 , ціни на ці товари – $p_1 = 50 - 2x_1$, $p_2 = 70 - 2x_2$,

$p_3 = 200 - 5x_3$, відповідно, а функція витрат фірми має вигляд $C = 100 + 10(x_1 + x_2 + x_3)$. Знайти максимальний прибуток фірми.

Функцію прибутку фірми виражають формулою:

$$\Pi(x_1; x_2; x_3) = x_1(50 - 2x_1) + x_2(70 - 2x_2) + x_3(200 - 5x_3) - 100 - 10(x_1 + x_2 + x_3),$$

тоді

$$\Pi(x_1; x_2; x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 40x_1 + 60x_2 + 200x_3 - 100.$$

Запишемо необхідні умови локального екстремуму, які приводять до системи рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 + 40 = 0, \\ -4x_2 + 60 = 0, \\ -10x_3 + 200 = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, дістанемо:

$$x_1 = 10, x_2 = 15, x_3 = 20.$$

Отже, точка $M(10; 15; 20)$ – критична точка.

Знайдемо значення частинних похідних другого порядку у точці $M(10; 15; 20)$:

$$\Pi''_{x_1^2} = -4, \Pi''_{x_2^2} = -4, \Pi''_{x_3^2} = -10, \Pi''_{x_i, x_j} = 0, i \neq j.$$

Обчислимо головні мінори визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

Після обчислень, дістанемо:

$$\Delta_1 = -4, \Delta_2 = 16, \Delta_3 = -160.$$

Знаки головних мінорів чергуються, починаючи зі знаку мінус.

За критерієм Сильвестра $M(10; 15; 20)$ – точка максимуму.

Дістанемо розподіл товару між ринками, відповідно:

• за обсягами $x_1 = 10, x_2 = 15, x_3 = 20$ од.,

• за цінами $p_1 = 30, p_2 = 40, p_3 = 100$.

Відповідні еластичності:

$$|E_1| \approx 0,6, |E_2| \approx 0,75, |E_3| \approx 0,9$$

задовольняють принцип цінової дискримінації. Що меншою є величина $|E_i|$ i -го ринку, то вищою має бути ціна товару на ньому. Отже, $\Pi_{\max} = 2550$ ум. гр. од.

Розділ 10

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

10.1. Первісна та невизначений інтеграл

10.1.1. Первісна

Основна задача диференціального числення – визначення від заданої функції $y = f(x)$ її похідної. Багато питань математичного та економічного аналізу приводять до оберненої задачі: для заданої функції $y = f(x)$ знайти таку функцію $y = F(x)$, похідна якої дорівнювала б $y = f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. В економічних дослідженнях за граничними характеристиками процесів потрібно відтворити загальні властивості.

Приклад 10.1. Динаміка формування оборотних фондів – це процес зміни у часі, який можна розглядати як неперервний. Нехай функція $K = K(t)$ виражає залежність обсягу оборотних фондів від часу t , тоді похідна за часом $K'(t)$ – швидкість формування оборотних фондів, яку можна розглядати як швидкість потоку грошових фондів $I = I(t)$. Якщо задано функцію швидкості потоку, то виникає задача знаходження функції оборотних фондів, яка зводиться до операції відтворення функції за її похідною.

Знаходження для функції $y = f(x)$ усіх її первісних називають *операцією інтегрування функції*, а розділ математики, що вивчає методи знаходження функції за її похідною, – *інтегральним численням*.

Означення. Диференційовану функцію $y = F(x)$ називають *первісною* для функції $y = f(x)$ на проміжку X , якщо для довільного $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад 10.2. Нехай $f(x) = \cos x$, тоді за первісну можна взяти функцію $F(x) = \sin x$, оскільки $(\sin x)' = \cos x$.

Приклад 10.3. Знайти первісну функції $f(x) = x^2$.

Очевидно, що шуканою функцією буде $F_1(x) = x^3/3$, оскільки

$$F_1'(x) = (x^3/3)' = (x^3)'/3 = (3x^2)/3 = x^2 \text{ для } \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Зауважимо, що у прикладі за шукану функцію можна взяти функцію $F_2(x) = (x^3/3) + 10$, оскільки $F_2'(x) = x^2$, або функцію $F_3(x) = (x^3/3) + 100$, оскільки $F_3'(x) = x^2$.

Таким чином, функції $y = F_1(x)$, $y = F_2(x)$, $y = F_3(x)$ є первісними для функції $y = x^2$, де $x \in (-\infty; +\infty)$.

Наведений приклад показує, що **операція знаходження первісної неоднозначна**. Тому виникає питання: якщо функція $y = f(x)$ має первісну, то скільки може бути первісних, і як вони відрізнятимуться?

Первісних для заданої функції є безліч. Цей факт можна пояснити: якщо функція $y = F(x)$ є первісною для функції $y = f(x)$, то й функція $y = F(x) + C$, де C – довільна стала, яка теж є первісною (похідна від сталої дорівнює нулю). Ми дали відповідь на першу частину запитання. Для відповіді на другу частину – доведемо наступну теорему.

ТЕОРЕМА

(загальний вигляд первісної)

Якщо функція $y = F(x)$ є первісною

для функції $y = f(x)$ на проміжку X ,

то всі первісні для функції $y = f(x)$ мають вигляд:

$y = F(x) + C$, де $C = \text{const}$.

Доведення. Нехай $y = F(x)$ – первісна для функції $y = f(x)$. Тоді виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Розглянемо функцію $y = \Phi(x) = F(x) + C$, тоді $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$, а це означає, що функція $y = \Phi(x)$ також є первісною для функції $y = f(x)$.

Навпаки, якщо функції $y = F(x)$ та $y = \Phi(x)$ – дві первісні для функції $y = f(x)$, то $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = 0$, тому $\Phi(x) - F(x) = C$, $C = \text{const}$, звідки $\Phi(x) = F(x) + C$, що й потрібно було довести.

Таким чином, будь-які дві первісні для функції $y = f(x)$ відрізняються на сталу. Ця теорема дозволяє ввести основне поняття інтегрального числення – невизначеного інтеграла.

Означення. Множину всіх первісних для функції $y = f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** і позначають:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (10.1)$$

У лівій частині (10.1) символ $\int$ є знаком інтеграла; $f(x)$ – **підінтегральна функція**; x – **змінна інтегрування**, $f(x)dx$ – **підінтегральний вираз**. У правій частині функція $y = F(x)$ є однією з первісних для функції $y = f(x)$, $C = \text{const}$ – довільна стала.

10.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:*

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x). \quad (10.2)$$

Диференціюємо ліву та праву частини (10.2):

$$\left(\int f(x)dx \right)' dx = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx. \quad (10.3)$$

За означенням диференціала дістанемо:

$$d \left(\int f(x)dx \right) = \left(\int f(x)dx \right)' dx = f(x)dx.$$

3. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції із точністю до довільної сталої:*

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (10.4)$$

Оскільки $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, то

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

4. *Сталий множник можна винести за знак невизначеного інтеграла:*

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0. \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Знайдемо похідну від функції } g(x) &= \int \alpha f(x) dx - \alpha \int f(x) dx: \\ g'(x) &= \left(\int \alpha f(x) dx - \alpha \int f(x) dx \right)' = \left(\int \alpha f(x) dx \right)' - \alpha \left(\int f(x) dx \right)' = \\ &= \alpha f(x) - \alpha f(x) = 0. \end{aligned}$$

За наслідком із теореми Лагранжа є таке число C , що $g(x) = C$, тому $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx + C$.

Оскільки сам невизначений інтеграл можна знайти із точністю до сталого множника, то в (10.5) стали можна опустити.

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \quad (10.6)$$

Нехай функції $y = F(x)$, $y = G(x)$ та $y = [F(x) \pm G(x)]$ є первісними для функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$ та $y = f(x) \pm g(x)$, тоді:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \pm \int g(x) dx &= [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = \\ &= [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)] dx. \end{aligned}$$

Зауваження 1. При формулюванні властивостей та їх доведенні ми припускали, що всі функції, які входять до відповідних рівностей, мають первісні.

Зауваження 2. Виходячи з означення невизначеного інтеграла, рівності необхідно розуміти із точністю до довільної сталої. Іншими словами, невизначені інтеграли рівні тоді й тільки тоді, коли похідні від них рівні.

10.1.3. Інтеграли від основних елементарних функцій

Раніше ми отримали таблицю похідних основних елементарних функцій. Наведена далі таблиця невизначених інтегралів є обчислювальним апаратом інтегрального числення. Частина формул безпосередньо впливає із означення інтегрування як операції, що обернена до диференціювання. Справедливість усіх формул легко перевірити шляхом диференціювання.

Таблиця інтегралів

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$	2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$	4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$	9'. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$	10'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C.$	11'. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right + C.$	12'. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C.$

Наведені інтеграли називають табличними. Як було встановлено раніше, операція диференціювання не виводить функцію із класу елементарних функцій. Інтеграли від деяких елементарних функцій уже не будуть елементарними функціями. Вкажемо деякі з них:

інтеграл Пуассона

$$\int e^{-x^2} dx;$$

інтеграли Френеля

$$\int \sin(x^2) dx, \int \cos(x^2) dx;$$

інтегральний логарифм

$$\int \frac{dx}{\ln x}, x > 0, x \neq 1;$$

інтегральний синус

$$\int \frac{\sin x}{x} dx;$$

інтегральний косинус

$$\int \frac{\cos x}{x} dx.$$

Кожен з цих інтегралів – функція, що не є елементарною. Вони відіграють важливу роль. Наприклад, інтеграл Пуассона є одним з основних у теорії ймовірностей і статистиці.

Зазвичай інтеграли, з якими доводиться мати справу у різних застосуваннях, не виражають елементарні функції (або, як кажуть, "інтеграли, що не беруться"). Але існує достатньо добре розроблений математичний апарат наближених формул за допомогою елементарних функцій, а також методи наближених розрахунків, що дозволяють із довільною точністю оцінити та обчислити "інтеграли, що не беруться".

10.2. Основні методи інтегрування

Зазначимо, що універсального методу інтегрування функцій не існує. Але існують класичні або так звані основні методи інтегрування: *безпосереднього інтегрування*, *підстановки (заміни)* та *інтегрування частинами*.

10.2.1. Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування базується на застосуванні табличних інтегралів та основних властивостей невизначеного інтеграла.

Алгоритм методу безпосереднього інтегрування:

Крок 1. Проаналізувати, чи є інтеграл табличним, чи підінтегральний вираз можна за допомогою алгебраїчних перетворень звести до табличного. Виконати відповідні дії.

Крок 2. Застосувати відповідні формули з таблиці інтегралів. Розглянемо приклади безпосереднього інтегрування.

Приклад 10.4. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{x^2}} &= \int (x^{1/3} + 2x^{-(2/3)})dx = \frac{x^{(1/3)+1}}{(1/3)+1} + 2 \frac{x^{-(2/3)+1}}{-(2/3)+1} + C = \\ &= (3/4)x^{3/4} + 6\sqrt[3]{x} + C.\end{aligned}$$

Приклад 10.5. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \\ &= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctg x + C.\end{aligned}$$

Приклад 10.6. Обчислити інтеграл:

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Приклад 10.7. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int (2^x + 5^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C. \end{aligned}$$

Приклад 10.8. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9x^2 - 1} &= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 - (1/3)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2 \cdot (1/3)} \ln \left| \frac{x - (1/3)}{x + (1/3)} \right| + C = \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x - 1}{3x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 10.9. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int (\sin(x/2) + \cos(x/2))^2 dx &= \\ &= \int (\sin^2(x/2) + 2\sin(x/2) \cdot \cos(x/2) + \cos^2(x/2)) dx = \\ &= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C. \end{aligned}$$

Зауваження. Ураховуючи означення невизначеного інтеграла, у наведених прикладах вирази, які стоять в правих частинах, залежать від довільної сталої $C = \text{const}$, оскільки алгебраїчна сума кількох сталих є також сталою.

10.2.2. Метод заміни змінної

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування (підстановка) дає змогу звести знаходження інтеграла до знаходження табличного інтеграла, коли заданий інтеграл не є табличним. Метод базується на теоремі.

ТЕОРЕМА

Нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційована на проміжку T , $\varphi: T \rightarrow X$, а функція $y = f(x)$ визначена на проміжку X і має на ньому первісну $y = F(x)$.

Тоді на проміжку T складна функція $y = F(\varphi(t))$ є первісною для функції $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, тобто має місце формула:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C. \quad (10.7)$$

Доведення. За правилом диференціювання складної функції:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi_t'(t) = f(\varphi(t)) \varphi_t'(t), \text{ де } t \in T.$$

Отже, функція $y = F(\varphi(t))$ є первісною для функції $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Таким чином:

$$F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C) \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Формулу (10.7) називають **формулою заміни змінної** у невизначеному інтегралі.

Наслідок. Має місце формула:

$$\int f(ax+b) dx = (1/a)F(ax+b) + C. \quad (10.8)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \int f(ax+b) dx &= \left. \begin{array}{l} ax+b=t \\ a dx=dt \\ dx=(1/a)dt \end{array} \right| = (1/a) \int f(t) dt = \\ &= (1/a)F(t) + C = (1/a)F(ax+b) + C. \end{aligned}$$

Алгоритм методу підстановки:

Крок 1. Обираємо вид нової змінної, робимо заміну (напр., $t = \varphi(x)$) та обчислюємо диференціали цієї та нової змінної.

Крок 2. Переходимо у підінтегральному виразі до нової змінної t . Слід зауважити, що підінтегральний вираз повністю має бути виражений через змінну t .

Крок 3. Обчислюємо невизначений інтеграл за новою змінною інтегрування t , застосовуючи відповідні формули з таблиці інтегралів.

Крок 4. Здійснюємо зворотну заміну та повертаємося до змінної x .

Розглянемо приклади, в яких за допомогою ведення нової змінної (підстановки) інтеграл зводять до табличного, а потім здійснюють зворотну заміну.

Приклад 10.10. Обчислити інтеграл $\int \sqrt[3]{3-x} dx$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{3-x} dx &= \left. \begin{array}{l} 3-x=t^3 \\ -dx=3t^2 dt \end{array} \right| = \\ &= -\int t \cdot 3t^2 dt = -3 \int t^3 dt = -\frac{3}{4} t^4 + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{(3-x)^4} + C. \end{aligned}$$

Приклад 10.11. Обчислити інтеграл $\int x^2 e^{-x^3} dx$.

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = \left| \begin{array}{l} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -(1/3)dt \end{array} \right| = -(1/3) \int e^t dt =$$

$$= -(1/3)e^t + C = -(1/3)e^{-x^3} + C.$$

Приклад 10.12. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C.$$

Приклад 10.13. Обчислити інтеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -(1/2)dt \end{array} \right| = -(1/2) \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= (-1/2) \int t^{-(1/2)} dt = (-1/2) \frac{t^{1/2}}{(1/2)} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

10.2.3. Інтегрування деяких видів ірраціональних і трансцендентних функцій

Ірраціональні та трансцендентні функції інтегрують в елементарних функціях тільки у деяких випадках. Найчастіше застосовують такі види інтегралів від ірраціональних функцій, які виражені через елементарні. Розглянемо випадки, за яких заміна змінної дозволяє звести інтеграли від ірраціональних функцій до інтегралів від раціональних функцій.

Позначимо $R(u,v)$ – раціональну функцію двох змінних, що побудована із застосуванням над аргументами дій додавання, віднімання, множення та ділення. Наприклад,

$$R(u,v) = u^2 + 2v^5, \quad R(u,v) = \frac{u+3v}{2-u^2}.$$

Інтеграли від ірраціональних і трансцендентних функцій зводять до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановок. Наведемо найбільш уживані підстановки для певних інтегралів.

I. Інтеграли виду $\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \dots, x^{p_n/q_n}) dx$.

Підстановка: $x = t^n$, де n – найменше спільне кратне чисел $q_1, q_2, \dots, q_n$.

II. Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, де $ad - cb \neq 0$.

Підстановка: $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

III. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

Підстановки Ейлера: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}$, $a > 0$,

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$, $c > 0$,

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm(x - x_1)t = \pm(x - x_2)t$,

де x_1, x_2 – різні дійсні корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

IV. Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Універсальна тригонометрична підстановка:

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

V. Інтеграли виду $\int R(e^x) dx$.

Підстановка $t = e^x$.

VI. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$.

Підстановка: $x = at \operatorname{tg} t$ або $x = a \operatorname{ctg} t$.

VII. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$.

Підстановка: $x = a \sin t$ або $x = a \cos t$.

VIII. Інтеграли виду $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Підстановка: $t = \operatorname{tg} x$.

IX. Інтеграли виду

$$\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx, \int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx, \int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$$

за допомогою відомих тригонометричних формул можна розкласти в суму інтегралів.

Приклади обчислення таких інтегралів наведено наприкінці цього розділу.

10.2.4. Метод інтегрування частинами

ТЕОРЕМА

Нехай функції $y = u(x)$, $y = v(x)$ визначені та диференційовані на проміжку X , крім того, на цьому проміжку існує первісна для функції $v'(x) \cdot u(x)$. Тоді на проміжку X існує первісна для функції $v'(x) \cdot u(x)$, причому справедлива формула:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx. \quad (10.9)$$

Формулу (10.9) називають **формулою інтегрування частинами** у невизначеному інтегралі.

Доведення. Функція $y = u(x)v(x)$ є однією із первісних функцій $y = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ на проміжку X , оскільки, за правилом диференціювання добутку двох функцій, маємо:

$$d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x).$$

Узявши від обох частин останньої рівності інтеграл, дістанемо:

$$\int d(u(x)v(x)) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x),$$

звідки маємо:

$$u(x)v(x) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x) \text{ або}$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Остання формула еквівалентна (10.10).

Теорему доведено.

Алгоритм методу інтегрування частинами:

Крок 1. Підінтегральний вираз розбивають на два множники. Одну частину підінтегрального виразу позначають u , а те, що залишилось, приймають за dv .

Крок 2. Знаходять диференціал du функції $u=u(x)$, а за диференціалом $dv(x)$ шляхом інтегрування відновлюють одну із первісних функцій $v=v(x)$.

Крок 3. Застосовують (10.9) інтегрування частинами.

Можна дати такі **рекомендації для застосування (10.9)**.

I. Інтеграли виду

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx, \int P_n(x)\cos(\alpha x)dx, \int P_n(x)\sin(\alpha x)dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня. У таких випадках позначають $u(x)=P_n(x)$, а вирази $e^{\alpha x}dx$, $\cos(\alpha x)dx$ або $\sin(\alpha x)dx$ приймають за dv .

Приклад 10.14.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & e^x dx = dv \\ du = 2x dx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & e^x dx = dv \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = \\ &= x^2 e^x - 2e^x x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

II. Інтеграли виду

$$\begin{aligned} \int P_n(x) \ln^n x dx, \quad \int P_n(x) \arcsin x dx, \quad \int P_n(x) \operatorname{arccotg} x dx. \\ \int P_n(x) \arccos x dx, \quad \int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx. \end{aligned}$$

У таких випадках через u позначають $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, $\ln x$, а через $dv=P_n(x)dx$, відповідно.

Приклад 10.15.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = dx/x & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Приклад 10.16.

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Іноді метод інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів.

III. Інтеграли виду $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$, $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$.

У результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами дістанемо лінійне рівняння щодо заданого інтеграла.

Приклад 10.17.

$$\begin{aligned} I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & dv = \cos \beta x \, dx \\ du = \alpha e^{\alpha x} dx & v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \sin \beta x - \int \frac{1}{\beta} \sin \beta x \cdot \alpha e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & dv = \sin \beta x \, dx \\ du = \alpha e^{\alpha x} dx & v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right| = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \sin \beta x - \\ &= -\frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x - \int \left(-\frac{1}{\beta} \cos \beta x \right) \cdot \alpha e^{\alpha x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx. \end{aligned}$$

Таким чином, $I = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I$;

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) I = e^{\alpha x} \left(\frac{1}{\beta} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta x \right), \quad \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta^2} I = e^{\alpha x} \left(\frac{1}{\beta} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta x \right),$$

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2 + \alpha^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + C.$$

10.2.5. Рекурентні формули

Іноді інтегрування частинами дозволяє одержати співвідношення між невизначеним інтегралом, що містить степінь деякої функції, та аналогічним інтегралом, але з меншим показником степеня тієї самої функції. Подібні співвідношення називають **рекурентними формулами**.

Приклад 10.18. Вивести рекурентну формулу для інтеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^n} = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx. \end{aligned}$$

В останньому інтегралі

$$\begin{aligned} u &= x, \quad du = dx, \quad dv = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} dx, \\ v &= \int \frac{x}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2} \int t^{-n} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} + C. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами, маємо:

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{(2n-2)} = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + I_{n-1} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали формулу:

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \quad (10.10)$$

10.3. Визначений інтеграл

10.3.1. Інтегральні суми та їх основні властивості

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $[a; b]$ ($a < b$).

Означення. Множину $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ називають **подрібненням** або **розбиттям** замкнутого проміжку $[a; b]$. Відрізки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ – проміжки подрібнення; максимальну довжину відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1, n}$ – **рангом подрібнення** T_n і позначають через $\lambda(T_n)$.

Означення. Послідовність подрібнень T_n проміжку $[a; b]$ називають **нормальною**, якщо відповідна послідовність рангів $\lambda(T_n)$ прямує до нуля, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T_n) = 0$.

Приклад 10.19. Множина $T = \{1 < 1, 2 < 1, 4 < 1, 7 < 2\}$ – подрібнення проміжку $[1; 2]$ на чотири частини; його ранг $\lambda(T) = 0,3$.

Приклад 10.20. Множина $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, де

$$x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{b-a}{n}$$

є подрібненням проміжку $[a; b]$ на n однакових за довжиною проміжків. Ранг подрібнення $\lambda(T_n) = \frac{b-a}{n}$. T_n – нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a; b]$, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T_n) = 0$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена та обмежена на відрізку $[a; b]$; $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ – подрібнення $[a; b]$ на проміжки $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$.

Позначимо:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} E(f) \text{ та } M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} E(f),$$

де $E(f)$ – множина значень функції $y = f(x)$.

Означення. Суму

$$S_T = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad (10.11)$$

називають **нижньою інтегральною сумою**, а суму

$$S^T = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (10.12)$$

– **верхньою інтегральною сумою**, які пов'язані із подрібненням T_n відрізка $[a; b]$.

Геометричну ілюстрацію поняття нижньої і верхньої інтегральних сум подано на рис. 10.1 та 10.2. В обох випадках це площі фігур, що складені із прямокутників.

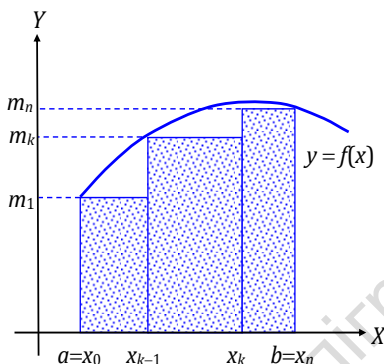


Рис. 10.1

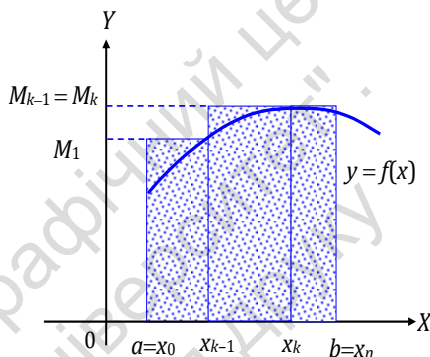


Рис. 10.2

Означення. Якщо $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ – подрібнення проміжку $[a; b]$, а $y = f(x)$ – визначена на $[a; b]$ функція, точки $c_1 \in [x_0, x_1]$ та $c_2 \in [x_1, x_2], \dots, c_n \in [x_{n-1}, x_n]$ – довільні точки проміжків подрібнення T_n , а $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – довжина відрізка $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$, то

$$S(T_n) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k =$$

$$= c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_{n-1}) \quad (10.13)$$

називають **інтегральною сумою функції** $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Зрозуміло, що так визначена інтегральна сума, загалом кажучи, залежить від вибору точок c_k , $k = \overline{1, n}$.

Нехай T_n – нормальна послідовність подрібнень відрізка $[a; b]$, а функція $y = f(x)$ визначена на $[a; b]$.

Позначимо $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми (10.13) при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ані від вибору подрібнення T_n , ані від вибору проміжних точок $c_k, k = \overline{1, n}$, то її називають **визначеним інтегралом** функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k. \quad (10.14)$$

(читають: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс).

Наведене означення інтеграла належить німецькому математику Ріману. Символ інтеграла був введений німецьким математиком Лейбніцем наприкінці XIX ст. Цей символ є де-що деформованою літерою S (перша літера слова *summa*). Термін "інтеграл" (від лат. *integer* – цілий) запропонований наприкінці XVII ст. швейцарським математиком Бернуллі.

Означення. Якщо границя (10.14) існує, то функцію $y = f(x)$ називають **інтегрованою** на проміжку $[a; b]$ за Ріманом (або просто інтегрованою). Числа a та b називають відповідно **нижньою** та **верхньою межами інтегрування**. Функцію $y = f(x)$ називають **підінтегральною функцією**, вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**; x – **змінною інтегрування**, $[a; b]$ – **проміжком інтегрування**.

ТЕОРЕМА

(ознака існування визначеного інтеграла)

Якщо $y = f(x)$ – визначена та неперервна або обмежена на відрізку $[a; b]$ функція,

то існують скінченна границя (10.14) інтегральної суми та визначений інтеграл від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

10.3.2. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано функцію:

$$y = f(x) \geq 0.$$

Фігуру $aABb$ (рис. 10.3), що обмежена графіком функції $y = f(x)$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$, називають **криволінійною трапецією**.

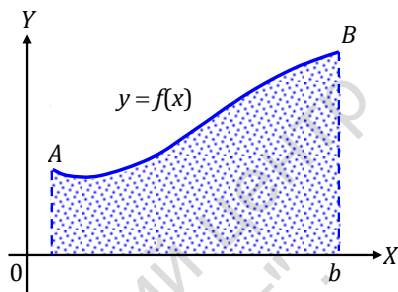


Рис. 10.3

Необхідно знайти площу криволінійної трапеції $aABb$.

Оскільки лінія AB – довільна крива, то спочатку знайдемо наближено площу S криволінійної трапеції $aABb$. Із цією метою розіб'ємо відрізок $[a; b]$ за допомогою довільно обраних точок на n частинних відрізків:

$$[x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n},$$

тобто розглянемо розбиття відрізка $[a; b]$ на відрізки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. На кожному з них виберемо довільну точку $c_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ і побудуємо прямокутники, основою яких є відрізки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, а висота дорівнює $f(c_k), k = \overline{1, n}$ (рис. 10.4).

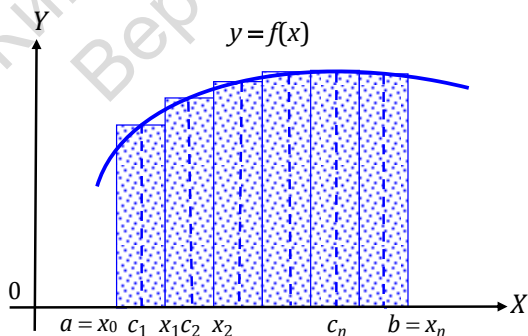


Рис. 10.4

Із рисунку видно, що шукана площа наближено дорівнює сумі площ прямокутників, тобто:

$$S \approx \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k,$$

де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – довжина відрізка $[x_{k-1}, x_k]$. Очевидно, якщо $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$, то подрібнення відрізка $[a; b]$ ущільнюватиметься, і всі $\Delta x_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Отже, площа криволінійної трапеції чисельно дорівнює границі інтегральних сум, якщо максимальна довжина частинних сегментів:

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0: S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k,$$

тобто
$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (10.15)$$

Отримано **геометричний зміст визначеного інтеграла**: визначений інтеграл чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aABb$, яка обмежена графіком функції $y = f(x) \geq 0$ та відрізками прямих $y=0$, $x=a$, $x=b$ (див. рис. 10.3).

Задача про роботу змінної сили

Нехай уздовж осі OX діє сила $f = f(x)$, напрямком якої сталий і збігається із напрямком осі OX . Крім того, сила неперервно змінюється за величиною. Під дією сили $f = f(x)$ матеріальна точка переміститься вздовж осі з точки a до точки b . Потрібно обчислити роботу цієї сили на шляху (відрізьку) $[a; b]$.

Відомо, що якщо сила не змінюється $y = f(x) = \text{const}$ і діє у напрямку переміщення, то робота A дорівнює добутку сили на величину переміщення $A = f(b-a)$. Але сила змінна, тому здійснимо подрібнення відрізка $[a; b]$ за допомогою довільно обраних точок на n частинних відрізків:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

і припустимо, що кожен із відрізків настільки малий, що сила $f = f(x)$ на відрізьку майже стала (усереднена сила).

На кожному із відрізків виберемо довільну точку:

$$c_k \in [x_{k-1}; x_k], k = \overline{1, n}.$$

Робота, що виконана усередненою силою на відрізку $[x_{k-1}, x_k]$:

$$f(c_k) \Delta x_k, k = \overline{1, n},$$

а всю роботу на відрізку $[a; b]$ обчислюють наближено:

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k.$$

Отже, робота сили $f = f(x)$ на шляху $[a; b]$ чисельно дорівнює границі інтегральних сум, якщо максимальна довжина частинних сегментів $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$: $A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$:

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (10.16)$$

Отримано **фізичний зміст визначеного інтеграла**, що чисельно дорівнює роботі сили $f = f(x)$, яка діє вздовж відрізка $[a; b]$.

Задача про обсяг продукції

Нехай деяке підприємство або фірма з інтенсивністю (продуктивністю) праці $f = f(t)$ виробляє продукцію. Варто знайти її обсяг q , що вироблений за проміжок часу $[0; T]$.

Очевидно, якщо інтенсивність виробництва продукції не змінюється ($f = f(t) = \text{const}$), то обсяг продукції q , що вироблена за проміжок часу $[0; T]$, обчислюють за формулою:

$$q = f \cdot T.$$

У загальному випадку справедливе наближене значення обсягу q продукції:

$$q \approx \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta t_k,$$

де $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ - довжини відрізків подрібнення відрізка $[0; T]$ на частинні відрізки $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n}$ і $c_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n}$.

Якщо $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k \rightarrow 0$, то кожен із доданків суми є все

більш точним, тому шукану величину обсягу продукції (за умовою вона існує) обчислюють за формулою:

$$q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \int_0^T f(x) dx. \quad (10.17)$$

Отже, отримано **економічний зміст визначеного інтеграла**: визначений інтеграл чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством або фірмою із продуктивністю праці $f = f(t)$ за проміжок часу $[0; T]$.

10.3.3. Основні властивості визначеного інтеграла

Припустимо, що $\int_a^b f(x) dx$ існує, тобто функція $y = f(x)$

інтегрована на проміжку $[a; b]$. Оскільки за означення визначений інтеграл є границею інтегральної суми, то доведення його властивостей базується на властивостях границь і геометричної інтерпретації для кращого розуміння.

Властивості визначеного інтеграла:

1.
$$\int_a^b dx = b - a.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad \alpha = \text{const.}$$

3. Якщо верхня межа інтегрування дорівнює нижній, то інтеграл дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

5. Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ інтегровані на проміжку $[a; b]$, то функція $y = f(x) \pm g(x)$ – також інтегрована на проміжку $[a; b]$, і визначений інтеграл алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

6. Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ інтегровані на проміжку $[a; b]$ і $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Доведемо, наприклад, цю властивість. Нехай T_n – нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a; b]$, а $\sigma_1(T_n)$ і $\sigma_2(T_n)$ – послідовності інтегральних сум для $y = f(x)$ та $y = g(x)$, що відповідають тому самому вибору точок $c_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$. Тоді $\sigma_1(T_n) \leq \sigma_2(T_n)$, тому:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_1(T_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_2(T_n).$$

7. Якщо функція $y = f(x)$ інтегрована на проміжку $[a; b]$, то:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Для інтегральної суми $\sigma_1(T_n)$ інтеграла у лівій частині нерівності

$$\begin{aligned} |\sigma_1(T_n)| &= |f(c_1)(x - x_0) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})| \leq \\ &\leq |f(c_1)|(x - x_0) + \dots + |f(c_n)|(x_n - x_{n-1}) = \sigma_2(T_n). \end{aligned}$$

Ця сума є інтегральною сумою для інтеграла у правій частині нерівності. Тому, перейшовши до границі ліворуч та праворуч, матимемо нерівність, яку треба довести.

8. Якщо інтеграли $\int_a^c f(x) dx$ і $\int_c^b f(x) dx$ існують та $a < c < b$, то:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Наслідок:

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; b]$, має на ньому лише скінченну кількість точок розриву першого роду, то $\int_a^b f(x)dx$ існує.

9. Властивість 9 сформулюємо у вигляді важливої теорема.

ТЕОРЕМА

(про середнє значення інтеграла)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, то для певної точки $c \in [a; b]$, справджується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \quad 10.18)$$

Доведення. Нехай $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$, а $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$ – найменше та найбільше значення функції $y = f(x)$ на $[a; b]$. Тоді виконується нерівність $m \leq f(x) \leq M$ для всіх $x \in [a; b]$, а тому за властивостями 1, 3, 4:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Поділимо нерівність на вираз $(b-a) > 0$, дістаємо:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Неперервна на проміжку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ набуває всіх проміжних значень між m і M , тому знайдеться така точка $c \in [a; b]$, що

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Зауваження. Із доведеного, а також із властивостей 5 і 6 випливає, що рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

виконується також для $b \leq a$.

10. Якщо $y = f(x)$ – неперервна на проміжку $[a; b]$ функція та

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

то $\Phi'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a, b]$.

Для доведення застосуємо означення похідної. Передусім функція $y = f(t)$ неперервна на проміжку $[a, x]$, якщо $x \in [a, b]$, тому:

$$\int_a^x f(t)dt$$

існує, тобто функція $y = \Phi(x)$ визначена на $[a; b]$. Якщо надати приросту аргументу Δx , то функція $y = \Phi(x)$ отримає приріст:

$$\Delta\Phi(x; \Delta x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

(остання рівність виконується на підставі властивості 7).

Застосувавши властивість 8, дістаємо:

$$\Delta\Phi(x; \Delta x) = f(c)((x + \Delta x) - x) = f(c)\Delta x,$$

причому c лежить між x та $x + \Delta x$, тоді:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c).$$

Оскільки у точці x функція $y = f(x)$ неперервна, то

$$\lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

Нарешті,

$$\lim_{c \rightarrow x} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c),$$

оскільки c лежить між x та $x + \Delta x$.

10.3.4. Основна формула інтегрального числення

ТЕОРЕМА

Якщо функція $y = f(x)$ інтегрована на проміжку $[a; b]$,

а $y = F(x)$ – будь-яка її первісна на $[a; b]$,

то має місце формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (10.19)$$

Формулу (10.19) називають **формулою Ньютона–Лейбніца**. Вона є основною формулою інтегрального числення. Справді, за властивістю 10 функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

– первісна для функції $y = f(x)$. Тому функція $F(x) = C + \Phi(x)$, де $C \in \mathbb{R}$, – довільна первісна функції $y = f(x)$. Тоді:

$$F(b) - F(a) = \left(C + \int_a^b f(t) dt \right)' = \int_a^b f(t) dt.$$

Зауваження. Різницю $F(b) - F(a)$ часто позначають $F(x)|_a^b$ і називають **підстановкою** від a до b :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

10.4. Методи обчислення визначених інтегралів

Оскільки визначені та невизначені інтеграли пов'язані формулою Ньютона–Лейбніца, то методи обчислення визначених інтегралів ті самі, що й для невизначених інтегралів: безпосереднього інтегрування, підстановки та інтегрування частинами.

10.4.1. Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування базується на застосуваннях властивостей визначеного інтеграла та формули Ньютона–Лейбніца. Розглянемо приклади.

Приклад 10.21. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_a^b x^k dx; 2) \int_a^b e^x dx; 3) \int_a^b \frac{dx}{x}; 4) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx; 5) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\begin{aligned} 1) \int_a^b x^k dx &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}); \\ 2) \int_a^b e^x dx &= e^x \Big|_a^b = e^b - e^a; 3) \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a| = \ln \left| \frac{b}{a} \right|; \\ 4) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx &= \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(\pi/6) = 1 - (1/2) = 1/2; \\ 5) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

10.4.2. Метод підстановки у визначеному інтегралі

Метод підстановки (заміни змінної) базується на теоремі.

ТЕОРЕМА

(заміна змінної у визначеному інтегралі)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$,
а функція $x = \varphi(t)$ задовольняє умови:

1) $x = \varphi(t)$ визначена у деякому проміжку $[\alpha, \beta]$,
причому $a \leq \varphi(t) \leq b$ і $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;

2) на проміжку $[\alpha, \beta]$ існує неперервна похідна $\varphi'(t)$,
то має місце формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (10.20)$$

Доведення. Нехай функція $y = F(x)$ – первісна функції $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$ (існує за властивістю 9). Тоді функція $y = F(\varphi(t))$ – первісна функції $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$. Це випливає із рівності:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Застосувавши двічі формулу Ньютона–Лейбніца, дістанемо:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорему доведено.

Зауваження. У випадку визначеного інтеграла немає потреби повертатися до початкової змінної після заміни змінної. Досить лише знайти межі інтегрування за новою змінною та обчислити інтеграл. Розглянемо приклади.

Приклад 10.22. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$.

Зробимо заміну $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Знайдемо нові межі інтегрування: $t_H = \sin 0 = 0$ при $t_6 = \sin(\pi/2) = 1$. Дістанемо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ t_H = \sin 0 = 0 \\ t_6 = \sin(\pi/2) = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Приклад 10.23. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Переходимо до нової змінної інтегрування. Зробимо заміну $t = \sqrt{x}$, тоді $x = t^2$ ($t > 0$), $dx = 2t dt$. Знайдемо нові межі інтегрування $t = 0$ при $x = 0$ і $t = 2$ при $x = 4$. Тоді за (10.20):

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ t_H = \sqrt{0} = 0 \\ t_6 = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2t dt}{1 + t} = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1 + t} \right) dt =$$

$$= 2(t - \ln|1 + t|) \Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3.$$

Приклад 10.24. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$.

Зробимо підстановку $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$. Така підстановка можлива (оскільки за довільного значення t під коренем невід'ємна величина) і приводить до зникнення ко-

рення під знаком інтеграла. Якщо x змінюється від $x=0$ до $x=1$, то змінюється t від $t=0$ до $t=\pi/6$. Застосуємо формулу заміни змінної:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \\ t = \arcsin(x/2) \\ t_H = 0, t_E = \pi/6 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/6} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10.4.3. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

ТЕОРЕМА

(інтегрування частинами у визначеному інтегралі)

Нехай функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовані на відрізку $[a, b]$, тоді має місце формула:

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x). \quad (10.21)$$

Формулу (10.21) називають **формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі**.

Доведення. Справді, оскільки $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, то за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b.$$

Далі до лівої частини слід застосувати властивість 5:

$$\int_a^b v(x) du(x) + \int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b,$$

звідки легко дістати (10.21).

Теорему доведено.

Приклад 10.25. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Позначимо $u = \operatorname{arctg} x$ $dv = dx$, тоді $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Підставивши отримані вирази до (10.21), дістанемо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u \quad dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 10.26. Обчислити інтеграл $\int_1^e \ln x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \\ &\quad - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = 1. \end{aligned}$$

Приклад 10.27. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^0 x e^x \, dx$.

Скористаємось методом інтегрування частинами. Позначимо $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x \, dx \Rightarrow v = e^x$, тоді:

$$\int_{-1}^0 x e^x \, dx = x e^x \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x \, dx = 0 + e^{-1} - e^x \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - 1.$$

10.5. Невласні інтеграли

Поняття визначеного інтеграла було введено для скінченного проміжку інтегрування та від обмеженої на цьому проміжку функції $y = f(x)$. Якщо щонайменше одна з цих

умов не виконується, то визначений інтеграл як границя інтегральної суми не існує. Але при розв'язанні практичних задач виникає необхідність розглядати інтеграли на нескінченному проміжку та від необмеженої функції. Такі інтеграли називають **невласними**. Їх поділяють на два типи.

10.5.1. Невласні інтеграли першого роду

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна при $a \leq x < \infty$, тоді інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (10.22)$$

називають **невласним інтегралом першого роду**.

Якщо границя у правій частині цієї рівності існує та скінченна, то інтеграл називають **збіжним**, у протилежному випадку інтеграл **розбіжний**.

Аналогічно вводять невластні інтеграли першого роду, коли $a = -\infty$ і $b = +\infty$, тобто:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (10.23)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx. \quad (10.24)$$

Невластні інтеграли першого роду ще називають **інтегралами із нескінченними межами інтегрування**. Розглянемо приклади обчислення невластних інтегралів першого роду.

Приклад 10.28. Обчислити інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 10.29. Обчислити інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}, (a > 1).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(\ln|b|) - \ln(\ln|a|)) = +\infty.$$

Отже інтеграл розбігається.

10.5.2. Невласні інтеграли другого роду

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ за винятком точки $c, c \in [a; b]$ і в якій функція має розрив другого роду, тоді інтеграл:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \quad (10.25)$$

називають **невласним інтегралом другого роду**.

Якщо границя у правій частині цієї рівності існує та скінченна, то інтеграл називають **збіжним**, у протилежному випадку – інтеграл **розбіжний**.

У випадку, коли точка розриву c збігається із точкою a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad (10.26)$$

а якщо c збігається із точкою b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (10.27)$$

Невласні інтеграли другого роду ще називають **інтегралами від необмежених функцій**.

Приклад 10.30. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

Це невластний інтеграл другого роду, оскільки підінтегральна функція необмежена в околі $x = 1, (\ln 1 = 0).$

Згідно із правилом обчислення невластних інтегралів другого роду отримаємо:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln(\ln|x|) \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon))) = \ln(\ln 2) - \ln(\ln 1) = +\infty.\end{aligned}$$

Отже, інтеграл розбігається.

Приклад 10.31. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Функція $y = 1/\sqrt{x}$ неперервна при $0 < x \leq 1$ і має нескінченний розрив у точці $x = 0$, тому в силу рівності (10.26):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Отже, інтеграл збігається та дорівнює 2.

10.6. Наближені формули обчислення визначених інтегралів

Якщо первісна підінтегральної функції відома, то визначений інтеграл обчислюють за формулою Ньютона-Лейбніца. Але можлива ситуація, за якої первісну або не подають у вигляді елементарної функції, або вираз первісної складний. Тоді застосовують наближені формули обчислення визначених інтегралів. Основна ідея побудови цих формул – заміна підінтегральної функції на функцію простішого вигляду, наприклад, многочленом, інтеграл від якого знаходять безпосередньо за формулою Ньютона-Лейбніца.

Для наближеного обчислення визначених інтегралів існує кілька способів. Якщо функцію $y = f(x)$ задано формулою або таблицею, то наближене значення визначеного інтеграла на проміжку $[a; b]$ можна знайти за таким алгоритмом.

Алгоритм наближеного обчислення визначеного інтеграла:

Крок 1. Розбити проміжок інтегрування $[a; b]$ на n рівних точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, отримати відрізки $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$

довжиною $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Крок 2. Обчислити значення підінтегральної функції $y = f(x)$ у точках $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$, тобто обчислити значення:

$$y_0 = f(a), y_1 = f(x_1), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(b).$$

Крок 3. Скористатися однією із наближених формул.

Найчастіше застосовують наближені формули, які ґрунтуються на геометричному зображенні визначеного інтеграла у вигляді площі криволінійної трапеції. При цьому припускають, що функція $y = f(x)$ задана аналітично та диференційована потрібну кількість разів для оцінювання похибки.

10.6.1. Формула прямокутників

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad (10.28)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i. \quad (10.29)$$

Формули (10.28) і (10.29) називають **формулами прямокутників**, оскільки геометрично (рис. 10.5, 10.6) за цими формулами площу криволінійної трапеції ABb , яка відповідає

$$\int_a^b f(x) dx,$$

заміняють сумою площ заштрихованих прямокутників.

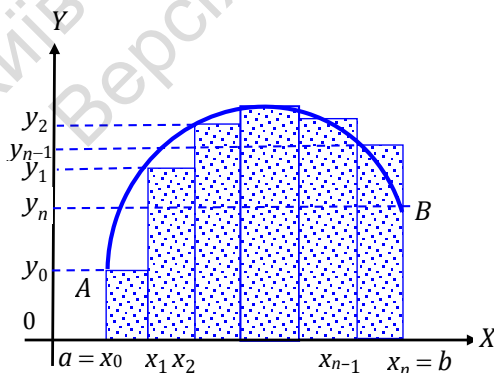


Рис. 10.5

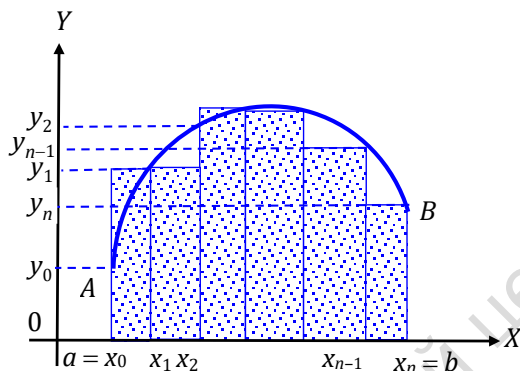


Рис. 10.6

Якщо у функції $y=f(x)$ існує похідна $y=f'(x)$, що обмежена на відрізку $[a; b]$, то похибку Δ_n у (10.28) та (10.29) оцінюють нерівністю:

$$|\Delta_n| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}, \text{ де } M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Приклад 10.32. Застосовуючи формулу прямокутників для $n=10$ обчислити наближено

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Розрахунки вестимемо із трьома знаками після коми. Оцінимо похибку наближення.

Крок 1. Розіб'ємо відрізок $[1; 2]$ на $n=10$ рівних частин точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, тут $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$.

Крок 2. Обчислимо значення підінтегральної функції $y=1/x$ у вибраних точках. Результати запишемо до таблиці.

x_1	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_1	1,000	0,909	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500

$$\text{Дістанемо } \sum_{i=0}^9 y_i = 7,187.$$

Крок 3. За (10.28) обчислимо інтеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{10} \cdot 7,187 \approx 0,719.$$

Оцінимо похибку наближення. Оскільки $f'(x) = -(1/x^2)$, то $|f'(x)| = (1/x^2)$ монотонно спадає на відрізку $[1;2]$, тому:

$$M_1 = \max_{x \in [1,2]} |f'(x)| = f'(1) = 1.$$

$$\text{Отже, } |\Delta_{10}| \leq \frac{1}{20} = 0,05.$$

Оскільки допустима похибка з'являється вже у другому знаку після коми, то третій знак необхідно округлити. Остаточно:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,719 \pm 0,05.$$

Обчислимо інтеграл за формулою Ньютона–Лейбніца точно:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,6931.$$

Отже, насправді буде допущена похибка 0,03 – трохи менша, ніж та, яку обчислено за формулою.

10.6.2. Формула трапецій

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (10.30)$$

Або у скороченій формі формулу трапецій записують так:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right).$$

Геометрично за (10.30) площу криволінійної трапеції $aABb$, яка відповідає інтегралу $\int_a^b f(x) dx$, замінюють сумою площ заштрихованих трапецій (рис. 10.7).

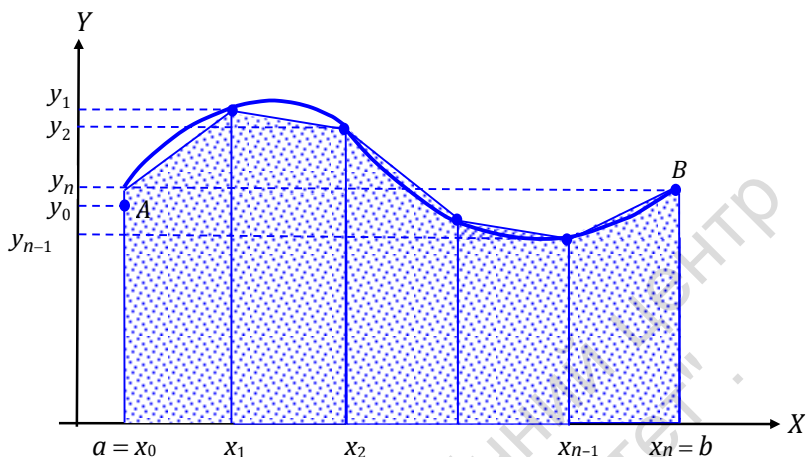


Рис. 10.7

Якщо у функції $y = f(x)$ існує друга похідна $y = f''(x)$, що обмежена на відрізку $[a; b]$, то похибку Δ_n (10.30) оцінюють із нерівності:

$$|\Delta_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \text{ де } M_2 = \max_{x \in [a, b]} f''(x).$$

Приклад 10.32. Застосовуючи формулу трапецій для $n=10$, наближено обчислити

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Розрахунки проводитимемо із чотирма знаками після коми. Оцінимо похибку наближення.

Крок 1. Розіб'ємо відрізок $[1; 2]$ на $n=10$ рівних частин точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, тут $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$.

Крок 2. Обчислимо значення підінтегральної функції $y = 1/x$ у вибраних точках. Результати запишемо до таблиці.

x_1	1,000	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_1	1,000	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

Дістанемо:

$$2 \sum_{i=1}^9 y_i = 12,3754, \quad y_0 + y_{10} = 1,5000.$$

Крок 3. За формулою трапецій (10.30) обчислимо інтеграл:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{2 \cdot 10} \cdot (12,3754 + 1,5000) \approx 0,6938.$$

Оцінимо похибку наближення. Оскільки $f''(x) = 2/x^3$ монотонно спадає на відрізку $[1;2]$, то

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} f''(x) = f''(1) \leq 1/600 = 0,002.$$

За формулою трапецій остаточно маємо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 \approx 0,694 \pm 0,002.$$

Порівняння оцінок у цій і попередній задачах показує, що розрахунок за формулою трапецій дає більший ступінь точності, на відміну від розрахунку за формулою прямокутників за одного й того самого значення $n = 10$.

Зауваження 1. Очевидно, що зі збільшенням n точність формул (10.28)–(10.30) покращується.

Зауваження 2. Крім (10.28)–(10.30) існують й інші, наприклад параболічна формула Сімпсона.

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Яку функцію називають первісною для заданої функції?
2. Яку операцію називають інтегруванням функції?
3. Що називають невизначеним інтегралом заданої функції?
4. Основні властивості невизначеного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5) dx.$$

Подамо інтеграл алгебраїчної суми у вигляді інтегралів доданків, винесемо сталі множники за знаки інтегралів і застосуємо табличний інтеграл:

$$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

Дістанемо:

$$\begin{aligned} \int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5) dx &= \int x^5 dx - 3 \int x^4 dx - 7 \int x dx + 5 \int dx = \\ &= (1/6)x^6 - (3/5)x^5 - (7/2)x^2 + 5x + C. \end{aligned}$$

Зазначимо, що тут і далі довільні сталі, що входять за означенням до кожного із невизначених інтегралів, які додають, об'єднуються до однієї довільної сталої.

Приклад 2. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Виконаємо ділення почленно та застосуємо формули таблиці інтегралів:

$$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 \quad \text{та} \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx &= 2 \int x^{-(3/2)} dx + 3 \int x^{-(5/6)} dx + 5 \int \frac{dx}{x} = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{-(3/2)+1}}{-(3/2)+1} + 3 \cdot \frac{x^{-(5/6)+1}}{-(5/6)+1} + 5 \ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5 \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

Додамо та віднімемо у чисельнику підінтегральної функції x^2 :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + x^2} &= \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \frac{dx}{x^2} - \\ &= \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int x^{-2} dx - \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} - \arctg x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Замінімо одиницю у чисельнику підінтегральної функції на вираз $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ і застосуємо табличні формули:

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \text{ та } \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C:$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

5. У чому полягає метод підстановки обчислення невизначених інтегралів?

Далі наведемо приклади 5–10 обчислення невизначених інтегралів методом підстановки.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \ln^2 x d(\ln x) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} \cdot d(\operatorname{arctg} x) = \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{3}{4} (\operatorname{arctg} x)^{4/3} + C.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

Зробимо заміну $t = \ln x$, тоді $dt = d(\ln x)$. Застосуємо формулу $\int \cos t dt = \sin t + C$ із таблиці основних інтегралів:

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos(\ln x) d(\ln x) = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = d(\ln x) \end{array} \right| = \sin(\ln x) + C.$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int x e^{-x^2} dx$.

Зробимо заміну $t = -x^2$, тоді $dt = d(-x^2) = -2x dx$.

Підставимо ці значення до підінтегрального виразу:

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int \operatorname{tg} x dx$.

Зробимо заміну $t = \cos x$, тоді $dt = d(\cos x) = -\sin x dx$.

Підставимо ці значення до підінтегрального виразу:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$.

Зробимо заміну $t = x^3$, тоді $dt = d(x^3) = 3x^2 dx$. Підставимо ці значення до підінтегрального виразу:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin(x^3) + C.$$

6. У чому полягає метод інтегрування частинами у невизначеному інтегралі?

Далі наведемо приклади 11-14 обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами.

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int x^2 \ln x \, dx$.

Покладемо $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, тоді $du = dx/x$, $v = x^3/3$.

Застосуємо формулу інтегрування частинами (10.21):

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int x e^x \, dx$.

Покладемо $u = x$, $dv = e^x dx$, тоді $du = dx$, $v = e^x$.

За формулою інтегрування частинами (10.21) маємо:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int x^2 \cos x \, dx$.

Застосуємо формулу інтегрування частинами (10.21) двічі:

$$\int x^2 \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \int \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \sin x + C.$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\int e^x \cos x \, dx$.

Позначимо шуканий інтеграл через I та спочатку покладемо $u = \cos x$, $dv = e^x dx$, а потім $u = \sin x$, $dv = e^x dx$, дістанемо:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + \int e^x (-\sin x) \, dx = \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx = e^x (\cos x + \sin x) - I. \end{aligned}$$

Перенесемо I до лівої частини отриманої рівності та поділимо на 2:

$$I = (1/2)e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

7. Які підстановки для інтегрування тригонометричних функцій вам відомі?

8. Яка підстановка є універсальною тригонометричною підстановкою?

Приклад 15. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Підінтегральна функція раціонально залежить від $\sin x$. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t,$$

$$\text{тоді } x = 2\arctgt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Маємо:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Приклад 16. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Відомо, що $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$.

Зробимо заміну $(\pi/2 + x) = t$, тоді $dx = dt$ і дістанемо:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\pi/2 + x)} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\operatorname{tg}(t/2)| + C = \ln|\operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)| + C.$$

Приклад 17. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$.

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\operatorname{tg}(x/2)=t, \text{ тоді } x=2\arctgt, dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} &= \int \frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{t^2-8t+15} = \\ &= \int \frac{2dt}{(t-3)(t-5)} = \int \frac{(t-3)-(t-5)}{(t-3)(t-5)} dt = \int \frac{dt}{t-5} - \int \frac{dt}{t-3} = \\ &= \ln|t-5| - \ln|t-3| + C = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-5}{\operatorname{tg}(x/2)-3}\right| + C.\end{aligned}$$

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx$.

Здійснимо наступні перетворення:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\cos x - 3} = - \int \frac{(\cos^2 x - 1)d(\cos x)}{\cos x - 3}.$$

Зробимо заміну $\cos x = t$, дістанемо:

$$\int \frac{t^2 - 1}{t - 3} dt = \int \frac{t^2 - 9 + 8}{t - 3} dt = \int (t + 3) dt + 8 \int \frac{dt}{t - 3} = \frac{t^2}{2} + 3t + 8 \ln|t - 3| + C.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = -\frac{\cos^2 x}{2} - 3\cos x - 8 \ln|\cos x - 3| + C.$$

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int \sin 4x \cdot \sin 6x dx$.

Скористаємося відомою тригонометричною формулою та запишемо підінтегральний вираз у вигляді:

$$\sin 4x \sin 6x = (1/2)\cos 2x - (1/2)\cos 10x.$$

Дістанемо:

$$\int \sin 4x \cdot \sin 6x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 10x dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{20} \sin 10x + C.$$

Приклад 20. Обчислити інтеграл $\int \sqrt[3]{\sin^2 x \cos^3 x} dx$.

Показник степені косинуса дорівнює трьом, тому робимо підстановку $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, тоді:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x \, dx &= \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int \sqrt[3]{t^2} (1 - t^2) \, dt = \\ &= \int t^{2/3} \, dt - \int t^{8/3} \, dt = \frac{3}{5} t^{5/3} - \frac{3}{11} t^{11/3} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11} \sqrt[3]{\sin^{11} x} + C.\end{aligned}$$

9. Які підстановки використовують для інтегрування ірраціональних функцій?

Приклад 21. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} \, dx$.

До підінтегральної функції змінна x під радикалами входить із показниками 2 та 3. Найменше спільне кратне показників становить 6, тому робимо підстановку:

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 \, dt.$$

Обчислюємо інтеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} \, dx &= \int \frac{t^3}{t^6 - t^4} 6t^5 \, dt = 6 \int \frac{t^4}{t^2 - 1} \, dt = 6 \int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} \, dt = \\ &= \int (t^2 + 1) \, dt + 6 \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2t^3 + 6t + 3 \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} \, dt = \\ &= 2t^3 + 6t + 3 \int \frac{dt}{t-1} - 3 \int \frac{dt}{t+1} = 2t^3 + 6t + 3 \ln|t-1| - 3 \ln|t+1| + C = \\ &= 2t^3 + 6t + 3 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + C.\end{aligned}$$

Приклад 22. Обчислити інтеграл $\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$.

Рекомендована підстановка $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ дає можливість виразити змінну $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ та її диференціал $dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \, dt$.

Крім того, $1-x = \frac{2t^2}{1+t^2}$. Тому:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx = - \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2} \, dt = - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Приклад 23. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}$.

Виділимо під коренем повний квадрат, дістанемо:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x/2 + 3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x - 1/4)}{\sqrt{(x - 1/4)^2 + 23/16}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2 - x + 3} \right| + C.\end{aligned}$$

Приклад 24. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}}$.

Зробимо відповідні перетворення у підінтегральній функції:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{5/3 - (2/3)x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x + 1/3)}{\sqrt{(4/3)^2 - (x + 1/3)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x + 1}{4} + C.\end{aligned}$$

Приклад 25. Обчислити інтеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.

Значимо, що $x dx = (1/2)d(x^2 + 4x + 5) - 2dx$, тоді дістанемо:

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4x + 5)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \\ &= \sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2 \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5} \right| + C.\end{aligned}$$

10. Що називають визначеним інтегралом?

11. Які основні властивості визначеного інтеграла?

12. Сутність методу заміни змінної визначеного інтеграла

Наведемо приклади 26–28 обчислення визначених інтегралів за допомогою відповідних підстановок.

Приклад 26. Обчислити інтеграл $\int_0^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

Переходимо до нової змінної інтегрування, поклавши $x = t^3$, $dx = 3t^2 dt$ ($t > 0$). При $x = 0$ дістанемо $t = 0$, а при $x = 8$ маємо $t = 2$. Тому після заміни змінної дістанемо:

$$\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int_0^2 \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3 \int_0^2 \frac{(t^2-1+1)dt}{1+t} =$$

$$= 3 \int_0^2 \left(t-1 + \frac{1}{1+t} \right) dt = 3 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) \Big|_0^2 = 3(4/2 - 2 + \ln 3) = 3 \ln 3.$$

Приклад 27. Обчислити інтеграл $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$.

Зробимо заміну $t = \sqrt{e^x - 1}$, тоді $e^x = t^2 + 1$ і $e^x dx = 2t dt$.

Якщо $x=0$, то $t = \sqrt{e^0 - 1} = 0$, якщо $x = \ln 5$, то $t = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2$.

Виконавши підстановку, дістанемо:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \int_0^2 \frac{t \cdot 2t dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt =$$

$$= 2 \left(t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = 2(2 - 2 \operatorname{arctg} 1) = 4 - \pi.$$

Приклад 28. Обчислити інтеграл $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}$.

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} = \arcsin(\ln x) \Big|_1^{\sqrt{e}} =$$

$$= \arcsin(\ln \sqrt{e}) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin(1/2) - \arcsin 0 = \pi/6.$$

13. Як записати формулу інтегрування частинами у ви-
значеному інтегралі?

Приклад 29. Обчислити інтеграл $\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$.

Покладемо $u = (1 + \ln x)^2$, $dv = dx$. Тоді $du = 2(1 + \ln x)(dx/x)$,
 $v = x$ і, застосувавши (10.25), дістанемо:

$$I = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx = x(1 + \ln x)^2 \Big|_1^e - 2 \int_1^e (1 + \ln x) dx.$$

До останнього інтеграла застосуємо ще раз формулу інтегрування частинами, поклавши $u=1+\ln x$, $dv=dx$ і $du=dx/x$, $v=x$, дістанемо:

$$J = x(1+\ln x)^2 \Big|_1^e - 2 \left[x(1+\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e dx \right] = 2e - 1.$$

14. За якими правилами обчислюють невластні інтеграли першого роду?

Приклад 30. Обчислити інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Це невластний інтеграл першого роду, оскільки верхня межа інтегрування в ньому – нескінченна. Згідно із правилом обчислення невластних інтегралів першого роду (10.22):

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Скористаємось методом інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^b - \frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 31. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$.

За (10.23) дістанемо:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg x) \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 32. Обчислити інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, інтеграл збігається.

15. Як обчислюють невласні інтеграли другого роду?

Виходячи з означення невласних інтегралів від необмежених функцій, обчислити наступні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

Приклад 33. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Підінтегральна функція неперервна при $0 \leq x < 1$ та у точці $x = 1$ має розрив другого роду, тому заданий інтеграл – це невласний інтеграл другого роду.

За (10.33) отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon)) = \pi/2. \end{aligned}$$

Інтеграл збігається та дорівнює $\pi/2$.

Приклад 34. Обчислити інтеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Підінтегральна функція має розрив другого роду у точці $x = 1$. Тому заданий інтеграл – це невласний інтеграл другого роду. Тоді за (10.25) отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} (x-1)^{-2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^3 (x-1)^{-2} dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \Big|_0^{1-\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \Big|_{1+\varepsilon}^3 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-\varepsilon-1} - 1 \right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\varepsilon-1} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл розбігається.

16. Які наближені формули існують для обчислення невізначених інтегралів?

Приклад 35. Обчислимо наближено інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

за допомогою формул прямокутників і трапецій, порівняти з його точним значенням.

Не обмежуючи загальності розіб'ємо відрізок $[0;1]$ на 10 рівних частин:

$$\left(h = \frac{1-0}{10} = 10^{-1} \right),$$

знайдемо значення функції $y = \frac{dx}{1+x^2}$ у точках розбиття.

Застосуємо формули прямокутників і трапецій (10.28)-(10.30):

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10} (1,0 + 0,99 + 0,96 + 0,92 + 0,86 + 0,8 +$$

$$+ 0,74 + 0,67 + 0,61 + 0,55) = 0,81;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10} (0,99 + 0,96 + 0,92 + 0,86 + 0,8 +$$

$$+ 0,74 + 0,67 + 0,61 + 0,55) = 0,76;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10} (0,75 + 0,99 + 0,96 + 0,92 + 0,86 + 0,8 +$$

$$+ 0,74 + 0,67 + 0,61 + 0,55) = 0,782.$$

Обчислимо точно інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

Порівняння наближених значень цього інтеграла з його точним значенням дають такий результат: за формулами прямокутників отримано одну правильну цифру, а за формулою трапецій – дві правильні цифри.

Розділ 11

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

11.1. Геометричні застосування визначеного інтеграла

11.1.1. Обчислення площ плоских фігур

Як було зазначено у п. 10.3.2, визначений інтеграл чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aABb$, яка обмежена графіком заданої функції і відрізками прямих $y=0$, $x=a$, $x=b$ (див. рис. 10.3). Тому, якщо на відрізку $[a;b]$ неперервну криву задано рівнянням $y=f(x)$, $f(x)\geq 0$, то площу криволінійної трапеції, що обмежена цією кривою, віссю OX і прямими $x=a$ та $x=b$ обчислюють за формулою (10.15):

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

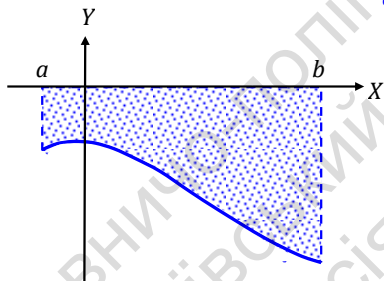


Рис 11.1

Якщо криволінійна трапеція (рис. 11.1) обмежена кривою $y=f(x)$, $f(x)\leq 0$, віссю OX і прямими $x=a$ та $x=b$, то її площу обчислюють за формулою:

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (11.1)$$

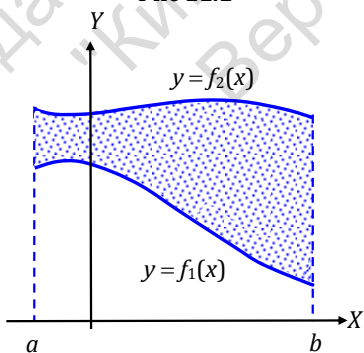


Рис 11.2

У більш загальному випадку, якщо криволінійна трапеція обмежена двома неперервними кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і прямими $x=a$ та $x=b$, причому $f_1(x)\leq f_2(x)$ для $a\leq x\leq b$ (рис. 11.2), то її площу можна знайти за формулою:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (11.2)$$

Приклад 11.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

$$y = \sin x, \quad y = 0, \\ x = 0, \quad x = \pi.$$

Шукана площа обмежена півхвилею синусоїди та віссю OX (рис. 11.3).

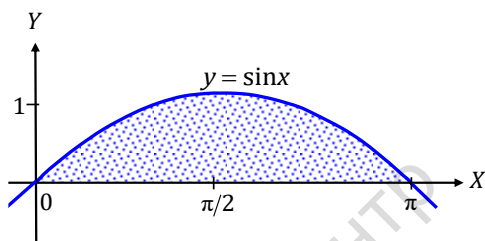


Рис. 11.3

Обчислимо цю площу:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 11.2. Обчислити площу, що обмежена параболою $y = x^2$, прямими $x = -1$, $x = 2$ і віссю абсцис (рис. 11.4).

Шукану площу обчислюють за (10.15), тому:

$$S = \int_{-1}^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^2 = 3 \text{ (кв. од.)}.$$

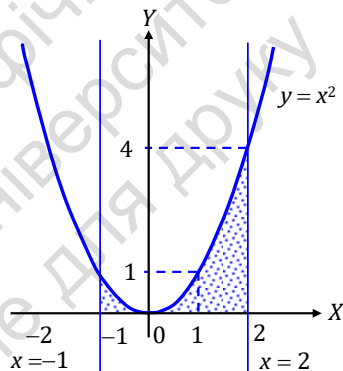


Рис. 11.4

Приклад 11.3. Обчислити площу фігури, яку відтинає пряма $y = -x$ від параболи $y = 2x - x^2$.

Методом виділення повних квадратів зведемо рівняння параболи до вигляду $y - 1 = -(x - 1)^2$. Із рівняння видно, що парабола симетрична щодо прямої $x = 1$, її гілки спрямовано вниз, вершина розташована у точці $(1; 1)$ (рис. 11.5).

Спільним розв'язком системи рівнянь, яку утворюють рівняння параболи $y = 2x - x^2$ і прямої $y = -x$, визначаємо абсциси точок A та B , які є точками перетину цих двох кривих. Маємо $x_A = 0$, $x_B = 3$. Тепер за (11.2) обчислюємо шукану площу фігури, де $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = 2x - x^2$, $a = 0$, $b = 3$:

$$S = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ (кв. од.)}.$$

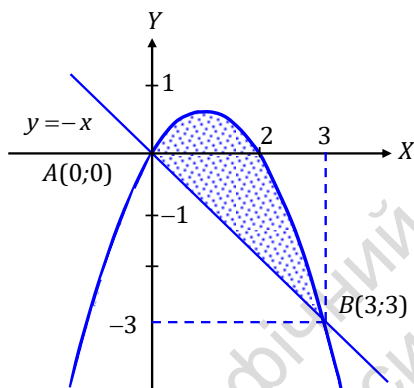


Рис. 11.5

11.1.2. Обчислення довжини дуг кривих ліній

Нехай на відрізку $[a; b]$ – неперервна крива AB , що задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, причому $y = f'(x)$ також неперервна. Знайдемо довжину дуги AB між вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$.

Виберемо на дузі AB точки $A; A_1; A_2; \dots; A_{n-1}; B$ з абсцисами $a = x_0; x_1; x_2; \dots; x_n = b$ і проведемо хорди $AA_1; A_1A_2; \dots; A_{n-1}B$, довжини яких позначимо $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$.

Тоді довжина ламаної $A A_1 A_2 \dots A_{n-1} B$, що вписана до дуги AB :

$$l_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i \text{ (рис. 11.6).}$$

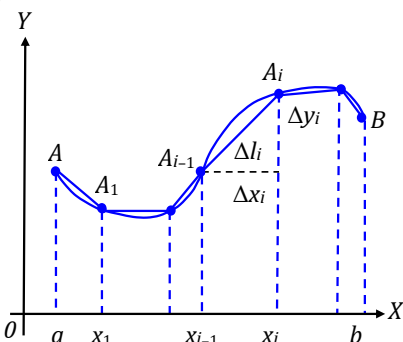


Рис. 11.6

Означення. Довжиною l дуги AB називають границю (якщо вона існує), до якої прямує довжина вписаної до цієї дуги ламаної, якщо довжина її найбільшої ланки прямує до нуля:

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta l_i.$$

Позначимо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. За теоремою Піфагора маємо:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

Оскільки функція неперервно-диференційована на відрізку $[a; b]$, то за формулою Лагранжа на кожному окремому відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ маємо:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \Delta x_i, \text{ де } c_i \in (x_{i-1}; x_i).$$

Тоді:

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i, i = \overline{1, n}; l_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Оскільки функція $y = f'(x)$ неперервна, то функція $y = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ також неперервна та існує границя інтегральних сум

$$l_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i; l = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Отже, довжину дуги AB кривої обчислюють за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11.3)$$

Приклад 11.4. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y = \sqrt{x^3}$ від початку координат $O(0;0)$ до точки $A(4;8)$ (рис. 11.7).

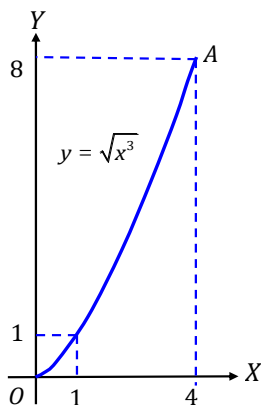


Рис. 11.7

Знаходимо $f'(x) = (3/2)x^{1/2}$ і, підставляючи її до (11.4), дістаємо:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

11.1.3. Обчислення об'ємів тіл

Розглянемо деяке тіло. Нехай функція $S = S(x)$ визначає площу перерізу цього тіла площиною, яка проходить перпендикулярно до осі OX через точку із координатою x , де $x \in [a; b]$ (рис. 11.8). Обчислимо об'єм заданого тіла.

Виберемо довільне розбиття відрізка $[a; b]$ на відрізки $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; x_n]$ і проведемо через точки $x_i, i = \overline{1, n}$ площини, що перпендикулярні осі OX . На кожному із відрізків виберемо довільну точку

$$c_i \in (x_{i-1}; x_i), i = \overline{1, n}.$$

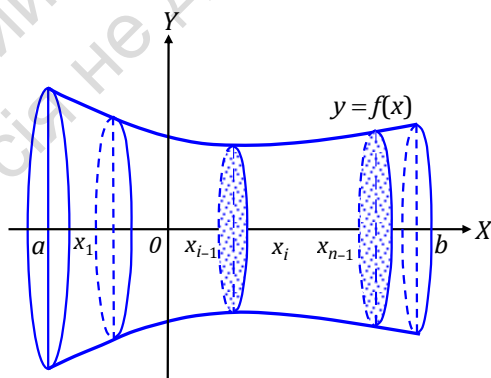


Рис. 11.8

Площини розбивають тіло на елементарні циліндри, площі основ яких - $S(c_i), i = \overline{1, n}$, а висоти - $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n}$. Об'єми всіх циліндрів можна обчислити за формулою:

$$V_n \approx \sum_{i=1}^n S(c_i) \Delta x_i.$$

Означення. Границю цієї суми при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ (якщо вона існує) називають **об'ємом заданого тіла**, тобто обчислюють за формулою:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(c_i) \Delta x_i.$$

Очевидно, що V_n є інтегральною сумою для функції $S = S(x)$ на відрізку $[a; b]$. Отже, за означенням визначеного інтеграла об'єм тіла обчислюють за формулою:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (11.4)$$

Оскільки площею перерізу є $S(x) = \pi f^2(x)$, то об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, віссю OX та відрізками прямих $x = a$ та $x = b$, обчислюють за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (11.5)$$

Аналогічно об'єм тіла обертання криволінійної трапеції, що утворена графіком функції $x = \varphi(y)$, $y \in [c; d]$ навколо осі OY , можна обчислити за формулою:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (11.6)$$

Приклад 11.5. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням фігури, яка обмежена графіком функції $y = \sin x$ навколо відрізка $[0; \pi]$ осі OX .

За (11.5) знаходимо:

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Приклад 11.6. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі OY фігури, яка обмежена параболою $y = x^2$, віссю OY та прямою $y = 1$.

За (11.6) знаходимо:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Ураховуючи, що $c=0$, $d=1$, $x^2 dy = y dy$, дістанемо:

$$V_y = \pi \int_0^1 y dy = \pi \cdot \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

11.1.4. Обчислення площ поверхонь тіл обертання

Графік неперервно-диференційованої функції $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a; b]$ обертається навколо осі OX (рис. 11.9).

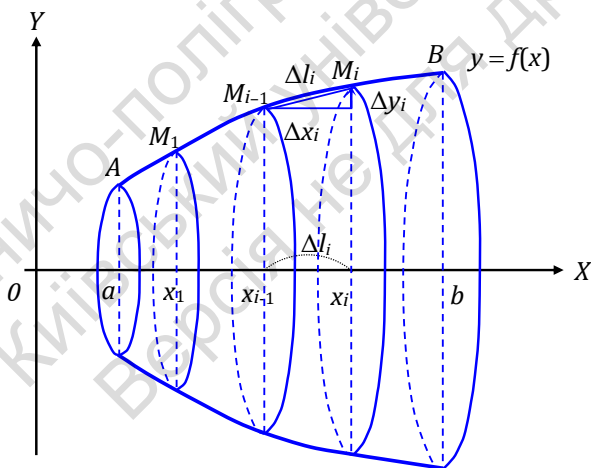


Рис. 11.9

Визначимо площу цієї поверхні на відрізку $[a; b]$. Функції $y = f(x)$ та $y = f'(x)$ є неперервними при $a \leq x \leq b$.

Розглянемо дугу AB та виберемо на ній точки $A, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, B$ з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, поз-

начимо $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ довжини хорд $AM_1; M_1M_2; \dots; M_{n-1}B$. Кожна хорда довжини $\Delta l_i, i = \overline{1, n}$ під час обертання описує зрізаний конус із площею поверхні:

$$\Delta S_i = 2\pi \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot \Delta l_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i,$$

то, застосовуючи теорему Лагранжа, дістанемо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i), \quad c_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Тоді:

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i \quad \text{і} \quad \Delta S_i = 2\pi \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i,$$

а площа поверхні, яка описана ламаною $AM_1M_2, \dots, M_{n-1}B$:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \quad \text{або} \quad S_n = \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Означення. Границю суми S_n при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \rightarrow 0$ (якщо

вона існує) називають **площею поверхні обертання**.

Тобто площа поверхні обертання:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \pi \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \pi \cdot \sum_{i=1}^n 2 f(c_i) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Тоді площа поверхні тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі OX , обчислюють за формулою:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11.7)$$

Приклад 11.7. Обчислити площу шарового поясу, який утворюється при обертанні навколо осі OX дуги кола $x^2 + y^2 = 4, (y > 0)$ між точками з абсцисами $x = -1$ та $x = 1$.

Запишемо підінтегральний вираз в (11.7), де $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, тоді $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ і підставимо до (11.7):

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{4-x^2} \sqrt{(4-x^2+x^2)} dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\pi \int_{-1}^1 2dx = 4\pi(1-(-1)) = 8\pi. \end{aligned}$$

11.2. Фізичні застосування визначеного інтеграла

11.2.1. Робота змінної сили

Як зазначалося раніше (п. 10.3.2), обчислення роботи змінної сили приводить до поняття визначеного інтеграла. Нагадаємо: якщо вздовж осі OX діє змінна сила $f = f(x)$, напрямом якої збігається із напрямком осі OX , і сила неперервно змінюється за величиною, то під дією сили $f = f(x)$ матеріальна точка переміститься вздовж осі з точки $x=a$ до точки $x=b$. Роботу цієї сили на шляху (відрізку) $[a, b]$ обчислюють за (10.16).

Приклад 11.8. Обчислити роботу, яку необхідно виконати для підйому тіла масою m із поверхні Землі вертикально вгору на висоту h , якщо радіус Землі дорівнює R .

Згідно із законом Ньютона силу земного тяжіння визначають за формулою:

$$f(x) = \gamma \cdot \frac{mM}{x^2},$$

де M – маса Землі, γ – гравітаційна стала, x – відстань від центра тіла до центра Землі. Очевидно, що $R \leq x \leq R+h$. Якщо $x=R$, то тіло перебуває на поверхні Землі та $f(R) = P = mg$ –

вага тіла, тобто $f(R) = \gamma \frac{mM}{R^2} = P$.

Використовуючи (10.16), дістанемо:

$$A = \int_R^{R+h} f(x) dx = \int_R^{R+h} \frac{PR^2}{x^2} dx = \frac{PRh}{R+h}.$$

11.2.2. Обчислення пройденого шляху

Нехай точка M рухається вздовж деякої осі, миттєва швидкість у момент часу t становить $v=v(t)$. Потрібно знайти шлях, який пройде точка з моменту часу $t=t_0$ до моменту часу $t=T$.

Якщо швидкість – величина стала ($v=v(t)=\text{const}$), то таку задачу розв'язати дуже просто:

$$S = v(T - t_0).$$

Якщо ж швидкість – величина змінна, тобто $v=v(t)$, то задача ускладнюється. Виберемо довільне розбиття відрізка $[t_0; T]$ на відрізки $[t_0; t_1]$, $[t_1; t_2]$, ..., $[t_{n-1}; t_n]$. На кожному із відрізків виберемо довільну точку $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$ (момент часу τ_i , $i = \overline{1, n}$). Вважатимемо, що швидкість на кожному відрізку є сталою та становить $v(\tau_i)$, $i = \overline{1, n}$. Тоді шлях, що пройдений точкою за проміжок часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, наближено:

$$\Delta S \approx \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

Якщо тепер припустити, що функція $v=v(t)$ неперервна, то переходом до границі при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i \rightarrow 0$ дістанемо:

$$S = \int_{t_0}^T v(t) dt. \quad (11.8)$$

Приклад 11.9. Миттєва швидкість матеріальної точки виражає функція $v(t) = 9t^2 - 8t$ (м/с). Знайти шлях, який пройшла точка за четверту секунду.

За умовою задачі точка пройшла шлях зі швидкістю $v(t) = 9t^2 - 8t$ (м/с) від моменту часу $t_0 = 3$ до $T = 4$, тому за (11.8) дістанемо:

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t) dt = (3t^3 - 4t^2) \Big|_3^4 = 83 \text{ (м)}.$$

Приклад 11.10. Два тіла почали рухатися одночасно з однієї точки в одному напрямку за прямою. Перше тіло рухається зі швидкістю $v(t) = 6t^2 + 2t$ (м/с), а друге – зі швидкістю $v(t) = 4t + 5$ (м/с). На якій відстані одне від одного вони перебуватимуть за 5 с?

Очевидно, що шукана відстань є різницею відстаней, що пройдені першим і другим тілами за 5 с. Знайдемо ці відстані:

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = (2t^3 + t^2) \Big|_0^5 = 275 \text{ (м)},$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = (2t^2 + 5t) \Big|_0^5 = 75 \text{ (м)}.$$

Тоді шукана відстань $S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200$ (м).

11.3. Економічні застосування визначеного інтеграла

11.3.1. Застосування визначеного інтеграла у динамічних процесах

Нагадаємо, що раніше ми розглядали задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла та зрозуміли **економічний зміст визначеного інтеграла**: він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством або фірмою із продуктивністю праці $f = f(t)$ за проміжок часу $[0; T]$:

$$q = \int_0^T f(t) dt. \quad (11.9)$$

Приклад 11.11. Продуктивність праці бригади робітників виражає функція $f(t) = 8t - t^2$. Тут $f(t) = \omega'(t)$, де $\omega = \omega(t)$, виражає кількість виробленої продукції за проміжок часу $[0; t]$. Робітники працюють 8 год., тобто $t \in [0; 8]$. Обчислити: обсяг виробленої продукції за робочий день; за проміжок часу $[2; 6]$. Порівняти ці обсяги (у відсотковому співвідношенні).

Для обчислення вказаних обсягів застосуємо (11.9):

$$q_1 = \int_0^8 f(t) dt = \int_0^8 (8t - t^2) dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^8 = \frac{256}{3} \quad (\text{од. пр. зароб. день});$$

$$q_2 = \int_2^6 f(t) dt = \int_2^6 (8t - t^2) dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_2^6 = \frac{176}{3} \quad (\text{од. пр. за проміжок часу});$$

$$r = \frac{q_2}{q_1} \cdot 100 \% = \frac{17600}{256} = 68,75 \% \quad (\text{порівняння обсягів}).$$

В економічній теорії виробнича функція Кобба-Дугласа, яка враховує технічний прогрес, має вигляд:

$$f(t) = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta \cdot e^{\lambda t},$$

де K характеризує обсяг фондів, L – обсяг трудових ресурсів, λ – інтенсивність розвитку виробництва, що пов'язане із технічним прогресом; параметри задовольняють умови:

$$A > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$$

Тоді можна показати, згідно з економічним змістом виробничої функції Кобба-Дугласа, що обсяг продукції за T років визначають за (11.9).

Приклад 11.12. Знайти обсяг продукції, що випущена за два роки, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа з виготовлення продукції, має вигляд:

$$f(t) = (1 + 2t)e^{5t}.$$

За (11.9) дістаємо:

$$\begin{aligned} q &= \int_0^2 (1 + 2t)e^{5t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 1 + 2t, \quad du = 2dt \\ dv = e^{5t} dt, \quad v = \frac{1}{5}e^{5t} \end{array} \right| = \frac{1 + 2t}{5} e^{5t} \Big|_0^2 - \frac{2}{5} \int_0^2 e^{5t} dt = \\ &= e^{10} - 1/5 e^0 - 2/25 e^{5t} \Big|_0^2 = e^{10} - 1/5 - 2/25 (e^{10} - e^0) = \\ &= 23/25 e^{10} - 7/25 \approx 149734,12 \quad (\text{ум. од.}). \end{aligned}$$

11.3.2. Середні значення економічних функцій

В економічних задачах часто використовують теорему про середнє значення, яку ми довели раніше (властивість 9 визначеного інтеграла).

Якщо $C=C(t)$, $R=R(t)$, $P=P(t)$ – змінні витрати, дохід і прибуток фірми або підприємства, відповідно, то їх середнє значення за час від $t=t_0$ до $t=t_1$ можна знайти за формулами:

$$C_{cp} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} C(t) dt. \quad (11.10)$$

$$R_{cp} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} R(t) dt. \quad (11.11)$$

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \Pi(t) dt. \quad (11.12)$$

Приклад 11.13. Знайти середній дохід за 10 місяців поточно-го року, якщо функція доходу фірми:

$$R(t) = 3t^2 + 2t - 1 \quad (t - \text{час}).$$

За умовою задачі середній дохід фірми потрібно знайти за проміжок часу від $t=0$ до $t=10$. Використовуючи (11.11), дістанемо (ум. гр. од.):

$$R_{cp} = \frac{1}{10} \int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1) dt = \frac{1}{10} (t^3 + t^2 - t) \Big|_0^{10} = \frac{1}{10} (10^3 + 10^3 - 10) = 109.$$

У розд. 7 ми розглядали різні граничні функції (*граничний дохід, граничні витрати, граничний прибуток*). Також було показано, що граничні функції можна одержати із відповідних економічних функцій шляхом диференціювання. Інтегрування дозволяє розв'язати обернену задачу – знайти задану економічну функцію за відомою граничною функцією.

Якщо $C'(x)$, $R'(x)$, $\Pi'(x)$ – функції граничних витрат, доходу та прибутку фірми або підприємства, відповідно, за реалізації x одиниць товару або продукції, то зміни витрат, доходу

та прибутку за зростання реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюють за формулами, відповідно:

$$C(b) - C(a) = \int_a^b C'(x) dx. \quad (11.13)$$

$$R(b) - R(a) = \int_a^b R'(x) dx. \quad (11.14)$$

$$\Pi(b) - \Pi(a) = \int_a^b \Pi'(x) dx. \quad (11.15)$$

Якщо витрати на виготовлення виробу зростають за законом $y = f(x)$, то величину фактичного зв'язування обігових коштів при виготовленні виробу обчислюють за формулою:

$$C_{\text{факт}} = \int_0^T f(x) dx. \quad (11.16)$$

Умовна величина зв'язування обігових коштів (у випадку сплати всіх витрат у перший день) $C_{\text{умов}} = t \cdot C_{\text{заг}}$, де t – тривалість циклу виробництва, $C_{\text{заг}}$ – загальні витрати.

Коефіцієнт готовності виробу обчислюють за формулою:

$$K = \frac{C_{\text{факт}}}{C_{\text{умов}}}. \quad (11.17)$$

Приклад 11.14. Задано граничний прибуток фірми:

$$\Pi'(x) = 23,5 - 0,01x.$$

Знайти величину зростання прибутку, якщо реалізація виробів зростає з 1000 до 1500 одиниць продукції.

Величину зростання прибутку фірми знайдемо за (11.15):

$$\begin{aligned} \Pi(1500) - \Pi(1000) &= \int_{1000}^{1500} (23,5 - 0,01x) dx = \left(23,5x - 0,01 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{1000}^{1500} = \\ &= 35350 - 11250 + 5000 = 5500. \end{aligned}$$

Отже, прибуток зростає на 5500 ум. гр. од.

Приклад 11.15. Задано граничний дохід фірми:

$$R'(x) = 15 - 0,01x.$$

Знайти функцію доходу та визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Функцію доходу фірми можна знайти шляхом інтегрування граничного доходу:

$$\begin{aligned} R(x) &= \int R'(x) dx = \int (15 - 0,01x) dx = 15 \int dx - 0,01 \int x dx = \\ &= 15x - 0,01 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 15x - 0,005x^2 + C. \end{aligned}$$

Для знаходження константи C згадаємо, що дохід має дорівнювати нулю, якщо не продано жодної одиниці продукції, тобто $R=0$ при $x=0$. Маємо:

$$0 = 15 \cdot 0 - 0,005 \cdot 0^2 + C,$$

тоді $C=0$. Отже, функція доходу фірми має вигляд:

$$R(x) = 15x - 0,005x^2.$$

Якщо ціна кожної одиниці проданої фірмою продукції p і продано x одиниць продукції, то:

$$R(x) = px.$$

Таким чином, $px = 15x - 0,005x^2$. Тому $p = 15 - 0,005x$.

Остання рівність описує шукане відношення.

Приклад 11.16. Нехай гранична ціна за продану продукцію описує функція:

$$p'(x) = x + 100,$$

де x – обсяг проданої продукції. Якою буде загальна функція ціни за продану продукцію, якщо ціна 100 одиниць дорівнює 40000 грн.

За означенням граничної ціни маємо:

$$p(x) = \int p'(x) dx = \int (x + 100) dx = x^2/2 + 100x + C.$$

Із умови $p(100) = 40000$ дістанемо:

$$40000 = (100^2/2) + 100 \cdot 100 + C,$$

тому $C = 25000$.

Отже, ціна продукції:

$$p(x) = (x^2/2) + 100x + 25000.$$

11.3.3. Визначення приросту капіталу за відомих інвестицій

Розглянемо задачу визначення приросту капіталу (основних фондів) за відомих чистих інвестицій (капіталовкладення).

Чисті інвестиції – загальні інвестиції, які надходять до економіки за певний проміжок часу із відрахуванням інвестицій на відшкодування витраченого капіталу. Припустимо, що величина капіталу $K = K(t)$ за одиницю часу t збільшується на величину чистих інвестицій $I = I(t)$. Тоді чисті інвестиції – це похідна від капіталу за часом t , тобто:

$$I(t) = K'(t).$$

Часто в економічних дослідженнях доводиться визначати приріст капіталу за проміжок часу від t_1 до t_2 , тобто $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$. Оскільки $K = K(t)$ є первісною для функції $I = I(t)$, то має місце формула:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt. \quad (11.18)$$

Приклад 11.17. За даними чистими інвестиціями

$$I(t) = 50\,000\,t.$$

Обчислити приріст капіталу з першого по третій роки. За скільки років приріст капіталу становитиме 2500000 (ум. гр. од.)?

Приріст капіталу знайдемо за проміжок часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 3$. Для цього скористаємося (11.18):

$$\Delta K = K(3) - K(1) = \int_1^3 50\,000\,t\,dt = 25\,000\,t^2 \Big|_1^3 = 200\,000 \text{ (ум. гр. од.)}.$$

За умовою задачі:

$$\Delta K = 25\,000\,t^2 \Big|_0^T = 25\,000\,000 \Rightarrow T^2 = 100, T = 10.$$

Отже, потрібно 10 років для досягнення приросту капіталу 2500000 (ум. гр. од.).

11.3.4. Оцінка ступеня нерівномірності у розподіленні доходів населення

Розглянемо функцію $y=f(x)$, що характеризує нерівномірний розподіл доходів серед населення, де y – частка сукупного доходу, яку отримує частка x населення. Графік цієї функції називають кривою Лоренца (рис. 11.10).

Очевидно, що $0 \leq f(x) \leq 1$ при $x \in [0; 1]$, і нерівномірність розподілу доходів тим більша, чим більшою є площа фігури OAB .

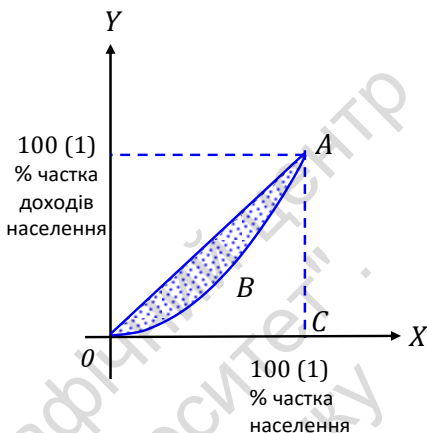


Рис. 11.10

Тому як міру нерівномірності використовують коефіцієнт Джині k , який дорівнює відношенню площі фігури OAB до площі фігури трикутника OAC .

Приклад 11.18. За даними досліджень про розподіл доходів населення певної країни криву Лоренца описує функція:

$$y = 1 - \sqrt{1 - x^2},$$

що характеризує нерівномірний розподіл доходів серед населення, де y – частка сукупного доходу, яку отримує частка x населення.

Обчислити коефіцієнт Джині.

Коефіцієнт Джині обчислюють за формулою:

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}, \text{ оскільки } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Зробимо заміну $x = \sin t, dx = \cos t dt, t_0 = \pi/2, t_n = 0$ і знайдемо інтеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, коефіцієнт Джині:

$$k = 1 - 2S_{OБAC} = 1 - 2 \left(1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \right) = 2 \frac{\pi}{4} - 1 \approx 0,57.$$

Достатньо велике значення коефіцієнта Джині вказує на суттєво нерівномірне розподілення доходів серед населення певної країни.

11.3.5. Застосування визначеного інтеграла у фінансових задачах

Розглянемо деякі застосування визначеного інтеграла у сфері фінансів. У розд. 4 отримано формули, які дозволяють визначати величину внеску S_t за проміжком часу t (кількість років), якщо початковий внесок становив S_0 , а відсоткова ставка – p – % на рік.

Якщо питому відсоткову ставку позначити через $i = p/100$, то у разі застосування **простих відсотків**:

$$S_t = S_0(1+it), \text{ звідки } S_0 = \frac{S_t}{1+it}.$$

Використовуючи **складні відсотки**, маємо:

$$S_t = S_0(1+it)^t, \text{ звідки } S_0 = \frac{S_t}{(1+it)^t}.$$

Якщо відсотки нараховують неперервно, то:

$$S_t = S_0 e^{pt/100} = S_0 e^{it}.$$

Розглянемо тепер обернену задачу. Нехай платежі залежать від часу, тобто є функцією від t , що можна записати як $S_0 = f(t)$. Визначимо величину внеску за T років.

Розіб'ємо T років на n рівних проміжків часу:

$$[0; t_1], [t_1; t_2], \dots, [t_{n-1}; T].$$

На кожному із відрізків виберемо довільну точку $\tau_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = \overline{1, n}$ (τ_k – моменти часу). Якщо надходження

неперервні, то їх можна вважати сталими на кожному відрізку, а їх величина за проміжок часу $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ наближено становить:

$$S_0 \approx f(\tau_k) \Delta t_k.$$

За час $(T - t_k)$ нарощена сума, що обчислена за формулою неперервних відсотків за рахунок нарахування відсотків на внесок $f(\tau_i) \Delta t_i$, становитиме:

$$(f(\tau_i) \Delta t_i) e^{i(T-t_k)}.$$

Для отримання загальної величини внеску S_t за T років достатньо додати всі внески:

$$\Delta S_t \approx \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta t_k e^{i(T-t_k)}.$$

Ця наближена рівність стане точною, якщо $\Delta t_k \rightarrow 0$. Тоді, перейшовши до границі при $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k \rightarrow 0$, дістанемо:

$$S_t = \int_0^T f(t) e^{i(T-t)} dt. \quad (11.19)$$

Задача визначення початкового внеску S_0 за умови, що відомо величину внеску S_t , який отримано за t років за річної відсоткової ставки p , називають **дисконтуванням**.

Початковий внесок обчислюють за формулою:

$$S_0 = S_t e^{-it}$$

у випадку, коли відсотки нараховують неперервно.

Якщо S_t також є функцією часу t , тобто $S_t = g(t)$, то дисконтний внесок у момент часу t становить:

$$S_0 = g(t) e^{-it}.$$

Повну дисконтну суму за час T обчислюють за формулою:

$$S_d = \int_0^T g(t) e^{-it} dt. \quad (11.20)$$

Приклад 11.19. Визначити дисконтну суму за три роки за відсоткової ставки 8 %, якщо базові капіталовкладення становили 10 млн грн, а очікуване зростання капіталу – 1 млн грн.

Капіталовкладення задає функція $g(t)=10+1 \cdot t=10+t$, а $i=p/100=0,08$. За (11.20) обчислюють дисконтну суму капіталовкладень (у млн грн):

$$\begin{aligned} S_d &= \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t} dt = \left| \begin{array}{l} u=10+t, du=dt \\ dv=e^{-0,08t} dt, v=\frac{e^{-0,08t}}{-0,08} \end{array} \right| = \\ &= -12,5e^{-0,08t}(10+t) \Big|_0^3 + 12,5 \int_0^3 e^{-0,08t} dt = \\ &= 12,5 - 162,5e^{-0,24} - 156,25e^{-0,08t} \Big|_0^3 = \\ &= 125 - 162,5e^{-0,24} - 156,25e^{-0,24} + 156,25 = 281,25 - 318e^{-0,24} \approx 31,1. \end{aligned}$$

Отже, дисконтна сума за три роки за відсоткової ставки 8 % становить близько 31,1 млн грн.

11.3.6. Застосування у задачах реалізації товарів

Розглянемо криву попиту деякого товару $p=f(q)$ (рис. 11.11). Якщо p – ціна одиниці товару, то загальна сума витрат на придбання товару обсягом q становить $p \cdot q$. Позначення на рисунку: p_0 – рівноважна ціна, q_0 – обсяг товару, який реалізують за ціною p_0 . Точка рівноваги – це точка перетину кривих попиту й пропозиції.

Припустимо, що товар обсягом q_0 поступає на ринок невеликими партіями Δq (поширена практика реалізації товару). Мета продавця зрозуміла: підтримувати ціну товару вище від рівноважної.

Після надходження першої партії товару його обсяг на ринку становить $q_1=\Delta q$. Ціну, що відповідає цьому обсягу, можна знайти із кривої попиту:

$$p_1=f(q_1).$$

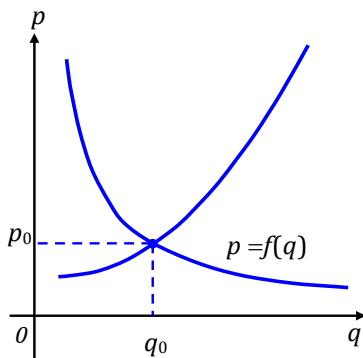


Рис. 11.11

Якщо величина Δq невелика, то можна вважати, що всю партію реалізують за ціною p_1 , а витрати споживача на цю партію товару становлять $p_1 \cdot \Delta q$.

Після надходження на ринок другої партії товару обсягом Δq загальний обсяг його на ринку становить $q_2 = q_1 + \Delta q = 2\Delta q$, а відповідну ціну також визначають із кривої попиту - $p_2 = f(q_2)$. Можна вважати, що другу партію товару обсягом Δq реалізують за ціною p_2 , а витрати споживача на неї становлять $p_2 \cdot \Delta q$.

Цей процес продовжують, доки не дістають $q_n = q_0 = n\Delta q$.

Для того, щоб потрапити у точку q_0 , потрібно вибрати

$$\Delta q = \frac{q_0}{n}.$$

Товар останньої n -ї партії реалізують за рівноважною ціною:

$$p_n = f(q_n) = f(q_0) = p_0.$$

Витрати споживачів на цю партію становлять:

$$p_n \Delta q = p_0 \Delta q.$$

Загальні витрати споживачів на загальний обсяг товару q_0 :

$$\begin{aligned} p_1 \Delta q + p_2 \Delta q + \dots + p_n \Delta q &= p_1 (q_1) \Delta q + p_2 (q_2) \Delta q + \\ &+ p_n (q_n) \Delta q = \sum_{k=1}^n p_k (q_k) \Delta q. \end{aligned}$$

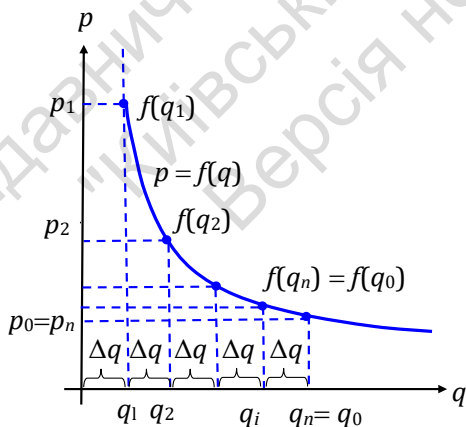


Рис. 11.12

Із геометричних міркувань (рис. 11.12) випливає, що загальні витрати споживачів дорівнюють сумі площ прямокутників, а вона, у свою чергу, наближено дорівнює визначеному інтегралу:

$$\sum_{k=1}^n p_k(q_k) \Delta q \approx \int_0^{q_0} f(q) dq. \quad (11.21)$$

Зі збільшенням n величина Δq відповідно як завгодно мала, тоді наближена рівність перетвориться на точну.

Отже, сумарні витрати споживачів $S_{\text{вум}}$ обчислюють за формулою:

$$S_{\text{вум}} = \int_0^{q_0} f(q) dq. \quad (11.22)$$

Означення. *Надлишок споживача* $S_{\text{надл}}$ – це різниця між можливими й реальними витратами споживача в умовах ринку:

$$S_{\text{надл}} = \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0. \quad (11.23)$$

Геометричну інтерпретацію наведеного означення подано на рис. 11.13.

Приклад 11.20. Знайдемо надлишок споживача, якщо криву попиту визначає функція $p = f(q) = 29 - 3q^2$, а рівноважний обсяг товару становить $q_0 = 2$.

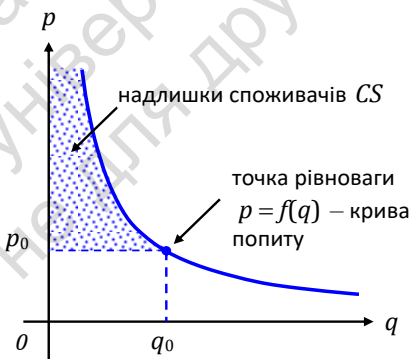


Рис. 11.13

Підстановкою значення $q_0 = 2$ до функції попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 29 - 3 \cdot 2^2 = 17.$$

Використовуючи (11.23), дістанемо:

$$\begin{aligned} S_{\text{надл}} &= \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0 = \int_0^2 (29 - 3q^2) dq - 17 \cdot 2 = (29q - q^3) \Big|_0^2 - 34 = \\ &= 29 \cdot 2 - 8 - 34 = 16. \end{aligned}$$

Розглянемо ще одне поняття ринкової економіки – **додану вартість** або **надлишок виробника**. Для цього візьмемо криву пропозиції деякого товару $p = f(q)$. Графік кривої й точку рівноваги (перетину із кривою попиту) подано на рис. 11.14. Як деякі споживачі завдяки дії ринкових сил мають можливість придбати товар за ціною, нижчою від тієї, яку вони готові були заплатити, так і виробники інколи мають можливість продати товар на ринку за вигіднішою ціною, ніж та, з якою вони погоджувались. Якщо весь товар обсягом q_0 буде реалізовано на ринку за ціною p_0 , то можна обчислити дохід $R = p_0 q_0$.

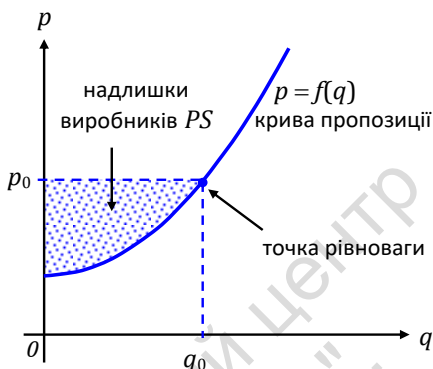


Рис. 11.14

Нехай водночас обсяг товару, менший за q_0 , виробники реалізують за ціною, що нижча за p_0 . Тоді додану вартість виробника $S_{\text{дод.варт}}$ обчислюють за формулою:

$$S_{\text{дод.варт}} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q) dq. \quad (11.24)$$

Приклад 11.21. Знайдемо додану вартість виробників, якщо криву пропозиції визначає функція $p = f(q) = 7 + 4q^3$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 3$.

Підставимо значення $q_0 = 3$ до функції пропозиції і дістанемо рівноважну ціну $p_0 = f(q_0) = 7 + 4 \cdot 3^3 = 115$.

Використовуючи (11.24), дістанемо:

$$\begin{aligned} S_{\text{дод.варт}} &= p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q) dq = 115 \cdot 3 - \\ &\quad - \int_0^3 (7 + 4q^3) dq = 345 - (7q + q^4) \Big|_0^3 = 243. \end{aligned}$$

Заяпитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Як знайти площу плоскої фігури, використовуючи визначений інтеграл?

2. Яку фігуру називають криволінійною трапецією?

Приклад 1. Обчислити площу криволінійної трапеції, що обмежена графіком функції $y = \sin^2 x$ на відрізку $[0, \pi/2]$.

Шукану площу обчислимо за (11.21):

$$S = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, шукана площа:

$$S = \pi/4 \approx 7,142 \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, що обмежена параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = x - 2$ (рис. 11.15).

Побудуємо фігуру. Знаходимо точки перетину заданих ліній. Маємо $4 - x^2 = x - 2$, звідки $x^2 + x - 6 = 0$.

Таким чином, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Тому межі інтегрування:

$$a = -3, b = 2.$$

Обчислимо шукану площу:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^2 (4 - x^2 - (x - 2)) dx = \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx = \\ &= \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^2 = \frac{125}{6} \approx 20,83. \end{aligned}$$

Отже, шукана площа становить $\approx 20,83$ (кв. од.).

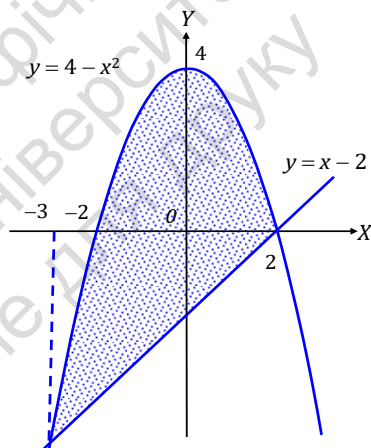


Рис. 11.15

Приклад 3. Обчислити площу фігури, що обмежена кривими

$$y = \frac{8}{4+x^2} \quad \text{та} \quad y = \frac{x^2}{4}$$

(рис. 11.16).

Площу фігури $ACBO$ обчислюють за (11.2). Для цього спочатку знаходять абсиси точок перетину заданих кривих A та B :

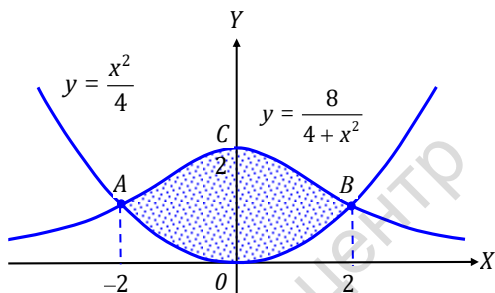


Рис. 11.16

$$\frac{8}{4+x^2} = \frac{x^2}{4}, \quad \text{звідки} \quad x^4 + 4x^2 - 32 = 0.$$

Розв'язки цього біквадратного рівняння:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

Тому межі інтегрування $a = -2$, $b = 2$. Отже,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left(\frac{8}{4+x^2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(4 \arctg \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{-2}^2 = \\ &= 4(\arctg 1 - \arctg(-1)) - \frac{1}{12}(8+8) = 2\pi - \frac{4}{3} \approx 4,95 \quad (\text{кв. од.}). \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями

$$y = \sqrt{x} \quad \text{та} \quad y = 1/x^2.$$

Зобразимо фігуру, яка обмежена заданими лініями (рис. 11.17). Обчислимо площу заштрихованої фігури $S = S_1 + S_2$. Оскільки лінії перетинаються у точці $A(1;1)$, то

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$S_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Отже, шукана площа:

$$S = S_1 + S_2 = 5/3 \approx 1,67 \quad (\text{кв. од.}).$$

3. Як визначають довжину дуги кривої?

4. Як знайти довжину лінії, використовуючи визначений інтеграл?

Приклад 5. Обчислити довжину дуги кривої

$$y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$$

від точки $x=0$ до точки $x=4$.

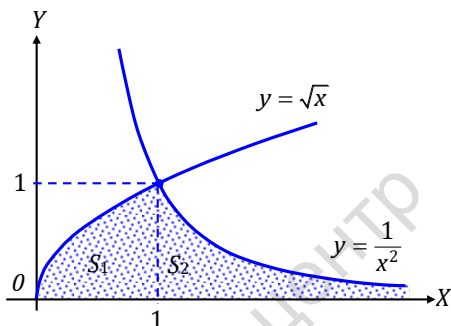


Рис. 11.17

Функція $y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$ – неперервна та диференційована на відрізку $[0; 4]$. Знайдемо похідну функції:

$$y'(x) = 2 \cdot (1/4)(e^{x/4} - e^{-x/4}) = (1/2)(e^{x/4} - e^{-x/4}),$$

тоді

$$\begin{aligned} 1 + (y'(x))^2 &= 1 + 1/4(e^{x/4} - e^{-x/4})^2 = 1 + 1/4(e^{x/2} - 2 + e^{-x/2}) = \\ &= 1/4(e^{x/2} + 2 + e^{-x/2}) = 1/4(e^{x/4} + e^{-x/4})^2. \end{aligned}$$

Підставимо вираз $1 + (y'(x))^2$ до (11.3), дістанемо:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1/4(e^{x/4} + e^{-x/4})^2} dx = 1/2 \int_0^4 (e^{x/4} + e^{-x/4}) dx = \\ &= 2(e^{x/4} - e^{-x/4}) \Big|_0^4 = 2(e - e^{-1}) \approx 4,7. \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(x+1)$ від точки $x=0$ до точки $x=1$.

Функція $y = \ln(x+1)$ неперервна та диференційована на відрізку $[0; 1]$. Знайдемо похідну функції:

$$y'(x) = \frac{1}{(x+1)}$$

і після підстановки її до (11.3), дістанемо:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} dx.$$

Зробимо заміну:

$$t^2 = x^2 + 2x + 2. \text{ Тоді } (x+1)dx = t dt.$$

Змінімо межі інтегрування $t_g = \sqrt{5}$, $t_n = \sqrt{2}$. Остаточню дістанемо:

$$l = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

Приклад 7. Обчислити довжину дуги кривої $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ на відрізку $[0; R]$.

Функція $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ неперервна та диференційована на відрізку $[0, R]$. Знайдемо похідну функції:

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Після підстановки до (11.3) дістанемо:

$$l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \arcsin \left(\frac{x}{R} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R}{2}.$$

Оскільки лінія є четвертиною кола радіуса R , то довжина кола дорівнює $2\pi R$. Отже, отримано формулу, добре відому з елементарної математики.

5. Як визначають об'єм тіла обертання навколо осі OX ?

Приклад 8. Обчислимо об'єм тіла, що утворено обертанням навколо осі OX фігури, яка обмежена лініями

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ та } y = 0.$$

Фігурою, що обмежена лініями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ та $y = 0$ при її обертанні навколо осі OX , є куля із центром у точці $O(0; 0)$ радіуса R . За (11.5) дістанемо:

$$V = \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Отримано добре відому з елементарної математики формулу.

Приклад 9. Коло одиничного радіуса із центром у точці $O(0;2)$ обертається навколо осі OX . Знайдемо об'єм тіла обертання (об'єм тора). Рівняння кола має вигляд:

$$x^2 + (y-2)^2 = 1.$$

Виражаючи y через x , дістанемо:

- рівняння лінії ABC :

$$y = f_1(x) = 2 + \sqrt{1-x^2},$$

- рівняння ADC :

$$y = f_2(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}.$$

Об'єм тора подамо у вигляді різниці об'ємів тіл, що утворені від обертання криволінійних трапецій $EABCF$ та $EADCF$ (рис. 11.18). За (11.5) дістанемо:

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{-1}^1 f_1^2(x) dx - \pi \int_{-1}^1 f_2^2(x) dx = \pi \int_{-1}^1 (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx = \\ &= \pi \int_{-1}^1 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1-x^2} dx = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4\pi^2. \end{aligned}$$

Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі OX фігури, яка обмежена лініями $y=1/x$ і $y=x^2$, $x>0$.

Фігура, що обмежена заданими лініями, необмежена. Тіло, яке утворене при обертанні навколо осі OX (рис. 11.19), має скінчений об'єм, що обчислюють за формулою $V=V_1+V_2$. Тут V_1 і V_2 – об'єми тіл, що утворюються при обертанні навколо осі OX фігури, яка обмежена лініями $y=x^2$, $y=0$, $x=1$ і $y=1/x$.

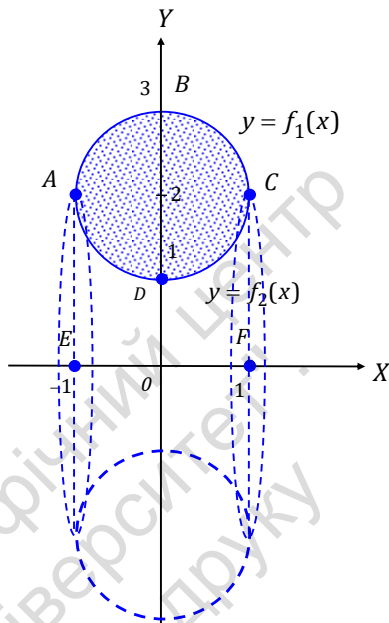


Рис. 11.18

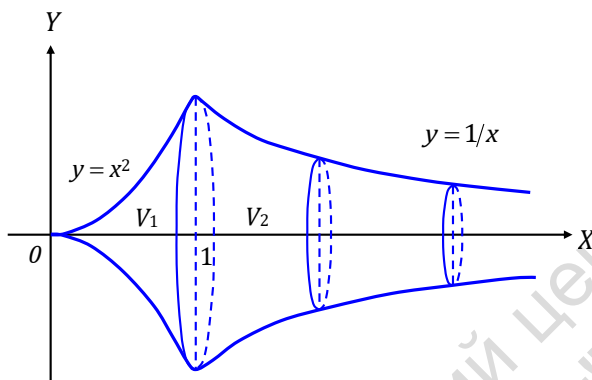


Рис. 11.19

Оскільки лінії перетинаються у точці $(1;1)$, то

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5},$$

$$V_2 = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = \pi.$$

Отже, шуканий об'єм:

$$V = (\pi/5) + \pi = (6\pi/5) \approx 3,77 \text{ (куб. од.)}.$$

6. Як обчислюють площу поверхні обертання?

Приклад 11. Обчислити площу поверхні тіла, що утворено обертанням навколо осі OX фігури, яка обмежена лініями:

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Фігуру, що обмежена заданими лініями, подано на рис. 11.20. Це частина еліптичного параболоїда. При $x \in [0;1]$ функція $y = \sqrt{x}$ має неперервну похідну:

$$y'(x) = 1/(2\sqrt{x}).$$

Використовуючи (11.7), виконуємо обчислення:

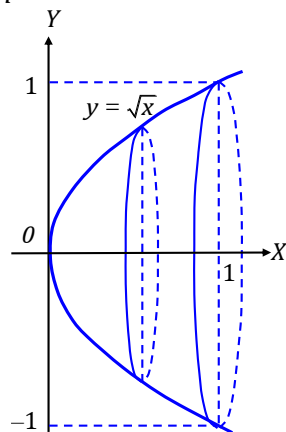


Рис. 11.20

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{4x+1} dx = \left| \frac{4x+1=t}{dx=1/4dt} \right|_{t_6=5, t_n=1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (t\sqrt{t}) \Big|_1^5 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

Приклад 12. Обчислимо площу поверхні тіла, що утворене обертанням навколо осі OX фігури, яка обмежена лініями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y = 0$.

Фігурою, що обмежена лініями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ і $y = 0$ при її обертанні навколо осі, є сфера із центром у точці $O(0;0)$ радіуса R . Знайдемо похідну:

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Якщо $x \in [-R, R]$, то похідна заданої функції неперервна. Використовуючи (11.7), виконуємо обчислення:

$$S = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{R^2 - x^2} \right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{(R^2 - x^2)} \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-R}^R dx = 2\pi R x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2.$$

Отримано добре відому з елементарної математики формулу.

Приклад 13. Обчислимо площу поверхні тіла, що утворене обертанням навколо осі OX фігури, яка обмежена лініями $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \pi/2$.

Знаходимо $y'(x) = 2\cos 2x$. Якщо $x \in [0, \pi/2]$, то похідна заданої функції неперервна. Використовуючи (11.7), дістанемо:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x} dx.$$

Після заміни $t = 2\cos 2x$, $dt = -4\sin 2x dx$, $\sin 2x dx = -(1/4)dt$ знайдемо межі інтегрування за t : якщо $x = 0$, то $t = 2$; якщо $x = \pi/2$, то $t = -2$. Дістанемо:

$$S = 2\pi \int_2^{-2} \left(-\frac{1}{4}\right) \sqrt{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \right).$$

7. У чому полягає економічний зміст визначеного інтеграла?

8. За якою формулою обчислюють обсяг виробленої продукції?

Приклад 14. Продуктивність праці (в ум. од.) протягом робочого дня описує функція $f(t) = -t^2 + 8t + 3$. Обчислити обсяг продукції, що випущена протягом робочого дня ($0 \leq t \leq 8$).

Використовуючи (11.9), дістанемо:

$$q = \int_0^8 (-t^2 + 8t + 3) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + 4t^2 + 3t \right) \Big|_0^8 = 109\frac{1}{3}.$$

Приклад 15. Визначити обсяг продукції, що вироблена за робочий день, якщо продуктивність праці протягом робочого дня описує функція:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t, & 0 < t \leq 4; \\ 0, & 4 < t \leq 5; \\ -t^2 + 13t - 40, & 5 \leq t \leq 8, \end{cases}$$

де t – час від початку робочого дня.

Обсяг продукції, що вироблена за робочий день, можна розглядати як суму обсягів продукції, яку виробляють за 4 год. роботи перед обідньою перервою і 3 год. роботи – після перерви.

Обсяг виробленої продукції можна розглядати як суму обсягів продукції, що вироблена у нескінченно малі проміжки часу, на які поділено відрізок $[0; 8]$: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 8$. Можна вважати, що на кожному із таких нескінченно малих проміжків завдовжки $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ функція $y = f(t)$ не зміниться, отже обсяг виробленої продукції – це добуток продуктивності праці $f(t_k)$ і часу Δt_k . Тоді обсяг продукції, що вироблена за робочий день, становить:

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t_k &= \int_0^4 (-t^2 + 6t) dt + \int_5^8 (-t^2 + 13t - 40) dt = \\ &= \left(-\frac{t^3}{3} + 3t^2 \right) \Big|_0^4 + \left(-\frac{t^3}{3} + 13\frac{t^2}{2} - 40t \right) \Big|_5^8 = 31,17 \text{ (ум. од.)} \end{aligned}$$

9. Як за відомих граничних витрат можна обчислити витрати фірми?

Приклад 16. За функцією граничних витрат

$$C'(x) = 3x^2 - 48x + 202, \quad 1 \leq x \leq 20$$

знайти функцію витрат $C = C(x)$ та обчислити витрати у випадку виробництва 10 од. продукції, якщо відомо, що витрати для виробництва першої одиниці продукції становлять 50 грн.

Функцію витрат знаходимо шляхом інтегрування:

$$C(x) = \int_1^x C'(t) dt + C_0,$$

де константу C_0 можна знайти із умови $C(1) = 50$. Оскільки

$$\int_1^1 C'(x) dx + C_0 = 50,$$

то $C_0 = 50$. Інтегруючи, дістанемо функцію витрат:

$$C(x) = \int_1^x (3t^2 - 48t + 202) dt + 50 = x^3 - 24x^2 + 202x - 129.$$

Підставимо $x = 10$ до отриманої формули та дістанемо шукане значення:

$$C(10) = 491 \text{ ум. гр. од.}$$

10. За якою формулою визначають приріст капіталу за відомих чистих інвестицій?

Приклад 17. Знайти обсяг виробленої за п'ять років продукції, якщо виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд:

$$f(t) = A \cdot K^\alpha(t) \cdot L^\beta(t) \cdot e^{\lambda t},$$

де t – час, що вимірюють роками, а функції $K(t) = (100 - 3t)^2$, $L(t) = (1 + t)^2$, і $A = \lambda = 1$, $\alpha = \beta = 0,5$.

Підставимо функцію $f(t) = (t + 1) \cdot (100 - 3t) \cdot e^t$ до (11.9) та дістанемо:

$$q = \int_0^5 (t + 1) \cdot (100 - 3t) \cdot e^t dt = \int_0^5 e^t (-3t^2 + 97t + 100) dt.$$

Застосувавши двічі формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$q = (-3t^2 + 97t + 100)e^t \Big|_0^5 - (97 - 6t)e^t \Big|_0^5 - 6e^t \Big|_0^5 = 64825 \text{ (ум. гр. од.)}.$$

11. Що характеризує коефіцієнт Джині?

Приклад 18. За даними досліджень розподіл доходів населення деякої країни криву Лоренца описує функція $y = x/(3-2x)$, де y - частка сукупного доходу, яку одержує частина населення x . Обчислити коефіцієнт Джині.

Застосуємо формулу для обчислення коефіцієнта Джині (рис. 11.10) $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}$, дістанемо $S_{\Delta OAC} = 1/2$:

$$\begin{aligned} S_{OABC} &= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{3-2x} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{x-1,5+1,5}{2x-3} \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x-3} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{3}{4} \ln |2x-3| \Big|_0^1 = 1 - 0,75 \ln 3 \approx 0,176. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{0,176}{0,5} = 0,352. \text{ С.}$$

12. За якою формулою визначають дисконтну суму?

Приклад 19. Знайти середнє значення витрат виробництва (які визначає залежність $C(x) = 3x^2 + 4x + 1$), від обсягу x одиниць виробленої продукції ($0 \leq x \leq 3$); визначити обсяг виробництва, за якого витрати набувають середнього значення.

За (11.10) знайдемо середнє значення витрат виробництва:

$$C_{\text{сеп}} = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} C(x) dx = \frac{1}{3-0} \int_0^3 (3x^2 + 4x + 1) dx = \frac{1}{3} (x^3 + 2x^2 + x) \Big|_0^3 = 16.$$

Оскільки функція витрат $C(x) = 3x^2 + 4x + 1$ неперервна при $0 \leq x \leq 3$, то в деякій точці x_0 вона досягає свого середнього значення, тобто: $C(x_0) = C_{\text{сеп}}$ або $3x_0^2 + 4x_0 + 1 = 16$.

Рівняння має корені $x_1 = -3$ і $x_2 = 5/3$. Отже, обсяг виробництва, за якого витрати набувають середнього значення:

$$5/3 \approx 1,67 \text{ (ум. од.)}.$$

Приклад 20. Під будівництво задано неперервний грошовий потік зі швидкістю $I(t) = -t^2 + 20t + 5$ (млрд грн/рік) протягом 20 років із річною відсотковою ставкою $p = 5\%$. Знайти дисконтну вартість цього потоку.

Якщо $I = I(t)$ – швидкість грошового потоку (величина потоку за проміжок часу від t до $t + dt$ наближено дорівнює $I(t)dt$), $0 \leq t \leq T$. Величину грошового потоку $\Pi = \Pi(t)$ визначимо за формулою:

$$\Pi = \int_0^T I(t)e^{-pt} dt, \text{ тоді } \Pi = \int_0^{20} (-t^2 + 20t + 5)e^{-0,05t} dt.$$

Для обчислення цього інтеграла спочатку зробимо заміну $s = -0,05t$, $t = -20s$, $dt = -20ds$; і новими межами інтегрування є $s_H = 0$, $s_g = -1$. Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{20} (-t^2 + 20t + 5)e^{-0,05t} dt = -20 \int_0^{-1} (-400s^2 - 400s + 5)e^s ds = \\ &= 20 \int_{-1}^0 (-400s^2 - 400s + 5)e^s ds = \left| \begin{array}{l} u = -400s^2 - 400s + 5, \\ du = -(800s + 400)ds \\ e^s ds = dv, v = e^s \end{array} \right| = \\ &= 20 \left((-400s^2 - 400s + 5)e^s \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (800s + 400)e^s ds \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 800s + 400, du = ds \\ e^s ds = dv, v = e^s \end{array} \right| = \\ &= 20 \left(5 - 5e^{-1} + (800s + 400) \Big|_{-1}^0 + 800 \int_{-1}^0 e^s ds \right) = \\ &= 20 \cdot (5 - 5e^{-1} + 400 + (800 - 400)e^{-1} - 800 + 800e^{-1}) = \\ &= 20(1195e^{-1} - 395) \approx 892. \end{aligned}$$

Остаточного маємо: $\Pi = 892$ (млрд грн).

Розділ 12

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

12.1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь

Математичне моделювання економічних і природничих процесів приводить до необхідності розв'язування рівнянь, які, крім незалежних змінних і залежних від них шуканих функцій, містять також похідні або диференціали від невідомих функцій. Такі рівняння називають диференціальними.

У цьому розділі викладено елементи звичайних диференціальних рівнянь, коли невідомі функції залежать від однієї змінної. Теорія диференціальних рівнянь, коли невідомі функції залежать від багатьох змінних (рівняння у частинних похідних), складніша й у цьому розділі не розглядатиметься.

Означення. Рівняння, які пов'язують незалежну змінну x , шукану функцію $y = y(x)$ та її похідні або диференціали до деякого порядку n , називають **диференціальними рівняннями n -го порядку**.

Означення. **Порядком диференціального рівняння** називають найвищий порядок похідної або диференціала від шуканої функції, яка входить до диференціального рівняння.

Загальний вигляд звичайного диференціального рівняння n -го порядку:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \quad (12.1)$$

де F – деяка відома функція, x – незалежна змінна, y – шукана функція, $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ – її похідні.

Диференціальне рівняння (12.1) є рівнянням, яке не розв'язане щодо старшої похідної.

Досить часто зустрічаються диференціальні рівняння, в яких старша похідна $y^{(n)}(x)$ виражена в явному вигляді як функція аргументу x , невідомої функції $y = y(x)$ та її похідних нижчих порядків у вигляді:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right). \quad (12.2)$$

Рівняння виду (12.2) – це рівняння, яке *розв'язане щодо старшої похідної*.

Якщо невідома функція є функцією кількох змінних, то диференціальне рівняння називають **рівнянням у частинних похідних**. У цьому розділі розглянемо диференціальні рівняння для функції лише однієї змінної, тому далі термін "звичайне" стосовно диференціального рівняння опускатимемо.

Означення. Функцію $y = \varphi(x)$ називають **розв'язком** (або інтегралом) диференціального рівняння (12.1) або (12.2), якщо вона n разів диференційована та неперервна на деякому проміжку X і підстановка якої до рівняння (12.1) перетворює його на тотожність.

Приклад 12.1. Нехай $y = f(x)$ – неперервна на проміжку X функція, $y = F(x)$ – її первісна, тоді

$$F'(x) = f(x),$$

і для знаходження первісної отримано звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язки відомі:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C,$$

$x_0 \in X$, C – довільна стала. Це диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків, що справджується для всіх звичайних диференціальних рівнянь.

Щоб виділити єдиний розв'язок рівняння (12.2), достатньо задати значення первісної $y = F(x)$ у довільній точці $F(x_0) = F_0$. Тоді розв'язок єдиний:

$$F(x) = F_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і до алгебраїчних операцій, то кажуть, що *рівняння інтегрується у квадратурах*. Але клас таких рівнянь досить вузький. Тому для дослідження диференціальних рівнянь застосовують наближені й чисельні методи їх розв'язання.

Означення. *Загальним розв'язком рівняння (12.1) або (12.2) називають n -параметричну сукупність функцій:*

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

з якої за відповідного вибору значень параметрів можна знайти розв'язок рівняння (12.1), що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n.$$

Сукупність функцій, яка містить усі розв'язки цього рівняння, не завжди вдається виразити у вигляді явної функції незалежної змінної, тоді її можна записати у вигляді неявної функції:

$$\Phi(x, y(x), c_1, c_2, \dots, c_n) = 0.$$

У такому разі її називають *загальним інтегралом рівняння (12.1)*.

Означення. *Частинним розв'язком рівняння (12.1) називають розв'язок, який можна дістати із загального розв'язку за деяких конкретних значень параметрів $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$.*

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають *інтегруванням* цього рівняння, а графік частинного розв'язку – *інтегральною кривою* цього рівняння. Рівняння (12.1) і (12.2) мають безліч розв'язків, які утворюють сукупність інтегральних кривих.

Розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти всі його розв'язки.

У теорії диференціальних рівнянь потрібно дати відповіді на такі запитання:

1. Чи існує розв'язок диференціального рівняння?
2. Якою є множина розв'язків диференціального рівняння?
3. Як знайти розв'язок диференціального рівняння?
4. Якщо розв'язків диференціального рівняння багато, то як відрізнити один розв'язок від іншого й як виділити конкретний розв'язок?
5. Якщо не вдається знайти розв'язок у явному вигляді, то як визначити властивості розв'язків?
6. Якщо не вдається знайти точний розв'язок, то як знайти наближений?

Відповіді на ці запитання шукатимемо у процесі вивчення цього розділу.

Розглянемо кілька економічних задач, які приводять до диференціальних рівнянь.

12.2. Економічні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

12.2.1. Задача про накопичення капіталу

Нехай підприємство (фірма) із початковим капіталом K_0 почало діяти з метою накопичення капіталу. $K = K(t)$ – функція капіталу, який з часом t змінюється. Опишемо динаміку цього процесу.

Позначимо $K(t)$ – капітал підприємства (фірми) у момент часу t , а $K(t + \Delta t)$ – у момент часу $t + \Delta t$. Тоді різниця $\Delta K = K(t + \Delta t) - K(t)$ дає приріст капіталу за проміжок часу Δt . Цей приріст визначають як різницю доходу за проміжок часу Δt і повних витрат на виробництво. У загальному випадку цей приріст визначає формула:

$$\Delta K = \Delta R - \Delta C, \quad (12.3)$$

де $\Delta R = R(t + \Delta t) - R(t)$, $\Delta C = C(t + \Delta t) - C(t)$ – прирости функцій доходу та повних витрат підприємства (фірми), відповідно.

Співвідношення (12.3) і є, загалом кажучи, рівнянням накопичення капіталу. Для його розв'язання потрібно знати функції доходу $R = R(t)$ і повних витрат $C = C(t)$ підприємства (фірми). Ця проблема є однією із важливих у теорії моделювання економічних процесів.

Розглянемо, наприклад випадок, за якого прирости функцій ΔR і ΔC мають вигляд:

$$\Delta R = \alpha K(t) \Delta t \text{ і } \Delta C = \beta K(t) \Delta t.$$

Додатні коефіцієнти α та β характеризують інтенсивність зміни доходу та повних витрат підприємства (фірми), відповідно. Тоді співвідношення (12.3) запишемо у вигляді:

$$\Delta K = \lambda K(t) \cdot \Delta t,$$

де $\lambda = \alpha - \beta$. Поділимо обидві частини рівняння на $\Delta t \neq 0$. Перейшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, дістанемо диференціальне рівняння:

$$K'(t) = \lambda K(t). \quad (12.4)$$

12.2.2. Задача про розмноження популяцій

Проаналізуємо процес розмноження деякої популяції живих організмів. Позначимо $K = K(t)$ – обсяг популяції (кількість осіб) у момент часу t у деякій формі. Це може бути загальна кількість осіб популяції або їхня маса. Ідеалізуючи досліджуваний процес, вважатимемо, що $K = K(t)$ – неперервна функція, яка змінюватиметься у часі.

Позначимо коефіцієнти прибуття та вибуття осіб популяції через ρ і μ , відповідно. Отже, прибуття/вибуття веде до збільшення/зменшення осіб популяції за рік на величини $\rho K(t)$ і $\mu K(t)$, а за проміжок часу Δt – на величини $\rho K(t)\Delta t$ і $\mu K(t)\Delta t$, відповідно (вважатимемо, що прибуття/вибуття осіб популяції відбувається рівномірно). У цьому найпростішому випадку приймемо таку гіпотезу (закон Мальтуса): за малий проміжок часу від t до $t + \Delta t$ кількість осіб, які прибули, наближено становить $\rho K(t)\Delta t$, а тих, які вибули, – $\mu K(t)\Delta t$. Тоді зміну величини популяції за час Δt визначають так:

$$\Delta K = K(t + \Delta t) - K(t) = (\rho - \mu)K(t)\Delta t. \quad (12.5)$$

Поділивши обидві частини рівняння на $\Delta t \neq 0$, дістанемо:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = (\rho - \mu)K(t)$$

і позначимо $\lambda = \rho - \mu$. Тоді при $\Delta t \rightarrow 0$, маємо диференціальне рівняння:

$$K'(t) = \lambda K(t). \quad (12.6)$$

12.2.3. Демографічна задача

Нехай населення країни у момент часу t визначає функція $L = L(t)$. Природно припустити, що збільшення населення за проміжок часу Δt пропорційне чисельності населення $L(t)$ і Δt . Тоді дістанемо приріст населення:

$$\Delta L = L(t + \Delta t) - L(t) = \alpha L(t)\Delta t. \quad (12.7)$$

Поділимо рівняння на $\Delta t \neq 0$. При $\Delta t \rightarrow 0$ дістанемо диференціальне рівняння:

$$L'(t) = \alpha L(t). \quad (12.8)$$

Частинним розв'язком рівняння (12.8), як покажемо далі, є функція $L(t) = L_0 e^{-\alpha t}$, де L_0 – чисельність населення у початковий момент спостереження. Такий закон зростання називають *експоненціальним*. Цей процес не може бути довготривалим, оскільки включаються механізми протидії: зниження життєвого рівня, заходи з обмеження народжуваності тощо, і зростання чисельності населення гальмується.

12.2.4. Задача про рекламу

Нехай торгова фірма реалізує продукцію, про яку у момент часу t із числа потенційних покупців n знає лише $y = y(t)$ покупців. Після проведення рекламної кампанії швидкість зміни кількості покупців, що знають про продукцію, пропорційна як кількості покупців, що знають про товар, так і кількості покупців, яким про нього нічого невідомо.

Знайдемо закон зміни залежно від часу кількості покупців x , які знають про продукцію, якщо у початковий момент часу ($t=0$) про товар дізналися n/γ осіб (час відраховують від початку рекламних оголошень), γ – задане число.

Оскільки швидкість зміни кількості покупців, які знають про товар, виражає похідна $y'(t)$, то дістанемо диференціальне рівняння:

$$y'(t) = ky(n - y), \quad (12.9)$$

де y – кількість покупців, яким відомо про товар, а $(n - y)$ – кількість тих, які не відомо про товар у момент часу t , а k – коефіцієнт пропорційності.

12.3. Диференціальні рівняння першого порядку

12.3.1. Основні поняття

Означення. Рівняння вигляду $F(x, y, y') = 0$, де x – невідома змінна, y і y' – шукана функція та її похідна, відповідно, називають *диференціальним рівнянням першого порядку*.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y = \varphi(x)$, підстановка якої до заданого рівняння перетворює його на тотожність.

Приклад. 12.2. Функція $y = x^2$ тотожно перетворює на нуль ліву частину рівняння $xy' - 2x^2 = 0$, тому вона є розв'язком цього рівняння.

У теорії диференціальних рівнянь основна задача – дати відповідь на запитання про існування та єдність розв'язку рівняння. Відповідь дає теорема Коші, яку сформулюємо без доведення.

ТЕОРЕМА (Коші)

Нехай задано диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x; y)$. Якщо функція $f(x, y)$ та її похідна $f'_y(x; y)$ неперервні в деякій області D площини $ХОУ$, то в деякому околі довільної внутрішньої точки $M_0(x_0, y_0)$ цієї області існує єдиний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкові умови $y = y_0$ при $x = x_0$.

Оскільки графік частинного розв'язку диференціального рівняння називають інтегральною кривою, то в області D міститься багато інтегральних кривих. Теорема Коші гарантує, що при виконанні певних умов через кожну внутрішню точку області D проходить тільки одна інтегральна крива.

Умови, які задають значення функції y_0 у фіксованій точці x_0 , називають **початковими умовами** й записують так:

$$y(x_0) = y_0.$$

Задачу знаходження розв'язку рівняння, який задовольняє початкові умови, називають **задачею Коші**. Геометрично це означає, що із множини інтегральних кривих виокремлюють ту, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ в області D .

Якщо умови теореми Коші не виконуються, то через деякі точки площини $ХОУ$ або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить більш ніж одна інтегральна крива. Ці точки називають **особливими точками** заданого диференціального рівняння.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y = \varphi(x, C)$, підстановка якої до рівняння перетворює його на тотожність.

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку залежить від однієї довільної сталої C .

Задачу про знаходження розв'язку диференціального рівняння називають **задачею інтегрування диференціального рівняння**.

Означення. Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y = \varphi(x, C)$, яку дістають за певного значення сталої $C = C_0$.

Загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$, описує сукупність інтегральних кривих на площині XOY .

Початкові умови фіксують довільну сталу та дозволяють вибрати із сукупності інтегральних кривих рівняння криву $y = \varphi(x, C)$, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$

Приклад 12.3. Розв'яжемо рівняння $y' = 2x$.

Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші у всіх точках площини XOY , оскільки функції $f(x, y) = 2x$ та $f'_y(x, y) = 0$ визначені та неперервні на площині XOY .

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = x^2 + C$ (де C – довільна стала), що описує сукупність парабол (рис. 12.1).

Для знаходження частинного розв'язку використаємо початкові умови виду $y(x_0) = y_0$ і підставимо їх до формули загального розв'язку. Дістанемо:

$$C = y_0 - x_0^2.$$

Тому частинний розв'язок виділяє із сукупності парабол одну, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

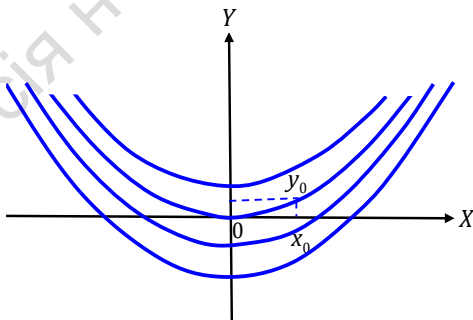


Рис. 12.1

Можна вважати $y = y(x)$ невідомою функцією від незалежної змінної x , або $x = x(y)$ – невідомою функцією від незалежної змінної y .

Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ полягає у наступному. Оскільки, згідно з рівнянням у кожній точці області D , де задана функція $f(x, y)$, визначають похідну першого порядку, тобто кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = \varphi(x; C)$, то говорять, що диференціальне рівняння задає поле напрямів в області D .

12.3.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння виду:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (12.10)$$

якщо $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – неперервні функції, називають **рівнянням з відокремлюваними змінними**.

Значимо, що права частина (12.10) є добутком двох функцій співмножників, одна з яких залежить тільки від x , а інша – тільки від y . Метод розв'язування цього рівняння – **метод відокремлення змінних**.

Запишемо похідну $y' = \frac{dy}{dx}$, помножимо на dx і поділимо на $f_2(y)$ обидві частини (12.10) за умови, що $f_2(y) \neq 0$.

Тоді дістанемо **рівняння з відокремленими змінними**:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (12.11)$$

У цьому рівнянні змінна y входить тільки до лівої частини, а змінна x – тільки до правої частини, тобто **змінні відокремлені**.

Оскільки у (12.11) диференціали рівні, то їхні невизначені інтеграли відрізняються лише на сталу, тобто, інтегруючи обидві частини рівняння, дістанемо:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C, \text{ де } C - \text{довільна стала.}$$

Диференціальне рівняння вигляду:

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0 \quad (12.12)$$

при $f_2(y) \neq 0$, $\varphi_1(x) \neq 0$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (12.10).

Алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь з відокремленими змінними:

Крок 1. Поділимо (12.12) на добуток $\varphi_1(x)f_2(y)$ (за умови, що $\varphi_1(x)f_2(y) \neq 0$), одержимо рівняння, в якому коефіцієнт при диференціалі dy є функцією тільки від змінної y , а коефіцієнт при диференціалі dx – тільки від змінної x . Таким чином, змінні відокремлені:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = 0.$$

Крок 2. Інтегруємо (12.12) і дістанемо загальний інтеграл рівняння:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

Крок 3. Обчисливши інтеграли, одержуємо розв'язки рівняння у вигляді:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ або } y = \varphi(x, C).$$

Точки площини, в яких умови теореми Коші порушуються, називають **особливими точками**. Розв'язки рівняння, за яких $\varphi_1(x)f_2(y) = 0$, називають **особливими розв'язками**, оскільки їх неможна отримати із загального розв'язку за жодного значення довільної сталої.

Приклад 12.4. Розв'яжемо диференціальне рівняння:

$$x\sqrt{y^2-1} dx + y\sqrt{x^2-1} dy = 0.$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Діятимемо відповідно до алгоритму.

Крок 1. Відокремимо змінні. Поділивши обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{y^2-1} \cdot \sqrt{x^2-1} \neq 0$, дістанемо:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} dy = 0.$$

Крок 2. Оскільки змінні відокремлені, то можна інтегрувати рівняння почлено:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx + \int \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} dy = C.$$

Крок 3. Обчисливши інтеграли, одержуємо загальний розв'язок рівняння, яким буде функція:

$$\sqrt{y^2-1} + \sqrt{x^2-1} = C.$$

Крок 4. Необхідно окремо розглянути випадок, за якого $\sqrt{y^2-1} \cdot \sqrt{x^2-1} = 0$. За допомогою безпосередньої перевірки переконуємося, що функції $x = \pm 1$ та $y = \pm 1$ також є розв'язками рівняння, які потрібно приєднати до загального розв'язку.

Приклад 12.5. Розв'яжемо задачу Коші для диференціального рівняння $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$.

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Перепишемо його у вигляді:

$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

та діятимемо відповідно до алгоритму.

Крок 1. Підставимо замість y' вираз $\frac{dy}{dx}$, дістанемо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Крок 2. Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

звідки дістанемо загальний інтеграл рівняння $\ln|y| = \sqrt{x} + C_1$.

Оскільки $C_1 = \text{const}$, то для зручності виразу позначимо $C_1 = \ln|C|$ і потенціюємо обидві частини рівняння.

Крок 3. Отримаємо загальний розв'язок:

$$y(x) = C e^{\sqrt{x}}.$$

Крок 4. Для визначення значення сталої C підставимо до загального розв'язку початкову умову:

$$y(4) = C e^{\sqrt{4}} = 1, \text{ звідки } C = e^{-2}.$$

Отже, частинний розв'язок цього рівняння, тобто розв'язок задачі Коші, матиме вигляд $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

Приклад 12.6. Розв'яжемо задачу Коші для диференціального рівняння:

$$\cos^2 x \cdot y' = \frac{y}{\ln y}, \quad y(0) = 1.$$

Крок 1. Спочатку виразимо $y' = \frac{dy}{dx}$ та підставимо до рівняння:

$$\cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y},$$

потім відокремимо змінні:

$$\frac{\ln y \, dy}{y} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Крок 2. Інтегруємо обидві частини рівняння, дістанемо:

$$\int \frac{\ln y \, dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Крок 3. Визначимо інтеграли та отримаємо загальний розв'язок: $(1/2)\ln^2 y = \operatorname{tg} x + C$, де C – довільна стала.

Крок 4. Підставимо початкові умови $y(0) = 1$ до загального розв'язку рівняння і визначимо сталу C , дістанемо вираз:

$$(1/2)\ln^2 1 = \operatorname{tg} 0 + C, \quad C = 0.$$

Отже, частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші) рівняння:

$$(1/2)\ln^2 y = \operatorname{tg} x \quad \text{або} \quad y = e^{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}.$$

12.3.3. Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називають **однорідним**, якщо воно має вид:

$$f(x; y)dx = g(x; y)dy, \quad (12.13)$$

де $f(x; y)$ і $g(x; y)$ – однорідні функції однакового степеня.

Поняття однорідного диференціального рівняння пов'язане з однорідними функціями.

Означення. Функцію $f(x; y)$ називають **однорідною n -го степеня** (за змінними x та y), якщо для довільного t виконується рівність:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Приклад 12.7. Визначити, чи однорідними є функції:

1) $f(x; y) = x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - 5y^3$;

2) $f(x; y) = \frac{x-y}{x+y}$; 3) $f(x; y) = xy + 1$.

1) Підставимо до $f(x, y)$ значення tx, ty замість змінних x та y :

$$\begin{aligned} f(tx; ty) &= t^3x^3 - 3t^2x^2ty + 4txt^2y^2 - 5t^3y^3 = \\ &= t^3(x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - 5y^3) = t^3f(x; y). \end{aligned}$$

Отже, ця функція однорідна третього степеня.

2) Оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{tx - ty}{tx + ty} = \frac{t(x - y)}{t(x + y)} = \frac{x - y}{x + y} = f(x; y),$$

то це – однорідна функція нульового степеня.

3) Оскільки $f(tx; ty) = txt + 1 = t^2xy + 1$, то ця функція не є однорідною.

Розглянемо **метод розв'язування однорідного диференціального рівняння** (12.13).

Введемо допоміжну функцію $t = t(x)$, тобто зробимо заміну $t = y/x$, звідки $y = tx$ тоді $dy = tdx + xdt$. Ця заміна дозволяє звести рівняння (12.13) до рівняння із відокремлюваними змінними.

Алгоритм розв'язання однорідних диференціальних рівнянь:

Крок 1. Переконалися, що диференціальне рівняння однорідне.

Крок 2. У рівнянні (12.13) зробити заміну:

$$y = tx, \text{ тоді } dy = tdx + xdt.$$

Після заміни одержимо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$f(x, tx)dx = g(x, tx)(tdx + xdt).$$

Далі потрібно розв'язати отримане рівняння.

Крок 3. Зробити зворотну заміну $t = y/x$, записати розв'язки рівняння у вигляді:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ або } y = \varphi(x, C).$$

Приклад 12.8. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0.$$

Крок 1. Спочатку переконаємося, що це однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{xy} \text{ або } xydy = -(x^2 + y^2)dx.$$

Розглянемо функції $f(x; y) = xy$ і $g(x; y) = x^2 + y^2$, тоді:

$$f(tx; ty) = t^2 xy = t^2 f(x; y),$$

$$g(tx; ty) = t^2 x^2 + t^2 y^2 = t^2 (x^2 + y^2) = t^2 g(x; y).$$

Отже, функції $f(x; y)$ і $g(x; y)$ однорідні другого степеня. Тоді це рівняння однорідне за означенням.

Крок 2. Зробимо заміну $y = tx$ і $dy = tdx + xdt$. Дістанемо:
 $x \cdot tx(xdt + tdx) = -(x^2 + t^2 x^2)dx \Rightarrow tx^3 dt + t^2 x^2 dx = -x^2(1 + t^2)dx.$
 Отримано диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$x^2(1 + 2t^2)dx = -tx^3 dt.$$

Поділимо рівняння на x^2 . Причому, $x=0$ – це особливий розв'язок рівняння. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$(1 + 2t^2)dx = -txdt.$$

Відокремлюємо змінні в рівнянні:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{t \cdot dt}{2t^2 + 1}.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, розв'яжемо його:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{t \cdot dt}{2t^2 + 1}.$$

$$\ln|x| + \ln|C_1| = -\frac{1}{4} \ln|2t^2 + 1| \Rightarrow 4\ln|C_1 x| = -\ln|2t^2 + 1| \Rightarrow$$

$$\ln(|C_1 x|)^4 = \ln(2t^2 + 1)^{-1} \Rightarrow Cx^4 = (2t^2 + 1)^{-1} \Rightarrow C = (C_1)^4.$$

Крок 3. Зробивши зворотну заміну, дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$Cx^4 = \left(2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right)^{-1}, \text{ звідки } Cx^4 = \frac{x^2}{2y^2 + x^2}.$$

Остаточно маємо загальний розв'язок $Cx^2(2y^2 + x^2) = 1$ та особливий розв'язок рівняння $x = 0$.

Приклад 12.9. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$x \cos(y/x)(ydx + xdy) - y \sin(y/x)(xdy - ydx) = 0.$$

Крок 1. Легко перекоонатись, що рівняння однорідне.

Крок 2. Зробимо заміну $y = tx$, $dy = tdx + xdt$ і підставимо вирази для y та dy до заданого рівняння, дістанемо:

$$x \cos t (txdx + x(tdx + xdt)) - tx \sin t (x(tdx + xdt) - txdx) = 0.$$

$$x \cos t (txdx + xtdx + x^2dt) - tx \sin t (xtdx + x^2dt - txdx) = 0.$$

Після спрощень маємо:

$$x \cdot \cos t (2txdx + x^2dt) - tx \sin t \cdot (x^2dt) = 0,$$

$$2tx^2 \cdot \cos t dx + x^3 \cos t dt - tx^3 \sin t dt = 0,$$

$$2tx^2 \cdot \cos t dx + x^3 (\cos t - t \sin t) dt = 0.$$

Це рівняння із відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його. Розкриємо дужки, відокремимо змінні, урахувавши, що $x = 0$ – особливий розв'язок, дістанемо:

$$\frac{2x^2 dx}{x^3} + \frac{(\cos t - t \sin t) dt}{t \cos t} = 0 \Leftrightarrow \frac{2dx}{x} = - \frac{(\cos t - t \sin t) dt}{t \cos t},$$

$$\frac{2dx}{x} = - \frac{dt}{t} + \operatorname{tg} t dt.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$2 \int \frac{dx}{x} = \int \operatorname{tg} t dt - \int \frac{dt}{t}.$$

$$2 \ln|x| + \ln|C| = -\ln|\cos t| - \ln|t| \Rightarrow \ln|Cx^2| = \ln|t \cos t|^{-1} \dots$$

Після операції потенціювання дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$Cx^2 = \frac{1}{t \cos t}.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$Cx^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{y}.$$

Остаточно запишемо загальний та особливий розв'язки рівняння:

$$y = \left(Cx \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right)^{-1}, \quad x = 0.$$

12.3.4. Лінійні диференціальні рівняння

Означення. Рівняння виду:

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (12.14)$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – неперервні функції, називають **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння (12.14) називають **лінійним однорідним**. Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називають **лінійним неоднорідним**. Невідома функція та її похідна входять до цього рівняння у першому степені, тобто лінійно, що й пояснює його назву.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння:

$$y' + p(x)y = 0, \quad (12.15)$$

що відповідає неоднорідному рівнянню (12.14).

Розглянемо методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

1. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) використовують для розв'язування неоднорідного рівняння (12.14). Він базується на розв'язуванні однорідного рівняння (12.15).

Рівняння (12.15) можна розв'язати методом відокремлення змінних. Маємо:

$$\frac{dy}{y} = -p(x), \text{ звідки } \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|.$$

Після операції потенціювання дістанемо загальний розв'язок однорідного рівняння (12.13):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \text{ де } C = \pm C_1. \quad (12.16)$$

Загальний розв'язок (12.14) шукатимемо у вигляді (12.16), вибираючи сталу C новою невідомою функцією від аргументу x :

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Щоб знайти функцію $C(x)$, підставимо розв'язок (12.16) до (12.14):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Після зведення подібних членів дістанемо:

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}. \quad (12.17)$$

Інтегруючи (12.17), дістанемо вираз для $C(x)$:

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} + C_1,$$

підстановка якого до формули загального розв'язку однорідного рівняння (12.16) приводить до остаточного вигляду розв'язку неоднорідного рівняння (12.14):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[C_1 + \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx \right], \quad (12.18)$$

де C_1 – довільна стала.

Приклад 12.10. Розв'язати рівняння $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x$.

Розв'яжемо рівняння методом варіації довільної сталої. Спочатку складаємо однорідне рівняння, яке відповідає вихідному:

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot y.$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо рівняння та знайдемо його загальний розв'язок. Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx$$

та інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|C| \Rightarrow y = \frac{C}{\cos x}.$$

Припустимо, що $C = C(x)$. Тоді, підставивши до вихідного рівняння вирази:

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}, \quad y' = \frac{C'(x) \cdot \cos x - C(x) \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2},$$

отримаємо:

$$\frac{C'(x) \cdot \cos x + C(x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2} - \operatorname{tg} x \cdot \frac{C(x)}{\cos x} = \cos x.$$

Зведемо подібні члени й отримаємо:

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \Rightarrow dC(x) = \cos^2 x \, dx.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int dC(x) = \int \cos^2 x \, dx \Rightarrow C(x) = \int \frac{(1 + \cos 2x) dx}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Підставимо замість довільної сталої до загального розв'язку лінійного однорідного рівняння знайдене значення $C = C(x)$. Здобудемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

2. Метод Бернуллі – метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

У (12.14) $y' + p(x)y = f(x)$ зробимо заміну $y(x) = u(x)v(x)$, де $u(x)$ та $v(x)$ – нові невідомі функції.

Виразимо із заміни похідну:

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

і підставимо до рівняння (12.14), дістанемо:

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = f(x) \quad \text{або}$$

$$u'v + (v' + p(x)v)u = f(x).$$

Зауважимо, що одну із функцій заміни можна обирати довільним чином, тому функцію $v(x)$ доберемо так, щоб множник у дужках при $u(x)$ у рівнянні перетворився на нуль. Обираємо функцію $v(x)$ так, щоб вона була частинним розв'язком рівняння:

$$v'(x) + p(x)v(x) = 0. \quad (12.19)$$

Тоді друга функція має задовольняти рівняння:

$$u'(x)v(x) = f(x). \quad (12.20)$$

Рівняння (12.19) є рівнянням з відокремленими змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v, \text{ звідки } \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

$$\text{Інтегруємо обидві частини рівняння } \ln|v| = -\int p(x)dx + C_1.$$

Оскільки ми шукаємо частинний розв'язок, то покладемо $C_1 = 0$ і дістанемо вираз для функції $v = v(x)$:

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \quad (12.21)$$

Підставимо (12.21) до (12.20), дістанемо щодо функції $u = u(x)$ диференціальне рівняння першого порядку із відокремленими змінними:

$$u'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{du}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи рівняння, дістанемо вираз для функції $u = u(x)$:

$$u(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} + C. \quad (12.22)$$

Зробимо зворотну заміну:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} + C \right) e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Таким чином, має місце (12.18).

Приклад 12.11. Розв'язати рівняння $y' + \frac{1}{x}y = 3x$.

Застосуємо метод Бернуллі. Зробимо відповідну заміну:

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x \Rightarrow \begin{cases} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{cases} \Rightarrow u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = 3x.$$

Функцію $u(x)$ доберемо так, щоб множник у дужках при $v(x)$ у рівнянні перетворився на нуль. Від рівняння переходимо до системи рівнянь. Обидва рівняння системи є рівняннями з відокремлюваними змінними.

$$v \left(u' + \frac{1}{x}u \right) + uv' = 3x \Rightarrow \begin{cases} u' + \frac{1}{x}u = 0 \\ uv' = 3x \end{cases}.$$

Інтегруючи перше рівняння системи, знайдемо функцію $u = u(x)$:

$$u' + \frac{1}{x}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -\ln|x|, \quad (C=0) \Rightarrow u = \frac{1}{x}.$$

Підставляємо знайдений розв'язок $u = u(x)$ до другого рівняння системи:

$$uv' = 3x \Rightarrow \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} = 3x \Rightarrow dv = 3x^2 dx \Rightarrow v = x^3 + C.$$

$$y = uv = \frac{1}{x}(x^3 + C) = x^2 + \frac{C}{x}.$$

Зауваження. Слід зазначити, що деякі нелінійні рівняння приводять до лінійних за допомогою відповідних заміन невідомої функції $y = u(x)$. До таких належать рівняння Бернуллі.

12.3.5. Диференціальні рівняння Бернуллі

Означення. Рівняння виду:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (12.23)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – неперервні функції, n – довільне дійсне число ($n \neq 0$ і $n \neq 1$), називають **рівнянням Бернуллі**. При $n=0$ (12.23) є лінійним неоднорідним рівнянням (12.14), а при $n=1$ – лінійним однорідним рівнянням (12.15).

Алгоритм перетворення рівняння Бернуллі на лінійне:

Крок 1. Нехай $n \neq 0$ і $n \neq 1$. Помножимо обидві частини рівняння на y^{-n} .

Крок 2. Зробимо підстановку:

$$y^{1-n} = z, \quad (12.24)$$

де z – нова шукана функція.

Крок 3. Диференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$(1-n)y^{-n}y' = z'. \quad (12.25)$$

Крок 4. Поділимо обидві частини рівняння на $(1-n)$ із врахуванням виразу для нової функції (12.24) та її похідної (12.25). Дістанемо лінійне неоднорідне рівняння щодо нової невідомої функції $z(x)$:

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q. \quad (12.26)$$

Крок 5. Рівняння (12.26) інтегруємо як лінійне.

Крок 6. Зробимо зворотну заміну, знайдемо шукану функцію:
 $y = y(x)$.

Приклад 12.12. Розв'язати рівняння $y' + xy = xy^3$.

Крок 1. Це диференціальне рівняння є рівнянням Бернуллі при $n=3$. Помножимо обидві частини рівняння на y^{-3} .

Крок 2. Зробимо заміну $z = y^{-2}$, відповідно до (12.24).

Крок 3. Диференціюємо заміну $z' = -2y^{-3}y'$, дістанемо лінійне неоднорідне рівняння відносно функції $z(x)$:

$$z' - 2xz = -2x.$$

Кроки 4-5. Розв'яжемо лінійне неоднорідне рівняння щодо нової невідомої функції $z(x)$. За (12.18) дістанемо загальний розв'язок цього рівняння:

$$z(x) = Ce^{x^2} + 1.$$

Крок 6. Виконавши зворотну заміну $y = \pm 1 / \sqrt{z}$, дістанемо розв'язок заданого нелінійного рівняння:

$$y(x) = \pm (Ce^{x^2} + 1)^{-1/2}.$$

12.4. Диференціальні рівняння другого порядку

12.4.1. Основні поняття

Означення. Диференціальне рівняння виду:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (12.27)$$

де x – невідома змінна, y , y' та y'' – відповідно шукана функція та її похідні, називають **диференціальним рівнянням другого порядку**.

Розглянемо рівняння, які можна записати у вигляді:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (12.28)$$

Означення. Розв'язком диференціального рівняння другого порядку (12.27) або (12.28) називають функцію $y = \varphi(x)$, яка перетворює це рівняння на тотожність.

Має місце теорема існування та єдності розв'язку рівняння другого порядку.

ТЕОРЕМА (Коші)

Нехай функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні f'_y і $f'_{y'}$, неперервні у деякій області D простору змінних $f(x, y, y')$.

Тоді у деякому околі довільної внутрішньої точки $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ цієї області існує єдиний розв'язок заданого рівняння (12.28), що задовольняє початкові умови

$$x = x_0; y = y_0; y' = y'_0. \quad (12.29)$$

Задачу відшукування розв'язку (12.28) за заданими початковими умовами (12.29) називають *задачею Коші*.

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку* (12.28) називають функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, якщо вона є розв'язком заданого рівняння за довільних значень сталих C_1, C_2 , які можна визначити у єдиний спосіб за заданих початкових умов (12.29).

Означення. *Частинним розв'язком диференціального рівняння другого порядку* (12.28) називають розв'язок рівняння за фіксованих значень сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, тобто функцію:

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0).$$

Приклад 12.13. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = 0$, який задовольняє початкові умови $y(1) = 2, y'(1) = 1$.

Після двократного інтегрування цього рівняння дістанемо загальний розв'язок:

$$y = C_1 x + C_2, \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні стали.}$$

Геометрично цей розв'язок – сукупність прямих у довільних напрямках, причому через кожну точку площини XOY проходить нескінченне число таких прямих. Тому для виокремлення частинного розв'язку, що проходить через точку $(x_0; y_0)$, необхідно задати кутовий коефіцієнт прямої, яка збігається зі своєю дотичною.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(1) = 2, y'(1) = 1$, тобто пряму, яка проходить через точку $(1; 2)$ із кутовим коефіцієнтом $k = y'(1) = 1$. Підстановка початкових умов до загального розв'язку рівняння приводить до системи лінійних рівнянь щодо сталих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 = 1, \end{cases} \text{ звідки } C_1 = 1, C_2 = 1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок:

$$y = x + 1 \text{ (пряма).}$$

12.4.2. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку

Існують три види рівняння $y'' = f(x; y; y')$, які шляхом заміни змінної (шуканої функції) зводять до рівнянь першого порядку.

1. Рівняння виду

$$y'' = f(x). \quad (12.30)$$

Введемо нову функцію $z = z(x)$ шляхом заміни $z(x) = y'$. Тоді рівняння другого порядку перетворюється на рівняння першого порядку $z' = f(x)$, розв'язком якого є функція:

$$z(x) = \int f(x) dx + C_1.$$

Оскільки $z(x) = y'$, то повторним інтегруванням знаходимо загальний розв'язок рівняння (12.30):

$$y(x) = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_1 x + C_2, \text{ де } C_1, C_2 - \text{ довільні сталі.}$$

Приклад 12.14. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = \sin x$. Це диференціальне рівняння другого порядку виду (12.30). Зробимо заміну $z(x) = y'$. Тоді рівняння можна записати у вигляді:

$$z' = \sin x \text{ або } \frac{dz}{dx} = \sin x, \text{ звідки } dz = \sin x dx.$$

Інтегруючи останню рівність, дістанемо:

$$\int dz = \int \sin x dx \Rightarrow z = -\cos x + C_1.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$y' = -\cos x + C_1 \text{ або } \frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1,$$

дістанемо диференціальне рівняння:

$$dy = (-\cos x + C_1) dx.$$

Знову інтегруючи, дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2 -$$

2. Рівняння виду

$$y'' = f(x; y'). \quad (12.31)$$

У цьому рівнянні відсутня шукана функція y . Отже, можна знизити порядок рівняння, зробивши заміну $z(x) = y'$, $z'(x) = y''$. Тоді дістанемо рівняння першого порядку вигляду:

$$z'(x) = f(x, z).$$

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння $z(x) = \varphi(x, C_1)$ і повторним інтегруванням дістанемо шуканий загальний розв'язок (12.31):

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2, \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Приклад 12.15. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + y' = 0.$$

Це диференціальне рівняння другого порядку виду (12.31). Зробимо заміну $z(x) = y'$, $z'(x) = y''$. Тоді рівняння можна записати у вигляді:

$$z' + z = 0 \text{ або } \frac{dz}{dx} = -z, \text{ звідки } \frac{dz}{z} = -dx.$$

Інтегруючи останню рівність:

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx,$$

$$\text{дістанемо } \ln|z| = -x + \ln C_1 \text{ або } z = C_1 e^{-x}.$$

Зробимо зворотну заміну, отримаємо:

$$y' = C_1 e^{-x} \text{ або } \frac{dy}{dx} = C_1 e^{-x}, \text{ звідки } dy = C_1 e^{-x} dx.$$

Знову інтегруючи, дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$\int dy = \int (C_1 e^{-x}) dx + C_2, \text{ звідки}$$

$$y = -C_1 e^{-x} + C_2, \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

3. Рівняння виду

$$y'' = f(y; y'). \quad (12.32)$$

Це рівняння не містить незалежної змінної. Введемо нову функцію, що залежна від y , зробивши заміну $z(y) = y'$. Тоді за правилом диференціювання складної функції:

$$y'' = \frac{d}{dx}(z(y)) = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z.$$

Рівняння (12.32) перетвориться на диференціальне рівняння першого порядку щодо функції $z(y)$:

$$z \frac{dz}{dy} = f(y; z).$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$z(y) = \varphi(y; C_1).$$

Зробимо зворотню заміну, дістанемо рівняння першого порядку щодо функції $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1),$$

з якого методом відокремлення змінних дістанемо функціональне співвідношення рівняння (12.32):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2, \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Приклад 12.16. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - (y')^2 = 0.$$

Це диференціальне рівняння другого порядку виду (12.32). Зробимо заміну $z(y) = y'$, зведемо його до рівняння першого порядку:

$$z \left(\frac{dz}{dy} \right) - z^2 = 0.$$

Перший розв'язок цього рівняння:

$$z = 0 \text{ або } y = C, \text{ де } C - \text{довільна стала.}$$

Скорочуючи після цього обидві частини рівняння на z , дістанемо:

$$\frac{dz}{dy} - z = 0,$$

загальний розв'язок якого: $z = C_1 e^y$.

Після зворотної заміни дістанемо рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^y.$$

Відокремимо змінні $e^{-y} dy = C_1 dx$, звідки $e^{-y} = C_1 x + C_2$.

Остаточно дістанемо:

$$y(x) = -\ln(C_1 x + C_2), \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Цей розв'язок включає й розв'язок $y = C$, який знайшли раніше (при $C_1 = 0, C_2 \neq 0$).

12.4.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку* називають диференціальне рівняння виду:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (12.33)$$

де y – шукана двічі неперервно-диференційована функція, а $p(x), q(x), f(x)$ – неперервні на проміжку (a, b) функції.

Якщо $f(x) = 0$, то (12.33) називають *лінійним однорідним*; якщо $f(x) \neq 0$, то (12.33) називають *лінійним неоднорідним*.

Розв'язавши (12.33) щодо другої похідної шуканої функції $y'' = -p(x)y' - q(x)y + f(x)$, бачимо, що воно є окремим випадком рівняння $y'' = \varphi(x; y; y')$ і задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку (*теореми Коші*). Тому за будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, (x_0 \in (a, b))$ рівняння (12.33) має єдиний розв'язок.

Спочатку розглянемо властивості лінійних однорідних рівнянь другого порядку:

$$y''' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (12.34)$$

ТЕОРЕМА

Якщо функції $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ – розв'язки рівняння (12.34), то функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Доведення. Підставимо функцію $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ до рівняння (12.34), зібравши члени при C_1 і C_2 , дістанемо то-

тожності, які дорівнюють нулю, оскільки за умовою теореми $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ – розв'язки цього рівняння. Теорему доведено.

Означення. Два розв'язки $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння другого порядку називають **лінійно залежними** на (a, b) , якщо існують такі числа λ_1 і λ_2 , не рівні нулю одночасно, що для довільного $x \in (a, b)$ виконується рівність:

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0.$$

У цьому випадку функції $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ пропорційні:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda, \lambda = \text{const.}$$

У протилежному випадку функції називають **лінійно незалежними**. Тоді функції непропорційні, тобто:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda, \lambda = \text{const.}$$

Означення. Визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

називають **визначником Вронського**, або **вронськіаном**.

ТЕОРЕМА

Якщо функції $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ – лінійно залежні на $(a; b)$, то визначник Вронського, що складений із них, дорівнює нулю на цьому проміжку; якщо функції лінійно незалежні на $(a; b)$, то визначник Вронського відмінний від нуля на цьому проміжку.

Доведення. Нехай $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ – лінійно залежні на проміжку $(a; b)$. Тоді ці функції пропорційні, тобто $y_1(x) = \lambda y_2(x)$, а це означає, що

$$y_1'(x) = \lambda y_2'(x).$$

Таким чином, у визначнику Вронського пропорційні стовпці, тобто визначник дорівнює нулю.

Доведення другої частини теореми проведемо від супротивного. Нехай $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ – лінійно залежні на проміжку $(a; b)$. Припустимо, що визначник $W(x)$ дорівнює нулю на цьому проміжку. Тоді стовпці пропорційні, отже пропорційні й ці функції, звідки випливає їх лінійна залежність на проміжку $(a; b)$, що суперечить умові теореми.

Теорему доведено.

ТЕОРЕМА

(структура загального розв'язку лінійного однорідного рівняння)

Якщо розв'язки рівняння (12.34) $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$

лінійно незалежні на $(a; b)$, то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (12.35)$$

є загальним розв'язком цього рівняння, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Доведення. Функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є розв'язком (12.34). Необхідно показати, що вона є загальним розв'язком, тобто із неї можна виділити частинний розв'язок, який задовольняє довільним початковим умовам.

Для розв'язування задачі Коші візьмемо довільні початкові умови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. Підставивши їх до (12.35), дістанемо систему двох лінійних рівнянь щодо невідомих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$, який у силу лінійної незалежності $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ не дорівнює нулю. Тобто система має єдиний розв'язок:

$$C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0.$$

Підставивши ці значення до (12.35), дістанемо частинний розв'язок, який задовольняє вибраним початковим умовам.

Таким чином, розв'язок (12.35) є загальним для рівняння (12.34), що й необхідно було довести.

ТЕОРЕМА

Для визначника Вронського

справджується формула Ліувілля–Остроградського

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int p(x) dx}. \quad (12.36)$$

Доведення. Диференціюючи визначник $W(x)$, дістанемо диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} W'(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x) & -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{vmatrix} = -p(x)W(x). \end{aligned}$$

Інтегруючи диференціальне рівняння $W'(x) = -p(x)W(x)$, дістанемо (12.36).

Наслідок:

Якщо визначник Вронського перетворюється на нуль у деякій точці $x = x_0$, а $y = p(x)$ – неперервна функція, то $W(x) = 0$.

Розглянемо основні властивості розв'язків лінійного неоднорідного рівняння (12.33).

ТЕОРЕМА

(структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння).

Загальний розв'язок рівняння (12.33) складається із суми його частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (12.34):

$$y_{\text{заг}}(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_{\text{неод}}(x). \quad (12.37)$$

Доведення. Нехай $y_{\text{одн}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, де C_1, C_2 – довільні сталі, $y_{\text{неод}}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12.34).

Покажемо, що функція (12.37) – це розв'язок рівняння (12.34). Дійсно, підставивши до цього рівняння похідні функцій $y_{\text{одн}}$ та $y_{\text{неод}}$ та групуючи доданки, дістанемо, що (12.37) є розв'язком.

Тепер потрібно показати, що функція (12.37) є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (12.34). Розглянемо різницю $y(x) - y_{\text{неод}}(x)$, де $y(x)$ – довільний розв'язок (12.34).

Ця різниця є розв'язком однорідного рівняння, у чому легко переконатись підстановкою його та групуванням відповідних доданків:

$$\begin{aligned} (y(x) - y_{неод}(x))'' + p(x)(y(x) - y_{неод}(x))' + q(x)(y(x) - y_{неод}(x)) = \\ = (y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)) - \\ - (y_{неод}''(x) + p(x)y_{неод}'(x) + q(x)y_{неод}(x)) = 0. \end{aligned}$$

Отже, цю різницю можна записати у вигляді частинного розв'язку однорідного рівняння (12.34):

$$y(x) - y_{неод}(x) = y_{одн} = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x),$$

де C_1^0, C_2^0 – певні значення сталих C_1, C_2 у формулі (12.34). Тому довільний розв'язок (12.33) можна дістати за формулою (12.37) шляхом підбору довільних сталих C_1, C_2 , а це й означає, що функція (12.37) є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (12.33).

Алгоритм знаходження загального розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку:

Крок 1. Знайти загальний розв'язок $y_{одн}(x)$ однорідного рівняння (12.34), що відповідає неоднорідному рівнянню (12.33).

Крок 2. Знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12.33).

Крок 3. Записати загальний розв'язок рівняння $y_{заг}(x)$ як суму його частинного розв'язку $y_{неод}(x)$ та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y_{одн}(x)$:

$$y_{заг}(x) = y_{одн}(x) + y_{неод}(x).$$

Задача визначення частинного розв'язку неоднорідного рівняння у загальному випадку досить складна. Але існує **метод варіації довільної сталої**, який базується на використанні відомого розв'язку однорідного рівняння.

Нехай $y_{одн} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння (12.33). Припустимо, що частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12.34) має аналогічний вигляд, але довільні сталі C_1, C_2 є функціями від змінної x :

$$y_{неод} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \quad (12.38)$$

Диференціюючи (12.38), дістанемо:

$$y'_{неод} = C'_1(x)y_1(x) + C_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + C_2(x)y'_2(x).$$

Визначимо функції $C_1(x), C_2(x)$ так, щоб виконувалось рівність:

$$C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0, \quad (12.39)$$

тоді

$$y'_{неод} = C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x).$$

Диференціюючи цю рівність, дістанемо для $y''_{неод}$:

$$y''_{неод} = C'_1(x)y'_1(x) + C_1(x)y''_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + C_2(x)y''_2(x).$$

Підставимо $y_{неод}, y'_{неод}, y''_{неод}$ до (12.33) і згрупуємо доданки при $C_1(x), C_2(x)$, дістанемо:

$$\begin{aligned} C_1(x)(y''(x) + p(x)y'_1(x) + q(x)y_1(x)) + \\ + C_2(x)(y''_2(x) + p(x)y'_2(x) + q(x)y_2(x)) \\ + C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{aligned}$$

Оскільки $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ – розв'язки (12.34), то множники при $C_1(x), C_2(x)$ дорівнюють нулю. Рівність спрощується:

$$C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x).$$

Об'єднуючи її із рівністю (12.39), дістанемо систему лінійних рівнянь щодо $C'_1(x), C'_2(x)$:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0, \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{cases} \quad (12.40)$$

Визначником цієї системи буде визначник Вронського. Він не дорівнює нулю, оскільки складений із лінійно незалежних функцій $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$. Це означає, що система має єдиний розв'язок.

Нехай $C'_1(x) = \varphi_1(x), C'_2(x) = \varphi_2(x)$ – розв'язок системи (12.40). Інтегруючи ці вирази, дістанемо:

$$C_1(x), C_2(x).$$

Підставимо їх до (12.33), дістанемо його частинний розв'язок.

12.4.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо важливий і досить поширений клас лінійних диференціальних рівнянь, де функції $y = p(x)$, $y = q(x)$ стали.

Означення. *Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами* називають диференціальне рівняння виду:

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (12.41)$$

де y – шукана двічі неперервно-диференційована функція, а p, q – деякі дійсні числа.

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = e^{kx}, \text{ де } k - \text{деяке число.}$$

Підставимо цю функцію до (12.41), дістанемо:

$$k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0.$$

Скорочуючи обидві частини рівняння на e^{kx} , дістанемо квадратне рівняння:

$$k^2 + pk + q = 0, \quad (12.42)$$

яке називають **характеристичним рівнянням** для (12.41).

Якщо k – розв'язок рівняння (12.42), то $y = e^{kx}$ – розв'язок однорідного рівняння (12.41). Вигляд розв'язку рівняння (12.41) суттєво залежить від того, які корені має характеристичне рівняння (12.42).

Позначимо k_1, k_2 корені характеристичного рівняння.

ТЕОРЕМА

Загальний розв'язок рівняння (12.41) має вид:

$$1) y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (12.43)$$

якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні ($k_1 \neq k_2$);

$$2) y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}, \quad (12.44)$$

якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні ($k_1 = k_2 = k$);

$$3) y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (12.45)$$

якщо корені характеристичного рівняння комплексні ($k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$).

У всіх трьох випадках C_1, C_2 – довільні сталі.

Доведення. Достатньо переконатися у тому, що кожен із доданків у правих частинах рівностей (12.43)–(12.45) буде розв'язком (12.41), а далі за визначником Вронського переконатися, що кожна пара функцій у цих рівностях лінійно незалежна.

Розглянемо приклади знаходження загальних розв'язків лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 12.17. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає цьому диференціальному рівнянню $k^2 + 5k + 6 = 0$. Його корені $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Приклад 12.18. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння має вигляд:

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \text{ або } (k - 4)^2 = 0.$$

Воно має один кратний корінь $k_1 = k_2 = 4$.

Його загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}.$$

Приклад 12.19. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$

Його корені $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$ комплексно спряжені.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Означення. Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називають диференціальне рівняння виду:

$$y'' + p y' + q y = f(x), \quad (12.46)$$

де y – шукана двічі неперервно-диференційована функція, p, q – деякі дійсні числа, а $f(x)$ – відома неперервна функція.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння у є сумою загального розв'язку $y_{одн}(x)$ відповідного однорідного рівняння (12.41) та частинного розв'язку $y_{неод}(x)$ неоднорідного рівняння (12.46):

$$y_{заг}(x) = y_{одн}(x) + y_{неод}(x).$$

Якщо $f(x)$ – поліном, показникова чи тригонометрична функції або їх комбінації, то частинний розв'язок (12.46) можна знайти **методом невизначених коефіцієнтів**, використовуючи вигляд правої $f(x)$ частини рівняння. При цьому необхідно знайти корені k_1, k_2 характеристичного рівняння (12.42) і керуватися наступними рекомендаціями.

1. Якщо права частина рівняння (12.46) – поліном:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = P_n(x),$$

тобто многочлен із відомими коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots, a_n$, то частинний розв'язок $y_{неод}(x)$ неоднорідного рівняння шукають у вигляді:

$$y_{неод}(x) = x^r (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n) = x^r Q_n(x),$$

де r – число коренів характеристичного рівняння (12.42), які дорівнюють нулю, а невідомі коефіцієнти $b_0, b_1, \dots, b_n$ многочлена $Q_n(x)$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів після підстановки розв'язку $y_{неод}(x)$ та його похідних до лівої частини диференціального рівняння.

2. Якщо права частина має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad (12.47)$$

то частинний розв'язок $y_{неод}(x)$ неоднорідного рівняння шукають у вигляді:

$$y_{неод}(x) = e^{\alpha x} x^r Q_n(x), \quad k_1 = k_2 = \alpha.$$

де r – число коренів характеристичного рівняння (12.42), які дорівнюють α ; $Q_n(x)$ – многочлен того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, але із невідомими коефіцієнтами, які знаходять методом невизначених коефіцієнтів.

Зауваження. Випадок $\alpha = 0$ не виключено. Тоді $f(x) = P_n(x)$, а $y_{неод}(x) = Q_n(x) x^r$, r – число коренів характеристичного рівняння (12.42), які дорівнюють нулю.

3. Якщо права частина має вигляд:

$$f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x, \quad (12.48)$$

де a, b, β – відомі дійсні числа, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді:

$$y_{\text{неод}}(x) = (A \sin \beta x + B \cos \beta x) x^r,$$

де r – кількість коренів характеристичного рівняння (12.42), які дорівнюють βi .

4. Якщо права частина має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (12.49)$$

де α, β – відомі дійсні числа, $P_k(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени, які можуть бути як однакової, так і різних степенів. Якщо многочлени мають різні степені, то n – їх найвища степінь (при $n=0$ ці многочлени – сталі величини).

Якщо число $k = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді:

$$y_{\text{неод}} = e^{\alpha x} (R_n(x) \cos \beta x + S_n(x) \sin \beta x),$$

де $R_n(x)$ і $S_n(x)$ – многочлени степені $n = \max\{k, m\}$, коефіцієнти яких визначають підстановкою невідомої функції до неоднорідного рівняння (12.46).

Якщо число $k = \alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння кратності r , то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді:

$$y_{\text{неод}} = x^r e^{\alpha x} (R_n(x) \cos \beta x + S_n(x) \sin \beta x).$$

5. Якщо права частина $f(x)$ є сумою функцій вигляду пунктів 1-4, то частинний розв'язок дорівнює сумі відповідних функцій.

Невизначені коефіцієнти знаходять у такий спосіб. До заданого рівняння підставляють у відповідному вигляді $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$ та $y''_{\text{неод}}$ і порівнюють коефіцієнти при відповідних степенях незалежної змінної у лівій і правій частинах рівності (як діє цей метод буде показано далі на прикладах).

Приклад 12.20. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 5y' + 6y = 56e^{5x}.$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому диференціальному рівнянню $k^2 + 5k + 6 = 0$. Його корені $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{одн} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = 56e^{5x}$. У цьому випадку:

$$P_k(x) = 56, \quad Q_m(x) = 0, \quad \alpha = 5, \beta = 0, \quad k = \alpha + \beta i = 5$$

не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_{неод} = A e^{5x}, \quad (A = \text{const}),$$

де $R_0 = A$ (загальний вигляд многочлена нульової степені).

Знаходимо:

$$y'_{неод} = 5A e^{5x}, \quad y''_{неод} = 25A e^{5x}.$$

Підставимо $y_{неод}$, $y'_{неод}$ та $y''_{неод}$ до заданого рівняння, дістанемо:

$$25A e^{5x} + 5 \cdot 5A e^{5x} + 6A e^{5x} = 56e^{5x},$$

тобто $56A e^{5x} = 56e^{5x}$, звідки $A = 1$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y_{неод} = e^{5x},$$

а загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + e^{5x}.$$

Приклад 12.21. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' - 4y = x^2$.

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає цьому диференціальному рівнянню:

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Його корені $k_1 = -4$, $k_2 = 1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_{одн} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = x^2$. У цьому випадку:

$$P_k(x) = x^2, \quad Q_m(x) = 0, \quad \alpha = 0, \beta = 0, \quad k = \alpha + \beta i = 0$$

не є коренем характеристичного рівняння.

Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_{\text{неод}} = Ax^2 + Bx + C.$$

Знаходимо похідні:

$$y'_{\text{неод}} = 2Ax + B, \quad y''_{\text{неод}} = 2A.$$

Підставимо $y_{\text{неод}}$, $y'_{\text{неод}}$ та $y''_{\text{неод}}$ до заданого рівняння, дістанемо:

$$\begin{aligned} 2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) &= x^2, \\ -4Ax^2 + x(6A - 4B) + (2A + 3B - 4C) &= x^2. \end{aligned}$$

Збираємо коефіцієнти при відповідних степенях x :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -4A = 1, \\ x & 6A - 4B = 0, \\ x^0 & 2A + 3B - 4C = 0, \end{array} \quad \text{звідки} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{8}, \quad C = -\frac{13}{32}.$$

Тому частинний розв'язок заданого рівняння:

$$y_{\text{неод}} = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}.$$

Приклад 12.22. Розв'яжемо рівняння $y'' + 4y = \cos 2x$.

Запишемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$, яке відповідає заданому диференціальному рівнянню. Оскільки $k_1 = -2i, k_2 = 2i$ – його корені, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = \cos 2x$. У цьому випадку:

$$P_k(x) = 1, \quad Q_m(x) = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad k = \alpha + \beta i = 2i$$

є коренем характеристичного рівняння кратності 1.

Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_{\text{неод}} = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Підставимо $y_{неод}$, $y'_{неод}$ та $y''_{неод}$ до заданого рівняння, зберемо коефіцієнти при відповідних степенях x , дістанемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A та B .

Збираємо коефіцієнти при відповідних степенях x , дістаємо:

$$\begin{matrix} x \\ x^0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 4B=1 \\ -4A=0 \end{matrix} \right. \Rightarrow A=0, B=\frac{1}{4}.$$

Тому частинний розв'язок заданого рівняння:

$$y_{неод} = \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Яке рівняння називають диференціальним?
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Який розв'язок диференціального рівняння є загальним, а який – частинним?
4. У чому полягає задача Коші для рівняння першого порядку?
5. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням із відокремлюваними змінними?

Приклад 1. Розглянемо рівняння $y' = y^2$.

Крок 1. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = y^2,$$

враховуючи, що рівняння $y^2 = 0$ має розв'язок $y = 0$, який є особливим. Отримали диференціальне рівняння першого порядку із відокремленими змінними.

Крок 2. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

Крок 3. Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C.$$

Крок 4. Знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = -\frac{1}{x+C}.$$

Отже, усі розв'язки рівняння задають формули:

$$y = -\frac{1}{x+C} \text{ та } y=0.$$

Перша формула задає сукупність гіпербол, друга – множину точок осі OX . Якщо задати початкові умови та розв'язати задачу Коші $y(x_0)=y_0$, то дістанемо розв'язки:

$$y = \frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)} \text{ та } y=0.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$.

Крок 1. Це диференціальне рівняння першого порядку.

Позначимо $y' = \frac{dy}{dx}$ та підставимо до нашого рівняння. Помножимо його на dx і дістанемо:

$$xy(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0,$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними.

Крок 2. Відокремимо змінні та поділимо рівняння на $x(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$, отримаємо:

$$\frac{ydy}{1+y^2} - \frac{dx}{x(1+x^2)} = 0.$$

Крок 3. Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} - \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = C.$$

$$\frac{1}{2\ln(1+y^2)} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln C \Rightarrow \ln(1+y^2) = \ln \frac{Cx^2}{1+x^2}.$$

Після операції потенціювання рівняння дістанемо:

$$1+y^2 = \frac{Cx^2}{1+x^2} \text{ або } y^2 = \frac{(C-1)x^2-1}{1+x^2},$$

звідки $y = \pm \sqrt{\frac{(C-1)x^2-1}{1+x^2}}$, де C – довільна стала, $C > 1$.

6. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним рівнянням?

7. Як однорідне диференціальне рівняння першого порядку зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

Крок 1. Це однорідне диференціальне рівняння першого порядку, де права частина рівняння є функцією від $\left(\frac{y}{x}\right)$.

Крок 2. Зробимо заміну $y(x)=xu(x)$, $y'(x)=u(x)+xu'(x)$. Тоді для невідомої $u(x)$ матимемо рівняння із відокремлюваними змінними:

$$u + xu' = u + \cos u, \text{ звідки } x \frac{du}{dx} = \cos u \text{ або } \frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x}.$$

Крок 3. Інтегруємо праву й ліву частини рівняння:

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| = \ln |x| + \ln |C|.$$

Виконаємо перетворення:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) = Cx \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) = \operatorname{arctg} Cx \Rightarrow u = 2 \operatorname{arctg}(Cx) - (\pi/2).$$

Крок 4. Зробимо зворотну заміну $u = y/x$. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = 2x \operatorname{arctg}(Cx) - (\pi/2).$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x} \right),$$

який задовольняє початкову умову $y(2) = \pi$.

Крок 1. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Оскільки його права частина є функцією відношення $\left(\frac{y}{x}\right)$,

то рівняння є однорідним.

Крок 2. Введемо нову змінну:

$$\frac{y}{x} = t,$$

зробимо заміну $y = tx$, $dy = tdx + xdt$ і підставимо вирази для y та dy до рівняння, дістанемо:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{tdx + xdt}{dx} = t + \operatorname{tgt} \Rightarrow t + x \frac{dt}{dx} = t + \operatorname{tgt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot \frac{dt}{dx} = \operatorname{tgt} \Rightarrow \frac{dt}{\operatorname{tgt}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \operatorname{ctgt} \cdot dt = \frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Крок 3. Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\ln|\sin t| = \ln|x| + \ln C |C| > 0.$$

Крок 4. Зробимо обернену підстановку, дістанемо:

$$\ln\left|\sin \frac{y}{x}\right| = \ln|Cx|.$$

Отримано загальний розв'язок рівняння:

$$\sin \frac{y}{x} = Cx.$$

Крок 5. Тепер скористаємось початковою умовою $y(2) = \pi$:

$$\sin \frac{\pi}{2} = C \cdot 2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\sin \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x.$$

8. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним однорідним рівнянням?

9. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним неоднорідним рівнянням?

10. Як формулюють теорему про структуру розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку?

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' + \frac{y}{x} = e^x$.

Використовуємо метод варіації довільної сталої. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Запишемо відповідне до нього лінійне однорідне рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = 0,$$

яке, у свою чергу, є рівнянням із відокремлюваними змінними. Знайдемо його загальний розв'язок. Для цього відокремимо змінні та інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$y = \frac{C(x)}{x}, \text{ де } C(x) - \text{невідомо функція.}$$

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}C'(x) - \frac{1}{x^2}C(x).$$

Підставимо y та y' до початкового рівняння, дістанемо:

$$\frac{1}{x}C'(x) - \frac{1}{x^2}C(x) + \frac{1}{x} \frac{C(x)}{x} = e^x,$$

Звідки $\frac{1}{x}C'(x) = e^x$, $C'(x) = xe^x$.

Отже, $C(x) = xe^x - e^x + C_1$.

Тепер підставимо отримане значення $C(x)$, знайдемо шуканий розв'язок:

$$y = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C_1}{x}.$$

11. Які основні типи та методи інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають зниження степеня?

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y'' = 1 - (y')^2$.

Позначимо $y' = z$. Тоді $y'' = z'$ і задане рівняння можна переписати у вигляді $z' = 1 - z^2$ – рівняння першого порядку із відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{1 - z^2} = dx.$$

Після інтегрування дістанемо:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = x + \frac{1}{2} \ln C_1 \Rightarrow z = 1 - \frac{2}{C_1 e^{2x} + 1}.$$

Оскільки $z = \frac{dy}{dx}$, то маємо:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{2}{C_1 e^{2x} + 1} \text{ та } y = \int \left(1 - \frac{2}{C_1 e^{2x} + 1} \right) dx.$$

Обчислимо інтеграл, дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$y = x + \ln |C_1 + e^{-2x}| + C_2.$$

12. Як записують загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у різних випадках?

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Характеристичним рівнянням для нього буде $k^2 + 3k + 2 = 0$. Воно має розв'язки $k_1 = -2$ та $k_2 = -1$. Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$ має комплексно спряжені корені $k_1 = -1 + 3i$ та $k_2 = -1 - 3i$, де $\alpha = -1, \beta = 3$. Тоді загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має кратний корінь $k_1 = k_2 = 3$, то загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}.$$

17. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

Приклад 10. Розв'язати рівняння $y'' - 7y' + 12y = 5$.

Характеристичним рівнянням для заданого рівняння буде $k^2 - 7k + 12 = 0$, яке має розв'язки $k_1 = 3$ і $k_2 = 4$. Тоді загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння буде функція:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

Розглянемо праву частину рівняння та порівняємо її із (12.49). Оскільки права частина не містить множника $e^{\alpha x}$, то можна вважати, що $\alpha = 0$. Права частина не містить також ані синуса, ані косинуса, тому можна вважати, що $\beta = 0$. Число 5 у правій частині варто розглядати як многочлен нульо-

вого степеня. Запишемо число $k = \alpha + \beta i$ і визначимо, чи буде воно коренем характеристичного рівняння. У нашому випадку $\alpha + \beta i = 0$, що не є коренем. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$y_{\text{неод}} = A, \quad y'_{\text{неод}} = 0, \quad y''_{\text{неод}} = 0.$$

Підставимо ці значення до заданого рівняння, дістанемо $5 = 12A$, звідки $A = 5/12$. Запишемо загальний розв'язок цього диференціального рівняння:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 5/12.$$

Приклад 11. Розв'язати рівняння:

$$y'' + y = (3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x.$$

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає заданому диференціальному рівнянню $k^2 + 1 = 0$, що має корені $k_1 = -i$, $k_2 = i$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд:

$$f(x) = (3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x.$$

У цьому випадку $P_l(x) = 3x + 2$ та $Q_m(x) = x^2 + x + 2$, а $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $k = \alpha + \beta i = 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Степені многочленів різні, тому у виразі частинного розв'язку має бути найбільша з них, тобто $n = \max\{l, m\} = \max\{1, 2\} = 2$. Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_{\text{неод}} = (Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x.$$

$$y''_{\text{неод}} = (-4Ax^2 - 4Bx + 8Dx + 2A - 4C + 4E)\cos 2x + \\ + (-4Dx^2 - 4Ex - 8Ax - 4B + 2D - 4F)\sin 2x.$$

Підставимо $y_{\text{неод}}$ та $y''_{\text{неод}}$ до заданого рівняння, зберемо коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$. Дістаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів:

$$-3Dx^2 + (-3E - 8A)x + (-4B + 2D - 3F) = 3x + 2,$$

$$-3Ax^2 + (-3B + 8D)x + (2A - 3C + 4E) = x^2 + x + 2.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , дістанемо:

$$\begin{aligned} \text{при } x^2 & \begin{cases} -3D=0; & D=0, \\ -3A=1; & A=1/3, \end{cases} \\ \text{при } x & \begin{cases} -3E-8A=3; & -3E+8/3=3; & E=-1/9, \\ -3B+8D=1; & -3B=1; & B=-1/3, \end{cases} \end{aligned}$$

вільний член:

$$x^0 \begin{cases} -4B+2D-3F=2; & 4/3-3F=2; & F=-2/9; \\ 2A-3C+4E=2; & -2/3-3C-4/9=2; & C=-28/27, \end{cases}$$

звідки $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=-28/27$, $D=0$, $E=-1/9$, $F=-2/9$.

Остаточню частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y_{\text{неод}} = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27} \right) \cos 2x + \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9} \right) \sin 2x.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27} \right) \cos 2x + \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9} \right) \sin 2x.$$

Приклад 12. Розв'яжемо рівняння $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}$.

Спочатку розв'яжемо характеристичне рівняння, яке відповідає заданому диференціальному рівнянню:

$$k^2 - 6k + 8 = 0.$$

Його корені $k_1=4$, $k_2=2$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Його права частина має вигляд $f(x)=3e^{2x}$. У цьому випадку:

$$P_k(x)=3, Q_m(x)=0, \alpha=2, \beta=0, k=\alpha+\beta i=2$$

є коренем характеристичного рівняння кратності 1.

Тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_{\text{неод}} = A x e^{2x}.$$

Знаходимо похідні:

$$y'_{\text{неод}} = 2A x e^{2x} + A e^{2x} = A e^{2x} (2x+1),$$

$$y''_{\text{неод}} = 2A e^{2x} (2x+1) + 2A e^{2x} = 4A e^{2x} (x+1).$$

Підставимо $y_{неод}$, $y'_{неод}$ та $y''_{неод}$ до заданого рівняння:

$$\begin{array}{l|l} 8 & y = Axe^{2x}, \\ -6 & y' = Ae^{2x}(2x+1), \\ 1 & y'' = 4Ae^{2x}(x+1), \\ \hline & 3e^{2x} = e^{2x}(8Ax - 12Ax - 6A + 4A + 4Ax). \end{array}$$

Поділимо рівняння на $e^{2x} \neq 0$, дістанемо рівняння для визначення невідомого коефіцієнта

$$A : 3 = -2A; A = -(3/2).$$

Таким чином, частинний розв'язок заданого рівняння:

$$y_{неод} = -(3/2)xe^{2x},$$

а його загальний розв'язок:

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{2x} - (3/2)xe^{2x} \text{ або } y = C_1e^{4x} + (C_2 - (3/2)x)e^{2x}.$$

18. Як формулюють теорему про структуру розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку?

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2,$$

якщо відомо, що частинним розв'язком відповідного однорідного рівняння є функція $y_1 = x^2$.

Перетворимо рівняння так, щоб коефіцієнт при старшій похідній дорівнював одиниці. Для цього поділимо обидві частини рівняння на x^2 :

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1.$$

Права частина цього рівняння $f(x) = x^2 - 1$. Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0.$$

Оскільки частинним розв'язком рівняння є функція $y_1 = x^2$, то визначимо другий розв'язок за формулою:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

Оскільки $p(x) = -\frac{4}{x}$, то

$$-\int p(x) dx = \int \frac{4}{x} dx = 4 \ln|x| = \ln x^4, (C=0),$$

тому

$$e^{-\int p(x) dx} = e^{\ln x^4} = x^4.$$

Дістанемо:

$$y_2 = x^2 \int \frac{x^4}{x^4} dx = x^2 \cdot x = x^3.$$

Запишемо визначник Вронського для визначення частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4.$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx = \int \frac{x^2(x^2-1)}{x^4} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = \int \frac{x^3(x^2-1)}{x^4} dx = \int \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x|.$$

Підставимо значення інтегралів і частинні розв'язки $y_1 = x^2$ та $y_2 = x^3$, дістанемо:

$$Y = \begin{vmatrix} x + \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} - \ln|x| \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x|.$$

Додаючи цей частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння до загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x|.$$

Розділ 13

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У МОДЕЛЯХ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Диференціальні рівняння широко застосовують у моделях економічної динаміки, які відображають не тільки залежність змінних від часу, але й їх взаємозв'язок із часом. Моделі, що базуються на диференціальних рівняннях, можуть бути моделями зростання з неперервним часом, які орієнтовані на прогноз імовірних тенденцій зміни реальних економічних процесів і систем. Моделі рівноважного зростання призначені для вивчення властивостей рівноважних траєкторій (їх стійкості або нестійкості), а також для певних умов, які повертають економічну систему на рівноважну траєкторію. Неокласичні моделі зростання використовують для вивчення трендових траєкторій за стаціонарного режиму розвитку, що передбачає: макроекономічна статистична рівновага в умовах конкуренції і процес зростання ніби відновлює сам себе.

13.1. Модель демографічного процесу

Нехай зі статистичних даних відомо, що для певного регіону кількість новонароджених і померлих за одиницю часу пропорційні чисельності населення із коефіцієнтами пропорційності k_1 і k_2 , відповідно. Знайдемо закон зміни чисельності населення протягом часу, іншими словами, опишемо демографічний процес регіону.

Нехай $y = y(t)$ – кількість жителів регіону у момент часу t . Приріст населення Δy за час Δt дорівнює різниці між кількістю народжених і кількістю померлих за цей час, тобто:

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t \quad \text{або} \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky, \quad \text{де} \quad k = k_1 - k_2.$$

Перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ і дістанемо рівняння:

$$y' = ky. \quad (13.1)$$

Це диференціальне рівняння першого порядку із відокремленими змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = k dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = k \int dt \Rightarrow \ln|y| = kt + C_1 \Rightarrow y = e^{kt+C_1}.$$

Маємо загальний розв'язок:

$$y = Ce^{kt}, \quad (13.2)$$

де $C > 0$ – довільна стала, яку можна визначити за початковими умовами (кількістю населення у початковий момент часу).

Уперше це рівняння, яке називають **рівнянням природного зростання**, отримав Якоб Бернуллі. За допомогою цього рівняння описують багато різних процесів у природі та суспільстві. Наприклад, якщо у певної рослини або тварини немає природних ворогів, достатньо території та їжі, то кількість популяції за цим законом необмежено зростає (прикладом є ситуація, що склалась з кількістю кроликів в Австралії). В економіці за допомогою цього рівняння описують процеси кредитування, випуску продукції, зростання грошового внеску до банку, зростання населення.

Якщо відомо, що в момент часу t_0 кількість жителів регіону становить y_0 , то після визначення сталої C із початкової умови $C = Ce^{kt_0}$ дістанемо залежність $y_0 = Ce^{k(t-t_0)}$, що являє собою розв'язок задачі Коші із початковими умовами $y_0 = y(t_0)$.

У випадку, коли k_1 і k_2 невідомі, коефіцієнт k можна знайти аналогічно після визначення значення $y_1 = y(t_1)$ у деякий момент часу t_1 . Тоді із умови $y_1 = y_0 e^{k(t-t_0)}$ дістанемо:

$$k = (t - t_0)^{-1} \ln(y_1 / y_0).$$

Цікавим є той факт що, коли за такою методикою обчислили коефіцієнт k , застосовуючи дані про населення Землі в 1961 та 1971 роках, дістали залежність:

$$y = 3,06 \cdot 10^9 e^{0,02(t-1961)},$$

яка добре узгоджується з оцінками приросту населення у період між 1700 та 1960 роками. У теперішній час населення подвоюється кожні 35 років, а одержана формула дає подвоєння за 34,6 років.

Диференціальне рівняння (13.2) має доволі універсальний характер. Воно виникає при вивченні багатьох природних

явищ, зокрема розпаду радіоактивних елементів. Однак, якщо популяція розвивається у середовищі з обмеженими ресурсами життєзабезпечення, то модель Мальтуса при $k > 0$ (коли із плином часу $y = y(t)$ стає досить великим) перестає описувати реальний процес. Цей факт пояснюється тим, що за зростання кількості осіб між ними загострюється конкурентна боротьба, яка веде до збільшення коефіцієнта смертності. Таким чином, цей коефіцієнт насправді слід вважати деякою функцією від змінної y . 1937 року П. Ферхюльст запропонував модель, в якій коефіцієнт смертності є лінійною функцією. Відповідне рівняння $y' = ky - ly^2$ називають *логістичним*.

Приклад 13.1. Швидкість приросту населення певного регіону пропорційна його кількості. Знаючи, що на 01.01.2000 населення регіону наближено становило 200 млн, а приріст за 2000 рік становив 2 %, визначити на підставі зробленого припущення та цих даних кількість населення на 01.01.2038.

Нехай $y = y(t)$ – кількість жителів регіону в момент часу t . Оскільки диференціальне рівняння, яке описує демографічний процес регіону (13.1), то $y' = ky - ly^2$. Його загальний розв'язок – $y = Ce^{kt}$. З умови задачі знаходимо $C = 200$, тому $y = 200e^{0,02t}$. За час $t = 38$ років $y = 200e^{0,02 \cdot 38} = 428$ млн.

Якщо не брати до уваги неперервне зростання населення, то за 38 років із розрахунку 2 % на рік приріст населення становив би 76 % від початкового, тобто 152 млн, і на 01.01.2038 його кількість дорівнювала б $200 + 152 = 352$ млн. Помилка становила б $428 - 352 = 76$ млн.

13.2. Модель природного зростання випуску продукції зі сталими темпами (без обмежень зростання)

Нехай деяка фірма (підприємство або галузь) випускає продукцію та продає її одиницю за ціною p . Позначимо $q = q(t)$ – обсяг продукції, що випущена та реалізована до моменту часу t . Припускаємо, що має місце аксіома про ненасичення споживача (ринку), тобто вся продукція, яку

випускають, буде продана, а обсяг продажу не настільки високий, щоб суттєво вплинути на ціну товару p , яку вважаємо фіксованою. Тоді на момент часу t фірма отримує дохід $R(t) = pq(t)$.

Відомо, що збільшення обсягу продукції, яку випускають, пов'язано з чистими інвестиціями (інвестиції, що спрямовані на розширення виробництва). Позначимо їх $I = I(t)$. Чисті інвестиції – це різниця між обсягом інвестицій та амортизаційними витратами. Для збільшення обсягу продукції, яку випускають, необхідно, щоб чисті інвестиції $I(t) > 0$. У випадку $I(t) = 0$ загальні інвестиції тільки покривають витрати на амортизацію, і рівень випуску продукції залишається без змін. Випадок, за якого $I(t) < 0$, спричиняє зменшення основних фондів і, як наслідок, – зменшення рівня випуску продукції. Таким чином у моделі природного зростання припускають, що частину доходу використовують на інвестиції у виробництво реалізованої продукції, тобто інвестиції становлять фіксовану частину доходу. Дістанемо:

$$I(t) = mpq(t), \quad (13.3)$$

де m – норма інвестицій (стале число, причому $0 < m < 1$), що становить частину доходу, яку витрачають на чисті інвестиції.

Якщо виходити із припущення про ненасичення ринку (тобто повну реалізацію продукції, яку випускають), то у результаті розширення виробництва буде отримано приріст доходу, частина якого знов використовуватиметься для розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску продукції (**акселерації**), причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій:

$$q'(t) = lI(t), \quad (13.4)$$

де l – норма акселерації.

Підставимо (13.4) до (13.3), отримаємо $q'(t) = lmpq(t)$ і позначимо $k = lmp$, тоді:

$$q'(t) = kq(t). \quad (13.5)$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку із відокремленими змінними. Загальним розв'язком рівняння є функція:

$$q = Ce^{kt}, \text{ де } C > 0 \text{ – довільна стала.}$$

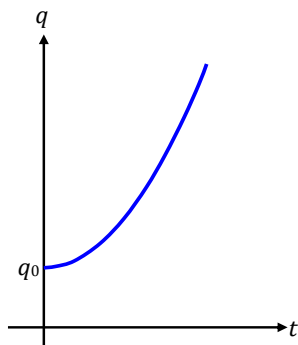


Рис. 13.1

Якщо у початковий момент часу $t = t_0$ обсяг продукції становить q_0 , то

$$q_0 = Ce^{kt_0}.$$

Виразимо сталу $C = q_0 e^{-kt_0}$ і підставимо її значення до загального розв'язку. Дістанемо частинний розв'язок (13.5) – розв'язок задачі Коші:

$$q = q_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (13.6)$$

Інтегральну криву (13.5) подано на рис. 13.1.

Диференціальне рівняння (13.5) описує збільшення обсягу продукції, яку випускають, без обмежень зростання та належить до рівнянь природного зростання (зростання за сталого темпу інфляції). Це рівняння описує також **динаміку зростання цін за сталого темпу інфляції**.

Приклад 13.2. Динаміка зростання цін за сталого темпу інфляції. Відомо, що в початковий момент часу ціна товару $p_0 = p(0)$, а річний темп інфляції сталий і дорівнює r . Описати динаміку зростання цін за сталого темпу інфляції.

Динаміку зростання цін за сталого темпу інфляції описує диференціальне рівняння:

$$p'(t) = rp(t). \quad (13.7)$$

Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{dp}{dt} = rp(t).$$

Відокремимо в ньому змінні:

$$\frac{dp}{p} = rdt.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dp}{p} = \int rdt,$$

Дістанемо:

$$\ln|p| = rt + \ln|C|.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння:

$$p(t) = Ce^{rt}.$$

З урахуванням початкової умови $p_0 = p(0)$ дістанемо частинний розв'язок:

$$p(t) = p_0 e^{rt}. \quad (13.8)$$

Приклад 13.3. *Рух основних фондів.* Коефіцієнт вибуття основних фондів дорівнює 0,1. Інвестиції сталі та становлять 50 ум. гр. од. Описати процес руху основних фондів, якщо відомо, що швидкість зміни основних фондів дорівнює різниці між інвестиціями та вибуттям основних фондів. У початковий момент часу основні фонди становили 1200 ум. гр. од.

Позначимо основні фонди в кожен момент часу через $K = K(t)$. Процес руху основних фондів описуватиме диференціальне рівняння:

$$K'(t) = 50 - 0,1K(t).$$

Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{500 - K}{10},$$

відокремимо змінні:

$$\frac{dK}{500 - K} = \frac{1}{10} dt.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння, дістанемо:

$$-\ln|500 - K| = \frac{t}{10} - \ln|C|.$$

Перетворимо отриманий вираз:

$$\ln|500 - K| - \ln|C| = -\frac{t}{10}, \quad \ln\left|\frac{500 - K}{C}\right| = -\frac{t}{10}, \quad 500 - K = Ce^{-0,1t},$$

звідки загальний розв'язок рівняння набуде вигляду:

$$K(t) = 500 - Ce^{-0,1t}.$$

З урахуванням початкової умови частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$K(t) = 500 + 700e^{-0,1t}.$$

13.3. Модель зростання випуску продукції із різким відсіканням

Деяка фірма (підприємство або галузь) випускає продукцію. Позначимо $q=q(t)$ обсяг продукції, що випущена та реалізована до моменту часу t . Якщо розглядати приріст обсягу виробництва залежно від використаного ресурсу $s=s(t)$ за час Δt , то рівняння зростання матиме вигляд:

$$q'(t) = -s'(t), \quad (13.9)$$

За умови, що підприємство не отримує із зовнішнього середовища жодних ресурсів і не втрачає їх, темп зростання можна подати у вигляді:

$$q'(t) = f(q, s). \quad (13.10)$$

Якщо припустити, що зростання обсягу виробництва пропорційне використанню виробничого обладнання, то процес зростання припиниться, як тільки виснажаться ресурси виробничих потужностей. У цьому випадку економічний процес можна описати диференціальним рівнянням:

$$q'(t) = vq(t), \quad (13.11)$$

де v – відносний темп зростання. Параметр v залежить від виду продукції, відповідного ресурсу та швидкості, з якою працює механізм приросту обсягу виробництва. Розв'язавши це диференціальне рівняння, дістанемо:

$$q(t) = q_0 e^{vt} \text{ при } 0 \leq t \leq t_f.$$

При $t=t_f$ зростання обсягу продукції припиняється, витрати ресурсу:

$$s=0 \text{ і } q=Q,$$

де Q відповідає 100 %-му використанню виробничих потужностей. Графічно експоненціальне зростання, що обмежено реальним ресурсом виробничих потужностей, подано на рис. 13.2.

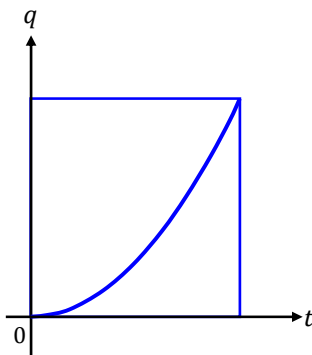


Рис. 13.2

13.4. Зростання обсягу виробництва, що пропорційне до витрат ресурсу

Якщо припустити, що механізм зростання працює зі швидкістю, що пропорційна витратам ресурсу s , то можна записати рівняння:

$$q'(t) = ks, \quad (13.12)$$

де k – деяка стала. Тоді при $s = Q - q$ дістанемо диференціальне рівняння:

$$\frac{dq}{dt} = k(Q - q),$$

яке розв'яжемо, відокремивши змінні:

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{Q - q} = k \int_0^t dt \Rightarrow \ln \left| \frac{Q - q_0}{Q - q} \right| = kt \Rightarrow$$

$$q(t) = Q - (Q - q_0)e^{-kt}.$$

При $q_0 = 0$ дістанемо:

$$q(t) = Q(1 - e^{-kt}) \quad (\text{рис. 13.3}).$$

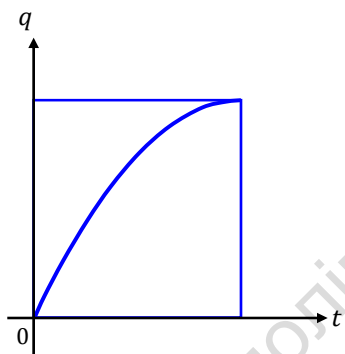


Рис. 13.3

13.5. Модель природного зростання в умовах конкуренції (логістичне зростання)

На практиці модель природного зростання за сталого темпу доцільно застосовувати на початкових етапах розвитку економічної системи протягом обмеженого проміжку часу, оскільки (як випливає із (13.6)) із перебігом часу $q = q(t)$ набуває яких завгодно великих значень, що не може віддзеркалитися на зміні ціни. Якщо ціна реалізованої продукції p залежить від обсягу продукції q , то функція, яка її виражає, $p = p(q)$, спадна (зі збільшенням обсягу випущеної продукції її ціна на ринку зменшується через насичення ринку).

У момент часу t фірма отримує дохід $R(t) = p(q(t))q(t)$. Якщо частину доходу використовують на інвестиції $I = I(t)$ до

виробництва продукції, то за умови ненасичування ринку швидкість випуску продукції буде пропорційна збільшенню інвестицій, тобто:

$$q' = kq, \quad k = lm, \quad (13.12)$$

де m – норма інвестицій, l – норма акселерації, p – стала ціна. Тому модель зростання обсягу виробництва в умовах конкуренції ринку описує диференціальне рівняння першого порядку із відокремленими змінними:

$$q'(t) = \alpha p(q) q(t), \quad (13.13)$$

де $p = p(q)$ – спадна функція ($p' < 0$), $\alpha = lm$. Оскільки всі співмножники у правій частині цього рівняння є додатними ($\alpha > 0, p > 0, q > 0$), то із (13.13) випливає, що $q' > 0$, тобто функція $q = q(t)$ є зростаючою. Характер зростання функції визначає її друга похідна. Диференціюючи за t (13.13), дістанемо:

$$q'' = \alpha \left(q' p(q) + q \frac{dp}{dq} q' \right) = \alpha q' \left(p + \frac{dp}{dq} q \right). \quad (13.14)$$

Оскільки $E_p(q) = \frac{dp}{p} \frac{q}{dq}$ – еластичність попиту, то (13.14)

можна записати у вигляді:

$$q'' = \alpha q' p \left(1 + \frac{dp}{dq} \frac{q}{p} \right) = \alpha q' p \left(1 + \frac{1}{E_p(q)} \right).$$

Ураховуючи, що

$$\frac{dq}{dp} < 0, \quad \text{отже й } E_p(q) < 0,$$

остаточно дістанемо:

$$q'' = \alpha q' p \left(1 - \frac{1}{E_p(q)} \right). \quad (13.15)$$

Із рівності (13.15) випливає, що:

- за еластичного попиту $|E_p(q)| > 1$, $q'' > 0$ графік функції $q = q(t)$ опуклий униз (це означає прогресивне зростання);
- за нееластичного попиту $|E_p(q)| < 1$, $q'' < 0$ графік функції $q = q(t)$ опуклий уверх (це означає уповільнене зростання/насичення).

Припустимо, що залежність ціни від обсягу попиту $p=p(q)$ має вигляд лінійної функції (рис. 13.4):

$$p(q)=a-bq, \quad (a>0, b>0). \quad (13.16)$$

Тоді рівняння (13.13) і (13.15) набувають виду:

$$q'=\alpha(a-bq)q, \quad (13.17)$$

$$q''=\alpha q'(a-2b). \quad (13.18)$$

Із співвідношень (13.17) і (13.18) дістанемо, що $q'=0$ при $q=0$ і при $q=a/b$, $q''>0$ при $q<a/2b$ і $q''<0$ при $q>\frac{a}{2b}$.

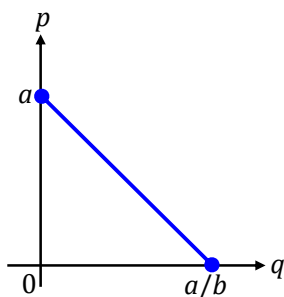


Рис. 13.4

Отже, $q=a/2b$ – точка перегину графіка функцію $q=q(t)$.

На рис. 13.5 подано графік функції $q=q(t)$ (однієї з інтегральних кривих диференціального рівняння), яку називають **логістичною кривою**.

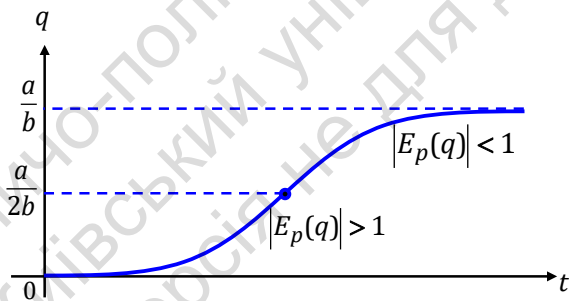


Рис. 13.5

Пряму, рівнянням якої є функція $y=a/b$, називають **прямою насиченості**.

Приклад 13.4. Знайти обсяг реалізованої продукції $q=q(t)$, якщо відомо, що ціна $p(q)=2-q$, норма акселерації $l=2$, норма інвестицій $m=0,5$, $q(0)=0,5$.

Диференціальне рівняння (13.13) в цьому випадку має вид:

$$q'(t)=(2-q)q(t).$$

Перетворимо це рівняння:

$$\frac{dq}{dt} = 2q - q^2.$$

Відокремивши змінні, розв'яжемо його:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{2q - q^2} = dt &\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-q} + \frac{1}{q} \right) dq = dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\int \frac{dq}{2-q} + \int \frac{dq}{q} \right) &= \int dt \Rightarrow \left(\int \frac{dq}{2-q} + \int \frac{dq}{q} \right) = 2 \int dt \Rightarrow \\ \Rightarrow -\ln|2-q| + \ln|q| &= 2t + \ln|C| \Rightarrow \ln \left| \frac{q}{C(2-q)} \right| = 2t \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{q}{2-q} &= Ce^{2t} \Rightarrow qCe^{-2t} + q = 2 \Rightarrow q(Ce^{-2t} + 1) = 2. \end{aligned}$$

Остаточно дістанемо:

$$q(t) = \frac{2}{1 + Ce^{-2t}}.$$

За умови $q(0) = 0,5$ маємо:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1+C}, C=3,$$

$$\text{тому } q(t) = \frac{2}{1+3e^{-2t}}.$$

13.6. Динамічна модель Кейнса

Розглянемо балансову модель, яка включає основні компоненти динаміки економіки. Нехай $y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ – національний дохід, державні витрати (державне споживання), споживання та інвестиції, відповідно. Усі ці величини розглядають як функції часу t . Оскільки сума всіх витрат має дорівнювати національному доходу, то запишемо балансове рівняння:

$$y(t) = S(t) + I(t) + E(t).$$

Загальне споживання складається із внутрішнього споживання деякої частини національного доходу в народному господарстві та кінцевого споживання, тому:

$$S(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

де $a(t)$ – коефіцієнт схильності до споживання $0 < a(t) < 1$ (гранична схильність споживання); $b(t)$ – автономне кінце-

ве споживання (базовий рівень споживчих витрат, фіксована частина споживання).

Розмір інвестицій не може бути довільний. Його визначає добуток норми акселерації $l(t)$, величину якого характеризує рівень технології інфраструктури держави, на граничний національний дохід. Коефіцієнт акселерації вказує, на скільки зростуть інвестиції, якщо національний дохід зросте на одиницю. Отже, виконується співвідношення:

$$I(t) = l(t)y'(t).$$

У результаті дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ I(t) = l(t)y'(t). \end{cases} \quad (13.19)$$

Припустимо, що функції $a(t)$, $b(t)$, $l(t)$, $E(t)$ задані та є характеристиками функціонування й еволюції держави. Потрібно описати динаміку національного доходу $y = y(t)$ як функцію часу t .

Із другого та третього рівнянь системи (13.19) підставимо вирази для $S(t)$ і $I(t)$ до першого, дістанемо:

$$\begin{aligned} y(t) &= a(t)y(t) + b(t) + l(t)y'(t) + E(t), \\ l(t)y'(t) - (1 - a(t))y(t) &= -b(t) - E(t), \\ y'(t) - \frac{1 - a(t)}{l(t)}y(t) &= -\frac{b(t) + E(t)}{l(t)}. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Це рівняння – неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y = y(t)$. Існує достатньо складна формула його загального розв'язку.

Для розв'язання диференціального рівняння розглянемо простий випадок, за якого основні параметри задачі a , b , l та E є сталими числами. У цьому випадку рівняння (13.20) спрощується до лінійного диференціального рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y' - \frac{1 - a}{l}y = -\frac{b + E}{l}. \quad (13.21)$$

Відомо, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою деякого його частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння:

$$y' - \frac{1-a}{l}y = 0.$$

За частинний розв'язок неоднорідного рівняння (13.21) візьмемо так званий рівноважний розв'язок, коли $y' = 0$:

$$y_p = \frac{b+E}{1-a}. \quad (13.22)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння знайдемо за формулою:

$$y_{одн} = Ce^{\left(\frac{1-a}{l}t\right)}. \quad (13.23)$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (13.21) має вигляд:

$$y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\left(\frac{1-a}{l}t\right)}. \quad (13.24)$$

Інтегральні криві рівняння (13.24) подано на рис. 13.6.

Якщо у початковий момент часу $y_0 < y_p$, то

$$C = y_0 - y_p < 0,$$

криві відхиляються вниз від рівноважного розв'язку (національний дохід із часом зменшується за заданих параметрів задачі a, b, l та E , оскільки показник експоненти в (13.24) додатний).

Якщо $y_0 > y_p$, то $C > 0$, і національний дохід зростає, та інтегральні криві відхиляються вгору від рівноважної прямої $y = y_p$.

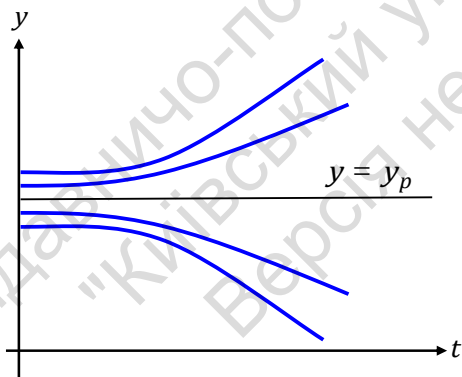


Рис. 13.6

Рівняння (13.21) є автономним. Такі рівняння часто застосовують у практиці математичного моделювання різних економічних процесів, коли, наприклад незалежна змінна відіграє роль часу, що не входить до співвідношень, які описують за-

кони природи. У цьому випадку звичайно інтерес являють так звані точки рівноваги, або стаціонарні точки, в яких $y'(t)=0$.

У нашому випадку точка є точкою нестійкої рівноваги.

Приклад 13.5. У макроекономіці держави дохід на початку року становить 300 ум. гр. од. Базова величина споживання – 120 ум. гр. од. Гранична схильність до споживання – 0,6. Величина державних витрат фіксована й дорівнює 38 ум. гр. од. Норма акселерації становить 0,5. Описати динаміку доходу та рівноважний дохід.

Знайдемо рівноважний розв'язок за (13.22):

$$y_p = \frac{b+E}{1-a} = \frac{120+38}{1-0,6} = 395.$$

До диференціального рівняння (13.21) підставимо вихідні дані задачі. Тоді дістанемо диференціальне рівняння $y' - 0,8y = -395$, загальний розв'язок якого:

$$y(t) = 395 - 95e^{0,8t}.$$

Задамо значення $t=1$, дістанемо:

$$y(1) = 395 - 95e^{0,8 \cdot 1} = 183,57.$$

Дохід зменшується, оскільки за умовою $y_0 < y_p$, де y_0 – дохід у початковий момент часу.

13.7. Неокласична модель зростання

Нехай $y = f(K, L)$ – функція, що визначає національний дохід, де f – однорідна виробнича функція першої степені, K – обсяг капіталовкладень (виробничих фондів), L – обсяг витрат праці.

Розглянемо величину фондоозброєності $k = K/L$, тоді продуктивність праці виражають формулою:

$$f(k) = \frac{f(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}; 1\right) = F(k, 1). \quad (13.25)$$

Відомо, що $f'(k) > 0, f''(k) < 0$.

Мета моделі – описати динаміку фондоозброєності, тобто виразити її як функцію часу t .

Модель базується на таких припущеннях:

1) має місце природний приріст трудових ресурсів, тобто:

$$L' = \alpha L, \quad (13.26)$$

де α – коефіцієнт пропорційності;

2) інвестиції спрямовані на збільшення виробничих фондів та амортизацію, тобто:

$$I = K' + \beta K, \quad (13.27)$$

де β – норма амортизації.

Якщо l – норма інвестицій, $I = ly = K' + \beta K$ або

$$K' = lf(K, L) - \beta K. \quad (13.28)$$

Із означення фондоозброєності випливає, що:

$$\ln|k| = \ln|K| - \ln|L|.$$

Диференціюючи цю рівність за t , маємо:

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

Підставивши до добутої рівності вирази (13.26) і (13.28), дістанемо рівняння щодо невідомої функції k :

$$\frac{k'}{k} = \frac{lF(K, L)}{K} - \frac{\beta K}{K} - \frac{\alpha L}{L},$$

$$k' = lf(k) - (\alpha + \beta)k, \quad (13.29)$$

де $f(k)$ визначено за (13.25). Рівняння (13.29) називають **рівнянням неокласичного зростання**. Це диференціальне рівняння першого порядку із відокремленими змінними, що є автономним. В автономного диференціального рівняння існує стаціонарний розв'язок. Виділимо стаціонарний розв'язок цього рівняння з умови $k' = 0$, тоді:

$$lF(k) - (\alpha + \beta)k = 0,$$

тобто $k_{st} = \text{const}$ є коренем цього нелінійного алгебраїчного рівняння – **стаціонарного розв'язку рівняння** (13.29).

Приклад 13.6. Для виробничої функції $f(K, L) = \sqrt{KL}$ знайти інтегральні криві та стаціонарний розв'язок.

Із (13.25) випливає, що:

$$f(k) = \frac{f(K, L)}{L} = \frac{\sqrt{KL}}{L} = \sqrt{\frac{K}{L}} = \sqrt{k}, \text{ де } k = \frac{K}{L}.$$

Тоді рівняння (13.29) має вигляд:

$$k' = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k. \quad (13.30)$$

Стаціонарний розв'язок цього рівняння можна знайти із рівності:

$$l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0, \text{ звідки } \sqrt{k}(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}) = 0.$$

Маємо:

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ (\alpha + \beta)\sqrt{k} = l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ \sqrt{k} = \frac{l}{\alpha + \beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \frac{l^2}{(\alpha + \beta)^2} \end{cases},$$

ненульовий частинний розв'язок якої:

$$k_{st} = \frac{l^2}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Диференціальне рівняння (13.29) розв'язуємо методом відокремлення змінних:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k})} = dt.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dk}{\sqrt{k}(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k})} = \int dt.$$

Зробимо заміну:

$$\sqrt{k} = z, \text{ тоді } \frac{dk}{2\sqrt{k}} = dz \Rightarrow \frac{dk}{\sqrt{k}} = 2dz.$$

Дістанемо:

$$\int \frac{2dz}{l - (\alpha + \beta)z} = \int dt \Rightarrow -\frac{2}{(\alpha + \beta)} \int \frac{dz}{z - \frac{l}{(\alpha + \beta)}} = \int dt,$$

$$\text{тоді } \ln|(\alpha + \beta)\sqrt{k} - l| = -\frac{\alpha + \beta}{2}t.$$

Дістанемо:

$$(\alpha + \beta)\sqrt{k} = l - Ce^{-\frac{\alpha + \beta}{2}t} \Rightarrow \sqrt{k} = -\frac{l}{\alpha + \beta} + Ce^{-\frac{\alpha + \beta}{2}t} \Rightarrow$$

$$k = \left(Ce^{-\frac{\alpha + \beta}{2}t} - \frac{l}{\alpha + \beta} \right)^2. \quad (13.31)$$

Сукупність інтегральних кривих відхиляється вгору і вниз від стаціонарного розв'язку (рис. 13.7), тобто $k \rightarrow k_{st}$ при $t \rightarrow \infty$.

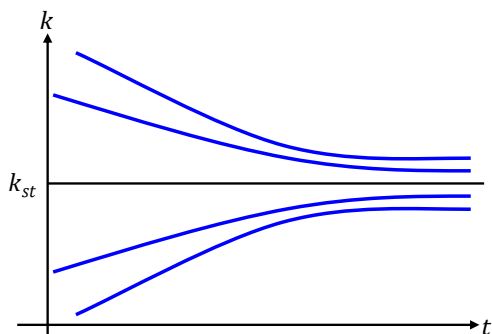


Рис. 13.7

Отже, за незмінних вхідних параметрів l , α та β функція фондоозброєності стійко прямує до стаціонарного розв'язку, незалежно від початкових умов. У такому випадку кажуть, що $k = k_{st}$ є точкою стійкої рівноваги.

13.8. Модель Еванса

Розглянемо ринок продажу одного товару. Нехай $q = q(t)$, $s = s(t)$, $p = p(t)$ – функції попиту, пропозиції та ціни цього товару, відповідно. Математична модель рівноважної ціни базується на такому основному припущенні: приріст ціни Δp за проміжок часу Δt прямо пропорційний різниці між попитом і пропозицією, тобто:

$$\Delta p = \alpha(q - s)\Delta t, \alpha > 0. \quad (13.32)$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на $\Delta t \neq 0$ і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. У результаті дістанемо диференціальне рівняння:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(q(t) - s(t)). \quad (13.33)$$

Приклад 13.7. Дослідити модель Еванса, припускаючи, що функції попиту $q = q(t)$ і пропозиції $s = s(t)$ лінійні відносно ціни p .

Нехай функції мають вигляд $s(p) = bp - a$ та $q(p) = c - dp$, де a, b, c, d – додатні числа; функція $s = s(p)$ визначає пропозицію, а функція $q = q(p)$ – попит на певний товар на ринку. Припустимо також, що $c > a$, оскільки за достатньо малої ціни попит перевищує пропозицію та виконується початкова умова:

$$p(0) = p_0. \quad (13.34)$$

Тоді рівняння (13.33) запишемо у вигляді:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha((c-dp)-(bp-a)) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \alpha((c+a)-(b+d)p) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \alpha(\beta - \gamma p),$$

де $\beta = c + a$, а $\gamma = b + d$, тоді:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(\beta - \gamma p). \quad (13.35)$$

Диференціальне рівняння (13.35) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок має вигляд:

$$p(t) = \frac{1}{\gamma} \cdot (\beta + Ce^{-\alpha\gamma t}).$$

Ураховуючи початкову умову (13.34), матимемо:

$$p(t) = p_0 e^{-\alpha\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 + e^{-\alpha\gamma t}). \quad (13.36)$$

Очевидно, що:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{c+a}{b+d} = p^*. \quad (13.37)$$

Раніше було показано, що ціна $p^* = \frac{a+c}{b+d}$ є рівноважною.

Перейдемо до аналізу моделі. Зі структури (13.35) випливає:

$$1) \frac{dp}{dt} < 0 \text{ при } p_0 > p^*.$$

Це означає: якщо початкова ціна більша за рівноважну, то функція ціни $p = p(t)$ спадає, тобто ціна на товар зі збільшенням часу зменшується та прямує до рівноважної;

$$2) \frac{dp}{dt} > 0 \text{ при } p_0 < p^*.$$

Це означає: якщо початкова ціна менша за рівноважну, то функція ціни $p = p(t)$ зростає, тобто ціна на товар зі збільшенням часу збільшується та прямує до рівноважної.

13.9. Модель динаміки фондів

Позначимо через Φ величину фондів у натуральній або вартісній формі. Як відомо, фонди у натуральній формі – це станки, комп'ютери, приміщення тощо. Із часом вони псуються, застарівають, зношуються, тобто виходять із ладу.

Такий процес в економіці називають *вибуттям фондів*. Швидкість вибуття фондів характеризує коефіцієнт вибуття μ ($0 < \mu < 1$). Наприклад, якщо за 10 років фонд повністю оновлюється, то $\mu = 0,1$. Отже, вибуття μ приводить до зменшення за один рік на величину $\mu\Phi$, а за проміжок часу Δt – на величину $\mu\Phi\Delta t$. З іншого боку, інвестиції I за рік дають збільшення фондів на величину $I\rho$, а за проміжок часу Δt – на величину $I\rho\Delta t$.

Надаємо у довільний момент часу t приросту Δt , тоді приріст:

$$\Delta\Phi = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = (I\rho - \mu\Phi)\Delta t. \quad (13.38)$$

Вважаючи процес вибуття фондів неперервним, поділимо обидві частини (13.38) на $\Delta t \neq 0$ і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. У результаті дістанемо диференціальне рівняння:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\mu\Phi + I\rho. \quad (13.39)$$

Рівняння (13.39) – лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд:

$$\Phi_{одн} = Ce^{-\mu t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\Phi = \Phi_{неод}.$$

Тоді із (13.39):

$$\Phi_{неод} = (\rho/\mu)I.$$

Отже, загальний розв'язок (13.39) запишемо у вигляді:

$$\Phi = Ce^{-\mu t} + \frac{\rho}{\mu}I.$$

Приклад 13.8. У моделі динаміки фондів для деякого підприємства відомі коефіцієнти: вибуття фондів $\mu = 0,1$ і збільшення інвестицій $\rho = 0,7$. Інвестиції є сталою величиною та становлять 10^6 грн. Знайти у вартісному виразі динаміку фондів підприємства за умови, що у початковий момент спостереження виконується умова $\Phi(0) = 10^7$ грн.

Запишемо рівняння динаміки фондів (13.39):

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\mu\Phi + I\rho.$$

У нашому прикладі:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -0,1\Phi + 0,7 \cdot 10^6.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$\Phi = Ce^{-\mu\Phi} + \frac{\rho}{\mu} I.$$

У нашому випадку розв'язок має вигляд:

$$\Phi = Ce^{-0,1\Phi} + 7 \cdot 10^6.$$

Із врахуванням початкової умови, маємо:

$$\Phi(t) = 3 \cdot 10^6 e^{-0,1t} + 7 \cdot 10^6.$$

Очевидно, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 7 \cdot 10^6$. Це означає, що для нашого

випадку зі збільшенням проміжку часу величина фондів зменшується. Це не дуже втішна картина. Але зі структури рівняння можна дійти висновку: для того, щоб фонд підприємства не зменшувався, потрібно здійснювати стратегію так, щоб інвестиції були змінними та задовольняли умову:

$$I(t) \geq \frac{1}{7} \Phi(t).$$

13.10. Модель Солоу

Стан економіки, як єдине ціле, описують такі змінні: Q – кінцевий продукт, L – трудові ресурси, K – виробничі фонди, I – інвестиції, C – розмір невиробничого споживання. В економічній теорії, у рамках моделі Солоу, ці змінні пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} C = (1-\rho)Q; & 0 \leq \rho < 1; & Q = Q(K, L); \\ L = L_0 e^{\nu t}; & \frac{dK}{dt} = \rho Q - \mu K; & K(0) = K_0. \end{cases} \quad (13.40)$$

Величину ρ називають *нормою накопичення*, вона характеризує частку кінцевого продукту, яку використовують на інвестиції; величина μ є *коефіцієнтом вибуття фондів*. Ви-

робнича функція $Q=Q(K,L)$ є однорідною функцією першого степеня. Позначимо

$$q=Q/L, \quad k=K/L. \quad (13.41)$$

Введені величини є *середньою продуктивністю праці* та *середньою фондовіддачею*, відповідно. Ураховуючи позначення (13.41) та однорідність функції $Q=Q(K,L)$, дістанемо:

$$q = \frac{Q}{L} = \frac{Q(K,L)}{L} = Q\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Q(k, 1) = q(k).$$

Диференціюємо величину $k=K/L$ за змінною t . У результаті матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \frac{d(K/L)}{dt} = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{L} - K \frac{L'}{L} = \\ &= \frac{\rho Q - \mu K}{L} - \nu \frac{K}{L} = \rho q(k) - (\mu + \nu)k \Rightarrow \\ &\frac{dk}{dt} = \rho q(k) - (\mu + \nu)k. \end{aligned} \quad (13.42)$$

$$k(0) = k_0 = K_0/L_0. \quad (13.43)$$

Отримано задачу Коші для диференціального рівняння (13.42) із початковою умовою (13.43).

Приклад 13.9. Для виробничої функції

$$Q=Q(K,L)=10^9 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}$$

у моделі Солоу $k_0=5$, $\rho=10^{-1}$, $\mu=\nu=0,5$. Знайти середню фондоозброєність підприємства.

Рівняння (13.42) $k'=\rho q(k)-(\mu+\nu)k$ за заданих умов набуде вигляду:

$$\frac{dk}{dt} + k = 10^5 \cdot k^{1/2} \Rightarrow \frac{dk}{10^5 k^{1/2} - k} = dt.$$

Інтегруємо рівняння:

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dk}{10^5 k^{1/2} - k} = \left| \frac{x = k^{1/2}}{dx = (1/2)k^{-1/2} dk} \right| = \\ &= 2 \int \frac{dx}{10^5 - x} = -2 \ln |10^5 - x| + \ln C = \ln \frac{C}{(10^5 - k^{1/2})^2}. \end{aligned}$$

Звідси дістанемо загальний розв'язок:

$$(k^{1/2} - 10^5)^2 = Ce^{-t}.$$

Використовуючи початкову умову, знайдемо шукану функцію:

$$k(t) = (99995e^{-t} - 10^5)^2.$$

13.11. Модель ринку із прогнозованими цінами

У простих моделях ринку попит і пропозиція звичайно залежать тільки від ціни на товар. Але у реальних ситуаціях попит і пропозиція залежать і від тенденції ціноутворення, і темпів зміни ціни на товар. У моделях із неперервними та диференційованими за часом t функціями ці характеристики описують відповідно першою та другою похідними функції ціни $p = p(t)$.

Нехай функції попиту $q = q(t)$ і пропозиції $s = s(t)$ залежать від ціни $p = p(t)$ та її похідних $p'(t)$ і $p''(t)$:

$$\begin{cases} q(t) = \alpha p'' - \beta p' - \gamma p + d, \\ s(t) = \alpha p'' - \beta p' - \gamma p + \phi, \end{cases} \quad (13.44)$$

де $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \phi$ – додатні числа, причому $\alpha > a$.

Залежності (13.44) досить реальні. Пояснимо це, аналізуючи доданки у виразах $q = q(t)$ та $s = s(t)$ із похідними від ціни.

1. Попит "підігрівається" темпом зміни ціни: якщо темп зростає ($p'' > 0$), то на ринку є зацікавленість до товару, і навпаки – швидке зростання ціни відштовхує покупців, тому доданок з першою похідною функції ціни входить зі знаком мінус.

2. Пропозиція ще значніше збільшується за темпом зміни ціни, тому коефіцієнт при p'' у виразі функції $s(t)$ більший, ніж у виразі функції $q(t)$. Зростання ціни також збільшує пропозицію, тому доданок, що містить p' , входить до виразу функції $s(t)$ зі знаком плюс.

Установимо залежність ціни від часу. Для цього запишемо умову рівноваги $d(t) = s(t)$, яка в нашому випадку набуває вигляду:

$$\alpha p'' - \beta p' - \gamma p + d = \alpha p'' + \beta p' + \gamma p + \phi,$$

звідки дістанемо:

$$a_0 p'' + a_1 p' + a_2 p = a_3, \quad (13.45)$$

де $a_0 = \alpha - a$, $a_1 = \beta + b$, $a_2 = \gamma + c$, $a_3 = d - \varphi$.

Рівняння (13.45) лінійне неоднорідне диференціальне, другого порядку щодо функції $p = p(t)$, загальний розв'язок якого можна знайти за методом із п. 12.4.4.

Приклад 13.10. Нехай задано функції попиту й пропозиції:

$$q(t) = 3p'' - p' - 2p + 18, \quad s(t) = 4p'' + p' + 3p + 3.$$

Опишемо динаміку ціни $p = p(t)$ на товар. Запишемо умову рівноваги $q(t) = s(t)$, яка набуває вигляду:

$$3p'' - p' - 2p + 18 = 4p'' + p' + 3p + 3. \\ p'' + 2p' + 5p = 15. \quad (13.46)$$

Рівняння (13.46) – лінійне неоднорідне диференціальне, другого порядку щодо функції $p = p(t)$. Його загальний розв'язок є сумою деякого частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $p'' + 2p' + 5p = 0$, характеристичне рівняння якого має вигляд:

$$k^2 + 2k + 5 = 0. \quad (13.47)$$

Його корені – комплексно-спряжені числа $k = -1 \pm 2i$, тому загальний розв'язок (13.47):

$$p_{\text{одн}} = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

За частинний розв'язок неоднорідного рівняння (13.46) візьмемо розв'язок $p = p_0$ – ціну, що встановлено (сталу величину). Частинний розв'язок (13.47) шукатимемо у вигляді $p_0 = A$. Тоді $p'_0 = 0$ і $p''_0 = 0$. Підстановка до (13.46) $5p_0 = 15$ дає значення:

$$p_0 = 3 \text{ (умов. гр. од.)}.$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд:

$$p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \quad (13.48)$$

При $t \rightarrow \infty$, $p(t) \rightarrow p_0 = 3$, тобто всі інтегральні криві мають горизонтальну асимптоту $p = 3$ і коливаються навколо неї. Це означає, що всі ціни прямують до встановленої ціни p_0 із коливаннями навколо неї, причому амплітуда цих коливань затухає зі збільшенням часу.

Наведемо окремі приклади цієї задачі у двох варіантах.

1. Задача Коші. Нехай у початковий момент часу відома ціна, а також тенденція її зміни:

$$t=0, p(0)=4, p'(0)=1.$$

Підставимо першу умову до (13.48) та дістанемо:

$$p(0)=C_1+3=4, \text{ звідки } C_1=1,$$

тобто із (13.48) маємо:

$$p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+C_2 \sin 2t). \quad (13.49)$$

Диференціюємо (13.49):

$$p'(t)=e^{-t}((2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t).$$

Підставимо другу умову задачі Коші $p'(0)=1$, дістанемо:

$$p'(0)=2C_2-1=1, \text{ звідки } C_2=1.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$$

або у зручнішій формі:

$$p(t)=3+\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t-(\pi/4)). \quad (13.50)$$

2. Мішана задача Коші. Нехай у початковий момент часу відомі ціна та попит: $t=0, p(0)=4, q(0)=16$.

Оскільки перша початкова умова така сама, як і в попередній задачі, то розв'язок має вигляд (13.49). Тоді обчислимо похідні функції $p=p(t)$:

$$p'(t)=e^{-t}((2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t).$$

$$p''(t)=e^{-t}((4C_2+3)\cos 2t-(3C_2-5)\sin 2t).$$

Отже,

$$p'(0)=2C_2-1, \quad p''(0)=-4C_2-3.$$

Підставимо ці значення до другої умови задачі $q(0)=16$, із врахуванням того, що:

$$q(t)=3p''-p'-2p+18),$$

Дістанемо: $C_2=-1$.

Інтегральні криві, що відповідають задачам 1 і 2, подано на рис. 13.8.

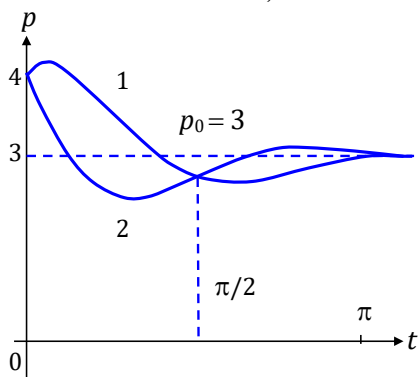


Рис. 13.8

Приклад 13.11. Задано функції попиту та пропозиції:

$$s(p) = 15 - p + 4 \frac{dp}{dt}, \quad q(p) = 25 - 2p + 3 \frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо у початковий момент часу $p(0) = 9$ (ум. гр. од.). Чи буде рівноважна ціна стійкою?

Із умови рівноваги $q(p) = s(p)$ дістанемо:

$$25 - 2p + 3 \frac{dp}{dt} = 15 - p + 4 \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 10 - p.$$

Маємо диференціальне рівняння із відокремленими змінними. Розв'язавши його, дістанемо функцію:

$$p(t) = 10 - Ce^{-t}.$$

Ураховуючи початкову умову $p(0) = 9$ і підставивши її до виразу загального розв'язку, дістанемо, що $C = 1$.

Остаточно маємо:

$$p = 10 - e^{-t}.$$

Зауважимо, що, оскільки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (10 - e^{-t}) = 10 = \text{const},$$

то ціна є стійкою.

Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач

1. Яке рівняння називають рівнянням природного зростання?

Приклад 1. Розглянемо так звану *модель розвитку суспільства*. Як відомо із демографії, швидкість збільшення кількості людей на земній кулі у момент часу t пропорційна їх кількості $u = u(t)$. Швидкість зменшення кількості людей також пропорційна $u = u(t)$, а також кількості забруднень $x = x(t)$, які потрапляють у довкілля внаслідок людської діяльності. Крім того, швидкість виділення цих забруднень також пропорційна $u = u(t)$. Таким чином, математичну мо-

дель розвитку суспільства можна описати наступною сукупністю диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t) - k_1 y(t)x(t), \\ x'(t) = k_2 y(t), \end{cases}$$

де k, k_1, k_2 – додатні числа (коефіцієнти пропорційності).

Перепишемо диференціальні рівняння у вигляді системи:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = ky(t) - k_1 y(t)x(t), \\ \frac{dx(t)}{dt} = k_2 y(t). \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння на друге. У результаті дістанемо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} x(t).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{k}{k_2} dx - \frac{k_1}{k_2} x dx \Rightarrow \int dy = \frac{k}{k_2} \int dx - \frac{k_1}{k_2} \int x dx + C_1 \Rightarrow \\ y &= \frac{k}{k_2} x - \frac{k_1}{2k_2} x^2 + C_1. \end{aligned}$$

Підставимо його до другого рівняння систем, дістанемо:

$$x' = kx - \frac{k_1}{2} x^2 + C_1,$$

Інтегруючи, дістаємо загальний розв'язок:

$$x = \frac{k}{2} x^2 - \frac{k_1}{6} x^3 + C_1 t + C_2.$$

Окремий інтерес становить дослідження загального розв'язку, який виражає залежність кількості населення від кількості забруднень, що виділяються у довкілля внаслідок людської діяльності. Якщо припустити, що у початковий момент часу $t=0$ забруднень не було, і кількість населення становила x_0 , то маємо задачу Коші із початковими умовами $y(0)=y_0, x(0)=0$. Використовуючи початкові умови, знайдемо значення сталої $C_1 = y_0$:

$$y = \frac{k}{k_2} x - \frac{k_1}{2k_2} x^2 + y_0.$$

Аналіз залежності показує: із плином часу $t > 0$ разом зі зростанням кількості населення $y = y(t)$ зростає й кількість забруднень $x = x(t)$, які потрапляють до довкілля внаслідок людської діяльності. Настане момент часу t_1 , який визначає умова:

$$x_1 = x(t_1) = \frac{k}{k_1},$$

коли y досягає максимуму, а потім починає зменшуватись. І може настати момент часу t_2 , коли рівень забруднень досягне значення $x_2 = x(t_2)$, за якого $y_2 = y(t_2) = 0$, тобто життя на Землі буде неможливе.

Звичайно, такий песимістичний прогноз матиме підстави, якщо не враховувати інші фактори (розвиток науково-технічного прогресу, боротьбу за екологічну чистоту довкілля тощо).

2. *Яке диференціальне рівняння описує модель природного зростання випуску продукції зі сталими темпами (без обмежень зростання)?*

Приклад 2. Установити, за який проміжок часу обсяг реалізованої продукції подвоїться, порівняно із початковим, якщо коефіцієнт пропорційності становить $k = lmp = 0,1$. На скільки відсотків потрібно збільшити норму інвестицій, щоб проміжок часу, необхідний для подвоєння обсягу реалізованої продукції, зменшився на 20 %.

Покладемо $k = lmp = 0,1$ у рівнянні $q'(t) = lmpq(t)$.

Розв'язком цього рівняння буде:

$$q = q_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Покладемо $t_0 = 0$, $k = 0,1$, $q = 2q_0$, дістанемо:

$$2q_0 = q_0 e^{0,1t}.$$

Звідси $t \approx 10 \ln 2 \approx 6,93$ (од. часу).

Оскільки $t_1 = 0,8t$, то $k_1 = k / 0,8 = 1,25k$, тобто норму інвестицій потрібно збільшити на 25 %.

3. *Яке диференціальне рівняння описує модель зростання обсягу виробництва в умовах конкуренції ринку?*

4. *Який вигляд має логістична крива?*

Приклад 3. Нехай кількість населення деякої держави $y = y(t)$, залежно від часу t , задовольняє рівняння:

$$y'(t) = 0,2(1 - y(t)10^{-4})y(t).$$

У початковий момент часу ($t = 0$) кількість населення сягала 1000 осіб. Визначити, за скільки років населення збільшиться у чотири рази.

У наведених у розділі прикладах розв'язком диференціального рівняння природного зростання є функція:

$$y(t) = Ce^{kt},$$

яка занадто швидко зростає із зростанням часу t і може буде застосована тільки для обмежених проміжків часу. У реальних задачах із часом ринок насичується. Тому у моделі зростання коефіцієнт пропорційності k вважають функцією змінної $y = y(t)$. Якщо для зростання населення запропоновано залежність $y = y(t)$, то розглянемо рівняння:

$$k = 0,2(1 - y(t) \cdot 10^{-4}).$$

Відокремимо змінні у заданому диференціальному рівнянні:

$$\frac{dy}{y(1 - y \cdot 10^{-4})} = 0,2dt,$$

Інтегруванням дістанемо загальний інтеграл:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{10^4 - y} \right) dy = 0,2 \int dt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\ln|y| - \ln|10^4 - y| = 0,2t + \ln|C| \Rightarrow \frac{y}{(10^4 - y)} = Ce^{0,2t}.$$

Остаточнo дістанемо:

$$y(t) = \frac{10^4 Ce^{0,2t}}{1 + Ce^{0,2t}}.$$

Визначаємо сталу C із початкової умови $y(0) = 1000$.

Отримаємо:

$$10^3 = \frac{10^4 Ce^{0,2t}}{1 + Ce^{0,2t}} \Rightarrow 1 + Ce^{0,2t} = 10Ce^{0,2t} \Rightarrow C = \frac{1}{9}.$$

Тому частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y(t) = \frac{10^4 \cdot 9^{-1} \cdot e^{0,2t}}{1 + 9^{-1} \cdot e^{0,2t}}.$$

За умовою задачі треба визначити значення аргументу t , за якого функція матиме значення $y(t) = 4 \cdot 10^3$. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$4 \cdot 10^3 = \frac{10^4 \cdot 9^{-1} \cdot e^{0,2t}}{1 + 9^{-1} \cdot e^{0,2t}} \Rightarrow 2 = \frac{5}{1 + 9e^{-0,2t}} \Rightarrow$$

$$18e^{-0,2t} = 3 \Rightarrow e^{-0,2t} = 6^{-1} \Rightarrow 0,2t = \ln 6 \Rightarrow t = 8,95.$$

Можна дійти висновку про те, що населення держави зросте у чотири рази приблизно за дев'ять років.

5. У чому сенс моделі Еванса динаміки ринкових цін?

6. У чому сенс моделі ринку із прогнозованими цінами?

Приклад 4. Динамічні функції попиту на деякий товар і пропозиції мають вигляд:

$$q(p; p') = 30 - p - 4 \frac{dp}{dt}, \quad s(p; p') = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p(0) = 7$.

Визначимо рівноважну ціну із умови рівноваги:

$$q(p; p') = s(p; p').$$

$$30 - p - 4 \frac{dp}{dt} = 20 + p + \frac{dp}{dt} \Rightarrow 5 \frac{dp}{dt} = 10 - 2p.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\frac{dp}{p-5} = -\frac{2}{5} dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p-5} = -\frac{2}{5} \int dt + C \Rightarrow \ln|p-5| = -0,4t + C.$$

Дістанемо загальний розв'язок:

$$p(t) = e^{-0,4t+C} + 5.$$

Визначаємо сталу C із початкової умови $p(0) = 7$. Тоді рівноважна ціна, залежно від часу, виражає функція:

$$p(t) = 2e^{-0,4t} + 5.$$

Зазначимо, зокрема, що існує границя $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 5$, тобто рівноважна ціна є стійкою.

Приклад 5. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q(p; p') = 50 - 2p - 4 \frac{dp}{dt}, \quad s(p; p') = 70 + 2p - 5 \frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p(0)=10$. Перевірити, чи є рівноважна ціна стійкою.

Визначимо рівноважну ціну з умови рівноваги:

$$q(p; p') = s(p; p').$$

$$50 - 2p - 4 \frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5 \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 20 + 4p.$$

Розв'язуємо диференціальне рівняння – відокремлюємо змінні та інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{20 + 4p} = dt &\Rightarrow \frac{1}{4} \int \frac{dp}{5 + p} = \int dt + C_1 \Rightarrow \frac{1}{4} \ln|5 + p| = t + \ln C \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5 + p = e^{4t + C_1}. \end{aligned}$$

Із початкової умови $p(0)=10$ визначаємо $e^{C_1} = 15$.

Отже, рівноважна ціна, залежно від часу, має вигляд:

$$p(t) = 15e^{4t} - 5.$$

Визначимо, чи буде рівноважна ціна стійкою. Оскільки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty,$$

то рівноважна ціна є нестійкою, а саме, зростає у часі.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Матриці. Визначники

Варіант 1

1. Обчислити добуток матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^3 + A^2 - 7A + 4E$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Варіант 2

1. Знайти добуток матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^2 + 5A + E$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$.

Варіант 3

1. Знайти добуток матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2E$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$.

Варіант 4

1. Знайти добуток матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення $f(A)$, де $f(A) = A^3 - 7A^2 + 18A - 5E$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти невідому матрицю X із рівняння:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислити $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n$.

Завдання 2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Варіант 1

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 15x_4 - 17x_5 = 26, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 8, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 11. \end{cases}$$

2. Розв'язати у матричний спосіб системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$$

3. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Дослідити, за яких значень параметра λ система лінійних рівнянь буде визначена, невизначена, несумісна; розв'язати систему за тих значень λ , за яких вона буде визначена:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 6y = 1, \\ 6x + (2-\lambda)y = 1. \end{cases}$$

Варіант 2

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = -6, \\ x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 6x_4 - 12x_5 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$$

2. Розв'язати у матричний спосіб системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідити, за яких значень параметра λ система лінійних рівнянь буде визначена, невизначена, несумісна; розв'язати систему за тих значень λ , за яких вона буде визначена:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 4 + \lambda x, \\ 7x + 3y = 1 + \lambda x. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

2. Розв'язати у матричний спосіб системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

3. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

4. Дослідити, за яких значень параметра λ система лінійних рівнянь буде визначена, невизначена, несумісна; розв'язати систему за тих значень λ , за яких вона буде визначена:

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)y = 5, \\ 3x + 4y = 5. \end{cases}$$

Варіант 4

1. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases} \end{array}$$

2. Розв'язати у матричний спосіб системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

3. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 16. \end{cases} \end{array}$$

4. Дослідити, за яких значень параметра λ система лінійних рівнянь буде визначена, невизначена, несумісна; розв'язати систему за тих значень λ , за яких вона буде визначена:

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 10)y = -1, \\ (\lambda - 10)x + (\lambda + 1)y = 2. \end{cases}$$

Завдання 3. Лінійні економічні задачі

Варіант 1

1. Задано матрицю доходів інвесторів:

$$R = \begin{pmatrix} 0,95 & 1,05 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,40 & 1,21 \end{pmatrix},$$

а також матрицю $Y = (1000 \ 5000 \ 15000)$, яка характеризує портфельні інвестиції. Який дохід гарантовано інвесторам?

2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Знайти торгові бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що суму бюджетів задано:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 41\,000.$$

3. Побудувати матричну модель умовної виробничої системи, яка складається з двох галузей, якщо задано матриці A – прямих матеріальних витрат і Y – кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) матрицю валового випуску X і план (валовий випуск) кожної галузі; 3) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

4. Подано табличні дані про виконання балансу за звітний період (ум. гр. од.)

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
Виробництво	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі збільшити удвічі, а другої – залишити на попередньому рівні.

Варіант 2

1. Задано матрицю доходів інвесторів:

$$R = \begin{pmatrix} 0,90 & 1,20 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,20 & 1,90 \end{pmatrix},$$

а також матрицю $Y = (10000 \ 7000 \ 12000)$, що характеризує портфельні інвестиції. Який дохід гарантовано інвесторам?

2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти торгові бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що суму бюджетів задано:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 41000.$$

3. Побудувати матричну модель умовної виробничої системи, що складається з двох галузей, якщо задано матриці A – прямих матеріальних витрат і Y – кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) матрицю валового випуску X і план (валовий випуск) кожної галузі; 3) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

4. У таблиці подано дані про виконання балансу за звітний період (ум. гр. од.):

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
Виробництво	1	2		
1	100	20	180	300
2	155	45	150	350

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі збільшити втричі, а другої – залишити на попередньому рівні.

Варіант 3

1. Задано матрицю доходів інвесторів:

$$R = \begin{pmatrix} 0,80 & 1,30 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,90 & 0,20 \end{pmatrix},$$

а також матрицю $Y = (1000 \ 5000 \ 15000)$, яка характеризує портфельні інвестиції. Який дохід гарантовано інвесторам?

2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Знайти торгові бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що суму бюджетів задано:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 70000.$$

3. Побудувати матричну модель умовної виробничої системи, що складається з двох галузей, якщо задано матриці A – прямих матеріальних витрат і Y – кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) матрицю валового випуску X і план (валовий випуск) кожної галузі; 3) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

4. У таблиці подано дані про виконання балансу за звітний період (ум. гр. од.)

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
Виробництво	1	2		
1	200	140	160	500
2	125	150	125	400

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі збільшити у три рази, а другої – залишити на попередньому рівні.

Варіант 4

1. Задано матрицю доходів інвесторів:

$$R = \begin{pmatrix} 0,7 & 1,4 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,85 & 0,25 \end{pmatrix},$$

А також матрицю $Y = (4000 \ 3000 \ 15000)$, яка характеризує портфельні інвестиції. Який дохід гарантовано інвесторам?

2. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Знайти торгові бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що суму бюджетів задано:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 90\,000.$$

3. Побудувати матричну модель умовної виробничої системи, яка складається з двох галузей, якщо задано матриці A – прямих матеріальних витрат і Y – кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) матрицю валового випуску X і план (валовий випуск) кожної галузі; 3) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

4. У таблиці подано дані про виконання балансу за звітний період (ум. гр. од.):

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
Виробництво	1	2		
1	20	200	180	400
2	135	300	65	500

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі збільшити у два рази, а другої – залишити на попередньому рівні.

Завдання 4. Вектори

Варіант 1

1. Знайти довжину і напрямні косинуси вектора:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}.$$

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120^\circ$ і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.
Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. Задано вектори $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (1; -3)$, $\vec{c} = (-1; 3)$. За якого значення α вектори $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \alpha\vec{c}$ колінеарні?

4. З'ясувати, чи буде лінійно залежною система векторів:

$$\vec{x}_1 = (4; 3; 2; 1), \quad \vec{x}_2 = (1; 2; 3; 4), \quad \vec{x}_3 = (5; 6; 5; 0).$$

5. Задано:

$$\vec{a} = (2; 1; 0), \quad \vec{b} = (1; -1; 2), \quad \vec{c} = (2; 2; -1), \quad \vec{d} = (3; 7; -7).$$

Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Визначити координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

6. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4; -2; -3)$ і $\vec{b} = (0; 1; 3)$ та утворює із віссю OY тупий кут. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = 26$.

7. У просторі двох товарів із цінами $(2; 4)$ укажіть кілька наборів товарів вартістю 8, 16, 24 (ум. од.). Нехай ціни змінилися та становлять $(3; 3)$. Наведіть приклади товарів, що подешевшали, подорожчали, вартість яких залишилася без змін.

Варіант 2

1. Знайти довжину і напрямні косинуси вектора:

$$\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}.$$

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $2\pi/3$. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$.

3. Задано вектори $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (2; 1)$. За якого значення α вектори $\vec{p} = \vec{b} + \alpha\vec{a}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \alpha\vec{c}$ колінеарні?

4. З'ясувати, чи буде лінійно залежною система векторів:

$$\vec{x}_1 = (1; 2; 1; 1), \quad \vec{x}_2 = (-1; 3; 2; 1), \quad \vec{x}_3 = (-21; -1; 2; -11).$$

5. Задано:

$$\vec{a} = (3; -5; 2), \vec{b} = (4; 5; 1), \vec{c} = (-3; 0; -4), \vec{d} = (-4; 5; -16).$$

Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис. Визначити координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

6. Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (1; 0; -1)$ і $\vec{b} = (2; 3; 4)$ та утворює із віссю OZ гострий кут. Знайти координати вектора $\vec{d}$, якщо $|\vec{d}| = \sqrt{6}$.

7. У просторі двох товарів із цінами $(3; 5)$ укажіть кілька наборів товарів вартістю 15, 30, 45 (ум. од.). Нехай ціни змінилися та становлять $(4; 4)$. Наведіть приклади товарів, що подешевшали, подорожчали, вартість яких залишилася без змін.

Варіант 3

1. Знайти довжину і напрямні косинуси вектора:

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні та $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

3. Визначити, за яких значень α і β вектори $\vec{a} = (-2; 3; \beta)$ і $\vec{b} = (\alpha; -6; 2)$ колінеарні.

4. З'ясувати, чи буде система векторів лінійно залежною:

$$\vec{x}_1 = (4; 3; 2; 1), \vec{x}_2 = (2; 3; 4; 5), \vec{x}_3 = (6; 6; 6; 6).$$

5. Задано:

$$\vec{a} = (2; 1; -1), \vec{b} = (1; -1; 2), \vec{c} = (3; -2; 1), \vec{d} = (-8; 9; -1).$$

Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис. Визначити координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

6. Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 2; 2)$ і $\vec{b} = (18; -22; -5)$ та утворює із віссю OY тупий кут. Знайти координати вектора $\vec{d}$, якщо $|\vec{d}| = 14$.

7. У просторі двох товарів із цінами $(2; 9)$ укажіть кілька наборів товарів вартістю 18, 36, 54 (ум. од.). Нехай ціни змінилися та становлять $(4; 7)$. Наведіть приклади товарів, що подешевшали, подорожчали, вартість яких залишилася без змін.

Варіант 4

1. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$, його напрямні косинуси.

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\pi/3$ і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Обчислити довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3. Задано вектори $\vec{p} = (-1; 3)$ і $\vec{q} = (5; 4)$. За якого значення α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{p} + 17\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ колінеарні.

4. З'ясувати, чи буде система векторів лінійно залежною:

$$\vec{x}_1 = (1; 2; 3; 4), \quad \vec{x}_2 = (4; 3; 2; 1), \quad \vec{x}_3 = (1; 1; 1; 1).$$

5. Задано:

$$\vec{a} = (4; 5; 2), \quad \vec{b} = (3; 0; 1), \quad \vec{c} = (-1; 4; 2), \quad \vec{d} = (5; 7; 8).$$

Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Визначити координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

6. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 2; 3)$ і $\vec{b} = (-1; -2; -5)$ та утворює тупий кут із віссю OY . Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = \sqrt{11}$.

7. У просторі двох товарів із цінами $(4; 3)$ укажіть кілька наборів товарів вартістю 12, 24, 48 (ум. од.). Нехай ціни змінилися та становлять $(2; 5)$. Наведіть приклади товарів, що подешевшали, подорожчали, вартість яких залишилася без змін.

Завдання 5. Елементи аналітичної геометрії

Варіант 1

1. Трикутник задано вершинами $A(2;1)$, $B(3;0)$, $C(4;4)$. Записати: 1) рівняння сторони трикутника AB ; 2) рівняння середньої лінії трикутника MN , яка паралельна стороні AB ; 3) рівняння висоти, що опущена із вершини C ; 4) величину кута BAC ; 5) відстань від точки C до сторони AB . Подати рисунок.

2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка виготовляє щомісяця x (тис. од.) виробів за ціною $p = 4$ грн/од., якщо суму загальних щомісячних витрат задано: $y_B = 2x + 600$.

3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ та пропозиції $s = s(p)$ від ціни p : $q = 800 - 10p$, $s = 200 + 10p$. Знайти рівноважну ціну та доход за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для вектора цін $\vec{p} = (7; 3)$ за доходу $D = 42$. Описати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Зобразити бюджетну множину та її межу графічно.

5. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -2; 1)$, перпендикулярно до площини, що проходить через точки $M_1(3; 4; 6)$, $M_2(3; -2; -3)$, $M_3(6; 3; 2)$.

6. Знайти проекцію точки $M(1; -2; 1)$ на площину:

$$x + 4y + 3z - 2 = 0.$$

Варіант 2

1. Трикутник задано вершинами $A(10;13)$, $B(13;6)$, $C(1;1)$. Записати: 1) рівняння сторони трикутника AB ; 2) рівняння середньої лінії трикутника MN , що паралельна стороні AB ; 3) рівняння висоти, що опущена із вершини C ; 4) величину кута BAC ; 5) відстань від точки C до сторони AB . Подати рисунок.

2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка виготовляє щомісяця x (тис. од.) виробів за ціною $p = 7$ грн/од., якщо суму загальних щомісячних витрат задано функцією $y_B = 1000 + 5x$.

3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ від ціни p : $q = 400 - 20p$, $s = 70 + 10p$. Знайти рівноважну ціну та дохід за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для вектора цін $\vec{p} = (5; 3)$ за доходу $D = 60$. Описати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Зобразити бюджетну множину та її межу графічно.

5. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-6; 1; 3)$ перпендикулярно до площини, яка проходить через точки $M_1(2; 3; 0)$, $M_2(1; 2; 2)$, $M_3(-1; 0; -3)$.

6. Знайти проєкцію точки $M(1; -2; 1)$ на площину:

$$x + 3y + 4z - 12 = 0.$$

Варіант 3

1. Трикутник задано вершинами $A(-1; 7)$, $B(5; 3)$, $C(-2; -16)$. Записати: 1) рівняння сторони трикутника AB ; 2) рівняння середньої лінії трикутника MN , яка паралельна стороні AB ; 3) рівняння висоти, що опущена із вершини C ; 4) величину кута BAC ; 5) відстань від точки C до сторони AB . Подати рисунок.

2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка виготовляє щомісяця x (тис. од.) виробів за ціною $p = 10$ грн/од., якщо суму загальних щомісячних витрат задано: $y_B = 2000 + 5x$.

3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ від ціни p : $q = 600 - 8p$, $s = 120 + 8p$. Знайти рівноважну ціну та дохід за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для вектора цін $\vec{p} = (5; 8)$ за доходу $D = 120$. Описати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Зобразити бюджетну множину та її межу графічно.

5. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(6; 1; 2)$ перпендикулярно до площини, що проходить через точки $M_1(3; 4; 2)$, $M_2(4; 5; 2)$, $M_3(7; 3; -2)$.

6. Знайти проекцію N точки $M(-2; 1; -3)$ на пряму:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

Варіант 4

1. Трикутник задано вершинами $A(-3; 0)$, $B(1; 4)$, $C(3; -2)$.
Записати: 1) рівняння сторони трикутника AB ; 2) рівняння середньої лінії трикутника MN , яка паралельна стороні AB ; 3) рівняння висоти, що опущена із вершини C ; 4) величину кута BAC ; 5) відстань від точки C до сторони AB . Подати рисунок.

2. Знайти точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії, яка виготовляє щомісяця x (тис. од.) виробів за ціною $p = 8$ грн/од., якщо суму загальних щомісячних витрат задано: $y_B = 1000 + 6x$.

3. Задано залежність попиту $q = q(p)$ і пропозиції $s = s(p)$ від ціни p : $q = 400 - 5p$, $s = 100 + 5p$. Знайти рівноважну ціну та дохід за рівноважної ціни. Побудувати графік функції доходу.

4. У просторі двох товарів описати бюджетну множину для вектора цін $\vec{p} = (4; 9)$ при доході $D = 36$. Описати її межу за допомогою звичайних і векторних нерівностей. Зобразити бюджетну множину та її межу графічно.

5. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно до площини, що проходить через точки $M_1(-3; 4; 6)$, $M_2(3; 2; -3)$, $M_3(6; -3; 2)$.

6. Знайти проекцію N точки $M(2; -1; 3)$ на пряму:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

Завдання 6. Границя та неперервність функції

Варіант 1

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{5x^4 - 3x + 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 5x - \sin 7x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{2x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x} \right).$$

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x \rightarrow 0$:

$$1) \alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1 \text{ і } \beta(x) = x; \quad 2) \alpha(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - 1 \text{ і } \beta(x) = x.$$

3. Дослідити на неперервність функції і встановити характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} e^x, & -4 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 4; \end{cases} \quad 2) f(x) = e^{1/x}.$$

4. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$ не визначена у точці $x_0 = 0$. Яке значення $f(x_0)$ потрібно присвоїти так, щоб функція $y = f(x)$ стала неперервною у точці x_0 ?

Варіант 2

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x^2 - (1/9)}{1 + 3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+3}}{x^2 + x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x \rightarrow 0$:

$$1) \alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x \text{ і } \beta(x) = x^2; \quad 2) \alpha(x) = \ln(1 - x^3) \text{ і } \beta(x) = x^3.$$

3. Дослідити на неперервність функції і встановити характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2+2, & 0 < x \leq 2; \end{cases} \quad 2) f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$$

4. Функція $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ не визначена у точці $x_0 = 0$. Яке

значення $f(x_0)$ потрібно присвоїти так, щоб функція $y = f(x)$ стала неперервною у точці x_0 ?

Варіант 3

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^4)^{1/x^4};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(5^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg(x-9)}{x-10};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x \rightarrow 0$:

$$1) \alpha(x) = x\sqrt{x} \text{ і } \beta(x) = x; \quad 2) \alpha(x) = \sin^2(3\sqrt{x}) \text{ і } \beta(x) = 9x.$$

3. Дослідити на неперервність функції і встановити характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad 2) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

4. Функція $f(x) = \frac{4^x - 1}{2x}$ не визначена у точці $x_0 = 0$. Яке значення $f(x_0)$ потрібно присвоїти так, щоб функція $y = f(x)$ стала неперервною у точці x_0 ?

Варіант 4

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{1/x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$;

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{1+x}{x} \right)$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

2. Порівняти нескінченно малі функції при $x \rightarrow 0$:

1) $\alpha(x) = \arcsin 2x$ і $\beta(x) = x$; 2) $\alpha(x) = e^{2x} - e^{4x}$ і $\beta(x) = \sin 3x$.

3. Дослідити на неперервність функції і встановити характер точок розриву:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \frac{|x| - x}{2x}$.

4. Функція $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ не визначена у точці $x_0 = 0$.

Яке значення $f(x_0)$ потрібно присвоїти так, щоб функція $y = f(x)$ стала неперервною у точці x_0 ?

Завдання 7. Похідні та диференціали

Варіант 1

1. Знайти похідні функцій:

- 1) $y = x^{\ln x}$; 2) $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^t \cos t$; 3) $x \sin y + y \sin x = 0$;
4) $y = \ln \operatorname{tg}(x/2) + \cos x + (1/3) \sin^3 x$; 5) $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;
6) $y = e^x - \sin e^x \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cos e^x$.

2. Знайти диференціали функцій:

- 1) $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$; 2) $y = \arccos(1/x)$.

3. Знайти наближене значення функції $y = \sqrt[4]{x}$ у точці $x = 15,8$.

4. Знайти кут між кривими $y = x - x^2$ і $y = x^2 - x$.

5. Знайти похідну n -го порядку функції $y = x^n \sqrt{x}$.

6. Знайти y''_{xx} для функцій:

- 1) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; 2) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

7. Знайти диференціал $d^3 y$ для функції $y = x(\ln x - 1)$.

Варіант 2

1. Знайти похідні функцій:

- 1) $y = (x^2 + 1)^{x^3}$; 2) $x = e^{-t}$; $y = t^3$; $t \in \mathbb{R}$;
3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$; 4) $y = \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$;
5) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$; 6) $y = x e^x (\sin x - \cos x) + e^x \cos e^x$.

2. Знайти диференціали функцій:

- 1) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$; 2) $y = \sin(\ln x)$.

3. Знайти наближене значення функції $f(x) = \sqrt[5]{x}$ у точці $x = 0,95$.

4. Знайти абсциси точок, в яких дотичні до графіка функції $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 2$ паралельні прямій $x - y = 0$.

5. Знайти похідну n -го порядку функції $y = \frac{1+x}{1-x}$.

6. Знайти y''_{xx} для функцій:

1) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$, $t \in \mathbf{R}$; 2) $x^2 - y^2 = a^2$.

7. Знайти диференціал третього порядку для функції $y = e^x \ln x$.

Варіант 3

1. Знайти похідні функцій:

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$; 2) $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$;

3) $\frac{y}{x} + e^{(y/x)} \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$; 4) $y = \ln(3x^2 + \sqrt{x^5})$;

5) $y = x^2 \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}$; 6) $y = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(\sin x)$.

2. Знайти диференціали функцій:

1) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$; 2) $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}$.

3. Знайти наближене значення функції $\arctg 1,05$.

4. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$, що паралельна прямій $4x - y - 1 = 0$.

5. Знайти похідну n -го порядку функції $y = 2^x + 2^{-x}$.

6. Знайти y''_{xx} для функцій:

1) $x = \arccos \sqrt{t}$, $y = \sqrt{t - t^2}$; 2) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

7. Знайти $d^2 y$ для функції $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

Варіант 4

1. Знайти похідні функцій:

1) $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$; 2) $x = \left(\frac{2}{3} \sqrt{t} + 1\right)t$, $y = \sqrt{t} e^{\sqrt{t}}$;

3) $xy^2 + y^2 \ln x - 4 = 0$; 4) $y = \arccos(2e^{2x} - 1)$;

5) $y = \frac{\arctg x}{x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 6) $y = \ln \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}$.

2. Знайти диференціали функцій:

1) $y = \sin(\ln x)$; 2) $y = (\sin(x/2) - \cos(x/2))^2$.

3. Знайти наближене значення $\arcsin 0,54$.

4. Під яким кутом перетинаються графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$?

5. Знайти похідну n -го порядку функції $y = \ln(2x + 3)$.

6. Знайти y''_{xx} для функцій:

1) $x = \operatorname{Intg} \frac{t}{2}$, $y = \operatorname{Intg} t$; 2) $\operatorname{arctgy} = x + y$.

7. Знайти диференціал третього порядку для функції $y = x \sin x$.

Завдання 8. Застосування похідної до дослідження функцій

Варіант 1

1. Обчислити границі, застосовуючи правила Лопіталю:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln 3x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\pi/2) - \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + (1/x^2))}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - (\pi/2)) \operatorname{tg} x; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right); \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x. \end{aligned}$$

2. Розкласти многочлен $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ за степенями двочлена $(x-2)$.

3. Записати формулу Маклорена для функції:

$$f(x) = \ln(5-4x).$$

4. Провести повне дослідження і побудувати графіки функцій:

$$\begin{aligned} 1) y = \frac{x^2}{x^2 - 1}; \quad 2) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1; \\ 3) y = xe^{-x}; \quad 4) y = x \ln x. \end{aligned}$$

Варіант 2

1. Обчислити границі, застосовуючи правила Лопіталю:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin 5\pi x)}{\ln(\sin 2\pi x)}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-3x}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right); \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x. \end{aligned}$$

2. Розкласти многочлен $f(x) = 7x^3 + 12x^2 + 3x + 1$ за степенями двочлена $(x-2)$.

3. Розкласти у ряд Маклорена функцію $f(x) = x \ln(1+x)$.

4. Провести повне дослідження і побудувати графіки функцій:

$$1) y = \frac{x^3}{x^2 - 4}; \quad 2) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \quad 3) y = x - \ln(1+x); \quad 4) y = xe^{-x^2/2}.$$

Варіант 3

1. Обчислити границі, застосовуючи правила Лопіталя:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

2. Розкласти многочлен $f(x) = x^6 - 4x^5 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ за степенями двочлена $(x+1)$.

3. Записати формулу Тейлора для функції $f(x) = \ln(2x+1)$ в околі точки $x_0 = 1/2$.

4. Провести повне дослідження і побудувати графіки функцій:

1) $y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$;

3) $y = x + \operatorname{arctg} x$; 4) $y = x^{2/3} e^{-x^2/3}$.

Варіант 4

1. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(x+e))^{1/x}$.

2. Розкласти многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ за степенями двочлена $(x-2)$.

3. Записати формулу Маклорена для функції $f(x) = e^{\cos x}$.

4. Провести повне дослідження і побудувати графіки функцій:

1) $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$; 2) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 3) $y = 2x - \arcsin x$; 4) $y = x^2 e^{4x}$.

Завдання 9

Застосування похідної в економічних задачах

Варіант 1

1. Задано функції попиту $q = 1400 - 5p$ та пропозиції $s = 1100 + 5p$. Визначити: 1) рівноважну ціну; 2) еластичність попиту та пропозиції за рівноважної ціни; 3) дохід за рівноважної ціни; 4) ціну, за якої дохід буде максимальний; 5) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичний.

2. Фірма реалізує продукцію за ціною $p = 40$ за од., витрати виробництва при цьому визначає функція $C(x) = 4x + 3x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку, залежно від обсягу випуску продукції.

3. Залежність між витратами виробництва фірми C (гр. од.) та обсягом продукції, що випускає фірма, x (од.), виражає функція $C(x) = 10x - 0,04x^3$. Визначити середні та граничні витрати виробництва, якщо обсяг продукції $x = 5$ од.

4. Залежність між собівартістю одиниці продукції u (ум. од.) і випуском продукції x (ум. од.) виражає функція $u = -0,03x + 900$. Знайти еластичність собівартості за випуску продукції $x = 500$. За якого випуску продукції собівартість буде еластичною?

5. Виробничу функцію фірми $y = 30\sqrt[3]{x}$, де обсяг основних фондів x і випуск продукції y , задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 27 (ум. од.). Знайти середню та граничну фондівдачу, еластичність випуску за фондами. Розв'язати задачу фірми та знайти оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна на неї удвічі більша від ціни ресурсу.

Варіант 2

1. Задано функції попиту $q = 1500 - 10p$ та пропозиції $s = 100 + 10p$. Визначити: 1) рівноважну ціну; 2) еластичність попиту та пропозиції за рівноважної ціни; 3) дохід за рівноважної ціни; 4) ціну, за якої дохід буде максимальний; 5) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичний.

2. Фірма реалізує продукцію за ціною $p=4$ за одиницю, витрати виробництва при цьому визначає функція $C(x)=x+x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку, залежно від обсягу випуску продукції.

3. Залежність між витратами виробництва фірми C (гр. од.) та обсягом продукції x (од.), що випускає фірма, виражає функція $C(x)=0,05x^2+20x+700$. Визначити середні та граничні витрати виробництва, якщо обсяг продукції $x=10$ од. Знайти оптимальний для фірми обсяг продукції.

4. Установлено, що залежність між витратами виробництва цигарок u та відсотковий уміст шкідливих речовин у них x виражає залежність $u=\frac{10000}{x-100}$. Визначити середні та граничні витрати виробництва, якщо вміст шкідливих речовин $x=10\%$.

5. Виробничу функцію фірми $y=40\sqrt[4]{x^3}$, де обсяг основних фондів x і випуск продукції y , задано у вартісній формі. На певний момент обсяг основних фондів становить 16 (ум. од.). Знайти середню та граничну фондівдачі, еластичність випуску за фондами. Розв'язати задачу фірми та знайти оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна на неї удвічі більша від ціни ресурсу.

Варіант 3

1. Задано функції попиту $q=2000-20p$ та пропозиції $s=200+10p$. Визначити: 1) рівноважну ціну; 2) еластичність попиту та пропозиції за рівноважної ціни; 3) дохід за рівноважної ціни; 4) ціну, за якої дохід буде максимальний; 5) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичний.

2. Фірма реалізує продукцію за ціною $p=28$ за одиницю, витрати виробництва при цьому визначає функція $C(x)=4x+2x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку, залежно від обсягу випуску продукції.

3. Залежність між витратами виробництва фірми C (гр. од.) та обсягом продукції, що випускає фірма, x (од.), виражає функція $C(x) = 1000x - 0,05x^4$. Визначити середні та граничні витрати виробництва, якщо обсяг продукції $x = 10$ одиниць.

4. Нехай валовий продукт деякої держави змінюється із часом t , і його виражає формула $ВВП = 100 + t$, а кількість населення змінюється за законом $K = 200 + 4t$. Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

5. Виробничу функцію фірми $y = 30\sqrt[4]{x}$, де обсяг основних фондів x та випуск продукції y , задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 81 (ум. од.). Знайти середню та граничну фондовіддачі, еластичність випуску за фондами. Розв'язати задачу фірми, знайти оптимальний обсяг випуску продукції, якщо ціна продукції вдвічі більша від ціни ресурсу.

Варіант 4

1. Задано функцію попиту $q = 1800 - 10p$ та пропозиції $s = 1200 + 10p$. Визначити: 1) рівноважну ціну; 2) еластичність попиту та пропозиції за рівноважної ціни; 3) дохід за рівноважної ціни; 4) ціну, за якої дохід буде максимальний; 5) ціну одиниці продукції, за якої попит буде еластичний.

2. Фірма реалізує продукцію за ціною $p = 40$ за одиницю, витрати виробництва при цьому визначає функція $C(x) = 25x + 5x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток. Побудувати графік функції прибутку, залежно від обсягу випуску продукції.

3. Обсяг продукції q одиниць, що випустила фірма, виражає функція $q(t) = -t^3 + 10t^2 - 100t + 10$, де t – робочий час в годинах. Знайти продуктивність праці, швидкість і темп її зміни за одну годину після початку роботи та за одну годину – перед її закінченням $t \in [0; 8]$.

4. Нехай валовий продукт деякої держави змінюється із часом t , і його виражає формула $ВВП = 50 + t$, а кількість населення змінюється за законом $K = 100 + t$. Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

5. Виробничу функцію фірми $y = 50\sqrt{x}$, де обсяг основних фондів x та випуск продукції y , задано у вартісній формі. Обсяг основних фондів становить 100 (ум. од.). Знайти середню та граничну фондівіддачі, еластичність випуску за фондами. Розв'язати задачу фірми та знайти оптимальний обсяг випуску продукції фірми, якщо ціна продукції удвічі більша від ціни ресурсу.

Завдання 10. Функції багатьох змінних

Варіант 1

1. Знайти та відобразити область визначення функції:

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 9)(18 - x^2 - y^2)}.$$

2. Знайти границю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{x^2 y + 9}}{5x^2 y}.$$

3. Побудувати лінії рівня функції $z = |x| + |y|$.

4. Знайти повний диференціал dz і мішану частинну похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \ln(x/y) + \arctg(x^y)$.

5. Обчислити наближено $(2,01)^{3,04}$ за допомогою повного диференціала, якщо $\ln 2 \approx 0,7$.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = \sqrt{x} \sin(y/x)$ співвідношення:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}.$$

7. Знайти вектор $\text{grad} z$ і похідну за напрямком вектора $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j}$ для функції $z = \ln(3x^2 + 2y^2 - xy)$ у точці $M_0(1; 1)$.

Варіант 2

1. Знайти та зобразити область визначення функції:

$$z = (x/y) + \ln(xy).$$

2. Знайти границю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{y+2}{y+1} \right)^{xy}.$$

3. Побудувати лінії рівня функції:

$$z = \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{16}} - 1.$$

4. Знайти повний диференціал dz і мішану частинну похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = e^{xy} - \arcsin \frac{x^2}{y+1}$.

5. Обчислити наближено $(1,03)^4 \cdot (2,01)^3$ за допомогою повного диференціала.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = y\sqrt{y/x}$ співвідношення:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

7. Знайти вектор $\text{grad} z$ і похідну за напрямком вектора $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ для функції $z = \ln(x^2 + y^2 - 2x + 1)$ у точці $M_0(-1; 1)$.

Варіант 3

1. Знайти та зобразити область визначення функції:

$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

2. Знайти границю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(1+x)(1-y)}{\sqrt{1+x-y}}.$$

3. Побудувати лінії рівня функції $z = 1 - |x| - |y|$.

4. Знайти повний диференціал dz і мішану частинну похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = e^{xy} - \arcsin \frac{x}{y+1}$.

5. Обчислити наближено $\sqrt{3,95^2 + 3,15^2}$ за допомогою повного диференціала.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = xe^{y/x}$ співвідношення:

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

7. Знайти вектор $\text{grad} z$ і похідну за напрямком вектора $\vec{l} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ для функції $z = \arctg(x^3 y^2)$ у точці $M_0(2; -1)$.

Варіант 4

1. Знайти та зобразити область визначення функції:

$$z = \sqrt{(8 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}.$$

3. Знайти границю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{arctg}(x + y)}{x + y}.$$

3. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 2y + 4$.

4. Знайти повний диференціал dz і мішану частинну похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = x \cos 2y - \frac{x}{x^2 + y^2}$.

5. Обчислити наближено $\sqrt{1,01^2 + 2,05^3}$ за допомогою повного диференціала.

6. Перевірити, чи виконується для функції $z = x^y$ співвідношення:

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

7. Знайти вектор $\operatorname{grad} z$ і похідну за напрямком вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ для функції $z = \ln(4x^3 + 2y^2)$ у точці $M_0(3; 1)$.

Завдання 11. Екстремуми функцій багатьох змінних

Варіант 1

1. Знайти екстремуми функцій:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$; 2) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$;

3) $z = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + y^2) \quad (x > 0, y > 0)$.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції в області D :

1) $z = x^2 y (4 - x - y) \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$;

2) $z = x + y \quad D: x^2 + y^2 \leq 1$.

3. Знайти умовний екстремум функцій:

1) $z = x^2 + y^2$ за умови $x/4 + y/5 = 1$;

2) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ за умови $y - x = \pi/4$.

Варіант 2

1. Знайти екстремуми функцій:

1) $z = x^3 + y^3 - 9xy$; 2) $z = xy(4 - x)(4 - y)$;

3) $z = x^3 y^2 (6 - x - y) \quad (x > 0, y > 0)$.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції в області D :

1) $z = x^3 + 3y^2 - x - 18y - 4 \quad D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$,

2) $z = x^2 - y^2 \quad D: x^2 + y^2 \leq 1$.

3. Знайти умовний екстремум функцій:

1) $z = xy$ за умови $4x - 3y = 12$;

2) $z = 1/x + 1/y$ за умови $x + y = 2$.

Варіант 3

1. Знайти екстремуми функцій:

1) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y + 1$;

2) $z = e^{x/2} (x + y^2)$; 3) $z = x^2 + xy + y^2 + 1/x + 1/y, \quad (x > 0, y > 0)$.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції в області D :

1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$;

2) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy$ $D: x = 0, y = 0, x + y \leq 1$.

3. Знайти умовний екстремум функцій:

1) $z = x^2 + y^2 + 3xy$ за умови $x + y = 1$;

2) $z = xy$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант 4

1. Знайти екстремуми функцій:

1) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 + 6$, $x > 0, y > 0$;

2) $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$, $x > 0, y > 0$;

3) $z = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x$.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції в області D :

1) $z = x^2 - xy + y^2$ $D: |x| + |y| \leq 1$;

2) $z = x^2 y (2 - x - y)$ $D: x = 0, y = 0, x + y = 6$.

3. Знайти умовний екстремум функцій:

1) $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y = 1$;

2) $z = x^2 - xy + y^2$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Завдання 12. Застосування функцій багатьох змінних в економічних задачах

Варіант 1

1. Фірма випускає два види товарів, обсягом x та y , на які встановлено ціни $p_x = 648$ і $p_y = 810$ грн, відповідно, а функція витрат фірми: $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайти максимальний прибуток фірми.

2. Отримано дані про величину пробігу автомобіля x (тис. км) та y – витрати мастила (л).

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

За припущення між змінними x та y існує лінійна залежність. Знайти значення параметрів k і b в емпіричній формулі $y = kx + b$ за методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд: $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого, y – другого ресурсів. Ціна на одиницю першого ресурсу становить $p_x = 40$ ум. од., на одиницю другого – $p_y = 20$ ум. од. Знайти максимальний прибуток, який може отримувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 80$ ум. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 і x_2 . Кількість ресурсів обмежено квотою $x_1 + x_2 = 100$. Задано функцію прибутку підприємства $P(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 40x_1 + 60x_2 + 800000$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

Варіант 2

1. Фірма випускає два види товарів, обсягом x та y , на які встановлено ціни $p_x = 24$ і $p_y = 30$ грн, відповідно, а функція витрат фірми: $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайти максимальний прибуток фірми.

2. Отримано дані про ціну товару x (ум. од.) та y – рівень продажів (тис. од.)

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
y_i	200	160	120	90	80

За припущення між змінними x та y існує лінійна залежність. Знайти значення параметрів k і b в емпіричній формулі $y = kx + b$ методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд: $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого, y – другого ресурсів. Ціна на одиницю першого ресурсу становить $p_x = 50$ ум. од., а на одиницю другого – $p_y = 25$ ум. од. Знайти максимальний прибуток, який може отримувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 100$ ум. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 і x_2 . Кількість ресурсів обмежено квотою $x_1 + x_2 = 200$. Задано функцію прибутку підприємства: $P(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 40x_1 + 120x_2 + 900000$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

Варіант 3

1. Фірма випускає два види товарів, обсягом x та y , на які встановлено ціни $p_x = 72$ і $p_y = 90$ грн., відповідно, а функція витрат фірми: $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайти максимальний прибуток фірми.

2. Отримано дані про ціну на нафту x (дол./бар.), y – ціну на акції певної нафтовидобувної компанії (дол.).

x_i	35	38	45	47	53
y_i	5,0	5,8	6,2	7,1	7,9

За припущення між змінними x та y існує лінійна залежність. Знайти значення параметрів k і b в емпіричній формулі $y = kx + b$ методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд: $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого, y – другого ресурсів. Ціна на одиницю першого ресурсу становить $p_x = 10$ ум. од., а на одиницю другого – $p_y = 5$ ум. од.

Знайти максимальний прибуток, який може отримувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 20$ ум. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 і x_2 . Кількість ресурсів обмежено квотою $x_1 + x_2 = 100$. Задано функцію прибутку підприємства: $P(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 60x_1 + 80x_2 + 10000000$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

Варіант 4

1. Фірма випускає два види товарів, обсягом x та y , на які встановлено ціни $p_x = 216$ і $p_y = 270$ грн., відповідно, а функція витрат фірми: $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайти максимальний прибуток фірми.

2. Отримано дані про доход людини x (грн) та її витрати на продукти харчування y (грн).

x_i	300	400	500	600	700
y_i	180	210	250	270	290

За припущення між змінними x та y існує лінійна залежність. Знайти значення параметрів k і b в емпіричній формулі $y = kx + b$ за методом найменших квадратів.

3. Виробнича функція фірми має вигляд: $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого, y – другого ресурсів. Ціна на одиницю першого ресурсу становить $p_x = 60$ ум. од., а на одиницю другого – $p_y = 30$ ум. од. Знайти максимальний прибуток, який може отримувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 120$ ум. од.

4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 і x_2 . Кількість ресурсів обмежено квотою $x_1 + x_2 = 150$. Задано функцію прибутку підприємства: $P(x_1, x_2) = 25000000 - x_1^2 - x_2^2 + 30x_1 + 100x_2$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

Завдання 13. Невизначений інтеграл

Варіант 1

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int x\sqrt{x}\sqrt{x} dx;$	2) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx;$
3) $\int \frac{2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x}{3^x} dx;$	4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи відповідні заміни:

1) $\int x\sqrt{1+x^2} dx;$	2) $\int 2^{-x^2} x dx;$
3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$	4) $\int \sin^3 x \cos x dx.$

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

1) $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx;$	2) $\int x \ln x dx;$
3) $\int x \operatorname{arctg} x dx;$	4) $\int e^{2x} \sin x dx.$

4. Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції:

1) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2-5x+4};$	2) $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x} dx.$

Варіант 2

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x}\sqrt{x} dx;$	2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$
3) $\int \frac{3^{x+1} - 5^{x-1}}{15^x} dx;$	4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи відповідні заміни:

1) $\int \frac{dx}{x \ln x};$	2) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}};$

$$3) \int x^3(x^4 - 1)dx; \quad 4) \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x}.$$

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

$$1) \int (x^2 + 5x + 7)e^{3x} dx; \quad 2) \int \frac{\ln x}{x^3} dx;$$

$$3) \int x^2 \arctg x dx; \quad 4) \int e^{x/2} \cos x dx.$$

4. Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції:

$$1) \int \frac{7x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx; \quad 2) \int \frac{x^2 dx}{1 - x^4}.$$

Варіант 3

1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x^2} dx; \quad 2) \int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$3) \int \frac{e^{-x} + e^{-3x}}{e^x} dx; \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}.$$

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи відповідні заміни:

$$1) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}; \quad 2) \int \frac{\ln x + 2}{x \sqrt{\ln x}} dx;$$

$$3) \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1 + e^{4x}}}; \quad 4) \int x \sqrt[3]{1 + x^2} dx.$$

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

$$1) \int (x^2 + 2x + 3)e^{-x} dx; \quad 2) \int \sqrt{x} \ln x dx;$$

$$3) \int x^2 \arctg x dx; \quad 4) \int 3^x \cos x dx.$$

4. Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції:

$$1) \int \frac{dx}{(x^2 + 2)(x - 1)}; \quad 2) \int \frac{x^5 dx}{x^3 - 1}.$$

Варіант 4

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{x^{3/4} + x^{2/3} + x^{1/2}}{x} dx;$ 2) $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$

3) $\int \left(\frac{e^{-2x} + e^{3x}}{e^x} \right) dx;$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}.$

2. Обчислити інтеграли, застосовуючи відповідні заміни:

1) $\int 2x^2 dx;$ 2) $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{1-25^x}};$

3) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}};$ 4) $\int x \sqrt[3]{x^2-1} dx.$

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

1) $\int (2x^2 + 3x)e^{-x} dx;$ 2) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx;$

3) $\int \arcsin x dx;$ 4) $\int e^{x/2} \sin 2x dx.$

4. Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції:

1) $\int \frac{dx}{x^4 + x^2};$ 2) $\int \frac{6x^2 - 13x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx.$

Завдання 14. Визначені, невластні інтеграли. Застосування в економічних задачах

Варіант 1

1. Застосовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити:

$$1) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos^2(x/2)}; \quad 2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad 3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx.$$

2. Обчислити інтеграли, зробивши відповідні заміни:

$$1) \int_0^1 (2x^3 + 1)^4 x^2 dx; \quad 2) \int_0^2 \frac{4x dx}{\sqrt{1+2x^2}}; \quad 3) \int_0^{-\pi/6} e^{\sin x} \cos x dx.$$

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

$$1) \int_1^4 x \ln x dx; \quad 2) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx.$$

4. Обчислити невластні інтеграли:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}; \quad 2) \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln x}.$$

5. Обчислити площі фігури, що обмежена лініями:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = 0.$$

6. Знайти обсяг продукції, що випустила фірма за п'ять років, якщо виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд:

$$g(t) = (2t + 1)e^{3t}.$$

7. Розподілення прибуткового податку деякої країни здійснюється відповідно до функції $y = (19/20)x^2 + (1/20)x$ (крива Лоренца), де x – частина населення, що сплачує податки, y – відповідна частина загального податку населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний прибуток за п'ять років за відсоткової ставки 10 %, якщо базові капіталовкладення становили 40 млн грн, а очікуване зростання капіталу – 2 млн грн.

Варіант 2

1. Застосовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити:

$$1) \int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}; \quad 2) \int_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 3) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

2. Обчислити інтеграли, зробивши відповідні заміни:

$$1) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}; \quad 2) \int_1^{\sqrt{6}} \frac{32x dx}{(x^2 + 1)^5}; \quad 3) \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}.$$

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$1) \int_0^{1/2} \arcsin x dx; \quad 2) \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

4. Обчислити невластні інтеграли:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{5x} dx; \quad 2) \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

5. Обчислити площі фігури, що обмежена лініями:

$$y = e^x, y = e^{-x}, x = 1.$$

6. Продуктивність праці робітника протягом дня задано функцією:

$$f(t) = \frac{3}{4t+5} + 5.$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляє робітник за першу годину робочого часу.

7. За даними дослідження у розподіленні доходів у деякій країні криву Лоренца описує функція $y = (3/5)x^2 + (2/5)x$, де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний доход за три роки за відсоткової ставки 5 %, якщо початкові капіталовкладення становлять 10 млн грн і передбачено щорічне збільшення капіталовкладень на 1 млн грн.

Варіант 3

1. Застосовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити:

1) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$; 2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 3) $\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$.

2. Обчислити інтеграли, зробивши відповідні заміни:

1) $\int_0^2 \sqrt{x^3+1} x^2 dx$; 2) $\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x} dx$; 3) $\int_0^1 e^{-x^3} x^2 dx$.

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

1) $\int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx$; 2) $\int_0^1 \arccos x dx$.

4. Обчислити невласні інтеграли:

1) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^3}$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

5. Обчислити площі фігури, обмеженої лініями:

$$y = (x-4)^2, \quad y = 16 - x^2.$$

6. Знайти обсяг продукції, що виготовлена за п'ять років на підприємстві, якщо виробнича функція:

$$f(t) = (1 + 0,05t)e^{2t}.$$

7. За даними дослідження у розподіленні доходів у деякій країні криву Лоренца описує функція $y = (9/15)x^2 + (6/15)x$, де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний доход за три роки за відсоткової ставки 7 %, якщо початкові капіталовкладення становлять 30 млн грн і передбачено щорічне збільшення капіталовкладень на 3 млн грн.

Варіант 4

1. Застосовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити:

$$1) \int_0^1 \frac{(x + \sqrt{x})dx}{\sqrt[3]{x}}; \quad 2) \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx; \quad 3) \int_{1/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

2. Обчислити інтеграли, здійснивши відповідні заміни

$$1) \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt[3]{(x^4 - 8)^2} x^3 dx; \quad 2) \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos x} \sin x dx; \quad 3) \int_{1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-9x}}.$$

3. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$1) \int_0^1 x \arctg x dx; \quad 2) \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$$

4. Обчислити невідкладні інтеграли:

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Обчислити площі фігури, що обмежена лініями:

$$y = e^{2x}, \quad y = e^{-2x}, \quad x = 2.$$

6. Продуктивність праці робітників підприємства виражає функція:

$$f(t) = \frac{10}{t+2} + 1.$$

Знайти обсяг продукції (у вартісній формі) за восьмигодинний робочий день.

7. Розподілення доходів населення деякої країни здійснюється відповідно до функції $y = (8/19)x^2 + (11/19)x$ (крива Лоренца), де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

8. Визначити дисконтний доход за три роки за відсоткової ставки 10 %, якщо початкові капіталовкладення становлять 20 млн грн і передбачено щорічне збільшення капіталовкладень на 2 млн грн.

Завдання 15. Диференціальні рівняння

Варіант 1

1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

1) $y(1+x^2)y' = 1+y^2$; 2) $xydx = -(x+1)dy$; 3) $dy - 2\sqrt{y} \ln dx = 0$.

2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

1) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$; 2) $(2x + 3y)dx + (x - 2y)dy = 0$.

3. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

1) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; 2) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$; $y(0) = 1$.

4. Знайти загальні розв'язки рівняння:

1) $y'' + y = e^x$; 2) $y'' + 3y' + y = 3\cos 2x$.

Варіант 2

1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

1) $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$; 2) $e^x dx - y^3(1+e^x)dy = 0$;

3) $y' = e^{x+y}$, $y(0) = 0$.

2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

1) $xy' = y \ln(y/x)$; 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

3. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

1) $y' \cos^2 x + y = \tan x$; $y(0) = 0$; 2) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$; $y(0) = 1$.

4. Знайти загальні розв'язки рівняння:

1) $y'' - 4y = 4e^{4x}$; 2) $y'' + y = \sin 5x$.

Варіант 3

1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

1) $(1+x^2)y^3 dx - x^3(1+y^2)dy = 0$; 2) $\frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x} dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y} dy = 0$;

3) $e^y \frac{dy}{dx} = 1$, $y(0) = 0$.

2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

1) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 2) $(5x - 7y)dy + (x + y)dx = 0$.

3. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

1) $xy' - y = x^2 \cos x$; $y(\pi/2) = 0$; 2) $x \ln x \cdot y' + y = 2 \ln x$.

4. Знайти загальні розв'язки рівняння:

1) $y'' + 7y' + 20y = e^x$; 2) $y'' + 9y = \cos 3x$.

Варіант 4

1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

1) $\frac{x^2}{x^3 + 5} dx + \frac{y^2}{y^3 + 5} dy = 0$; 2) $xy' = y \ln y$;

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + y^2}{x^2 y - x^2} 1$, $y(1) = 1$.

2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

1) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$; 2) $(2x + y)dy + (x - y)dx = 0$.

3. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

1) $xy' + y = x \ln x$; 2) $y' - y = e^x$.

4. Знайти загальні розв'язки рівняння:

1) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$; 2) $y'' + y' = \sin 4x$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Барковський А. В. Математика для економістів : Вища математика / А. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Київ : НАУ, 1999.

Бугір М. К. Математика для економістів / М. К. Бугір. – Тернопіль, 1998.

Валеев К. Г. Вища математика : навч. пос. : у 2 ч. / К. Г. Валеев, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2001.

Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посіб. / В. В. Вітлінський. – Київ : КНЕУ, 2003.

Вища математика : підруч. / за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Вид-во Карп'юка, 2003.

Вища математика : Основні означення, приклади і задачі / за ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2008.

Вища математика : підруч. : у 2 кн.; 2-ге вид. / за ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003.

Вища математика : підруч. / за ред. О. І. Ляшенко, О. І. Черняка. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2008.

Грисенко М. В. Математика для економістів. Методи і моделі, приклади і задачі : навч. посіб. для студ. економічних спеціальностей / М. В. Грисенко. – Київ : Либідь, 2007.

Керекеша П. В. Лекції і вправи з вищої математики / П. В. Керекеша. – Одеса : Астроприт, 2003.

Мацкул В. М. Вища математика для економістів : підруч. / В. М. Мацкул. – Одеса : ОНЕУ, 2018.

Міхайленко В. М. Математичний аналіз для економістів / В. М. Міхайленко, Н. Д. Федоренко. – Київ : Європейський університет, 2002.

Пономаренко О. І. Основи математичної економіки / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – Київ : Інформтехніка, 1995.

Angel de la Fuente. Mathematics methods and model for economists. Methods and modelling / Fuente Angel de la. – Cambridge University Press, 2007.

Anthony M. Mathematics for economics and finance. Methods and modelling / M. Anthony, N. Biggs. – Cambridge University Press, 1998.

Chiang A. C. Fundamental Methods of Mathematical Economics / A. C. Chiang. – New York : McGraw-Hill, 1974.

АЛФАВІТНО-ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

- Абсолютна величина 181, 265
- Алгебраїчна форма комплексного числа 149
- Алгебраїчне доповнення 17
- Алгебраїчна функція 204
- Аналітичний спосіб задання функції 180
- Аргумент функції 180
- Арифметична прогресія 153
- Асимптота графіка функції
 - вертикальна 286
 - горизонтальна 287
 - похила 287

Б

- Базис
 - простору 83
 - ортонормований 88
 - стандартний 88
- Базисні невідомі 37
- Базисний розв'язок СЛАР 38
- Біном Ньютона 166
- Бернуллі диференціальне рівняння 558

В

- Вектор
 - градієнт 364
 - нульовий 72, 78
 - одиничний 72
 - n -вимірний 77
 - нормальний до площини 122
 - напрямний прямої 110, 126
- Вектори
 - колінеарні 73
 - компланарні 73
 - лінійно-залежні 80

— лінійно-незалежні 80

— ортогональні 87

— рівні 71

Величини нескінченно малі

— вищого порядку 212

— еквівалентні 212

— k -го порядку 212

— одного порядку 212

Визначений інтеграл 473

Визначник

— Вронського 566

— матриці n -го порядку 15

— матриці 2-го порядку 15

— матриці 3-го порядку 16

Виробничі функції 420

Відсотки 154, 168

Відстань

— від точки до прямої 114, 127

— від точки до площини 125

— між двома точками 106

— між двома мимобіжними прямими 127

Г

Геометрична прогресія 153

Геометричне застосування

— визначеного інтеграла 474, 505

— теореми Ферма 264

— теореми Ролля 264

— теореми Лагранжа 267

Геометричний зміст

— границі числової послідовності 156

— границі функції в точці 209

— диференціала 249

— диференціального рівняння 547

— еластичності 309

— похідної функції в точці 242

— теорем Больцано–Коші 227, 228

Геометричне місце точок 106
Гессіан 380
Головна діагональ матриці 8
Головні мінори матриці 378
Графічне зображення функцій двох змінних 346
Гradient функції двох змінних 364
Границя
— інтегральної суми 473
— функції однієї змінної у точці за Коші 208
— функції однієї змінної у точці за Гейне 208
— одностороння (ліва, права) 213
— числової послідовності 154
— функції двох змінних 349
Гранична норма заміщення 444
Граничні витрати 245
Граничні продуктивності ресурсу 424
Граничний дохід 325
Граничний продукт 321, 423
Графік функції 181, 345
Графічний спосіб задання функції 181

Д

Детермінант 14
Джині коефіцієнт 521
Дисконтування 523
Диференціал
— n -го порядку 262, 372
— геометричний зміст 249
— інваріантність форми 250
— економічні застосування 251
— функції однієї змінної 249
— незалежної змінної 249
— функції двох змінних повний 360
Диференційованість функції
— багатьох змінних 357
— однієї змінної 247

Диференціювання функції

— основні правила 251

— таблиця похідних 254

Диференціальні рівняння

— другого порядку 559

— — лінійне 564

— — — зі сталими коефіцієнтами 570

— — що допускають зниження порядку 561

— n -го порядку 539

— першого порядку 544

— — Бернуллі 558

— — з відокремленими змінними 547

— — з відокремлюваними змінними 547

— — однорідні 550

— — лінійні 554

Діаграми Венна–Ейлера 147

Діагональ матриці

— головна 8

— побічна 8

Добуток векторів

— векторний 89

— мішаний 92

— скалярний 86

Добуток матриць 10

Довжина

— вектора 72, 77, 89

— дуги кривої 508

Дотична до кривої 242

Дробово-лінійна функція 194

Друга важлива границя 218

Е

Евклідів простір 86

Економічні характеристики процесу виробництва 424

Економічний зміст

— визначеного інтеграла 477, 515

— похідної 245

Еквівалентні нескінченно малі 212
Експоненціальний закон зростання 544
Екстремум функції багатьох змінних
— глобальний 382
— локальний 374, 379
— — необхідні умови 375, 380
— — достатні умови 376, 381
— умовний 394, 400
— — необхідні умови 396, 402
— — достатні умови 395, 402
Еластичність
— функції 309, 426
— властивості 311, 428
— виробництва 427
— коефіцієнт заміщення 429
— частинні коефіцієнти 426
— перехресні коефіцієнти 429
Елемент
— матриці 7
— множини 145
— послідовності 151
Елементарні функції 203
Елементарні перетворення 18
Емпіричні формули 384

З

Загальне рівняння
— прямої 112, 126
— площини 123
Загальний член послідовності 151
Загальний розв'язок диференціального рівняння
— другого порядку 560
— n -го порядку 541
— першого порядку 546
Задача Коші 545, 560
Задача цінової дискримінації 441
Закон спадної доходності 321

Закон спадної ефективності виробництва 329, 423
Залишковий член у формулі Тейлора
— у формі Лагранжа 270, 373
— у формі Пеано 270, 373
Заміна змінних в інтегралах 463, 482
Збіжна послідовність 155
Зростаюча функція 186

I

Ізокванти 347

Інтеграл

— визначений 473

— — властивості 477

— невизначений 459

— — властивості 459

— невластий 1-го роду 486

— невластий 2-го роду 487

Інтегральна крива 546

Інтегральна сума 472

Інтегрування

— безпосереднє 462, 481

— диференціальних рівнянь 541

— ірраціональних функцій 465

— заміною змінних 463, 482

— тригонометричних виразів 466

— частинами 467, 484

Інтервал 150

Ірраціональне число 149

К

Квадратичні форми 347, 378

Квадратна матриця 8

Квадратична функція 188

Коефіцієнт Джині 521

Колінеарні вектори 73

— — критерій 76, 89, 91

Коло 182

Компланарні вектори 73
— — критерій 94
Компоненти вектора 77
Комплексне число 149
Комплексно-спряжені числа 149
Координати вектора 76
Корені характеристичного рівняння 570
Косинуси напрямні вектора 77
Критерій Сильвестра 379
Крива Лоренса 521
Криві
— байдужості 206
— попиту 205
— пропозиції 205
— Торнквіста 205
Кутовий коефіцієнт прямої 108
Кут
— між векторами 76, 86
— між двома кривими 243
— між двома площинами 125
— між двома прямими 113, 128
— між прямою та площиною 129

Л

Лінійна комбінація векторів 80
Лінійна залежність векторів (критерій) 80
Лінійна функція 187, 347
Лінійний простір 79
Лінії рівня функції 345
Логарифмічна функція 196
Логістична крива 595
Локальний екстремум
— достатні умови 279, 280, 376, 381
— необхідні умови 278, 375, 380
— максимум (мінімум) 278, 374, 379
Лоренса крива 521

М

Максимум функції

- глобальний 281, 383
- локальний 278, 374, 379
- умовний 394, 400

Матриця

- Гессе 380
- верхня (нижня) трикутна 8
- вільних членів 27
- вироджена (особлива) 22
- діагональна 8
- квадратна 8
- квадратичної форми 378
- невироджена (неособлива) 22
- нульова 7
- обернена до даної матриці 14
- — алгоритм обчислення 22
- одинична 8
- основна 26
- приєднана 22
- прямокутна 8
- розширена 27
- рядок 7
- стовпець 7
- транспонована 13
- Якобі 400

Межа бюджетної множини 121

Межа області 343

Межі числових множин 150

Метод

- безпосереднього інтегрування 462, 481
- Бернуллі 556
- варіації довільної сталої 554
- відокремлення змінних 547
- Гаусса розв'язування систем 30
- Гаусса–Жордана 38
- Крамера 29

— матричний розв'язування систем 27

— множників Лагранжа 395

— найменших квадратів 384

— невизначених коефіцієнтів 572

— заміни змінної (підстановки)

— — у невизначеному інтегралі 463

— — у визначеному інтегралі 482

— інтегрування частинами

— — у невизначеному інтегралі 467

— — у визначеному інтегралі 484

Мінімум функції

— глобальний 281, 383

— локальний 278, 374, 379

— умовний 394, 400

Міnor елемента матриці 17

Многочлен 204

Множина

— бюджетна 120

— дійсних чисел 149

— ірраціональних чисел 149

— натуральних чисел 148

— раціональних чисел 149

— порожня 145

— цілих чисел 149

— універсальна 145

Модуль

— числа 181, 265

— вектора 72, 77, 87

Модель

— демографічного процесу 586

— динамічна Кейнса 596

— динаміки фондів 603

— Леонтьєва 39

— Еванса 602

— лінійна обміну (міжнародної торгівлі) 49

— неокласичного зростання 599

— природного зростання 588, 592, 593

- рівноваги ринку 115
- рівноважних цін 47
- ринку з прогнозованими цінами 607
- розвитку суспільства 610
- Солоу 605
- стягування податку 318
- Монотонна функція 186
 - зростаюча 186
 - ознака 277
 - спадна 186
- Мультиплікатор 251

Н

- Наближені обчислення визначених інтегралів
 - формула прямокутників 489
 - трапеції 491
- Наближені обчислення функцій 250
- Найбільше та найменше значення функції
 - двох змінних в області 382
 - однієї змінної на відрізку 281
- Напрямлений відрізок 72
- Напрямний вектор прямої 110,126
- Натуральні числа 149
- Невизначений інтеграл 459
- Невизначеності при обчисленні границь 274
- Невласні інтеграли 1-го роду 486
- Невласні інтеграли 2-го роду 487
- Незростаюча функція 186
- Необмежена функція 185
- Неспадна функція 185
- Неперервність функції
 - в точці 221
 - на проміжку 222
 - зліва (справа) 222
 - двох змінних 353
- Нескінченно малі
 - послідовності 160
 - функції 211
 - — порівняння 212

Неспадна функція 186
Нормаль до кривої 242
Нормальний вектор площини 122
Нульова матриця 7
Нульовий вектор 72

О

Область

- відкрита 343
- визначення функції 180, 342,
- замкнена 343
- значень функції 180, 342,

Обернена

- матриця 14
- функція 182

Обернені тригонометричні функції 200

Обмежена

- послідовність 153
- функція 185
- множина 150

Об'єм тіла обертання 509

Об'єднання множин 146

Однорідна функція 551

Односторонні похідні 246

Однорідна система рівнянь 26

Ознака монотонності функції 277

Окіл точки 156, 349

Опукла функція

- уверх (униз) 282

Опуклість функції

- достатні умови 285
- необхідні умови 284

Орт вектора 73

Ортогональні вектори 87

- критерій 87

Основні елементарні функції 187

Ортонормовані вектори 88

П

- Павутинна модель ринку 156
- Параметричне задання функції 182
- Параметричні рівняння прямої 126
- Первісна 457
- Переріз множин 146
- Період функції 186
- Періодична функція 186
- Перша важлива границя 217
- Підінтегральна функція 459
- Підінтегральний вираз 459
- Площа поверхні тіла обертання 511
- Площина 122
- Поверхні рівня функції 346
- Показникова функція 195
- Порівняння нескінченно малих 212
- Порядок визначника 15
- Послідовність 151
- Похідна
 - геометричний зміст 242
 - другого порядку 257
 - економічний інтерпретація 245
 - елементарних функцій 254
 - за напрямом вектора 363
 - неявної функції 255, 260
 - n -го порядку 258
 - оберненої функції 253
 - означення 241
 - показниково-степеневі функції 255
 - складної функції 253
 - таблиця 254
 - фізичний зміст 244
 - функції, заданої параметрично 256, 260
 - частинна функції двох змінних 356,
- Початкова умова 545
- Правило
 - Крамера 29
 - Лопіталя 272

Правило додавання векторів
— многокутника 74
— паралелограма 74
— паралелепіпеда 74
— трикутника 74
Правило "70" 338
Прибуток 321, 323
Приріст
— аргументу 222, 240
— повний 355
— частинний 355
— функції 222, 240
Проекція вектора на вісь 76
Простір R^n лінійний векторний 79
Простір товарів 94

Р

Ранг матриці 24
Раціональне число 149
Раціональна функція 204
Рекурентні формули 470
Рівність
— векторів 72
— множин 145
Рівняння
— дотичної 242
— лінії 105
— логістичне 587
— нормалі 243
— площини у просторі 122
— прямої у просторі 125
— прямої на площині 107
— природного зростання 587
— рівноваги 116
Різниця
— векторів 75
— матриць 9
— множин 146
— послідовностей 163

Розкладання

- вектора за базисом 84
- функції у ряд Маклорена 270
- функції у ряд Тейлора 269

Розмір матриці 7

Розв'язок диференціального рівняння

- загальний 541
- частинний 541

С

Середнє значення

- витрат 325, 517
- доходу 326, 517
- інтеграла 479
- прибутку 517

Середні показники ефективності

- середня продуктивність ресурсу 424
- середня продуктивність праці 441
- середня фондівдача 424

Система рівнянь

- визначена (невизначена) 26
- лінійних алгебраїчних (СЛАР) 25
- нормальна МНК 388, 392, 393
- однорідна (неоднорідна) 26
- сумісна (несумісна) 26
- у матричній формі 27

Скалярний добуток векторів 86

Складна функція 184

Спадна функція 186

Способи завдання функції 180, 344

Степенева функція 189

Сума (різниця)

- векторів 75
- матриць 9
- послідовностей 163

Т

Таблиця інтегралів 461

Таблиця похідних 254

Теорема

— Больцано-Коші 227, 228

— Вейерштрасса 165, 226, 227

— Коші 267, 545, 560

— Кронекера-Капеллі 37

— Лагранжа 266

— Лапласа 17

— Ролля 264

— Ферма 263

Точка

— внутрішня 343

— критична першого роду 277

— критична другого роду 285

— локального максимуму (мінімуму) 277, 374, 379

— перегину 284

— рівноваги 116

— розриву 223, 354

— стаціонарна 277, 375, 380

Транспонування матриці 13

Тригонометричні функції 197

У

Умова

— зв'язку 393, 400

— паралельності

— — площин 125

— — прямих 113, 128

— — прямої і площини 129

— перпендикулярності

— — площин 125

— — прямих 114, 128

— — прямої і площини 129

Універсальна тригонометрична підстановка 466

Ф

Фізичний зміст

- визначеного інтеграла 476
- похідної 244

Формула

- Біном Ньютона 166
- інтегрування частинами
- — у невизначеному інтегралі 462
- — у визначеному інтегралі 478

Коші 267

Лагранжа 266

Лейбніца 261

Ліувілля-Остроградського 566

Маклорена 270

Ньютона-Лейбніца 481

Тейлора 269, 373

Формули Крамера 29

Функція

- алгебраїчна 204
- багатьох змінних 344
- випуску продукції 205
- виробнича 205, 420, 347
- витрат 205
- Діріхле 181
- двох змінних 342
- доходу 205
- дробово-лінійна 194
- еластична (нееластична) 313
- Кобба-Дугласа 421
- корисності 204, 347, 367, 443
- Лагранжа 396, 402
- непарна (парна) 185
- нескінченно мала (велика) 211
- неявна (явна) 182
- обернена 182
- однорідна 551
- періодична 186

- попиту 116, 205
 - пропозиції 116, 205
 - прибутку 207, 321, 323, 434
 - споживання 206
 - трансцендентна 204
 - ціла частина числа 204
 - цілком еластична (нееластична) 313
- Функції, які використовуються в економічній теорії 204, 347

Х

Характеристичне рівняння 570

Ч

Частинна похідна функції

- першого порядку 356
- другого порядку 369
- мішані 369
- n -го порядку 370

Частинний розв'язок диференціального рівняння

- другого порядку 560
- n -го порядку 541
- першого порядку 546

Число e 166

Числова

- послідовність 151
- — збіжна (розбіжна) 155

Член послідовності (загальний) 151

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
ВСТУП	5
Розділ 1. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	7
1.1. Основні відомості про матриці.....	7
1.2. Операції над матрицями.....	8
1.2.1. Додавання та віднімання матриць.....	9
1.2.2. Множення матриці на число.....	9
1.2.3. Множення матриць.....	10
1.2.4. Піднесення матриць до степеня.....	12
1.2.5. Транспортування матриць.....	13
1.2.6. Обернена матриця.....	14
1.3. Визначники квадратних матриць.....	14
1.3.1. Індуктивне означення визначника.....	14
1.3.2. Формули обчислення визначників 2-го та 3-го порядків.....	15
1.3.3. Розкладання визначника за рядком (стовпцем).....	17
1.3.4. Обчислення визначника за допомогою властивостей.....	18
1.3.5. Знаходження оберненої матриці за допомогою визначників.....	22
1.3.6. Ранг матриці.....	24
1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	26
1.4.1. Основні поняття.....	26
1.4.2. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.....	27
1.4.3. Формули Крамера.....	29
1.4.4. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.....	30
1.4.5. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса.....	36
1.4.6. Дослідження та розв'язання загальних СЛАР.....	37
1.5. Лінійні економічні моделі.....	39
1.5.1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз).....	39
1.5.2. Модель рівноважних цін.....	47
1.5.3. Лінійна модель міжнародної торгівлі.....	49
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач.....	51
Розділ 2. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	72
2.1. Вектори на площині та у просторі.....	72
2.1.1. Поняття вектора.....	72
2.1.2. Лінійні операції над векторами.....	73
2.1.3. Координати вектора.....	76

2.2. n -вимірні вектори та дії над ними	77
2.2.1. Правила додавання n -вимірних векторів	78
2.2.2. Множення n -вимірного вектора на число	79
2.2.3. Лінійна залежність і лінійна незалежність векторів	80
2.2.4. Геометричне тлумачення лінійної залежності векторів	82
2.3. Множення векторів	86
2.3.1. Скалярний добуток двох векторів	86
2.3.2. Векторний добуток двох векторів	89
2.3.3. Мішаний добуток трьох векторів	92
2.4. Простір товарів. Вектор цін	94
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач	97
Розділ 3. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ	105
3.1. Рівняння лінії у прямокутній системі координат	105
3.2. Рівняння прямої на площині	107
3.2.1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора	107
3.2.2. Рівняння прямої із кутовим коефіцієнтом	108
3.2.3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку	109
3.2.4. Канонічне рівняння прямої	110
3.2.5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	111
3.2.6. Рівняння прямої у відрізках	111
3.2.7. Загальне рівняння прямої	112
3.2.8. Взаємне розміщення двох прямих	113
3.2.9. Відстань від точки до прямої	114
3.3. Моделі та задачі економічного змісту	115
3.3.1. Модель рівноваги ринку	115
3.3.2. Бюджетні множини та лінії бюджетного обмеження	120
3.4. Площина та пряма у просторі	122
3.4.1. Рівняння площини у просторі R^3	122
3.4.2. Відстань від точки до площини	124
3.4.3. Взаємне розміщення двох площин	125
3.4.4. Рівняння прямої у просторі R^3	125
3.4.5. Відстань від точки до прямої. Відстань між прямими	127
3.4.6. Взаємне розміщення двох прямих	128
3.4.7. Взаємне розміщення прямої та площини	128
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач	129

Розділ 4. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ТЕОРІЇ МНОЖИН	145
4.1. Елементи теорії множин	145
4.1.1. Множини. Основні поняття	145
4.1.2. Числові множини	149
4.1.3. Обмежені числові множини. Межі числових множин	150
4.2. Числові послідовності	151
4.2.1. Границя числової послідовності	154
4.2.2. Павутинна модель ринку	156
4.2.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності	160
4.2.4. Основні властивості збіжних послідовностей	162
4.2.5. Граничний перехід у нерівностях	164
4.2.6. Число e	166
4.2.7. Задача про неперервне нарахування відсотків	168
4.2.8. Терема про вкладені відрізки	170
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач	171
Розділ 5. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ	180
5.1. Функції однієї змінної	180
5.1.1. Способи задання функції	180
5.1.2. Властивості функцій	185
5.2. Основні елементарні функції	187
5.2.1. Лінійна функція	187
5.2.2. Квадратична функція	188
5.2.3. Степенева функція	189
5.2.4. Дробово-лінійна функція	194
5.2.5. Показникова функція	195
5.2.6. Логарифмічна функція	196
5.2.7. Тригонометричні функції	197
5.2.8. Обернені тригонометричні функції	200
5.3. Застосування функцій в економічній теорії	204
5.4. Границя функції	208
5.4.1. Означення границі функції у точці	208
5.4.2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції	211
5.4.3. Властивості та порівняння нескінченно малих функцій	212
5.4.4. Односторонні границі	213
5.4.5. Основні теореми про границі	214
5.4.6. Перша визначна границя	217
5.4.7. Друга визначна границя	218
5.4.8. Границя показниково-степеневої функції	220
5.5. Неперервність функції	221
5.5.1. Основні поняття	221
5.5.2. Класифікація точок розриву функції	223
5.5.3. Властивості неперервних функцій	223

5.5.4. Економічна інтерпретація неперервності	225
5.5.5. Властивості неперервних на відрізку функцій	226
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач	228

Розділ 6. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Похідна функції	240
6.1.1. Поняття похідної	240
6.1.2. Задачі, що приводять до поняття похідної	241
6.1.3. Односторонні похідні	246
6.1.4. Диференційованість функції	247
6.2. Диференціал функції	249
6.2.1. Означення та геометричний зміст диференціала	249
6.2.2. Наближені обчислення за допомогою диференціала	250
6.2.3. Економічне застосування диференціала. Мультиплікатор	251
6.3. Правила диференціювання	251
6.3.1. Диференціювання суми, добутку та частки функцій	251
6.3.2. Диференціювання складної та оберненої функції	253
6.3.3. Диференційованість елементарних функцій	254
6.3.4. Похідна показниково-степеневі функції	255
6.3.5. Похідна неявної функції	255
6.3.6. Похідна функції, що задана параметрично	256
6.4. Похідні та диференціали вищих порядків	257
6.4.1. Похідні вищих порядків	257
6.4.2. Похідні вищих порядків функцій, що задані параметрично та неявно	259
6.4.3. Формула Лейбніца для похідної n -го порядку добутку двох функцій	261
6.4.4. Диференціали вищих порядків	262
6.5. Застосування похідних до дослідження функцій	263
6.5.1. Основні теореми диференціального числення	263
6.5.2. Формула Тейлора	268
6.5.3. Формула Маклорена	270
6.6. Застосування похідної до обчислення границь	272
6.6.1. Правила Лопітала. Розкриття невизначеностей виду $0/0$ та ∞/∞	272
6.6.2. Розкриття невизначеностей виду $0 \cdot \infty$, $(\infty - \infty)$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞	274
6.7. Дослідження функцій і побудова їх графіків	276
6.7.1. Умови монотонності функції	276
6.7.2. Умови локального екстремуму	277
6.7.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку	281

6.7.4. Умови опуклості та точки перегину графіка функції	282
6.7.5. Асимптоти графіка функції	286
6.7.6. Побудова графіка функції	287
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач	290

Розділ 7. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

7.1. Еластичність	308
7.1.1. Еластичність функції. Основні поняття	308
7.1.2. Геометричний зміст еластичності функції	309
7.1.3. Властивості еластичності	311
7.1.4. Застосування еластичності в економічному аналізі	314
7.1.5. Еластичність і податкова політика	317
7.2. Теорія одноресурсної фірми	320
7.3. Прийняття оптимальних рішень в економічних дослідженнях	323
7.3.1. Оптимальні ціна, граничні витрати та обсяг виробництва фірми	323
7.3.2. Задача вибору фірмою оптимального обсягу виробництва	323
7.3.3. Закон спадної ефективності виробництва	329
7.4. Оптимізація оподаткування підприємств	331
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач	334

Розділ 8. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

8.1. Основні поняття функції багатьох змінних	342
8.1.1. Означення функції двох змінних	342
8.1.2. Означення функції багатьох змінних. Способи задання функцій	344
8.1.3. Функції багатьох змінних, які використовують в економічній теорії	347
8.2. Границя та неперервність функції	348
8.2.1. Границя функції двох змінних	348
8.2.2. Неперервність функції двох змінних	353
8.2.3. Прирости функції	355
8.3. Диференційованість функції багатьох змінних	356
8.3.1. Частинні похідні першого порядку	356
8.3.2. Необхідні умови диференційованості функції двох змінних	357
8.3.3. Достатні умови диференційованості функції	359
8.3.4. Повний диференціал функції двох змінних	360

8.3.5. Застосування повного диференціала функції двох змінних у наближених обчисленнях.....	361
8.3.6. Похідна за напрямком	362
8.3.7. Градієнт функції.....	364
8.3.8. Економічне застосування градієнта	367
8.3.9. Частинні похідні вищих порядків.....	368
8.3.10. Диференціали вищих порядків.....	371
8.3.11. Формула Тейлора для функції двох змінних	373
8.4. Локальні екстремуми.....	374
8.4.1. Локальні екстремуми функції двох змінних	374
8.4.2. Необхідні та достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.....	375
8.4.3. Дослідження функції двох змінних на екстремум	376
8.4.4. Квадратичні форми	378
8.4.5. Локальні екстремуми функції багатьох змінних.....	379
8.4.6. Необхідні та достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних.....	380
8.4.7. Найбільше та найменше значення функції в області	382
8.5. Метод найменших квадратів.....	384
8.5.1. Емпіричні формули.....	384
8.5.2. Метод найменших квадратів можливої лінійної залежності між змінними.....	387
8.5.3. Вирівнювання за допомогою кривих.....	391
8.6. Умовні екстремуми	393
8.6.1. Поняття умовного екстремуму функції двох змінних.....	393
8.6.2. Прямий метод знаходження точок умовного екстремуму.....	394
8.6.3. Метод множників Лагранжа.....	395
8.6.4. Умовні екстремуми функції багатьох змінних.....	400
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач.....	403
Розділ 9. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ.....	420
9.1. Аналіз економічних задач за допомогою виробничих функцій.....	420
9.1.1. Виробничі функції багатьох змінних.....	420
9.1.2. Властивості виробничих функцій.....	423
9.1.3. Економічні характеристики процесу виробництва.....	424
9.2. Еластичність функції багатьох змінних	426
9.2.1. Означення еластичності функції двох змінних.....	426
9.2.2. Властивості еластичності.....	428
9.2.3. Попит на конкурентні товари	430

9.3. Задачі оптимізації виробництва.....	433
9.3.1. Задача багаторесурсної фірми.....	433
9.3.2. Задача оптимального розподілу ресурсів.....	436
9.3.3. Задача оптимального розподілу товарів.....	437
9.3.4. Задача визначення мінімальних витрат фірми.....	439
9.3.5. Задача цінової дискримінації.....	440
9.4. Задачі теорії споживання.....	443
9.4.1. Гранична корисність і гранична норма заміщення.....	443
9.4.2. Функції попиту споживача.....	445
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач.....	447
Розділ 10. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ.....	457
10.1. Первісна та невизначений інтеграл.....	457
10.1.1. Первісна.....	457
10.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла.....	459
10.1.3. Інтеграли від основних елементарних функцій.....	460
10.2. Основні методи інтегрування.....	462
10.2.1. Метод безпосереднього інтегрування.....	462
10.2.2. Метод заміни змінної.....	463
10.2.3. Інтегрування деяких видів іраціональних і трансцендентних функцій.....	465
10.2.4. Метод інтегрування частинами.....	467
10.2.5. Рекурентні формули.....	470
10.3. Визначений інтеграл.....	471
10.3.1. Інтегральні суми та їх основні властивості.....	471
10.3.2. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.....	474
10.3.3. Основні властивості визначеного інтеграла.....	477
10.3.4. Основна формула інтегрального числення.....	481
10.4. Методи обчислення визначених інтегралів.....	481
10.4.1. Метод безпосереднього інтегрування.....	481
10.4.2. Метод підстановки у визначеному інтегралі.....	482
10.4.3. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.....	484
10.5. Невласні інтеграли.....	485
10.5.1. Невласні інтеграли першого роду.....	486
10.5.2. Невласні інтеграли другого роду.....	487
10.6. Наближені формули обчислення визначених інтегралів.....	488
10.6.1. Формула прямокутників.....	489
10.6.2. Формула трапецій.....	491
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач.....	493

Розділ 11. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ	505
11.1. Геометричні застосування визначеного інтеграла	505
11.1.1. Обчислення площ плоских фігур	505
11.1.2. Обчислення довжини дуг кривих ліній	507
11.1.3. Обчислення об'ємів тіл	509
11.1.4. Обчислення площ поверхонь тіл обертання	511
11.2. Фізичні застосування визначеного інтеграла	513
11.2.1. Робота змінної сили	513
11.2.2. Обчислення пройденого шляху	514
11.3. Економічні застосування визначеного інтеграла	515
11.3.1. Застосування визначеного інтеграла у динамічних процесах	515
11.3.2. Середні значення економічних функцій	517
11.3.3. Визначення приросту капіталу за відомих інвестицій	520
11.3.4. Оцінка ступеня нерівномірності у розподіленні доходів населення	521
11.3.5. Застосування визначеного інтеграла у фінансових задачах	522
11.3.6. Застосування у задачах реалізації товарів	524
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач	528
 Розділ 12. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	 539
12.1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь	539
12.2. Економічні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь	542
12.2.1. Задача про накопичення капіталу	542
12.2.2. Задача про розмноження популяцій	543
12.2.3. Демографічна задача	543
12.2.4. Задача про рекламу	544
12.3. Диференціальні рівняння першого порядку	544
12.3.1. Основні поняття	544
12.3.2. Рівняння з відокремлюваними змінними	547
12.3.3. Однорідні диференціальні рівняння	550
12.3.4. Лінійні диференціальні рівняння	554
12.3.5. Диференціальні рівняння Бернуллі	558
12.4. Диференціальні рівняння другого порядку	559
12.4.1. Основні поняття	559
12.4.2. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку	561

12.4.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.....	564
12.4.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	570
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач.....	576

Розділ 13. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У МОДЕЛЯХ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ	586
13.1. Модель демографічного процесу.....	586
13.2. Модель природного зростання випуску продукції зі сталими темпами (без обмежень зростання).....	588
13.3. Модель зростання випуску продукції із різким відсіканням.....	592
13.4. Зростання обсягу виробництва, що пропорційне до витрат ресурсу.....	593
13.5. Модель природного зростання в умовах конкуренції (логістичне зростання).....	593
13.6. Динамічна модель Кейнса.....	596
13.7. Неокласична модель зростання.....	599
13.8. Модель Еванса.....	602
13.9. Модель динаміки фондів.....	603
13.10. Модель Солоу.....	605
13.11. Модель ринку із прогнозованими цінами.....	607
Запитання для самоконтролю та приклади розв'язування задач.....	610
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	616
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	661
АЛФАВІТНО-ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	662

Навчальне видання

ГРИСЕНКО Марина Віталіївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Підручник

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84^{1/16}. Ум. друк. арк. 40,0. Наклад 100. Зам. № 219-9319.
Гарнітура Cambria. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № МВ 18.
Підписано до друку 03.04.23

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"

Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
<http://vpc.knu.ua>

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02