Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

М. В. Заболоцький, І. А. Прокопишин

ОСНОВИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2016

УДК [519.86:336+368.01](075.8)
ББК 65в641я73+65.826в6я73
З 12

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. І. Копитко*
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Ф. Чекурін*
(Інститут прикладних проблем математики і механіки НАН України
ім. Я. С. Підстригача)

Рекомендовано до друку
Вченою радою механіко-математичного факультету
Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол № 4 від 09.12.2015 р.

Заболоцький М. В.
З 12 Основи фінансової математики: навч. посібник / М. В. Заболоцький, І. А. Прокопишин. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2016. – 144 с.

У посібнику викладено детерміновані методи кількісного аналізу фінансових і кредитних операцій. Розглянуто фінансову систему загалом, детально висвітлено теорію процентів, розрахунок показників грошових потоків, методи визначення ефективності інвестиційних проектів, зокрема інвестицій в облігації.

Подано основи актуарної математики: поняття страхування, історію страхової справи, моделювання страхових виплат та розрахунок премії для моделей індивідуального ризику на короткому інтервалі часу, таблиці тривалості життя.

Для вступного курсу підготовки фахівців у галузі фінансової та страхової математики.

УДК [519.86:336+368.01](075.8)
ББК 65в641я73+65.826в6я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Фінансові відносини охоплюють практично усі сфери людської діяльності і є важливим чинником у розвитку людського суспільства. Фінансова математика – це галузь науки, яка займається розробкою та дослідженням математичних моделей фінансових відносин та систем у мікро- та макроекономіці, міжнародній сфері. У вузькому сенсі слова, фінансова математика вивчає кількісні методи аналізу фінансових угод та операцій.

Головна мета праці – простий, але достатньо строгий виклад основ фінансової та страхової математики.

Посібник містить десять розділів.

Перший розділ – вступний. У ньому розглянуто фінансову систему та її складові: фінанси, фінансові посередники та фінансовий ринок, окреслено поняття фінансового менеджменту та предмет фінансової математики.

У другому розділі викладено теорію процентів: гроші та їх вартість у часі, проценти, види процентних ставок, нарощення та дисконтування грошових сум.

У третьому розділі вивчено грошові потоки. Розглянуто еквівалентну вартість грошового потоку на деякий момент часу, теорію рент та її застосування у фінансовому аналізі. Зокрема детально розглянуто формування плану погашення кредиту, розрахунок лізингових та депозитних угод.

У четвертому розділі викладено методи оцінки ефективності інвестиційних проектів шляхом аналізу грошових потоків, передбачених за ними. Розглянуто основні показники ефективності інвестиційних проектів та їх застосування для порівняльного аналізу проектів.

У п’ятому розділі розглянуто питання про врахування інфляції у фінансових розрахунках. Дано поняття індексу споживчих цін та темпу інфляції, вивчено вплив інфляції на нарощення грошових сум.

У шостому розділі вивчено інвестиції в облігації. Розглянуто поняття дохідності облігації до погашення, часової структури процентних ставок, процентного ризику, показників дюрації та опуклості облігації, інвестицій у портфель облігацій, теорію імунізації.

У наступних розділах викладено основи актуарної математики.

У сьомому розділі розглянуто головні поняття страхування, історію страхової справи та актуарної математики, окреслено професію актуарія.

У восьмому підрозділі вивчено методи стохастичного моделювання виплат компанії за індивідуальними позовами, а також сумарних страхових виплат компанії для моделі індивідуального ризику на короткому інтервалі часу.

У дев’ятому розділі розглянуто методику розрахунку нетто-премій для моделей індивідуального ризику на короткому інтервалі часу.

У десятому розділі вивчено ймовірнісні характеристики тривалості життя та їх статистичні оцінки, які використовують для побудови таблиць тривалості життя.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується змістовними задачами з розв’язками. В кінці кожного розділу є запитання для самоконтролю.

Під час підготовці посібника автори використали усі джерела, наведені у списку літератури. Зокрема, теоретичний матеріал та приклади розділів 1–6 викладено на основі робіт [1, 4, 14, 23, 38, 39, 40, 43, 44, 46], а розділів 7–10 – на основі [2, 3, 15, 18, 19, 21, 22, 25, 26]. Багато прикладів є оригінальними.

Автори висловлюють глибоку вдячність професорам Б. І. Копитку та В. Ф. Чекуріну за зауваження та пропозиції, надані ними під час рецензування посібника. Окрема подяка доценту Т. М. Заболоцькому, який уважно прочитав рукопис і виявив чимало неточностей та описок.

1. Фінансова система. Предмет фінансової математики

1.1. Фінанси та фінансова система

Термін "фінанси" має декілька значень. **Фінанси як фонди грошових коштів** – це гроші, цінні папери, матеріальні цінності тощо. **Фінанси як економічні відносини** – це специфічні економічні відносини, які пов’язані з створенням, наповненням, розподілом та використанням фондів грошових коштів. **Фінанси як сфера діяльності** – сфера економічної діяльності, пов’язана з раціональним використанням грошових капіталів.

Гроші – загальний еквівалент затрат людської праці, виконують функції міри благ та ресурсів, засобу обігу та нагромадження. З виникненням кредитних відносин гроші перетворилися у **капітал** – засіб для отримання додаткових прибутків. Практика кредитних відносин (надання грошей у борг за певну плату) існувала ще до нашої ери у Древній Греції (10–36 % річних).

Сучасні фінансові відносини нормуються законодавством, регламентуються державними та місцевими органами влади і складають в рамках держави цілісну систему – **фінансову систему держави**.

Фінансову систему України схематично показано на рис. 1.1.

Рис. 1.1. Фінансова система України

Фінансова система об’єднує власне фінанси (фонди грошових коштів), фінансовий ринок як сукупність механізмів реалізації фінансових відносин, а також фінансових посередників – інституцій, що виконують спеціалізовані функції на фінансовому ринку.

Усі ***фонди грошових коштів*** можна поділити на фінанси суб’єктів господарювання та фізичних осіб, державні фінанси, міжнародні фінанси. Фінанси суб’єктів господарювання та фізичних осіб – це фінансові кошти приватних підприємств, товариств з обмеженою відповідальністю, акціонерних товариств та фізичних осіб. Державні фінанси містять зведений (консолідований) бюджет держави, фонди цільового призначення, державний сектор економіки, державний кредит, державне страхування. Міжнародні фінанси – це міжнародні рахунки, фінанси міжнародних організацій та міжнародних інституцій.

1.2. Правове регулювання та управління фінансовою системою

Правове поле фінансової діяльності визначають такі галузі права: фінансове (регламентує фінансову діяльність держави); податкове; банківське; страхове; адміністративне (регламентує відносини у сфері виконавчої влади); цивільне (регламентує майнові відносини та пов’язані з ними не майнові і суто особисті відносини).

Верховна Рада України, як єдиний орган законодавчої влади, ухвалює закони, у тім числі з фінансових питань; затверджує Державний бюджет України, вносить зміни до нього, проводить контроль за виконанням та приймає рішення щодо звіту про його виконання.

Рахункова палата Верховної Ради створена з метою проведення позавідомчого контролю за складанням і виконанням державного бюджету, вироблення й аналізу бюджетної політики держави, контролю у сфері державного кредиту і грошово-кредитної політики. Вона виконує роль експертного органу Верховної Ради України, готуючи відповідні висновки і рекомендації з питань фінансової діяльності органів управління. Рахункова палата також може проводити ревізійну роботу в різних ланках фінансової системи.

Президент України, як глава держави, створює у межах коштів, передбачених у Державному бюджеті України, для виконання своїх повноважень консультативні, дорадчі та інші допоміжні органи і служби; підписує закони, ухвалені Верховною Радою України; має право вето щодо цих законів із наступним поверненням їх на повторний розгляд Верховної Ради України.

Президент України призначає міністра фінансів (за поданням прем’єр-міністра) і звільняє його, подає кандидатуру голови Національного Банку України.

Кабінет Міністрів України, як вищий орган у системі органів виконавчої влади, забезпечує проведення фінансової, цінової, інвестиційної та податкової політики; політики у сферах праці і зайнятості населення, соціального захисту, освіти, науки і культури, охорони природи, екологічної безпеки і природокористування; організовує розроблення проекту закону про Державний бюджет України і забезпечує виконання затвердженого Верховною Радою України Державного бюджету України, надає Верховній Раді України звіт про його виконання.

Головну роль в управлінні фінансами виконує ***Міністерство фінансів***. Саме на нього покладено завдання загального керівництва всією фінансовою системою. Міністерство фінансів України має розгалужену регіональну структуру, яка включає Міністерство фінансів Республіки Крим, обласні та міські (м. Києва та Севастополя) фінансові управління, районні та міські (міст республіканського та обласного підпорядкування) фінансові відділи.

Регіональні фінансові органи мають систему подвійного підпорядкування. Вертикально вони підпорядковані відповідному фінансовому органу вищого рівня (наприклад, районні фінансові відділи – обласному фінансовому управлінню). Горизонтально фінансові органи підпорядковані місцевим органам державного управління, тобто входять до складу відповідних державних адміністрацій.

До складу Міністерства фінансів України належать два підрозділи: державна контрольно-ревізійна служба і державне казначейство.

Державна контрольно-ревізійна служба складається з Головного контрольно-ревізійного управління України, контрольно-ревізійних управлінь в областях, містах республіканського підпорядкування, контрольно-ревізійних підрозділів (відділів, груп) у районах, містах і районах у містах. Спеціалізується на проведенні фінансового контролю.

Державне казначейство створене з метою ефективного управління коштами Державного бюджету України, підвищення оперативності у фінансуванні видатків у межах наявних обсягів фінансових ресурсів у державному бюджеті.

Вагомі регулюючі, контрольні й обслуговуючі функції в галузі банківсько-кредитної діяльності виконує ***Національний банк України*** [7, 9]. Головною функцією Національного банку України є забезпечення стабільності національної грошової одиниці України – гривні. Для її виконання Національний банк виконує, зокрема, такі функції:

– визначає та проводить грошово-кредитну політику, монопольно здійснює емісію національної валюти України та організовує її обіг, є кредитором останньої інстанції для банків та організовує систему рефінансування;

– встановлює для банків правила проведення банківських операцій, бухгалтерського обліку і звітності, захисту інформації, коштів та майна;

– організовує створення та методологічно забезпечує систему грошово-кредитної і банківської статистичної інформації та статистики платіжного балансу;

– визначає систему, порядок і форми платежів, у тім числі між банками, визначає напрями розвитку сучасних електронних банківських технологій;

– створює, координує та контролює створення електронних платіжних засобів, платіжних систем, автоматизації банківської діяльності та засобів захисту банківської інформації;

– здійснює банківське регулювання та нагляд, веде Державний реєстр банків, проводить ліцензування банківської діяльності та операцій у передбачених законами випадках;

– складає платіжний баланс, проводить його аналіз та прогнозування;

– проводить відповідно до визначених спеціальним законом повноважень валютне регулювання, визначає порядок проведення операцій в іноземній валюті, організовує і здійснює валютний контроль за банками та іншими фінансовими установами, які отримали ліцензію Національного банку України на здійснення валютних операцій;

– забезпечує накопичення та зберігання золотовалютних резервів і проведення операцій з ними та банківськими металами;

– представляє інтереси України в центральних банках інших держав, міжнародних банках та інших кредитних установах, де співробітництво відбувається на рівні центральних банків.

Національна комісія з цінних паперів та фондового ринку при президенті України (НКЦПФР) організовує функціонування ринку цінних паперів [13, 32]. Вона проводить реєстрацію випуску цінних паперів та регулює їх обіг. Забезпечує формування інфраструктури ринку, видає ліцензії фінансовим посередникам, які виконують операції з цінними паперами. Комісія проводить контроль за діяльністю суб’єктів ринку цінних паперів – емітентів, інвесторів, фінансових посередників, фондових бірж – відповідно до чинного у цій сфері законодавства.

Національна комісія, що здійснює державне регулювання у сфері ринків фінансових послуг (Нацкомфінпослуг) здійснює формування та забезпечення реалізації політики державного регулювання у сфері ринків фінансових послуг (крім ринку банківських послуг і ринків цінних паперів та похідних цінних паперів) [33].

1.3. Фінансові посередники

Функції фінансових посередників виконують банківсько-кредитні установи, страхові компанії, пенсійні фонди, інвестиційні фонди та прямі фінансові посередники, до яких належать інвестиційні банки, іпотечні банки, фондові біржі, позабіржові системи, фінансові брокери та дилери.

Банківсько-кредитна система включає Національний банк України (НБУ), державні та комерційні банки, кредитні спілки. В Україні на 01.01.2016 р. ліцензію НБУ мали 117 банків [31].

Відповідно до Закону України [11], **страхування** – це вид цивільно-правових відносин щодо захисту майнових інтересів фізичних осіб та юридичних осіб у разі настання певних подій (страхових випадків), визначених договором страхування або чинним законодавством, за рахунок грошових фондів, що формуються шляхом сплати фізичними особами та юридичними особами страхових платежів (страхових внесків, страхових премій) та доходів від розміщення коштів цих фондів. Послуги зі страхування надають страховики – державні та недержавні **страхові**

компанії, що функціонують відповідно до законодавства України. На початок 2015 р. в Україні функціонувало 382 страхові компанії [33].

Державні та недержавні пенсійні фонди акумулюють страхові внески застрахованих осіб, що обліковуються на накопичувальних пенсійних рахунках та інвестуються з метою отримання інвестиційного доходу на користь застрахованих осіб. Активи пенсійних фондів використовують для оплати договорів страхування довічних пенсій або одноразових виплат застрахованим особам, а у випадках, передбачених чинним законодавством, членам їхніх сімей чи спадкоємцям та на інші цілі, передбачені чинним законодавством.

З прийняттям законів України [8, 10] у 2004 р. розпочато впровадження пенсійної реформи, сутність якої полягає в переході до трирівневої пенсійної системи.

Перший рівень – це солідарна система загальнообов’язкового державного пенсійного страхування, в якій усі кошти, що перераховують підприємства та застраховані особи до Пенсійного фонду України, одразу ж виплачують нинішнім пенсіонерам.

Другий рівень – накопичувальна система загальнообов’язкового державного пенсійного страхування. Частина обов’язкових пенсійних відрахувань (до 7 % від заробітної плати працівника) буде спрямована на персональні рахунки громадян. Ці кошти будуть інвестувати в українську економіку, а інвестиційний дохід збільшуватиме розмір майбутніх пенсійних виплат. Передбачалось, що вона буде введена в дію 2012 р., однак, не введена до цього часу.

Третій рівень – система недержавного пенсійного забезпечення. В цій системі можуть брати участь добровільно як фізичні особи, так і юридичні – роботодавці.

На початок 2015 р. в Україні зареєстровано 76 недержавних пенсійних фондів (НПФ) та 24 адміністратори НПФ [33].

Прямі фінансові посередники на ринку цінних паперів виконують роль сполучної ланки між емітентами цінних паперів та інвесторами. З одного боку, за дорученням емітентів вони проводять випуск та розміщення цінних паперів на фінансовому ринку. З іншого, – вони проводять операції з купівлі цінних паперів на підставі угод з інвесторами.

Діяльність фінансових посередників засновується на їх інформованості та глибоких знаннях ринку цінних паперів.

Інвестиційні банки – спеціалізовані кредитні установи, що залучають довготерміновий позиковий капітал і надають його у розпорядження позичальникам (підприємцям і державі) через випуск облігацій та інших видів боргових зобов'язань. Головними функціями інвестиційного банку є з'ясування характеру і розміру фінансових потреб позичальників, узгодження умов позички, вибір виду цінних паперів, визначення термінів їх емісії та розміщення серед інвесторів. Інвестиційний банк є не просто посередником між інвестором і позичальником, а й гарантом емісії та організатором ринку.

Іпотечні банки – спеціалізовані фінансово-кредитні інститути, які надають довготермінові (на 25–30 років) кредити під заставу нерухомості (або для її придбання). Засобом залучення необхідних коштів для надання кредитів є випуск та продаж заставних листів (довготермінових цінних паперів) – боргових зобов'язань банку, тобто іпотечних кредитів (у тім числі гарантованих та привілейованих). Представник держави своїм підписом засвідчує наявність необхідної застави. Заставні листи іпотечний банк випускає різними купюрами для вільного продажу і продажу на фондових біржах.

Фондові біржі проводять операції з цінними паперами. Головне їх призначення – організація функціонування вторинного ринку. Однак, з одного боку, через біржі може відбуватись і первинне розміщення цінних паперів, а з іншого, і вторинний ринок може функціонувати поза біржами. З огляду на те, розрізняють біржовий і позабіржовий обіг цінних паперів.

Позабіржові торгові системи, на відміну від фондових бірж, не потребують складної реєстрації цінних паперів та учасників ринку і є високоавтоматизованими телекомунікаційними системи. Найвідомішою позабіржовою торговою системою є NASDAQ (абревіатура від англ. National Association of Securities Dealers Automated Quotation – Автоматизовані котирування Національної асоціації дилерів цінних паперів).

Організований позабіржовий ринок в Україні представляють дві торговельно-інформаційні системи: "Перша фондова торгівельна система" (ПФТС), на яку припадає найбільша питома вага укладених на організованому ринку угод – 95,97 % та "Південноукраїнська торговельно-інформаційна система" (ПТІС) – 0,02 %.

Важливі посередницькі функції на ринку цінних паперів виконують дилери та брокери. **Дилер** – фізична або юридична особа, що займається купівлею-продажем цінних паперів, валют, товарів і діє від свого імені і за свій рахунок. **Брокер** здійснює посередницькі функції при укладанні угод між продавцем і покупцем, за що отримує комісійні.

1.4. Фінансовий ринок

Фінансовий ринок – це сукупність обмінно-перерозподільних відносин, пов’язаних з процесами купівлі-продажу фінансових ресурсів, необхідних для проведення виробничої та фінансової діяльності. Відносини обміну пов’язані з переданням одним суб’єктом іншому за відповідну плату (проценти, дивіденди, дисконтні скидки тощо) права на тимчасове чи постійне використання фінансових ресурсів. Таке передання може відбуватись прямо чи через фінансових посередників (комерційні банки, інвестиційні фонди та ін.). За безпосередніх взаємовідносин операції з купівлі-продажу ресурсів відображають як відносини обміну (передання права використання), так і перерозподілу цих ресурсів між власником і користувачем.

Призначення фінансового ринку – забезпечити підприємствам належні умови для залучення необхідних коштів і продажу тимчасово вільних ресурсів. В організаційному плані фінансовий ринок – це сукупність ринкових фінансових інституцій, що супроводжують потік коштів від власників фінансових ресурсів до позичальників. Об’єктами відносин на фінансовому ринку є цінні папери, фінансові послуги, грошово-кредитні ресурси. Суб’єктами є держава, підприємства різних форм власності, окремі громадяни.

Фінансовий ринок виконує функції мобілізації тимчасово вільних фінансових ресурсів, розподілу акумульованих вільних коштів між кінцевими споживачами, прискорення обороту капіталу – активізації економічних процесів у державі, забезпечення умов для мінімізації фінансових ризиків.

За видами фінансових активів фінансовий ринок можна поділити на кредитний ринок, фондовий (ринок цінних паперів), страховий, валютний та ринок фінансових послуг (рис. 1.1).

Фондовий ринок є важливою складовою фінансового ринку, який охоплює частину кредитного ринку і повністю ринок інструментів власності. Інструментами забезпечення обороту фінансових ресурсів на фондовому ринку є цінні папери.

Цінним папером (ЦП) є документ установленої форми, що посвідчує грошове або інше майнове право, визначає взаємовідносини емітента цінного папера (особи, яка видала цінний папір) й особи, що має право на цінний папір, та передбачає виконання зобов'язань за таким цінним папером, а також можливість передання прав на цінний папір та прав за цінним папером іншим особам [13].

В Україні у цивільному обороті можуть бути такі групи цінних паперів:

1. Пайові цінні папери – цінні папери, які, зазвичай, посвідчують участь їх власника у статутному капіталі, надають власнику право на участь в управлінні емітентом і отримання частини прибутку, зокрема у вигляді дивідендів, та частини майна у разі ліквідації емітента. До пайових цінних паперів належать акції та сертифікати різних видів.

2. Боргові цінні папери – цінні папери, що посвідчують відносини позики і передбачають зобов'язання емітента або особи, яка видала борговий цінний папір, сплатити у визначений термін кошти, передати товари або надати послуги відповідно до зобов'язання. До боргових цінних паперів належать облігації різних емітентів, депозитні сертифікати, векселі.

3. Іпотечні цінні папери – цінні папери, випуск яких забезпечено іпотечним покриттям (іпотечним пулом) та які посвідчують право власників на отримання від емітента належних їм коштів. До іпотечних цінних паперів належать іпотечні облігації та сертифікати, заставні.

4. Приватизаційні цінні папери – цінні папери, які посвідчують право власника на безоплатне одержання у процесі приватизації частки майна державних підприємств, державного житлового фонду, земельного фонду.

5. Похідні цінні папери (деривативи) – цінні папери, механізм випуску та обігу яких пов'язаний з правом на придбання чи продаж протягом терміном, встановленого договором, цінних паперів, інших фінансових та (або) товарних ресурсів. Головними з них є ф'ючерси та опціони.

6. Товаророзпорядчі цінні папери – цінні папери, які надають їхньому держателю право розпоряджатися майном, вказаним у цих документах.

Організацію торгівлі на фондовому ринку здійснюють **фондові біржі**. Їхня діяльність полягає у створенні організаційних, технологічних, інформаційних, правових та інших умов для збирання та поширення інформації стосовно пропозицій цінних паперів та інших фінансових інструментів і попиту на них, проведенні регулярних біржових торгів цінними паперами та іншими фінансовими інструментами, централізованому укладанні договорів щодо цінних паперів та інших фінансових інструментів згідно з правилами, встановленими такою фондовою біржею, зареєстрованими у визначеному законом порядку. Діяльність з організації торгівлі на фондовому ринку може містити проведення клірингу та розрахунків за фінансовими інструментами, іншими, ніж цінні папери.

Як центр торгівлі цінними паперами, фондова біржа є індикатором ділової активності й проводить котирування акцій підприємств. Цим створюється система незалежної і досить об'єктивної оцінки діяльності акціонерних товариств. Тому бюлетені фондових бірж відіграють важливу роль у функціонуванні фінансової системи та економіки країни.

За даними Національної комісії з цінних паперів та фондового ринку в Україні на початок 2015 року діяло 10 фондових бірж, розташованих в Києві, Миколаєві і Дніпропетровську [32].

У Львові розміщене Західне територіальне управління Національної комісії з цінних паперів та фондового ринку, яке об'єднує Львівську, Волинську, Закарпатську, Рівненську, Тернопільську, Хмельницьку та Чернівецьку області.

На кінець 2015 року у Львівській області функціонувало 10 банківських установ, з них 5 – з центральним офісом у Львові (Банк "Львів", Ідея Банк, Кредобанк, ОКСІ Банк, Фольксбанк) та 5 філій, які мають більше 779 відділень [28]. У регіоні працює близько 50-ти страхових компаній, з них 5 – зареєстровані у Львові [33].

1.5. Фінансовий менеджмент та предмет фінансової математики

Фінансовий менеджмент (financial management), або управління фінансами, полягає в діях з фінансування бізнесу, придбання та управління фінансовими активами.

Управлінські рішення у фінансовій сфері на великих фірмах приймають фінансові директори, які, зазвичай, є віцепрезидентами фірм. Їм підпорядковані начальник фінансового управління та головний бухгалтер.

Фінансовий менеджмент вирішує три головні завдання: фінансування поточного бізнесу, інвестиційні рішення та управління активами. Фінансування бізнесу полягає у виборі джерел та структури фінансування поточної діяльності з метою раціонального залучення необхідних коштів. Інвестиційні рішення полягають у виборі обґрунтованого напряму розвитку бізнесу та його реалізації і є найважливішим з наведених завдань. Управління активами – це ефективне управління наявними ресурсами.

Міжнародні стандарти у галузі підготовки фінансових аналітиків визначає Інститут сертифікованих фінансових аналітиків (Інститут СФА) – Chartered Financial Analyst Institute (CFA Institute) – міжнародна асоціація професіоналів в галузі інвестицій [47]. Цей інститут організовує підготовку дипломованих фінансових аналітиків та інвестиційних менеджерів. Членом глобальної мережі товариств Інституту СФА є Українське товариство сертифікованих фінансових аналітиків (CFA Society Ukraine) [48].

Фінансові угоди та операції – основа фінансових відносин. Вони обов’язково мають кількісні характеристики:

- вартісні характеристики (розміри кредитів, платежів, зобов’язань тощо);
- процентні ставки;
- часові параметри (терміни кредитування, терміни платежів тощо);
- інші.

Фінансова математика, у вузькому сенсі, вивчає кількісні методи аналізу фінансових угод та операцій. У широкому, – це галузь науки, яка займається розробкою та дослідженням математичних моделей фінансових відносин та систем у мікро- та макроекономіці, міжнародній сфері.

Фінансова математика, відповідно до використовуваних методів, має два головні розділи:

– детермінована фінансова математика;
– стохастична фінансова математика.

Фінансова математика предметно та методологічно тісно переплітається зі страховою (актуарною) математикою, яка зародилася з розвитком страхової справи ще у XVII столітті. Історію страхової математики, предмет її досліджень та найпростіші математичні моделі розглянуто у розділах 7–10 цього посібника.

Запитання

1. Які значення має термін "фінанси"?
2. Що таке гроші, коли вони перетворюються на капітал?
3. Які основні галузі права регламентують фінансову діяльність?
4. Які державні органи України здійснюють безпосереднє управління фінансовою системою?
5. Які функції виконує Національна комісія з цінних паперів та фондового ринку?
6. Які функції виконує Нацкомфінпослуг?
7. Які інституції виконують роль фінансових посередників?
8. Назвіть фінансових посередників на фінансовому ринку?
9. Чим відрізняються дилери від брокерів?
10. Що таке фінансовий ринок?
11. Що таке фондовий ринок?
12. Що таке цінні папери?
13. Що таке пайові цінні папери?
14. Що таке боргові цінні папери?
15. Що таке похідні ЦП?

16. Що таке фондові біржі?
17. Які головні завдання фінансового менеджменту?
18. Що вивчає фінансова математика?

2. Теорія процентів

2.1. Вартість грошей у часі, види процентних ставок

З виникненням кредитних відносин гроші перетворилися у капітал – засіб для отримання додаткових прибутків. Це призвело до нерівноцінності грошей у часі, зокрема до неправомірності сумування грошових сум, які стосуються різних моментів часу. Таке сумування допустиме у бухгалтерському обліку для фінансового контролю та підведення підсумків за періоди роботи.

Цей факт формулюють як **принцип зміни вартості грошей в часі** (time-value of money). Тому повинне існувати чітке привило, що визначає еквівалентність грошей в часі, однакове для всіх сторін, які беруть участь у фінансовій угоді.

Процентні гроші, або коротко **проценти** (interest), – це плата за надання грошових коштів у кредит у будь-якій його формі (отримання кредиту, продаж товару в кредит, депозитний вклад, облік векселя, торгівля облігаціями тощо).

Укладаючи контракт сторони (кредитор і позичальник) домовляються про суму, процентну ставку, терміни і розміри платежів.

Процентна ставка (rate of interest) – це відношення суми процентних грошей, виплачуваних за певний період (рік, місяць), до розміру кредиту (суми боргу).

Процес збільшення суми грошей через приєднання процентів називають нарощенням, нагромадженням або капіталізацією суми (боргу).

Розглянемо найпростішу кредитну угоду, коли кредитор надає кредит у сумі P, а позичальник зобов'язується повернути у термін T суму S.

Розрізняють два головні види процентних ставок:

ставка нарощення (interest base rate), декурсивна або просто процентна ставка

$$i = \frac{S - P}{P}; \qquad (2.1)$$

облікова ставка процентів (discount base rate), або дисконтна ставка

$$d = \frac{S - P}{S}. \qquad (2.2)$$

У першому випадку базою нарахування є початкова сума боргу P, а в другому – кінцева сума боргу S. У першому випадку позичальник отримує суму P, а повертає суму $S = P(1 + i)$, у другому – отримує суму $P = S(1 - d)$, а повертає суму S.

Якщо зафіксувати суму кредиту P, то за декурсивної процентної ставки для суми повернення S отримаємо величину

$$S = P(1 + i), \qquad (2.3)$$

а за облікової ставки – величину

$$S = \frac{P}{1 - d}. \qquad (2.4)$$

Легко бачити, що коли $d = i$, $0 < i < 1$, тоді $\frac{1}{1 - i} > 1 + i$. Тому декурсивна ставка є більш вигідною для позичальника, а дисконтна – для кредитора.

Приклад 2.1. Найпростіша кредитна угода

Клієнт просить в банку кредит у сумі 9 млн грн на рік. Яку суму повинен повернути клієнт в кінці терміну, якщо:

1) процентна ставка становить 10 %;
2) облікова ставка становить 10 %.

Розв'язування. Відповідно до формул (2.3), (2.4), у першому випадку отримаємо $S = 9 \times (1 + 0{,}1) = 9{,}9$ [млн грн], а в другому – $S = 9/(1 - 0{,}1) = 10{,}0$ [млн грн].

2.2. Нарощення за простими процентними ставками

Розглянемо кредитну угоду на n часових періодів. У фінансових розрахунках використовують два головні методи нарощення процентів – прості та складні проценти.

Проста ставка процентів (simple interest) використовує постійну базу для нарахування процентів за декілька періодів

$$S_n = P + iP + \ldots + iP = P(1+ni). \tag{2.5}$$

Якщо база нарахування процентів змінюється, тобто проценти нараховують на проценти, то говорять про **нарахування процентів за складною процентною ставкою** (compound interest). Тоді нарощена за n часових періодів сума буде дорівнювати

$$S_n = P(1+i)(1+i)\ldots(1+i) = P(1+i)^n. \tag{2.6}$$

Прості проценти, зазвичай, застосовують для короткотермінових фінансових угод (терміном до року).

Термін користування грошима у роках можна виразити дробом

$$n = g/G, \tag{2.7}$$

де g – кількість днів користування грошима; G – кількість днів у році, або часова база нарахування процентів (time basis).

При нарахуванні процентів застосовують дві часові бази: точну ($G = 365{,}366$ днів) та наближену ($G = 360$ днів – 12 місяців по 30 днів). У першому випадку вживають термін **точні проценти** (exact interest), а в другому – **звичайні або комерційні проценти** (ordinary interest). Кількість днів користування грошима також можна підрахувати точно або наближено. У другому випадку приймають, що місяць має 30 днів, а рік, відповідно, – 360. В обох випадках день отримання та повернення кредиту рахується як один день.

Для точного підрахунку терміну угоди зручно користуватися таблицею порядкових номерів днів у році (Додаток А). Тоді ця величина буде дорівнювати різниці порядкових номерів у році дня повернення та дня отримання кредиту.

Приклад 2.2. Розрахунок кількості днів користування грошима

Кредит надано 10.02, дата погашення – 08.09. Чому дорівнює наближена та точна кількість днів користування грошима – g_T та g_H ?

Розв'язування. У першому випадку знаходимо різницю $08.09-10.02=-02.07$, тому $g_H=7\times30-2=208[\text{дн.}]$. За другим способом отримаємо: для 10.02 порядковий день в році – 41, а для 08.09 – 251, тому $g_T=251-41=210[\text{дн.}]$.

У практиці фінансово-банківських розрахунків поширені три способи нарахування простих процентів залежно від способу підрахунку кількості днів користування грошима g та кількості днів у році G.

1. Звичайні проценти з наближеним терміном угоди або німецький метод нарахування процентів. Для розрахунку терміну користування грошима у роках використовують наближені значення терміну угоди та кількості днів у році

$$n_H=g_H/360. \tag{2.8}$$

Цей метод застосовують у випадку, коли не потребують високої точності розрахунків. Поширений у комерційних банках Німеччини, Швеції, Данії. Умовно позначають як 360/360.

2. Комерційні проценти з точним терміном угоди або французький метод нарахування процентів. Для обчислення терміну користування грошима використовують точне значення терміну угоди та наближене значення кількості днів у році

$$n_K=g_T/360. \tag{2.9}$$

Цей метод ще називають банківським (Banker's Rule), умовно позначають, як 365/360 або АСТ/360. Поширений у Франції, Бельгії, Швейцарії.

3. Точні проценти з точним терміном угоди – англійський спосіб нарахування процентів. У цьому випадку використовують точні значення для терміну угоди та кількості днів у році (365 або 366 днів)

$$n_T=g_T/G_T. \tag{2.10}$$

Цей спосіб використовують центральні та комерційні банки багатьох країн, зокрема в Англії та США. У комерційних документах його позначають, як 365/365 або АСТ/ АСТ.

Приклад 2.3. Розрахунок короткотермінового кредиту

Кредит на суму 10000 грн отримано 04.03.2014, дата повернення 18.12.2014. Річна процентна ставка – 25 %. Знайдіть суму повернення використовуючи різні методики нарахування простих процентів.

Розв'язування. Відповідно до прийнятих позначень, сума кредиту $P = 10000$ [грн], дата отримання $t_1 = 04.03.2014$, дата погашення $t_2 = 18.12.2014$, процентна ставка $i = 25\%$.

Знайдемо порядкові номери днів видання та повернення кредиту у році за таблицею Додатку А: $d_1 = 63$, $d_2 = 352$, тому точний термін угоди дорівнює $g_T = d_2 - d_1 = 289$[дн.]. Наближено отримаємо $g_H = 9 \times 30 + 14 = 284$ [дн.]. За формулами (2.8)–(2.10) терміни користування грошима у роках становлять: $n_H = 0{,}788889$, $n_K = 0{,}802778$, $n_T = 0{,}791781$. За формулою (2.5) одержуємо відповідні суми повернення: $S_H = 11972{,}22$[грн], $S_K = 12006{,}94$ [грн], $S_T = 11979{,}45$ [грн].

Якщо термін кредитної угоди охоплює два суміжні календарні роки, то загальна сума нарахованих простих процентів дорівнює сумі процентів, отриманих за кожний рік

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1 i + Pn_2 i. \qquad (2.11)$$

Коли процентні ставки змінюються в часі, то нарощена сума визначається як сума нарощених процентів за періоди зі сталою ставкою

$$I = P\sum_{k=1}^{m} n_k i_k, \qquad (2.12)$$

де i_k – ставка простих процентів для періоду k; n_k – тривалість цього періоду.

Прості проценти з використанням дисконтної процентної ставки застосовують для обліку векселів. **Вексель** (promissory note, bill of credit) – це платіжне зобов'язання, за яким векселедавець зобов'язується виплатити векселетримачу визначену суму на зазначену дату. Банки можуть викупляти векселі до настання дати оплати.

Для розрахунку теперішньої вартості векселя застосовують формулу

$$P = S(1 - n_K d), \qquad (2.13)$$

де d – облікова ставка; $n_K = g_T / G_H$ – термін до погашення у роках, розрахований комерційним методом з точним терміном угоди (2.10).

Облікова ставка НБУ – облікова ставка, яку використовує НБУ при рефінансуванні комерційних банків. Публікують на головній сторінці сайту НБУ [31], на 12.09.2012 становила 7,5 % річних, на 13.02.2015 – 19,5 % , а на 15.09.2015 – 27,0 % річних. Облікова ставка є важливим індикатором економічної активності.

Приклад 2.4. Банківський облік векселів.

Вексель на суму 10 000 грн має дату погашення 26.12.2014. Приймаючи річну дисконтну ставку 20 %, знайдіть вартість векселя на 03.10.2014.

Розв'язування. Відповідно до прийнятих позначень $S = 1000$[грн], $t_1 = 03.10.2014$, $t_2 = 26.12.2014$, дисконтна ставка $d = 20\,\%$.

Знаходимо порядкові номери днів у році: $d_1 = 276$, $d_2 = 360$. Тому $g_T = 360 - 276 = 84$[дн.], $n_K = 84/360 \approx 0{,}233333$. За формулою (2.13) знаходимо $P = 9533{,}33$[грн].

2.3. Нарощення та дисконтування за складними процентними ставками. Неперервні проценти

Якщо проценти не виплачувати після їх нарахування, а приєднувати до нарощуваної суми, то отримаємо формулу нарощення за складними процентами

$$S = P(1 + i)^n, \qquad (2.14)$$

де i – процентна ставка за період; n – кількість періодів.

Формулу (2.14) можна записати у більш загальній формі

$$P(t_2) = P(t_1)(1 + i)^{t_2 - t_1} \,. \qquad (2.15)$$

де $P(t_k)$ – грошова сума в момент часу t_k, $k = 1{,}2$; i – процентна ставка за одиницю часу.

Ця формула допускає випадок $t_2 < t_1$, тому її можна застосовувати як для нарощення, так і для дисконтування, тобто знаходження теперішньої вартості за майбутньою.

Ефективною процентною ставкою (effective rate) за період h згідно з угодою, що розпочалась у момент часу t, називають величину

$$i_h(t) = \frac{P(t+h) - P(t)}{P(t)}. \tag{2.16}$$

Номінальною процентною ставкою (nominal rate) за одиницю часу згідно з угодою на термін h, що розпочалась у момент часу t, називають величину

$$j_h(t) = \frac{P(t+h) - P(t)}{hP(t)} = \frac{i_h(t)}{h}. \tag{2.17}$$

Щоб зрозуміти відмінність між номінальною та реальною процентними ставками, розглянемо випадок нарахування процентів m раз на рік (щомісячне, щоквартальне).

Нехай i_h – ефективна процентна ставка за період $h = 1/m$ (який вимірюють у роках). Тоді за формулою (2.17) для номінальної процентної ставки j_h за одиницю часу (рік) згідно з угодою на термін h, отримаємо

$$j_h = m i_h. \tag{2.18}$$

У фінансових угодах, зазвичай, фіксують не ефективну ставку за період нарахування, а номінальну річну ставку $j_{1/m}$, одночасно вказуючи термін нарахування, наприклад, – "24 % річних з помісячним нарахуванням процентів". За складного нарощення процентів ефективна річна процентна ставка $i_{1;m}$ не буде дорівнювати номінальній річній процентній ставці $j_{1/m}$ за угодою на термін $h = 1/m$, її обчислюють за формулою

$$i_{1;m} = \left(1 + \frac{j_{1/m}}{m}\right)^m - 1. \tag{2.19}$$

Силою росту процентної ставки (force of interest) називають границю

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0+} j_h(t). \qquad (2.20)$$

Ураховуючи означення номінальної процентної ставки (2.17), отримаємо

$$\delta(t)=\frac{P'(t)}{P(t)} . \qquad (2.21)$$

Останнє співвідношення – це звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}(\ln P(t))=\delta(t) , \qquad (2.22)$$

загальний розв’язок якого дорівнює

$$\ln P(t)=\int_0^t \delta(s)ds+C.$$

Задаючи початкову умову $P(0)=P_0$, отримаємо

$$P(t)=P_0\exp\left(\int_0^t \delta(s)ds\right). \qquad (2.23)$$

Якщо $\delta(t)=\delta=const$, то

$$P(t)=P_0 e^{\delta t}. \qquad (2.24)$$

Ефективна процентна ставка за період t за неперервного нарощення процентів дорівнює

$$i_{t;\infty}=e^{\delta t}-1. \qquad (2.25)$$

Формули (2.23)–(2.24) називають формулами **неперервного нарощення процентів** (continuous compounding), а величину $\delta(t)$ – процентною ставкою за одиницю часу за неперервного нарощення процентів (або силою росту процентної ставки).

На практиці інтенсивність процентів установлюють рівній номінальній річній процентній ставці по кредитах "overnight money" – до наступного робочого дня, яку публікують на сайті НБУ [31]. На 14.02.2015 ця ставка становила 19,1 % для операцій у гривні та 4,3 % – у вільноконвертованій валюті. Ефективна одноденна ставка за таким кредитом у вільноконвертованій валюті становила $i_{1/365} = 4{,}3\%/365 = 0{,}0118\%$.

Порівняємо значення ефективної річної процентної ставки при нарахуванні процентів m раз на рік за формулою (2.19) та неперервному нарахуванні процентів за формулою (2.25). Для цього зафіксуємо декілька значень номінальної річної процентної ставки $j = j_{1/m}$ і будемо змінювати кількість періодів нарахування m.

Отримані результати подано у таблиці 2.1. В останньому стовпчику таблиці показано відносну похибку розрахунку ефективної річної процентної ставки за неперервного ($i_{1;\infty}$) і щоденного ($i_{1;365}$) нарахування процентів

$$\varepsilon = \frac{i_{1;\infty} - i_{1;365}}{i_{1;365}}. \tag{2.26}$$

Таблиця 2.1

Залежність ефективної річної процентної ставки від кількості періодів нарахування

Річна номінальна процентна ставка, j	Кількість періодів, m						Відносна похибка, ε
	1	2	4	12	365	∞	
0,05	0,05000	0,050625	0,050945	0,051162	0,051267	0,051271	0,000070
0,10	0,10000	0,102500	0,103813	0,104713	0,105156	0,105171	0,000144
0,20	0,20000	0,210000	0,215506	0,219391	0,221336	0,221403	0,000302
0,30	0,30000	0,322500	0,335469	0,344889	0,349692	0,349859	0,000475
0,40	0,40000	0,440000	0,464100	0,482126	0,491498	0,491825	0,000664
0,50	0,50000	0,562500	0,601807	0,632094	0,648157	0,648721	0,000869

Отож, навіть за номінальної річної процентної ставки рівної 50 %, ця похибка є меншою за 0,1 %. Це обґрунтовує згадане вище правило встановлення інтенсивності процентів при неперервному нарощенні процентів.

Запитання

1. Що таке декурсивна процентна ставка (ставка нарощення)?
2. Дайте означення облікової (дисконтної) ставки процентів.
3. Запишіть формулу нарощення процентів за декілька періодів за використання простої процентної ставки.
4. Запишіть формулу нарощення процентів за декілька періодів за використання складної процентної ставки.
5. Як розраховують кількість днів користування грошима?
6. Які є три головні способи нарахування простих процентів?
7. У чому полягає німецька методика нарахування простих процентів?
8. У чому полягає французька методика нарахування простих процентів?
9. У чому полягає англійська методика нарахування простих процентів?
10. Що таке вексель?
11. Як нараховують прості проценти, якщо угода охоплює два суміжні календарні роки?
12. Як нараховують прості проценти зі змінною процентною ставкою?
13. Запишіть формулу для розрахунку теперішньої вартості векселя.
14. Що таке облікова ставка НБУ?
15. Напишіть формули нарощення та дисконтування за складними процентами.
16. Дайте означення ефективної процентної ставки.
17. Що таке номінальна процентна ставка?
18. Дайте означення сили росту процентної ставки.
19. Запишіть загальну формулу для нарощеної суми за неперервного нарахування процентів.
20. Що таке кредит "overnight money"?

3. Фінансові потоки

3.1. Загальні положення

Фінансовий або грошовий потік (cash flows stream) – це розподілена в часі послідовність платежів. Суму окремого платежу називають **членом потоку** (cash flow).

Позначимо $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ – моменти часу, у які проводять платежі, а $R_0, R_1, \ldots, R_n$ – відповідні їм грошові суми. Припустимо, що процентна ставка i за період є сталою.

Нагадаємо, що зв'язок між грошовими сумами у моменти часу t_1 та t_2 за використання складної процентної ставки визначають як

$$P(t_2) = P(t_1)(1+i)^{t_2 - t_1}. \tag{3.1}$$

Тому теперішня вартість (на момент часу $t = 0$) грошової суми $R(t)$, віднесеної до моменту часу t, дорівнюватиме

$$PV = P(0) = \frac{R(t)}{(1+i)^t} = R(t)(1+i)^{-t}. \tag{3.2}$$

Теперішньою вартістю (present value) грошового потоку називають величину

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{-t_k}, \tag{3.3}$$

а **майбутньою вартістю** (future value) грошового потоку – величину

$$FV = P(t_n) = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{t_n - t_k} \ . \tag{3.4}$$

Вартість грошового потоку на момент часу $t \in (t_m, t_{m+1})$ отримаємо як суму нарощеного на цей час потоку $R_0, R_1, \ldots, R_m$ і дисконтованого потоку $R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots, R_n$:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{m} R_k (1+i)^{t-t_k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k - t}} = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{t-t_k} \ . \tag{3.5}$$

Бачимо, що

$$P(t) = (1+i)^t P(0) = (1+i)^{t-t_n} P(t_n) \ . \tag{3.6}$$

3.2. Фінансові ренти

Якщо грошові платежі проводять через однакові проміжки часу, то такий потік називають регулярним грошовим потоком або **рентою** (rent). Часто вживають також термін **ануїтет** (annuity), хоча у прямому перекладі цей термін стосується лише потоків з щорічними платежами.

Ренту описують такими параметрами:

1) період ренти (rent period) – часовий проміжок між окремими платами;
2) термін ренти (term) – час від початку ренти до кінця останнього періоду – n;
3) грошовий потік – $\{R_k,\ k = 0,1,\ldots,n\}$;
4) процентна ставка за період i, яку використовують при нарощенні чи дисконтуванні.

За окремими ознаками ренти поділяють на такі види:

1) за величиною окремих плат ренти бувають **постійні і змінні**;
2) за моментами виплат ренти поділяють на **ренти постнумерандо** (плати проводять в кінці періодів) та **ренти пренумерандо** (плати проводять на початку періодів);

3) за збігом моментів нарощення процентів та виплат ренти поділяють на **прості**, коли моменти нарощення процентів та оплати збігаються, та **загальні**, коли вони різні;
4) за термінами ренти розрізняють **обмежені** (зі скінченним терміном) та **вічні** або **нескінченні** (з нескінченним терміном).

При розгляді фінансових рент за одиницю часу зручно взяти період ренти. Тоді на основі формул (3.5)–(3.6) легко знайти еквівалентну вартість ренти на будь-який момент часу t:

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n} R_k(1+i)^{t-k}=P(0)(1+i)^t=P(n)(1+i)^{t-n}. \tag{3.7}$$

Розглянемо випадок простої постійної ренти, коли $R_k=R$, $k=0,1,2,\ldots,n$. З попередньої рівності знайдемо

$$P(t)=(1+i)^t R\sum_{k=0}^{n}(1+i)^{-k}. \tag{3.8}$$

Використавши формулу суми n членів геометричної прогресії

$$\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ \text{де } q=\frac{1}{1+i}<1,$$

отримаємо

$$P(t)=(1+i)^t R\left(1+\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right). \tag{3.9}$$

Поширеним видом постійної ренти є рента постнумерандо, коли платежі проводять в кінці періодів: $R_0=0$, $R_k=R$, $k=1,2,\ldots,n$. З попередньої формули легко визначити її вартість на момент часу t

$$P(t)=(1+i)^t R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.10}$$

Зокрема, при $t=0$

$$P(0)=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.11}$$

Часто вживають позначення

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=a_{\overline{n}|i}=a_{n;i}=PVIFA(i;n). \qquad (3.12)$$

Цей множник називають коефіцієнтом зведення звичайної ренти, англійською – Present Value Interest Factor of Annuity.

На основі формули (3.10) можна знайти вартість постійної ренти постнумерандо на момент часу $t=n$

$$P(n)=(1+i)^n\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)R=\frac{(1+i)^n-1}{i}R. \qquad (3.13)$$

Множник $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ позначають $s_{\overline{n}|i}$, $s_{n;i}$ або $FVIFA(i;n)$ і називають коефіцієнтом нарощення звичайної ренти, англійською – Future Value Interest Factor of Annuity.

Для ренти пренумерандо платежі проводять на початку періодів: $R_k=R$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$, $R_n=0$. Теперішня вартість цієї ренти становить

$$P(0)=R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.14)$$

У середовищі MS EXCEL передбачені спеціальні функції для фінансових обчислень [43, 46].

3.3. Застосування теорії рент у фінансовому аналізі

3.3.1. Погашення кредиту

Розглянемо застосування теорії рент до розробки плану погашення кредиту.

Нехай A – основна сума боргу (тіло кредиту); n – термін кредиту; R_k – розмір платежу в момент часу $t=k$, $k=1, 2, \ldots, n$; i – процентна ставка за період. Тоді отримаємо рівняння еквівалентності

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k}. \qquad (3.15)$$

Це рівняння з n невідомими, яке має багато варіантів схем платежів з погашення кредиту. Найбільшого поширення отримали такі схеми погашення:

1) повернення кредиту однаковими сумами (постійний ануїтет);
2) повернення кредиту однаковими сумами з основного боргу плюс проценти на залишок боргу (класична або стандартна схема);
3) повернення боргу довільними сумами.

У першому випадку рівняння еквівалентності має вигляд

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.16)$$

З нього за заданих величин A, i, n легко знайти шукану величину R

$$R = A\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}. \qquad (3.17)$$

За другою схемою розмір окремого платежу становить

$$R_k = \frac{A}{n} + \frac{A}{n}(n-k+1)i, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.18)$$

Легко показати, що у цьому випадку виконується рівність (3.15). Для цього потрібно скористатися тотожністю

$$n \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{1+(n-k+1)i}{(1+i)^k}. \qquad (3.19)$$

За третьої схеми погашення виплати проводять довільними сумами з нарахуванням відсотків на залишок боргу.

План погашення кредиту зручно записувати у табличному вигляді (див. Приклад 3.2).

Приклад 3.1. Ануїтетна схема погашення боргу

Кредит у розмірі 20000 грн терміном на 5 років під ставку 10 % річних повертають однаковими сумами в кінці кожного року (ануїтет). Знайдіть розмір однієї плати.

Розв'язування

Відповідно до прийнятих позначень $A=20000$[грн], термін у роках $n=5$, процентна ставка $i=10$ %. Кредит амортизують постійною рентою постнумерандо, тому рівняння еквівалентності має вигляд $A=R(1-(1+i)^{-n})/i$. З нього знаходимо шукану величину $R=Ai/(1-(1+i)^{-n})=5275{,}95$[грн].

Приклад 3.2. Класична схема погашення кредиту

Для кредиту у розмірі 20000 грн терміном на 5 років під ставку $i=10$ % річних складіть план повернення використовуючи схему повернення рівними сумами по основному боргу плюс проценти (класична схема).

Розв'язування

Вхідні дані: $A=20000$ [грн], термін у роках $n=5$, процентна ставка $i=10$ %. За такою схемою суму повернення в кінці k-го року розраховується за формулою (3.18) $R_k = A/n + Ai(n-k+1)/n$.

План погашення кредиту подамо у таблиці 3.1 (у грн).

Таблиця 3.1

Класична схема погашення кредиту

Рік	Сума боргу на початку року	Проценти	Сума боргу в кінці року	Плата в кінці року	Повернення основного боргу
1	20000,00	2000,00	22000,00	6000,00	4000,00
2	16000,00	1600,00	17600,00	5600,00	4000,00
3	12000,00	1200,00	13200,00	5200,00	4000,00
4	8000,00	800,00	8800,00	4800,00	4000,00
5	4000,00	400,00	4400,00	4400,00	4000,00

Зауважимо, що усі наведені схеми погашення кредиту є еквівалентними, якщо не брати до уваги інфляцію та інші обставини.

Приклад 3.3. Схема повернення боргу, вигідна для кредитора

Якщо кредит повертають однією платою в кінці терміну, тоді сума повернення дорівнює нарощеній сумі боргу

$$P(n) = A(1+i)^n .$$

На основі цього можлива кредитна угода, коли оплата в кінці кожного періоду дорівнює нарощеній вартості боргу за весь час, розділеній на кількість періодів

$$R_k = A(1+i)^n / n, \ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.20)$$

Така схема є вигідною для кредитора, оскільки він отримує нарощену кінцеву вартість боргу раніше. Це підтверджує нерівність

$$(1+i)^n / n > i / (1-(1+i)^{-n}). \qquad (3.21)$$

Приклад 3.4. Порівняння схем кредитування

В автосалоні пропонують авто вартістю \$20000 в кредит на 3 роки з першим внеском у \$6000 та наступними щорічними платами у \$6000.

Чи вигідний такий кредит, якщо клієнт може отримати кредит у банку під ставку 15 % річних?

Розв'язування

Клієнту потрібний кредит у банку на суму \$14000. Якщо його погашати однаковими сумами (ануїтетна схема), то розмір виплат становитиме (Приклад 3.1): $R = \$6131{,}68$. Отже, кредит у автомагазині – вигідніший.

3.3.2. Розрахунок депозитів

Банківський вклад або депозит (savings account, deposit account) – це форма кредиту, коли вкладник надає банку в кредит грошові кошти з метою отримання доходу у формі процентів. Національний Банк України у своїй постанові [27] дає таке визначення депозиту: "Вклад (депозит) – це грошові кошти в готівковій або безготівковій формі у валюті України або в іноземній валюті або банківські метали, які банк прийняв від вкладника або які надійшли для вкладника на договірних засадах на визначений строк зберігання чи без зазначення такого строку (під процент або дохід в іншій формі) і підлягають виплаті вкладнику відповідно до законодавства України та умов договору".

Залежно від умов залучення розрізняють:

- ощадні депозити – без можливості поповнення і часткового зняття вкладу;
- накопичувальні депозити – з можливістю поповнення, але без можливості часткового зняття;
- універсальні – з можливістю поповнення і часткового зняття вкладу.

Банки України пропонують різноманітні депозити у гривнях, доларах США та євро, з капіталізацією процентів та без. Розмір процентів, зазвичай, більший для триваліших вкладів. З конкретними умовами можна ознайомитися на сайтах банків, зокрема [34, 36], де також можна знайти депозитні калькулятори для проведення обчислень.

Розглянемо нарощення суми на депозитному вкладі. Позначимо:

A_0 – сума депозиту;

n – термін угоди (місяці, квартали);

j – номінальна річна процентна ставка;

$i = j/m$ – ефективна процентна ставка за період (місяць, квартал);

R_t – поповнення вкладу у момент часу t, $t = 0,1,2,\dots,n$, $R_0 = 0$, $R_n = 0$;

A_{t-1} – база для нарахування процентів у момент часу t, $t = 1, 2, \dots, n$;

I_t – проценти за період;

P_t – нарощена вартість депозиту на момент часу t, $t = 1, 2, \dots, n$;

S_t – сумарна вартість депозиту на момент часу t, $t = 1, 2, \dots, n$.

За використання простої процентної ставки для нарощення процентів база для нарощення буде змінюватися лише внаслідок поповнення вкладу, тому отримаємо такі рекурентні співвідношення:

$$S_t = P_t + R_t,\ P_t = S_{t-1} + I_t,\ I_t = A_{t-1} i,$$
$$A_t = A_{t-1} + R_{t-1},\ t = 1,2,\dots,n\ ;\ S_0 = A_0. \qquad (3.22)$$

Для депозитної угоди з капіталізацією процентів база для нарахування процентів збігається з нарощеною сумою ($A_{t-1} = S_{t-1}$), тому

$$S_t = P_t + R_t ,\; P_t = S_{t-1} + I_t ,\; I_t = A_{t-1} i ,$$
$$A_{t-1} = S_{t-1} ,\; t = 1,2,\ldots,n \;;\; S_0 = A_0 . \qquad (3.23)$$

Рекурентні обчислення за наведеними формулами зручно проводити за допомогою електронних таблиць.

Приклад 3.5. Розрахунок депозитного вкладу

Розмір депозиту становить 10000 грн, термін – 6 місяців, процентна ставка – 24 % річних, щомісячне поповнення – 1000 грн. Обчисліть загальну суму повернення, використовуючи для нарощення прості та складні проценти.

Розв'язування

Відповідно до введених позначень сума депозиту дорівнює $A_0 = 10000$ грн, термін депозиту $n = 6$, місячна процентна ставка $i = 2\%$, місячне поповнення $R = 1000$ грн. Результати обчислень, отримані за допомогою наведених рекурентних формул, подано у таблицях 3.2 та 3.3.

Таблиця 3.2

Розрахунок депозиту за простою процентною ставкою

Місяць	База для нарахування процентів	Процентна ставка за період	Проценти за період	Нарощена сума	Поповнення	Загальна сума
1	10000,00	0,02	200,00	10200,00	1000,00	11200,00
2	11000,00	0,02	220,00	11420,00	1000,00	12420,00
3	12000,00	0,02	240,00	12660,00	1000,00	13660,00
4	13000,00	0,02	260,00	13920,00	1000,00	14920,00
5	14000,00	0,02	280,00	15200,00	1000,00	16200,00
6	15000,00	0,02	300,00	16500,00	0,00	16500,00

Таблиця 3.3

Розрахунок депозиту з капіталізацією процентів

Місяць	База для нарахування процентів	Процентна ставка	Проценти за місяць	Нарощена сума	Поповнення	Загальна сума

1	10000,00	0,02	200,00	10200,00	1000,00	11200,00
2	11200,00	0,02	224,00	11424,00	1000,00	12424,00
3	12424,00	0,02	248,48	12672,48	1000,00	13672,48
4	13672,48	0,02	273,45	13945,93	1000,00	14945,93
5	14945,93	0,02	298,92	15244,85	1000,00	16244,85
6	16244,85	0,02	324,90	16569,75	0,00	16569,75

Сума повернення для простої угоди становить 16500,00 грн, а з капіталізацією процентів – 16569,75 грн.

3.3.3. Вічні (нескінченні) ренти

Ренти, грошові виплати яких не обмежені терміном, називають нескінченними (вічними). Приклад – послідовність періодичних виплат процентів на інвестований капітал.

Розглянемо нескінченну просту постійну ренту постнумерандо: $R_k = R$, $k = 1, 2, \ldots,$.

Теперішню вартість такої ренти знаходимо граничним переходом при $n \to \infty$ у виразі для теперішньої вартості такої ренти на термін n періодів

$$A = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}. \tag{3.24}$$

Тому термінова плата за такою рентою становить

$$R = Ai. \tag{3.25}$$

Цю плату можна трактувати як проценти за період для депозиту (кредиту) у розмірі A з необмеженим терміном.

Приклад 3.6. Задача про мецената

Меценат хоче заснувати фонд допомоги університету, який би забезпечив в кінці кожного року суму 500 тис. грн. Гроші можуть бути інвестовані під процентну ставку 10 % річних. Яку потрібно суму грошей для заснування фонду?

Розв’язування

Вхідні дані: R = 500 [тис. грн], процентна ставка $i = 10\%$.

Фінансові потоки інвестиційного фонду моделюємо постійною нескінченною рентою постнумерандо. Рівняння еквівалентності запишеться так: $A = R/i$. З нього знаходимо шукану величину $A = 5000$ [тис. грн].

3.3.4. Фонд нагромадження

Цікавим прикладом застосування теорії рент є розрахунок фонду нагромадження, зокрема персонального пенсійного фонду.

Таблицю нагромадження легко скласти аналогічно таблиці повернення боргу. Для розрахунку необхідно скористатися рівнянням еквівалентності для грошових потоків.

Приклад 3.7. Розрахунок персонального пенсійного фонду

За 10 років до виходу на пенсію особа хоче створити персональний пенсійний фонд, який протягом десяти років після виходу на пенсію забезпечував би щорічну виплату у сумі 10 тис. грн. Яку суму потрібно відкладати щорічно на депозит з капіталізацією процентів, якщо річна процентна ставка становить 10 % ?

Розв’язування

Особа відкладає суму R на депозит протягом m років до виходу на пенсію, а після цього отримує суму W протягом n років. Прирівнюючи майбутню вартість нагромаджених коштів на момент виходу на пенсію та вартість виплат на цей час, отримаємо рівняння

$$R((1+i)^m-1)/i = W(1-(1+i)^{-n})/i \,. \qquad (3.26)$$

Звідси $R = W\dfrac{(1-(1+i)^{-n})}{(1+i)^m-1} = 3855{,}43$[тис. грн].

3.3.5. Лізинг

Лізинг можна розглядати як різновид довгострокового кредиту, що надається у майновій формі і погашення якого здійснюють у розстрочку. З іншого боку, його можна трактувати як довгострокову оренду з елементами кредитних відносин, оскільки повернення майна для нього не є обов’язковою умовою.

Загальні правові та економічні засади лізингу визначає закон України "Про фінансовий лізинг" [12]. Цей закон дає таке визначення лізингу: "За договором фінансового лізингу (далі – договір лізингу) лізингодавець зобов’язується набути у власність річ у продавця (постачальника) відповідно до встановлених лізингоодержувачем специфікацій та умов і передати її у користування лізингоодержувачу на визначений строк не менше одного року за встановлену плату (лізингові платежі)".

Відповідно до згаданого закону, суб'єктами лізингу можуть бути:

- лізингодавець – юридична особа, яка передає право володіння та користування предметом лізингу лізингоодержувачу;
- лізингоодержувач – фізична або юридична особа, яка отримує право володіння та користування предметом лізингу від лізингодавця;
- продавець (постачальник) – фізична або юридична особа, в якої лізингодавець набуває річ, яку згодом передадуть як предмет лізингу лізингоодержувачу;
- інші юридичні або фізичні особи, які є сторонами багатостороннього договору лізингу.

Типова лізингова угода, коли лізингодавцем є банк, має такий вигляд. На прохання клієнта банк купує майно (обладнання, транспортні засоби, обчислювальну техніку та інше) і бере на себе відповідальність за зберігання майна, внесення страхових платежів, сплату майнових податків тощо. Клієнт укладає з банком угоду про оренду, в якій, зокрема, визначають розмір та періодичність орендної плати. До складу лізингового платежу належать амортизаційні відрахування, плата за ресурси, проценти тощо. Лізингоодержувач може мати право викупу предмета лізингу по завершенню угоди.

Розрахунки лізингових платежів проводять на основі формули для теперішньої вартості ренти (3.7).

Розглянемо спрощений випадок, коли комісійні включені у початкову вартість предмета лізингу, а податки – не враховуються. Позначимо:

V – початкова вартість предмета лізингу;

n – термін угоди (місяці, квартали);

A_0 – авансовий платіж у момент часу $t=0$;

V_t – залишкова вартість предмета лізингу на момент часу t, $t=0,1,2,\dots,n$,

$V_0 = V - A_0$;

i – процентна ставка;

D_t – повернення основного боргу у момент часу t;

I_t – проценти за оренду;

$L_t = D_t + I_t$ – лізингові платежі у момент часу t.

Припустимо, що лізингові платежі проводять у кінці періодів. Тоді отримаємо таке рівняння еквівалентності

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{L_t}{(1+i)^t} + \frac{V_n}{(1+i)^n}. \qquad (3.27)$$

Для ануїтетної схеми повернення, коли $L_t = L$, $t = 1, 2, \dots, n$, за формулою (3.17) знайдемо

$$L = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \left(V_0 - \frac{V_n}{(1+i)^n} \right). \qquad (3.28)$$

Знаючи величину L та залишкову вартість на початок угоди $V_0 = V - A_0$, розмір процентів та амортизаційних виплат за період знаходимо за допомогою таких рекурентних співвідношень

$$I_t = V_{t-1} i, \ D_t = L - I_t, \ V_t = V_{t-1} - D_t, \ t = 1, 2, \dots, n. \qquad (3.29)$$

Для стандартної схеми амортизаційні платежі залишаються однаковими впродовж усього терміну угоди

$$D_t = D, \ t = 1, 2, \dots, n, \qquad (3.30)$$

тому

$$L_t = D + I_t, \ I_t = (V_0 - (t-1)D) i \ \ t = 1, 2, \dots, n. \qquad (3.31)$$

Для визначення величини амортизації D скористаємося рівністю (3.27) і тотожністю (3.19), отримаємо рівняння

$$V_0 = nD + (V_0 - nD)(1-(1+i)^{-n}) + V_n (1+i)^{-n},$$

з якого знайдемо

$$D = \frac{V_0 - V_n}{n}. \qquad (3.32)$$

Лізингові розрахунки зручно проводити за допомогою електронних таблиць. На сайтах банків та лізингових компаній є спеціальні лізингові калькулятори, які враховують специфіку пропонованих ними лізингових угод [16, 34, 36, 41].

Приклад 3.8. Розрахунок лізингових платежів

Вартість устаткування становить 1000000 грн, термін лізингової угоди – півтора року, процентна ставка – 24 % річних. Передбачено авансовий платіж – 20 %, залишкова вартість устаткування – 20 %. Лізингові платежі проводять у кінці кварталів.

Розрахуйте лізингові платежі використовуючи ануїтетну та стандартну схеми.

Розв'язування

Відповідно до введених позначень, термін лізингу становить шість кварталів, $n=6$. Залишкова вартість устаткування на початок угоди дорівнює $V_0 = V - A_0 = 800000$ грн, а на кінець угоди – $V_n = 200000$ грн, проценти за квартал – $i = 6\,\%$.

За формулою (3.28) знаходимо розмір щоквартального платежу для ануїтетної схеми $L = 134017{,}58$ грн. Обчислення інших величин за рекурентними формулами (3.29) легко виконати за допомогою електронних таблиць. Результати обчислень наведено у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Ануїтетна схема виплат за угодою лізингу

Квартал	Залишкова вартість на початок періоду	Амортизація за період	Проценти за період	Сума повернення в кінці періоду
1	800000,00	86017,58	48000,00	134017,58
2	713982,42	91178,63	42838,95	134017,58
3	622803,79	96649,35	37368,23	134017,58
4	526154,44	102448,31	31569,27	134017,58
5	423706,13	108595,21	25422,37	134017,58
6	315110,92	115110,92	18906,66	134017,58
7	200000,00			
Сума		600000,00	204105,46	804105,46

Для стандартної схеми за формулою (3.32) амортизація за квартал дорівнює $D = 100000$ грн. Інші величини легко обчислюються за формулами (3.31). Нижче наведено таблицю отриманих результатів.

Таблиця 3.5

Стандартна схема виплат за угодою лізингу

Квартал	Залишкова вартість на початок періоду	Амортизація за період	Проценти за період	Сума повернення

				в кінці періоду
1	800000,00	100000,00	48000,00	148000,00
2	700000,00	100000,00	42000,00	142000,00
3	600000,00	100000,00	36000,00	136000,00
4	500000,00	100000,00	30000,00	130000,00
5	400000,00	100000,00	24000,00	124000,00
6	300000,00	100000,00	18000,00	118000,00
7	200000,00			
Сума		600000,00	198000,00	798000,00

Запитання

1. Що таке грошовий потік?
2. Дайте означення теперішньої вартості грошового потоку?
3. Що таке майбутня вартість грошового потоку?
4. Що таке ануїтет?
5. Яку ренту називають рентою постнумерандо?
6. Що таке рента пренумерандо?
7. Запишіть формулу для теперішньої вартості ренти постнумерандо.
8. Запишіть формулу для майбутньої вартості ренти постнумерандо.
9. Що таке $PVIFA(i;n)$?
10. Що таке $FVIFA(i;n)$?
11. Чим відрізняється загальна рента від простої?
12. Назвіть найбільш поширені схеми погашення кредиту.
13. Опишіть класичну схему погашення кредиту.
14. Опишіть ануїтетну схему погашення кредиту.
15. Як проводять розрахунок виплат за депозитом?
16. Що таке вічна рента?
17. Сформулюйте задачу про ануїтетну схему погашення боргу.
18. Сформулюйте задачу про розрахунок депозиту з капіталізацією процентів.
19. Сформулюйте задачу про формування фонду нагромадження.

20. Сформулюйте задачу про формування персонального пенсійного фонду.

4. Показники фінансової ефективності інвестиційних проектів

4.1. Основні показники ефективності інвестицій

Інвестиції – це вкладення грошових коштів (або інших цінностей, які мають грошову оцінку) для отримання доходів у майбутньому.

Реальні інвестиції передбачають вкладення грошових коштів у матеріальні ресурси: землю, нерухомість, устаткування. **Виробничі інвестиції** – один з видів реальних інвестицій, коли кошти вкладають у створення, реконструкцію чи реорганізацію виробничих підприємств.

Фінансові інвестиції – це вкладення коштів у фінансові цінні папери, документи, які надають право їх власникам на отримання доходу у майбутньому за певних умов. Розрізняють основні та похідні цінні папери. Основними цінними паперами є акції, облігації, депозити, векселі, а похідними – ф'ючерси, опціони, варранти тощо.

В основі оцінки інвестиційних проектів лежить оцінка грошових потоків, передбачених за цими проектами. Для урахування вартості грошей у часі дисконтування та нарощення грошових сум проводять, зазвичай, за методом складних процентів.

Позначимо:

n – тривалість інвестиційного проекту в часових періодах;

A_t – об'єм інвестицій у момент часу $0 \le t \le n$, $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ – вектор інвестицій;

R_t – доходи від проекту в момент часу t,

$\mathbf{R} = (R_0, R_1, \ldots, R_n)$ – вектор доходів;

r – необхідна ставка доходу за проектом.

Проект класичного характеру – це проект, у якому грошовий потік змінює знак лише один раз, тобто видатки інвестора передують доходам від проекту.

Для оцінки проектів застосовують один або декілька показників, для більшості з яких реалізовані спеціальні функції у середовищі MS EXCEL.

Чистий дисконтний дохід (ЧДД), або **чиста теперішня вартість** (ЧТВ), англ. – Net present value (NPV), це – різниця між теперішньою вартістю доходів і теперішньою вартістю інвестованих коштів, тобто

$$NPV(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R}) = P(r,n,\mathbf{R}) - E(r,n,\mathbf{A}), \tag{4.1}$$

де

$$P(r,n,\mathbf{R}) = \sum_{t=0}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}, \quad E(r,n,\mathbf{A}) = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{(1+r)^t}. \tag{4.2}$$

Чистий дисконтний дохід характеризує можливий приріст (зменшення) капіталу інвестора внаслідок реалізації проекту. Якщо $NPV(r,n) > 0$, то інвестиційний проект є вигідним, інакше – збитковим.

У середовищі MS EXCEL передбачено функції ***NPV*** та ***PV***, які обчислюють теперішню вартість потоку платежів постнумерандо. Для розрахунку ЧТВ можна скористатись цими функціями, додаючи до отриманого значення платіж, проведений у початковий момент часу.

Чиста майбутня вартість (ЧМВ), англ. – Net Future value (NFV), це – чиста вартість доходу за проектом на момент часу $t = n$. Її обчислюють нарощенням суми ЧТВ на момент часу $t = n$

$$FV(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R}) = NPV(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R})(1+r)^n. \tag{4.3}$$

Показники ЧДД та МВ є абсолютними показниками, поряд з ними широко використовують такі відносні показники, як індекс дохідності та внутрішня норма дохідності.

Індекс дохідності (ІД), англ. – Profitability index (PI), це – відношення теперішньої вартості доходів до теперішньої вартості інвестицій

$$PI(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R}) = \frac{P(r,n,\mathbf{R})}{E(r,n,\mathbf{A})}. \tag{4.4}$$

Внутрішня норма (ставка) дохідності (ВНД), англ. – Internal rate of return (IRR), це – процентна ставка r, за якої чиста теперішня вартість за проектом дорівнює нулю, тобто

$$NPV(IRR,n,\mathbf{A},\mathbf{R})=0\,. \tag{4.5}$$

Для інвестиційного проекту класичного характеру за умови $\sum_{t=0}^{n}\left(R_t-A_t\right)>0$ рівняння (4.5) має єдиний позитивний розв’язок. Доведення цього факту можна знайти у роботі [23, с.60].

Чим більше значення ВНД, тим вища ефективність проекту. Нехай i – норма доходу за альтернативним проектом, якщо $IRR>i$, то вихідний проект порівняно з альтернативним є більш вигідним.

Для обчислення цієї величини в середовищі EXCEL передбачено функцію ***IRR***.

Дисконтний термін окупності, англ. – discounted payback period (DPP) – це найменший час, за який чиста теперішня вартість за проектом стане додатною:

$$n_0 \to \min_{\substack{m\in\mathbf{N},\\ NPV(r,m,\mathbf{A},\mathbf{R})>0}} m\,. \tag{4.6}$$

Зауважимо, що без урахування вартості грошей у часі показники чистого дисконтного доходу та дисконтного терміну окупності перетворюються у так звані "прості показники" – чистого доходу та терміну окупності.

Порівняння ефективності різних інвестиційних проектів здійснюють шляхом порівняння одного або декількох їхніх показників [1, 43, 44]. Якщо, при порівнянні за декількома показниками виникає протиріччя, то використовують додаткові міркування.

У фінансовому аналізі також застосовують модифіковані величини. **Модифікована чиста теперішня вартість** (NPV^*) передбачає реінвестування отриманих прибутків за деякою ставкою r^* до кінця дії проекту:

$$NPV^*(r,r^*,n,\mathbf{A},\mathbf{R})=\frac{TV(r^*,n,\mathbf{R})}{(1+r)^n}-E(r,n,\mathbf{A})\ , \tag{4.7}$$

де $TV(r^*,n,\mathbf{R})=\sum_{t=0}^{n} R_t(1+r^*)^{n-t}$ – кінцева вартість проекту (terminal value) – вартість прибутків реінвестованих за ставкою r^* на кінець дії проекту.

Модифікована внутрішня ставка дохідності (Modified internal rate of return – MIRR) передбачає реінвестування прибутків за ставкою r^*, її визначають з умови

$$\frac{TV(r^*,n,\mathbf{R})}{(1+MIRR)^n}-E(r,n,\mathbf{A})=0, \tag{4.8}$$

тобто

$$MIRR=\left(\frac{TV(r^*,n,\mathbf{R})}{E(r,n,\mathbf{A})}\right)^{1/n}-1. \tag{4.9}$$

Для розрахунку цієї величини в EXCEL передбачено функцію ***MIRR***. Величини r та r^* часто приймають рівними вартості капіталу фірми.

Розглянемо приклади застосування описаних показників.

4.2. Приклади розрахунку ефективності інвестицій

Приклад 4.1. Розрахунок ЧТВ

Бізнес-проект на три роки передбачає такий потік щорічних грошових сум (у млн грн): $R_0=-10$, $R_1=-6$, $R_2=14{,}4$, $R_3=17{,}28$. Чому дорівнює чиста теперішня вартість проекту (NPV) та індекс дохідності (PI), якщо необхідна річна процентна ставка становить 20 %?

Розв'язування

Знайдемо теперішню вартість доходу та теперішню вартість інвестицій:

$$P=\frac{14{,}4}{(1+0{,}2)^2}+\frac{17{,}28}{(1+0{,}2)^3}=20,\quad E=10+\frac{6}{1+0{,}2}=15.$$

Тому отримаємо: $NPV=P-E=5$ [млн грн], $PI=P/E=1{,}33$.

Приклад 4.2. Порівняння інвестиційних проектів

Інвестор хоче вибрати для реалізації один із двох бізнес-проектів. Перший з них розрахований на чотири роки і передбачає такий потік щорічних грошових сум (у млн грн): $R_0 = -5$, $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $R_3 = 3$, $R_4 = 2$. Другий проект розрахований на п'ять років і, відповідно, передбачає грошовий потік: $R_0 = -5$, $R_1 = 2$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$, $R_4 = 2$, $R_5 = 2$.

Порівняйте ці два проекти на основі показника NPV, задаючи необхідну річну процентну ставку рівною 20 %.

Розв'язування

Розрахуємо NPV для обох проектів за формулою (4.1): $NPV_1 = 1{,}459517$ [млн грн], $NPV_2 = 1{,}559928$ [млн грн]. За показником NPV другий проект є кращим.

Приклад 4.3. Порівняння інвестиційного проекту та депозиту

Бізнес-проект на три роки передбачає такий потік щорічних грошових сум: $R_0 = -100$ тис. грн, $R_1 = -100$ тис. грн, $R_2 = 121$ тис. грн, $R_3 = 121$ тис. грн.

Знайдіть внутрішню ставку дохідності (IRR) проекту. Чи вигідний цей проект порівняно з депозитом із капіталізацією процентів, якщо процентна ставка для депозиту становить 15 % річних?

Розв'язування

Показник IRR є розв'язком рівняння $\sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{-k} = 0$. Позначимо $x = 1/(1+i) > 0$, тоді у нашому випадку отримаємо алгебричне рівняння $121x^3 + 121x^2 - 100x - 100 = 0$, або $(x+1)(121x^2 - 100) = 0$. З останнього рівняння знаходимо додатний корінь $x = 11/10$, далі отримуємо $i = 0{,}1$.

Отже, IRR = 0,1. Порівняно з депозитом цей проект є невигідним.

Запитання

1. Що таке чиста теперішня вартість інвестиційного проекту?
2. Дайте означення чистої майбутньої вартості.

3. Назвіть англійський відповідник терміну "чиста теперішня вартість".
4. Дайте означення індексу дохідності.
5. Що таке внутрішня ставка дохідності?
6. Назвіть англійський відповідник терміну "внутрішня ставка дохідності".
7. Назвіть англійський відповідник терміну "індекс дохідності".
8. Як порівняти два інвестиційні проекти за показником чистої теперішньої вартості?
9. Як порівняти інвестиційні проекти за показником внутрішньої ставки доходності?
10. Дайте означення дисконтного терміну окупності.
11. Що таке модифікована чиста теперішня вартість?
12. За якого значення ставки реінвестування модифікована чиста теперішня вартість дорівнює чистій теперішній вартості?
13. Що таке кінцева вартість проекту?
14. Дайте означення модифікованої ставки дохідності.
15. Які показники ефективності інвестиційураховують можливе реінвестування?
16. Які показники ефективності інвестицій є абсолютними, а які – відносними?
17. Як порівнюють ефективність різних інвестиційних проектів?
18. Сформулюйте задачу про порівняння інвестиційного проекту та депозитного вкладу.
19. Сформулюйте задачу про порівняння двох інвестиційних проектів.
20. Сформулюйте задачу про розрахунок дисконтного терміну окупності інвестиційного проекту.

5. Урахування інфляції

5.1. Індекс споживчих цін

Будемо порівнювати стан економічної системи в моменти часу t_0 та t_1. Для спрощення, приймемо, що $t_0 = 0$ а $t_1 = 1$. Нехай споживчий кошик, який відображає стан економічної системи у ці моменти часу, складається відповідно з n_0 та n_1 товарів та послуг. Позначимо:

$Q_0 = (q_{10},\ldots,q_{n0})^T$ – кількість товарів у кошику у момент часу t_0;

$Q_1 = (q_{11},\ldots,q_{n1})^T$ – кількість товарів у кошику у момент часу t_1;

$P_0 = (p_{10},\ldots,p_{n0})^T$ – ціни товарів у кошику у момент часу t_0;

$P_1 = (p_{11},\ldots,p_{n1})^T$ – ціни товарів у кошику у момент часу t_1.

Не зменшуючи загальності, надалі будемо вважати, що $n_0 = n_1 = n$. Тоді вартість споживчого кошика у моменти часу t_0 та t_1 дорівнюватиме

$$W_0 = P_0^T Q_0 = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}, \quad W_1 = P_1^T Q_1 = \sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}. \tag{5.1}$$

Запишемо відносну зміну ціни споживчого кошика у двох формах

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{P_1^T Q_1}{P_0^T Q_0} = \frac{P_1^T Q_1}{P_1^T Q_0} \cdot \frac{P_1^T Q_0}{P_0^T Q_0} = \frac{P_0^T Q_1}{P_0^T Q_0} \cdot \frac{P_1^T Q_1}{P_0^T Q_1}. \tag{5.2}$$

Перші множники, які відображають зміни у кошику, називають індексами об'єму товарів та послуг. Другі множники відображають зміни у цінах, їх називають індексами цін. Якщо за базовий момент часу вибирають момент часу t_0, то відповідні індекси називають індексами Ласпейреса (Etienne Laspeyres), в іншому випадку – індексами Пааше (Hermann Paasche).

Отже, **індекси Ласпейреса та Пааше для цін**, відповідно, дорівнюють:

$$L_{1/0}(P)=\frac{P_1^T Q_0}{P_0^T Q_0}, \quad \Pi_{1/0}(P)=\frac{P_1^T Q_1}{P_0^T Q_1}. \tag{5.3}$$

Аналогічно вводять **індекси Ласпейреса та Пааше для об'єму товарів та послуг**:

$$L_{1/0}(Q)=\frac{P_0^T Q_1}{P_0^T Q_0}, \quad \Pi_{1/0}(Q)=\frac{P_1^T Q_1}{P_1^T Q_0}. \tag{5.4}$$

З урахуванням уведених позначень, зміну вартості споживчого кошика (5.2) можна записати так

$$\frac{W_1}{W_0}=L_{1/0}(P)\Pi_{1/0}(Q)=\Pi_{1/0}(P)L_{1/0}(Q). \tag{5.5}$$

Індекс Ласпейреса для цін можна також записати як зважену суму елементарних змін у ціні, з вагою, яка відповідає долі товару чи послуги у вартості кошика в момент часу t_0:

$$L_{1/0}(P)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i0}\frac{p_{i1}}{p_{i0}}, \ \alpha_{i0}=\frac{p_{i0}q_{i0}}{P_0^T Q_0}. \tag{5.6}$$

Зауважимо, що коли кошик не змінюється, то індекси Ласпейреса та Пааше для об'єму товарів та послуг дорівнюють одиниці, а для цін – збігаються. Індекс Ласпейреса для цін використовують для розрахунку індексу споживчих цін, а індекс Пааше для цін – для розрахунку дефлятора валового внутрішнього продукту (ВВП).

Аналогічно порівнюють стани економічної системи для різних моментів часу. Вибирають базовий момент часу $t_0 = 0$. Далі будують послідовність індексів цін, наприклад

$$I_t = L_{t/0}(P)=\frac{P_t^T Q_0}{P_0^T Q_0}, \quad t=0,1,\dots . \tag{5.7}$$

Часто цей індекс визначають у відсотках, шляхом множення на 100.

Відносний індекс цін, який характеризує зміну цін між моментами часу t та $t+d$, буде визначатися таким відношенням

$$I_{t+d/t} = \frac{W_{t+d}}{W_t} = \frac{I_{t+d}}{I_t}. \tag{5.8}$$

Індекс споживчих цін або **індекс інфляції** (ІСЦ, англ. – Consumer Price Index, CPI) характеризує середній рівень цін на товари та послуги для населення, його обчислюють як відносний індекс цін (5.8) для споживчого кошика.

У таблиці 5.1 за даними Державної служби статистики [29] подано місячні та річні індекси інфляції в Україні за період з 2000 до 2015 року.

Темпом інфляції (inflation rate) за період $[t_{k-1}, t_k]$ називають відносний приріст ціни споживчого кошика за цей період:

$$h_k = \frac{W_k - W_{k-1}}{W_{k-1}} = I_{k/k-1} - 1. \tag{5.9}$$

Індекс інфляції за n періодів можна виразити через темпи інфляції так:

$$I_{n/0} = \frac{W_n}{W_0} = \frac{W_1}{W_0} \cdot \frac{W_2}{W_1} \cdot \ldots \cdot \frac{W_n}{W_{n-1}} = (1+h_1) \cdot (1+h_2) \cdot \ldots \cdot (1+h_n) = \prod_{k=1}^{n} (1+h_k) \cdot \tag{5.10}$$

Таблиця 5.1

Місячні та річні індекси інфляції в Україні

Місяць / Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	За рік
2000	104,6	103,3	102,0	101,7	102,1	103,7	99,9	100,0	102,6	101,4	100,4	101,6	125,8
2001	101,5	100,6	100,6	101,5	100,4	100,6	98,3	99,8	100,4	100,2	100,5	101,6	106,1
2002	101,0	98,6	99,3	101,4	99,7	98,2	98,5	99,8	100,2	100,7	100,7	101,4	99,4
2003	101,5	101,1	101,1	100,7	100,0	100,1	99,9	98,3	100,6	101,3	101,9	101,5	108,2
2004	101,4	100,4	100,4	100,7	100,7	100,7	100,0	99,9	101,3	102,2	101,6	102,4	112,3
2005	101,7	101,0	101,6	100,7	100,6	100,6	100,3	100,0	100,4	100,9	101,2	100,9	110,3
2006	101,2	101,8	99,7	99,6	100,5	100,1	100,9	100,0	102,0	102,6	101,8	100,9	111,6
2007	100,5	100,6	100,2	100,0	100,6	102,2	101,4	100,6	102,2	102,9	102,2	102,1	116,6
2008	102,9	102,7	103,8	103,1	101,3	100,8	99,5	99,9	101,1	101,7	101,5	102,1	122,3
2009	102,9	101,5	101,4	100,9	100,5	101,1	99,9	99,8	100,8	100,9	101,1	100,9	112,3
2010	101,8	101,9	100,9	99,7	99,4	99,6	99,8	101,2	102,9	100,5	100,3	100,8	109,1
2011	101,0	100,9	101,4	101,3	100,8	100,4	98,7	99,6	100,1	100,0	100,1	100,2	104,6
2012	100,2	100,2	100,3	100,0	99,7	99,7	99,8	99,7	100,1	100,0	99,9	100,2	99,8
2013	100,2	99,9	100,0	100,0	100,1	100,0	99,9	99,3	100,0	100,4	100,2	100,5	100,5
2014	100,2	100,6	102,2	103,3	103,8	101,0	100,4	100,8	102,9	102,4	101,9	103,0	124,9
2015	103,1	105,3	110,8	114,0	102,2	104.4	99,0	99,2	102,3	98,7	102,0	100,7	143,3

Динаміку відносного індексу інфляції $I_{t/2000}$ (порівняно з 2000 роком) та річного темпу інфляції за період з 2000 до 2015 року ілюструють графіки на рис. 5.1.

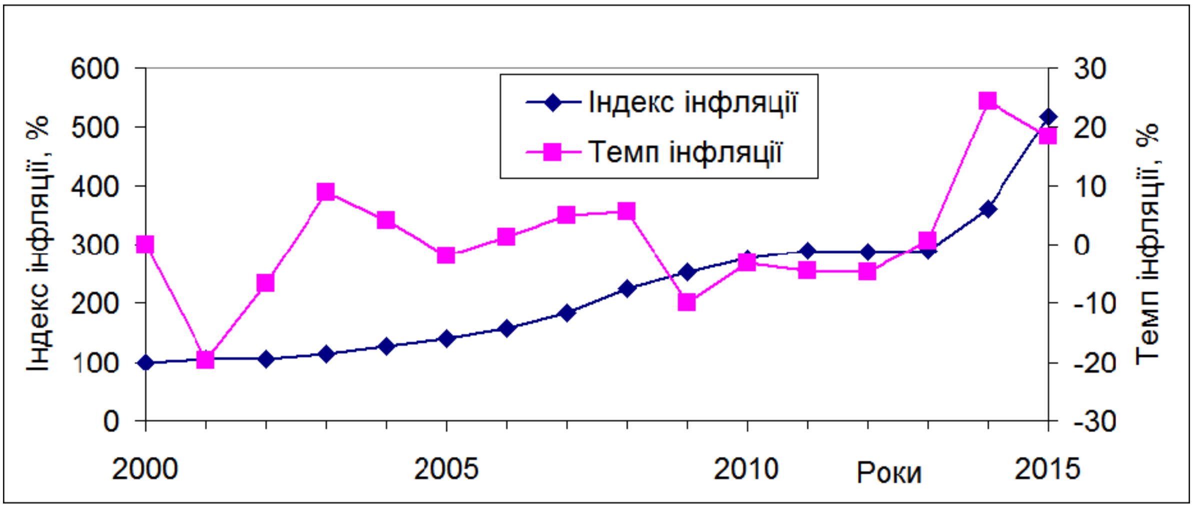

Рис. 5.1. Індекс інфляції $I_{t/2000}$ та річний темп інфляції в Україні

Подібно розраховують капіталізовані біржові фондові індекси, як відносну зміну вартості деякого кошика акцій, що котуються на біржі.

5.2. Урахування інфляції при нарощенні грошових сум

Нехай h_k – темп інфляції за період $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1,2,\dots,n$. **Індексом купівельної спроможності грошей** (purchasing power) за період називають величину, обернену до індексу інфляції за цей період

$$\frac{1}{I_{k/k-1}} = \frac{1}{1+h_k}. \tag{5.11}$$

Розглянемо нарощення реальної вартості грошової суми P за n періодів, припускаючи, що процентна ставка і темп інфляції – сталі:

$$P \to P\frac{1+i}{1+h} \to P\frac{(1+i)^2}{(1+h)^2} \to \dots \to P\frac{(1+i)^n}{(1+h)^n}.$$

Урахуємо, що

$$\frac{1+i}{1+h}=1+i-h-h(i-h)+\frac{h^2(i-h)}{1+h}\approx 1+i-h. \qquad (5.12)$$

Тоді реальна нарощена вартість буде дорівнювати

$$S'=P\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n \approx P(1+i-h)^n. \qquad (5.13)$$

Отже, у спрощених розрахунках реальної вартості грошової суми на деякий момент, у формулі нарощення потрібно від процентної ставки за період відняти темп інфляції.

Тепер розглянемо грошовий потік $R_0, R_1, \ldots R_n$. Припустимо, що за період $[t_{k-1}, t_k]$ процентна ставка дорівнює i_k, а темп інфляції становить h_k. Тоді майбутня реальна вартість грошового потоку (щодо нульового моменту часу) буде дорівнювати

$$S'_{n/0}=\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{n}(1+h_m)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}R_k\prod_{m=k+1}^{n}(1+i_m)+R_n\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{R_k}{\prod\limits_{m=1}^{k}(1+h_m)}\prod_{m=k+1}^{n}\frac{1+i_m}{1+h_m}+\frac{R_n}{\prod\limits_{m=1}^{n}(1+h_m)}. \qquad (5.14)$$

Реальна вартість грошової суми R_k в момент часу t_k ($k=1, 2, \ldots, n$) відносно нульового моменту часу дорівнює

$$R'_{k/0}=\frac{R_k}{\prod\limits_{m=1}^{k}(1+h_m)}. \qquad (5.15)$$

Тому формулу (5.14) можна переписати так

$$S'_{n/0}=\sum_{k=0}^{n-1}R'_{k/0}\prod_{m=k+1}^{n}\frac{1+i_m}{1+h_m}+R'_{n/0}. \qquad (5.16)$$

Теперішня реальна вартість потоку $R_0, R_1, \ldots R_n$ дорівнює

$$S'_{0/0}=S_0=R_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{\prod_{m=1}^{k}(1+i_m)}=R_0+\sum_{k=1}^{n}R'_{k/0}\prod_{m=1}^{k}\frac{1+h_m}{1+i_m}. \quad (5.17)$$

Для практичних розрахунків з урахуванням інфляції вводять поняття брутто-ставки i_n, яку ще називають номінальною процентною ставкою. Її отримують шляхом додавання до реальної ставки доходності i_r (також позначають r) інфляційної "премії", яку розраховують з умови повної компенсації інфляції за період

$$(1+i_n)/(1+h)=1+i_r. \quad (5.18)$$

З останнього рівняння отримаємо

$$i_n=i_r+h+i_r h\approx i_r+h. \quad (5.19)$$

На основі формул (5.13), (5.16), (5.17) стверджуємо, що для дисконтування та нарощення номінальних сум потрібно використовувати номінальну ставку процентів (брутто-ставку), а для аналогічного перерахунку реальних вартостей – реальну процентну ставку.

Запитання

1. Що таке споживчий кошик?
2. Що відображають індекси цін?
3. Дайте означення індекса Ласпейреса для цін.
4. Дайте означення індекса Пааше для цін.
5. Коли індекси Ласпейреса та Пааше співпадають?
6. Що таке індекс інфляції?
7. Дайте означення темпу інфляції.
8. Що таке індекс купівельної спроможності грошей?
9. Як розраховується реальна нарощена вартість?
10. Що таке брутто- та нетто-ставка процентів?
11. Як розраховують брутто-ставку процентів?

12. Сформулюйте задачу про розрахунок реальної вартості нарощеної суми.

6. Інвестиції в облігації

6.1. Внутрішня дохідність облігації

Облігація (bond) – цінний папір, який засвідчує факт надання грошового кредиту інвестором емітенту, забезпечує інвесторові право на отримання регулярних фіксованих дивідендних доходів, а при погашенні облігації – суми кредиту, яка здебільшого дорівнює номінальній вартості облігації.

Основні параметри облігації – номінальна вартість або сума погашення (par value, maturity value, face value), дата погашення (maturity), розміри і терміни платежів. Регулярні процентні виплати за облігацією називають купонами (coupon).

З моменту емісії і до погашення облігації продають і купують на фондовому ринку. Ринкова ціна облігації встановлюється на основі попиту та пропозиції і може дорівнювати її номіналу, бути вищою або нижчою за номінал.

Облігації розрізняють за емітентом, ступенем забезпеченості, розміром купона, терміном обігу тощо. Облігації за своєю суттю є борговими цінними паперами, їх види регламентує Закон України "Про цінні папери та фондовий ринок"[13].

Позначимо:

$t_0 = 0$ – момент купівлі облігації;

$t_1, \dots, t_n$ – моменти платежів за облігацією (у роках);

t_n – термін погашення облігації;

$C_1, \dots, C_n$ – платежі за облігацією у вказані моменти часу;

$P = P(0)$ – ринкова вартість облігації в момент часу $t_0 = 0$.

Інвестора насамперед цікавить дохідність і ціна облігації.

Внутрішня дохідність облігації або **дохідність до погашення** (yield to maturity) – це річна процентна ставка r, за якої теперішня вартість потоку платежів за облігацією дорівнює ринковій вартості облігації в момент часу $t_0 = 0$:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}. \qquad (6.1)$$

Отже, цей показник дорівнює внутрішній ставці дохідності (IRR) для інвестиції в облігацію (п. 4).

Якщо платежі за облігацією виплачують m раз у році, то у формулі (6.1) використовують річну номінальну ставку j:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\left(1+ j/m\right)^{m\,t_i}}. \qquad (6.2)$$

Внутрішня дохідність облігації має наступні основні властивості.

1. За відсутності арбітражу ставка внутрішньої дохідності облігації приблизно дорівнює ринковій процентній ставці для інвестицій в альтернативні фінансові інструменти з такою ж мірою ризику.

2. Річна внутрішня дохідність облігації – це ефективна середня річна ставка дохідності, яку отримує інвестор, за таких умов:

а) інвестор володіє облігацією до моменту її погашення $t = t_n$;

б) усі доходи від облігації реінвестуються за ставкою, яка дорівнює внутрішній дохідності облігації r в момент її купівлі.

Умови а) та б) пояснюють другу назву ставки дохідності – дохідність до погашення.

Нагадаємо (п. 4), що кінцевою вартістю проекту (terminal value) називають вартість прибутків реінвестованих за ставкою r^* на кінець дії проекту. Для інвестицій в облігацію ця величина дорівнює

$$TV = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r^*)^{t_n - t_i}. \qquad (6.3)$$

Ефективну середню процентну ставку $\overline{r}$ знаходять з рівняння

$$(1+\overline{r})^{t_n}\ P(t_0)=TV\,. \qquad (6.4)$$

Якщо ставка реінвестування дорівнює внутрішній ставці дохідності $r^*=r$, тоді

$$TV=\sum_{i=1}^{n}C_i(1+r)^{t_n-t_i}\,. \qquad (6.5)$$

З урахуванням виразу (6.4) отримаємо $\overline{r}=r$.

6.2. Крива дохідності

На ринку одночасно є облігації, до погашення яких залишається різний час. Залежність дохідності облігації одного класу ризику від терміну до погашення називають кривою доходності (yield curve).

Облігацію називають **чисто дисконтною** або **облігацією з нульовим купоном** (zero-coupon bond), якщо за нею проводять лише одну виплату у момент погашення.

Внутрішню дохідність чисто дисконтної облігації терміном на t років називають річною **процентною ставкою спот** (spot rate) для інвестування на t років. Залежність дохідності облігацій з нульовим купоном від часу називають **кривою дохідності спот** (spot rate curve).

Нехай t – термін до погашення чисто дисконтної облігації; $P(t)$ – сума, що виплачується по облігації; $P=P(0)$ – ринкова ціна облігації у момент $t=0$; $r(t)$ – внутрішня дохідність облігації. Тоді згідно з означенням внутрішньої дохідності (6.1) виконується рівність

$$P(0)=\frac{P(t)}{\left(1+r(t)\right)^{t}}.$$

Звідси отримуємо річну спот-ставку для інвестицій на t років

$$r(t)=\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{1/t}-1\,. \qquad (6.6)$$

Набір процентних ставок спот $r(t_1),\dots,r(t_n)$ для інвестицій, відповідно, на $t_1,\dots,t_n$ років називають **часовою структурою процентних ставок** (term structure of interest rates).

Покажемо, як з використанням кривої дохідності спот можна оцінити теперішню вартість деякої облігації.

Нехай облігація B має потік платежів $C_1,\dots,C_n$. Розглянемо чисто дисконтні облігації $B_1,\dots,B_n$ того ж класу ризику з термінами до погашення $t_1,\dots,t_n$ та поверненнями $F_1,\dots,F_n$ – відповідно.

Припустимо, що виконуються умови:

1) відомі процентні ставки спот $r(t_1),\dots,r(t_n)$ для інвестицій, відповідно, на $t_1,\dots,t_n$ років;

2) чисто дисконтні облігації $B_1,\dots,B_n$ можна купити на ринку в довільній кількості без транзакційних витрат.

Складемо еквівалентний портфель з чисто дисконтних облігацій.

Платіж C_i за облігацією B у момент часу t_i замінимо платежем за дисконтною облігацією B_i. Оскільки платіж за однією облігацією B_i дорівнює F_i, то у нашому портфелі буде C_i/F_i облігацій B_i.

Теперішня вартість дисконтної облігації B_i дорівнює

$$P_i = \frac{F_i}{(1+r(t_i))^{t_i}}, \tag{6.7}$$

тому теперішня вартість портфеля становить

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{C_i}{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r(t_i))^{t_i}}. \tag{6.8}$$

Отже, ми отримали "справедливу" вартість облігації B у початковий момент часу. За відсутності арбітражу ринкова ціна облігації B буде близькою до отриманої оцінки.

Особливе значення мають державні облігації, які не мають кредитного ризику. Побудовані на їх основі криві доходності спот є еталоном для оцінки облігацій та інших інструментів на ринку.

Якщо відома ціна P облігації з терміном до погашення t_n років, а також процентні ставки спот на терміни $t_1,\ldots,t_{n-1}$ років, тоді легко розрахувати спот-ставку на термін t_n років. Для цього перепишемо вираз (6.8) так:

$$P=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{C_i}{(1+r(t_i))^{t_i}}+\frac{C_n}{(1+r(t_n))^{t_n}}. \tag{6.9}$$

Необхідну спот-ставку $r(t_n)$ однозначно визначаємо з цього рівняння.

Таким способом можна послідовно знайти теоретичні спот-ставки на довші періоди. Цей метод знаходження кривої доходності спот називають процедурою "бутстрепа", або бутстрепінгом (bootstrapping).

Опишемо більш загальний метод знаходження часової структури процентних ставок за даними ринку облігацій.

Припустимо, що на ринку є m видів облігацій, ціни на які, відповідно, дорівнюють $P^{(k)}$, $k=\overline{1,m}$. Дохід від облігації k-го виду в момент часу t_i позначимо $C_i^{(k)}$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що термін до погашення усіх облігацій дорівнює t_n. Теперішню вартість цих облігацій оцінюємо за формулою (6.8)

$$P^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i^{(k)}}{(1+r(t_i))^{t_i}},\ \ k=\overline{1,m}. \tag{6.10}$$

Дисконтний множник для моменту часу t_i позначимо x_i:

$$x_i=\frac{1}{(1+r(t_i))^{t_i}}. \tag{6.11}$$

Тоді якщо $m>n$, то отримаємо перевизначену систему рівнянь

$$P^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}C_i^{(k)}x_i\ , \tag{6.12}$$

яку перепишемо у загальному вигляді так:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \tag{6.13}$$

де $a_{kj} = C_j^{(k)}$, $b_k = P^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$.

Для розв'язування перевизначеної системи рівнянь (6.13) застосуємо метод найменших квадратів, замінюючи вихідну систему рівнянь такою системою:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \tag{6.14}$$

Якщо ранг перевизначеної системи дорівнює n, то матриця $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ – додатно визначена [42, с.473], і розв'язок системи (6.14) існує та єдиний.

Криву дохідностей, отриману для облігацій, що не мають кредитного ризику, використовують для оцінки ризикових інструментів на ринку. Теоретичні значення безризикових процентних ставок із додаванням премії за ризик використовують для оцінки всіх видів облігацій. Крім того, форму кривої дохідностей розглядають як відображення ймовірного напряму майбутніх змін процентних ставок.

Чотири основні форми кривої дохідності показано на рис.6.1.: 1 – нормальна (зростаюча) крива; 2 – зворотна (спадна) крива; 3 – хвилеподібна крива; 4 – горизонтальна крива.

Зростаюча крива відповідає сталому темпу інфляції, що є природним для ринкової економіки. Хвилеподібна крива відображає перехідні процеси, пов'язані зі зменшенням процентних ставок, яке розпочалося для довгострокових процентних ставок, або збільшенням – для короткострокових процентних ставок.

Спадаюча крива найчастіше свідчить про очікуване зниження темпу інфляції. Горизонтальна крива дохідностей означає, що річні безризикові процентні ставки для інвестицій на всі терміни однакові. Горизонтальна крива є найпростішою моделлю процентних ставок, зручною для фінансових розрахунків.

Для пояснення форми кривої дохідності запропоновано різні теорії часової структури процентних ставок [39, 40, 44]: теорія чистих сподівань, теорія ліквідності та теорія сегментації ринку.

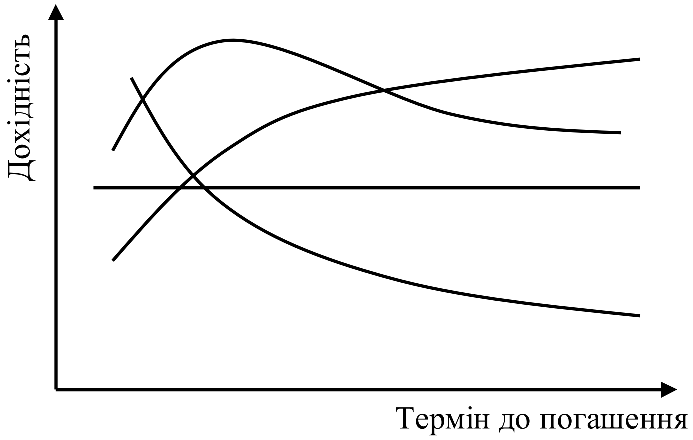

Рис. 6.1. Типові форми кривої дохідності

Форвардна процентна ставка (forward rate) – це ставка для періоду часу в майбутньому. Її використовують для нарощення суми з моменту часу t_1 на час t_2 у майбутньому.

Форвардна процентна ставка визначається процентною ставкою спот. Теперішня вартість у момент $t=0$ та майбутні вартості у моменти t_1 та t_2 пов'язані рівностями

$$P(0)=P(t_1)(1+r(t_1))^{-t_1}=P(t_2)(1+r(t_2))^{-t_2}.$$

Звідси знаходимо $P(t_2)=P(t_1)\dfrac{(1+r(t_2))^{t_2}}{(1+r(t_1))^{t_1}}$.

Тому, для форвардної ставки $f(t_1,t_2)$ у момент часу t_1 на період t_2-t_1 отримаємо рівняння

$$(1+f(t_1,t_2))^{t_2-t_1}=\frac{(1+r(t_2))^{t_2}}{(1+r(t_1))^{t_1}},$$

з якого знайдемо

$$f(t_1,t_2)=\left(\frac{(1+r(t_2))^{t_2}}{(1+r(t_1))^{t_1}}\right)^{-t_2+t_1}-1. \qquad (6.15)$$

6.3. Дюрація та показник опуклості облігації

6.3.1. Означення дюрації та показника опуклості

Для облігації, яка не має кредитного ризику, завжди є ризик зменшення її вартості унаслідок зміни процентних ставок на ринку. Цей ризик називають **процентним ризиком** (interest rate risk).

Розглянемо облігацію, за якою через $t_1,\dots,t_n$ років від теперішнього моменту часу $t=0$ обіцяють виплатити грошові суми $C_1,\dots,C_n$, відповідно.

Припустимо, що крива процентних ставок стала: $r(t_i)=r=const>0$. Тоді ринкова вартість облігації як функція процентної ставки r дорівнює

$$P(r)=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}. \tag{6.16}$$

Легко бачити, що це монотонно спадна функція процентної ставки r.

Припустимо, що процентна ставка у різні моменти часу змінилася на одну і ту ж величину Δr. Тоді вартість облігації стане такою

$$P(r+\Delta r)=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r+\Delta r)^{t_i}}. \tag{6.17}$$

При збільшенні процентних ставок ($\Delta r>0$) ціна облігації зменшується, а при зменшенні ($\Delta r<0$) – зростає.

Відносний приріст вартості облігації дорівнює

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)}=\frac{P(r+\Delta r)-P(r)}{P(r)}. \tag{6.18}$$

Дамо аналітичну оцінку величини $\dfrac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Для цього скористаємося наближенням за формулою Тейлора [6] з урахуванням членів другого порядку:

$$\Delta P(r)=P(r+\Delta r)-P(r)=P'(r)\Delta r+\frac{1}{2}P''(r)(\Delta r)^2+o((\Delta r)^2). \tag{6.19}$$

Отримаємо

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P'(r)}{P(r)}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{P''(r)}{P(r)}(\Delta r)^2. \qquad (6.20)$$

Знайдемо похідну ціни облігації за процентною ставкою

$$P'(r) = -\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0) < 0, \qquad (6.21)$$

де $C_i(0) = \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$ – поточні (теперішні) вартості виплат. Цю похідну називають **доларовою дюрацією Фішера-Вейла** (Fisher-Weil duration).

Для логарифмічної похідної отримаємо

$$\frac{P'(r)}{P(r)} = -\frac{1}{(1+r)P(r)}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} < 0. \qquad (6.22)$$

Дюрацією облігації або дюрацією Маколея (Macaulay duration) називають величину

$$D = -(1+r)\frac{P'(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i C_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} > 0. \qquad (6.23)$$

Коефіцієнт $C_i(0)/P(r)$ виражає долю ринкової ціни облігації, яка буде отримана через t_i років, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i(0)}{P(r)} = 1$, то дюрація облігації є середньозваженим терміном виплат за облігацією. Це пояснює назву терміна від англійського слова "duration" – тривалість.

Тепер знайдемо другу похідну ціни облігації, віднесену до її ціни

$$\frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i(t_i+1)C_i}{(1+r)^{t_i+2}}. \qquad (6.24)$$

Показником опуклості облігації (bond convexity) називають величину

$$C(r)=(1+r)^2\frac{P''(r)}{P(r)}=\frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i(t_i+1)C_i}{(1+r)^{t_i}}=\sum_{i=1}^{n}t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}. \quad (6.25)$$

На основі уведених понять дюрації та показника опуклості формулу (6.20) для відносного приросту ціни облігації перепишемо так

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)}\approx -D(r)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)+\frac{1}{2}C(r)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2. \quad (6.26)$$

Чутливість ціни облігації до зміни процентних ставок характеризується величиною $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, головний член якої прямо пропорційний дюрації облігації. Отже, в момент часу $t=0$ дюрація облігації є мірою її процентного ризику за умов:

1) в початковий момент часу процентні ставки спот для всіх термінів дорівнюють r;

2) процентні ставки змінились раптово на величину Δr;

3) величина Δr – мала;

4) показник опуклості C – малий.

Чим менша величина *C*, тим краще дюрація облігації оцінює чутливість ціни облігації до змін часової структури процентних ставок. Отже, показник опуклості облігації можна інтерпретувати як показник того, наскільки точно дюрація облігації оцінює величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$.

Вкажемо основні властивості дюрації і показника опуклості облігації.

1. Дюрація облігації не перевершує терміну до її погашення $T=t_n$.

Дійсно,

$$D=\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i(0)}{P(r)}\le\sum_{i=1}^{n}t_n\frac{C_i(0)}{P(r)}=t_n\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i(0)}{P(r)}=t_n=T\ . \quad (6.27)$$

2. Дюрація чисто дисконтної облігації дорівнює терміну її погашення. Доведення очевидне.

3. Для облігації, яка не є чисто дисконтною, дюрація і опуклість є строго спадними функціями внутрішньої доходності облігації r. Це означає, що

$$D'(r) < 0,\ C'(r) < 0. \qquad (6.28)$$

Доведення властивостей (6.28) дещо громіздке, його можна знайти у книзі [23, с.146].

6.3.2. Дохідність інвестицій в облігацію. Імунізуюча властивість дюрації облігації

Проблема оцінки облігації виникає не лише тоді, коли облігацію купують або продають на ринку, але й тоді, коли вона є у власника. Для оцінки ефективності інвестиції в облігацію через t років після її купівлі використовують поняття вартості інвестиції в облігацію на момент часу t.

Розглянемо облігацію, за якою через $t_1,\ldots,t_n$ років від теперішнього моменту часу $t=0$ обіцяють виплатити грошові суми $C_1,\ldots,C_n$, відповідно.

Дохідність інвестиції в облігацію на момент часу $t \in [0, t_n]$ – це вартість потоку платежів за облігацією на момент часу t з урахуванням реінвестування.

Припустимо, що в початковий момент часу $t=0$ процентні ставки спот для усіх термінів однакові $r(t_i) = r = const > 0$. Тоді дохідність інвестиції в облігацію на момент часу t дорівнює

$$V(r,t) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t-t_i} = (1+r)^t P(r). \qquad (6.29)$$

Цю дохідність називають **плановою дохідністю** інвестиції в облігацію.

Припустимо, що відразу після купівлі облігації процентні ставки спот для усіх термінів змінилися і стали рівними $\tilde{r}$, після чого – не змінювалися. Тоді **реальна (фактична) дохідність інвестиції** в облігацію на момент часу t буде дорівнювати

$$V(\tilde{r},t) = (1+\tilde{r})^t P(\tilde{r}). \qquad (6.30)$$

Вкажемо основні властивості означених величин.

1. Величини $V(r,t)$ та $V(\tilde{r},t)$ є зростаючими функціями часу.

2. Існує єдиний момент часу t^*, коли фактична дохідність інвестиції дорівнює плановій дохідності

$$t^* = \ln\left(P(r)/P(\tilde{r})\right) \Big/ \ln\left((1+\tilde{r})/(1+r)\right). \qquad (6.31)$$

3. У момент часу дюрації інвестиція в облігацію захищена (імунізована) проти зміни процентних ставок спот відразу після часу $t=0$ на одну і ту ж величину.

Сформулюємо останню властивість у формі такої теореми.

Теорема 6.1. Про імунізуючу властивість дюрації облігації

Нехай $D(r)$ – дюрація не чисто дисконтної облігації в момент часу $t=0$, коли процентні ставки спот для усіх термінів однакові і дорівнюють r.

Тоді в момент часу, що дорівнює дюрації облігації – $t=D(r)$, фактична дохідність інвестиції в облігацію не менша планової для будь-яких значень процентної ставки $\tilde{r}>0$:

$$\forall \tilde{r}>0 \ V(\tilde{r},D(r)) \geq V(r,D(r)). \qquad (6.32)$$

Доведення

Розглянемо реальну дохідність інвестицій в облігацію як функцію параметра $\tilde{r}$ на момент часу $t=D(r)$

$$V(\tilde{r},D(r)) = (1+\tilde{r})^{D(r)} P(\tilde{r}). \qquad (6.33)$$

Знайдемо її похідну по $\tilde{r}$

$$V'_{\tilde{r}}(\tilde{r},D(r)) = D(r)(1+\tilde{r})^{D(r)-1} P(\tilde{r}) + (1+\tilde{r})^{D(r)} P'_{\tilde{r}}(\tilde{r}).$$

Але $P'(\tilde{r}) = -\dfrac{P(\tilde{r})}{(1+\tilde{r})} D(\tilde{r})$, тому

$$V'_{\tilde{r}}(\tilde{r},D(r)) = P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^{D(r)-1}\left(D(r)-D(\tilde{r})\right). \qquad (6.34)$$

Ураховуючи, що дюрація облігації є строго спадною функцією процентної ставки, легко бачити, що при $\tilde{r}<r$ функція $V(\tilde{r},D(r))$ є строго спадною функцією аргумента $\tilde{r}$, а при $\tilde{r}>r$ – строго зростаючою функцією цього аргумента. При $\tilde{r}=r$ її похідна дорівнює нулю

$$V'_{\tilde{r}}(\tilde{r}=r, D(r)) = 0. \qquad (6.35)$$

Отож, виконується нерівність (6.32).

6.4. Інвестиції у портфель облігацій

6.4.1. Портфель облігацій

Розглянемо портфель деяких облігацій. Навіть, коли облігації у портфелі не мають кредитного ризику, в умовах ринку цей портфель матиме процентний ризик. Зміна процентних ставок на ринку викликає зміну ринкових цін облігацій, що входять у портфель, а отже, і зміну вартості усього портфеля.

Припустимо, що на ринку наявні облігації m видів, ціни на які дорівнюють $P_1, P_2, \dots, P_m$.

Нехай облігація j-го виду породжує у моменти часу t_i грошові виплати C_i^j, $i = 1, 2, \dots, n$. Позначимо:

V_j – сума, витрачена інвестором на придбання облігацій j-го виду;

$V = \sum_{j=1}^{m} V_j$ – загальна сума, витрачена на придбання портфеля;

$k_j = V_j / P_j$ – кількість облігацій j-го виду у портфелі;

$w_j = V_j / V$ – вагові коефіцієнти портфеля, $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$;

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ – вектор вагових коефіцієнтів.

У момент часу t_i, $i = 1, 2, \dots, n$ очікуваний потік коштів від портфеля дорівнює

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6.36}$$

Припустимо, що дохідність усіх облігацій дорівнює r і не залежить від часу. За умови

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}} \tag{6.37}$$

має місце рівність

$$V(r,0)=V=\sum_{i=1}^{n} R_i (1+r)^{-t_i}\,. \tag{6.38}$$

Отже, портфель $\Pi(V_1,\ldots,V_n)$ можна розглядати як одну еквівалентну облігацію вартістю V з потоком платежів (6.36). Планова та фактична вартості інвестицій у портфель на момент часу $t \in [0,t_n]$ дорівнюють:

$$V(r,t)=(1+r)^t V(r,0)\,;\; V(\tilde{r},t)=(1+\tilde{r})^t V(\tilde{r},0)\,.$$

Дюрацією D_p й опуклістю C_p портфеля називають дюрацію та опуклість еквівалентної облігації:

$$D_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}\,, \tag{6.39}$$

$$C_P = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i+1)\frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}\,. \tag{6.40}$$

Властивості дюрації і показника опуклості портфеля облігацій.

1. Для дюрації та показника опуклості портфеля облігацій $\Pi(V_1,\ldots,V_m)$ справедливі рівності

$$D_P = \sum_{j=1}^{m} w_j D_j\,,\quad C_P = \sum_{j=1}^{m} w_j C_j\,, \tag{6.41}$$

де D_j і C_j – дюрація і показник опуклості облігацій *j*-го виду.

Доведення випливає безпосередньо з формул (6.39) та (6.40) з урахуванням їх лінійності за параметрами R_i.

2. Якщо D_p і C_p – дюрація і показник опуклості портфеля $\Pi(V_1,\ldots,V_m)$, то виконуються нерівності:

$$D^- \le D_P \le D^+, \tag{6.42}$$

$$C^- \le C_P \le C^+, \tag{6.43}$$

де $D^- = \min\limits_{1\le j\le m}\{D_j\}$, $D^+ = \max\limits_{1\le j\le m}\{D_j\}$, $C^- = \min\limits_{1\le j\le m}\{C_j\}$, $C^+ = \max\limits_{j}\{C_j\}$.

3. Якщо число D таке, що $D^{-} \le D \le D^{+}$, то завжди можна сформувати портфель, дюрація якого дорівнює D:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j D_j = D, \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1, \quad w_j \ge 0, j = \overline{1,m}. \tag{6.44}$$

Легко показати, що система рівнянь і нерівностей (6.44) завжди має розв'язок $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$. Так, коли $D = D_k$, $1 \le k \le m$, тоді розв'язок цієї системи є очевидним – $\mathbf{w} = \mathbf{e}_k$, де $\mathbf{e}_k$ – вектор розмірності m, з компонентами $e_{kj} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \ne k \end{cases}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Якщо виконується нерівність $D_q \le D \le D_p$, $1 \le p < q \le m$, то легко сформувати портфель з двох облігацій p та q розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} w_p D_p + w_q D_q = D \\ w_p + w_q = 1 \end{cases}$$

Для вагових коефіцієнтів отримаємо

$$w_p = \frac{D_q - D}{D_q - D_p}, \quad w_q = \frac{D - D_p}{D_q - D_p}. \tag{6.45}$$

4. У момент часу, що дорівнює дюрації портфеля, інвестиції у портфель облігацій захищені (імунізовані) проти зміни процентних ставок спот відразу після часу $t = 0$ на одну і ту ж величину:

$$\forall \tilde{r} > 0 \; V(\tilde{r}, D(r)) \ge V(r, D(r)). \tag{6.46}$$

Ця властивість очевидно випливає з аналогічної властивості для однієї облігації.

6.4.2. Формування імунізованого портфеля облігацій

У 1952 році Френк Реддінгтон (Frank Redington) вперше увів поняття імунізації портфеля облігацій і сформулював умову імунізації: для захисту вартості портфеля від змін ринкової процентної ставки необхідно, щоб дюрація портфеля збігалася з його інвестиційним горизонтом.

Для формування імунізованого портфеля з інвестиційним горизонтом $0 < T \le t_n$ років, необхідно розв’язати систему рівнянь і нерівностей

$$\sum_{j=1}^{m} w_j D_j = T, \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1, \quad w_j \ge 0, j = \overline{1,m}. \tag{6.47}$$

З третьої властивості випливає, що система (6.47) має розв’язок за умови

$$D^- \le T \le D^+. \tag{6.48}$$

В загальному, система рівнянь і нерівностей (6.47) може мати багато розв’язків. Тому є можливість сформулювати деяку задачу оптимізації за обмежень (6.47).

Доцільно розглянути задачу про формування портфеля облігацій з заданою дюрацією і найменшим показником опуклості:

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{j=1}^{m} w_j C_j, \tag{6.49}$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j D_j = T, \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1, \quad w_j \ge 0, \; j = \overline{1,m}. \tag{6.50}$$

За умови (6.48) допустима множина, яка визначається умовами (6.50), є обмеженою, замкненою і не пустою. Тому розв’язок задачі лінійного програмування (6.49)–(6.50) існує.

У момент часу t_1 потрібно переформатувати портфель, оскільки після отримання планових надходжень змінюється загальний грошовий потік та часові параметри, зокрема інвестиційний горизонт становитиме $T - t_1$ років. Отриманий прибуток знову реінвестують в облігації, частина облігацій продають, а частину – купують.

Процедуру переформатування повторюють у наступні моменти часу. Якщо, в деякий момент часу неможливо сформувати портфель з заданою дюрацією (ризик ліквідності), то наявний портфель продають, а отримані кошти реінвестують під діючу процентну ставку до кінця терміну T.

6.4.3. Пасивні стратегії управління портфелем облігацій

За пасивної стратегії управління портфелем облігацій структура портфеля, сформованого в початковий момент часу, залишається незмінною протягом усього терміну існування портфеля незалежно від ситуації на ринку.

Прикладом такої пасивної стратегії є портфель із погодженими грошовими потоками, або цільовий портфель. Згідно з цією стратегією портфель формують так, щоб надходження від нього у фіксовані моменти часу забезпечили потрібні платежі за деякими зобов'язаннями.

Припустимо, інвестор через $t_1,\ldots,t_n$ років від теперішнього моменту часу $t=0$ повинен виплатити грошові суми $S_1,S_2,\ldots,S_n$, відповідно.

На ринку є m видів облігацій, з яких можна сформувати портфель з потоком платежів у моменти $t_1,\ldots,t_n$. Ціни облігацій у момент $t=0$ дорівнюють, відповідно $P_1,\ldots,P_m$. Як і раніше C_i^j – надходження за облігацією j-го виду у момент часу t_i, $i=1,2,\ldots,n$.

Позначимо: x_j – кількість облігацій j-го виду в портфелі, $j=1,\ldots,m$; $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ – вектор, що визначає кількісний склад портфеля.

Задачу знаходження портфеля найменшої вартості, потік платежів від якого достатній для виконання зобов'язань інвестора, формулюють так:

$$\min_{\mathbf{x}}\sum_{j=1}^{m}P_j x_j \tag{6.51}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{m}C_i^j x_j \geq S_i,\ \ i=1,2,\ldots,n\ ; \tag{6.52}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j=1,2,\ldots,m. \tag{6.53}$$

Розв’язком задачі (6.51)–(6.53) є портфель, що дає змогу виконати зобов’язання інвестора і має найменшу вартість. Для такого портфеля немає необхідності реінвестувати платежі, які надходять. Отже, відсутній ризик реінвестування. Крім того, портфель не продають до погашення. Значить, немає процентного ризику.

Недоліком цієї стратегії є складність узгодження потоку надходжень і потоку зобов’язань. Це пояснюється тим, що на ринку існує лише обмежений набір чисто дисконтних облігацій, і для формування потрібного потоку надходжень від портфеля інвестор вимушений придбати купонні облігації. Внаслідок цього у моменти часу $t_1,\ldots,t_n$ від портфеля можуть надходити надлишкові кошти.

Зменшити вартість портфеля дозволяє використання наступного різновиду стратегії цільового портфеля. Надлишкову частину G_i платежу, що надходить від портфеля у момент часу t_i, $i=1,2,\ldots,n-1$, використовують для виконання зобов’язання інвестора у наступний момент часу. Цю суму реінвестують на термін $t_{i+1}-t_i$ років під діючу на момент часу t_i річну форвардну процентну ставку $f_i = f(t_i,t_{i+1})$. Тоді портфель формують відповідно до розв’язку такої задачі лінійного програмування:

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{G}} f(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{m} P_j x_j \tag{6.54}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{m} C_1^j x_j \geq S_1 + G_1 ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_2^j x_j + G_1(1+f_1)^{t_2-t_1} \geq S_2 + G_2 ,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_{n-1}^j x_j + G_{n-2}(1+f_{n-2})^{t_{n-1}-t_{n-2}} \geq S_{n-1} + G_{n-1} ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_n^j x_j + G_{n-1}(1+f_{n-1})^{t_n - t_{n-1}} \ge S_n ,$$
$$G_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1 ,$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, m .$$

Щоб розв'язати цю задачу, потрібно знати форвардні процентні ставки $f(t_i, t_{i+1})$ для інвестицій у момент t_i на термін $t_{i+1} - t_i$ років, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Запитання

1. Що таке облігація?
2. Назвіть основні параметри облігації.
3. Дайте означення внутрішньої дохідності облігації.
4. Що називають кривою дохідності спот?
5. Як розрахувати справедливу вартість облігації на початковий момент часу?
6. Дайте означення дюрації облігації.
7. Що називають показником опуклості облігації?
8. Запишіть формулу для відносного приросту ціни облігації.
9. Що таке дохідність інвестицій в облігацію?
10. Сформулюйте теорему про імунізуючу властивість дюрації облігації.
11. Поясніть, що таке процентний ризик.
12. Сформулюйте властивості дюрації та показника опуклості портфеля облігацій.
13. Сформулюйте імунізуючу властивість дюрації портфеля облігацій.
14. Опишіть алгоритм формування імунізованого портфеля облігацій.
15. Сформулюйте задачу про формування цільового портфеля облігацій.

7. Основи страхування

7.1. Поняття страхування

Система страхування – це механізм для послаблення та зменшення несприятливих фінансових змін, спричинених невизначеністю майбутніх подій.

Сучасне законодавство України [11] дає таке визначення страхування: "Страхування – це вид цивільно-правових відносин щодо захисту майнових інтересів фізичних осіб та юридичних осіб у разі настання певних подій (страхових випадків), визначених договором страхування або чинним законодавством, за рахунок грошових фондів, що формуються шляхом сплати фізичними особами та юридичними особами страхових платежів (страхових внесків, страхових премій) та доходів від розміщення коштів цих фондів".

Страхування класифікують за різними ознаками. За об’єктом страхування розрізняють **майнове страхування** (майно громадян та юридичних осіб), **особисте страхування** (від нещасного випадку, медичне страхування, страхування життя), **страхування відповідальност**і (об’єктом страхування є відповідальність перед третіми особами) та **перестрахування**, де об’єктом страхування є майнові інтереси страховика перед страхувальником.

Страхування за формою може бути **обов’язковим** та **добровільним**.

Закон України "Про страхування" [11] налічує більше двадцяти видів добровільного страхування, зокрема, страхування життя, різні види медичного страхування, страхування наземного та повітряного транспорту, страхування вантажів та багажу, страхування цивільної відповідальності власників транспорту, страхування від пожежі та стихійних лих, страхування кредитів та фінансових ризиків, страхування сільськогосподарської продукції та інші види.

У цьому законі також вказано сорок шість видів обов'язкового страхування. Це, зокрема, медичне страхування, страхування життя та здоров'я різних категорій працівників, особисте страхування від нещасних випадків на транспорті, страхування цивільно-правової відповідальності власників наземного транспорту та інші види страхування.

Страхову діяльність можуть проводити страхові компанії, які мають відповідну ліцензію, або окремі державні організації, визначені законодавством. Їх називають **страховиками**.

Страхувальниками визнають юридичні особи та дієздатні фізичні особи, які уклали зі страховиками договори страхування або є застрахованими відповідно до законодавства України.

Закон "Про страхування" [11] дає чіткі означення головних понять, які виникають у страхуванні.

Страховий випадок – подія, передбачена договором страхування або законодавством, яка відбулася, і з настанням якої виникає обов'язок страховика провести виплату страхової суми (страхового відшкодування) страхувальнику, застрахованій або іншій третій особі.

Страхова сума – грошова сума, в межах якої страховик відповідно до умов страхування зобов'язаний провести виплату при настанні страхового випадку.

Страхова виплата – грошова сума, яку виплачує страховик відповідно до умов договору страхування при настанні страхового випадку.

Страхові виплати за договором страхування життя здійснюються в розмірі страхової суми (її частини) та (або) у вигляді регулярних, послідовних виплат обумовлених у договорі страхування сум (**ануїтету**).

Страхове відшкодування – страхова виплата, яку проводить страховик у межах страхової суми за договорами майнового страхування і страхування відповідальності при настанні страхового випадку.

Франшиза – частина збитків, що не відшкодовується страховиком згідно з договором страхування.

У випадку **безумовної франшизи** від страхового відшкодування завжди віднімають визначений договором розмір франшизи.

За **умовної франшизи**, якщо розмір відшкодування менший від розміру франшизи, то відшкодування не виплачують, інакше – виплачують у повному об’ємі.

Страховий платіж (**страховий внесок**, **страхова премія**) – плата за страхування, яку страхувальник зобов’язаний внести страховику згідно з договором страхування.

Страховий тариф – ставка страхового внеску з одиниці страхової суми за визначений період страхування.

За добровільної форми страхування страховик обчислює страхові тарифи актуарно (математично) на підставі відповідної статистики настання страхових випадків, а за договорами страхування життя – також з урахуванням розміру інвестиційного доходу, який зазначають у договорі страхування. Конкретний розмір страхового тарифу визначають у договорі страхування за згодою сторін.

7.2. Історія страхової справи

Для глибшого розуміння страхування дамо короткий історичний нарис розвитку страхової справи, ґрунтуючись на джерелах [15, 26].

Страхування у формі взаємодопомоги у натуральній формі виникло за тисячі років до нашої ери. Історичні дослідження свідчать про те, що вже у ці часи населення створювало спільні запаси провізії на випадок неврожаю та іншої небезпеки.

У II-I тис. до н. е. взаємне страхування існувало у Месопотамії та Середземномор’ї. Наприклад, закони вавилонського царя Хаммурапі (1792–1750 рр. до н. е.) передбачали укладання угоди між учасниками торгового каравану про те, що збитки, спричинені небезпеками у дорозі, будуть розподілені між усіма учасниками. У галузі мореплавства на берегах Перської затоки, у Фінікії (територія сучасних Сирії, Лівану та Ізраїлю) та Стародавній Греції між купцями укладали угоди про взаємний розподіл збитків від аварії корабля та інших небезпек.

У Стародавньому Римі на початку нашої ери виникло стійке взаємне страхування у вигляді взаємодопомоги членів релігійних спілок, професійних та військових колегій на випадок смерті, хвороби, інших нещасних випадків, шляхом проведення регулярних внесків.

Середньовічне страхування спочатку було дуже схожим за своїм характером до страхування у спілках та колегіях античного світу і пройшло розвиток від взаємодопомоги взагалі – до створення страхових фондів на основі систематичних страхових внесків.

У період середньовіччя у Західній Європі поширилися різні релігійні та політичні об’єднання, корпорації купців, які називали гільдіями, а також ремісничі цехи, що захищали інтереси своїх членів.

Перші гільдії виникли в Англії (X–XI ст.), Німеччині (XI–XII), Данії та Ісландії (ХП). Найбільшого поширення набули гільдії купців (їх різновид – німецькі "ганзи") і цехи ремісників. Гільдії, зокрема, виконували і розвивали таку важливу функцію, як надання взаємодопомоги своїм членам за певних умов – функцію страхування.

Спочатку відшкодування збитків або виплату допомоги проводили з загальної каси поряд з іншими витратами. З часом організація взаємодопомоги переходить до регулярних внесків з обґрунтованим переліком розмірів страхових виплат. Гільдійське взаємне страхування передбачало різні страхові випадки, які стосувалися як особи, так і майна членів гільдії, поділяючи вже у ті часи страхування на особисте і майнове.

Майнове страхування передбачало відшкодування збитків, які виникли внаслідок стихійного лиха (пожежа, повінь, загибель корабля). Особисте страхування в гільдіях передбачало виплату допомоги у випадку смерті, хвороби, інвалідності.

Зростання міст і великих населених пунктів збільшувало небезпеку одночасної загибелі або пошкодження майна від пожеж та інших стихійних лих. В Ісландії у XII ст. жителі об’єднувалися у спілки по 20–25 осіб для взаємного забезпечення і допомоги на випадок пожежі. У 1310 р. у м. Брюге (Бельгія) засновано "Страхову палату", яка проводила операції у справі захисту майнових інтересів.

Історію сучасного страхування починають з XIII ст. і пов’язують з розвитком мореплавства. Перші зразки сучасних страхових угод, виникли у XIV ст. в Італії та Нідерландах. Тоді ж з’явилися перші комерційні страхові компанії у морському страхуванні.

Найдавнішу з відомих історикам угод з морського страхування укладено в Генуї 1347 р. Страхові операції носили характер угоди між страховиком і страхувальником (купцем, господарем судна), відповідно до якої страховик передавав певну суму купцю у вигляді позики з умовою, що він її втрачає, якщо виникне аварія. В іншому випадку купець повертає страховику суму разом з винагородою. У 1468 р. було прийнято Венеціанський кодекс морського страхування.

З другої половини XVI ст. центр страхування перемістився з середземноморського басейну на північно-західне узбережжя, з Італії – до Нідерландів, а в XVII ст. – до Англії. Перехід до ринкових відносин, формування нових торгових ринків, нагромадження капіталу були головними чинниками розвитку страхування в епоху становлення капіталізму.

У 1667 р. у м. Осло засновано Норвезьку "Бранд-касу"; а 1681 р. в Лондоні організовано "Вогняний офіс" для страхування будинків та інших споруд. У 1696 р. створено англійське страхове товариство "Співдружність", яке проіснувало до 1905 р. і було придбане відомою сьогодні лондонською страховою компанією "Комершіал Юніон".

У XVII ст. виникло перше страхове товариство в галузі морського страхування у Франції (1686 р., Париж). Потім страхові товариства з’явилися в інших країнах: в Італії (Генуя – 1741 р.), Данії (1746 р.), Швеції (1750 р.) тощо.

Страхування життя як особливий вид підприємництва з’явилося у Європі на межі XVII-XVIII ст. як доповнення до морського страхування. Разом із страхуванням кораблів і вантажів стали укладати договори страхування життя капітанів кораблів.

Англійський підприємець Джеймс Додсон 1663 р. зібрав дані про поховання на лондонських кладовищах, розрахував середній вік померлих, їх кількість за рік і застосував цю статистику для розрахунку страхових премій. В історії страхування вважають, що саме йому належить роль родоначальника наукового підходу до організації страхування життя.

Першу спеціалізовану страхову компанію зі страхування життя "Товариство гідного життя" створено 1740 р., а 1762 р. з’явилася страхова компанія "Товариство справедливого страхування життя" (англ. Equitable Life Assurance Society). У 1765 р. цю компанію була офіційно зареєстровано як товариство взаємного страхування. **Це товариство існує до сьогодні** [49]!

У той же час широко використовують сільськогосподарське страхування: страхування посівів від градобиття (кінець XVIII ст.) та страхування худоби (перша половина XIX ст.). У Німеччині та Франції виникли перші страхові товариства, які спеціалізувалися на страхуванні сільськогосподарських ризиків.

Страхування від нещасних випадків виникло в середині XIX ст. (1849–1850) в Англії у зв'язку з будівництвом залізниці. З 50-х років XIX ст. воно з'явилося і в Німеччині, а потім – в інших країнах світу.

Поширення машинної техніки суттєво вплинуло на розвиток страхування від нещасних випадків (виникло у Франції 1825 р.) та страхування цивільної відповідальності (Німеччина, 70-ті роки XIX ст.).

З кінця XVII ст. Англія стала піонером у розвитку нових видів комерційного страхування: страхування від вогню, страхування життя.

Авторитетне місце в історії страхових відносин посіла корпорація Ллойда. Її історія пов'язана з іменем Едварда Ллойда – власника кав'ярні відкритої ним у 1688 р. поблизу лондонського порту. Цю кав'ярню відвідували моряки, купці, судновласники і суднобудівники, щоб обмінятися новинами, отримати інформацію про місцезнаходження тих чи інших торгових суден, про умови плавання, лоції окремих акваторій, про аварії суден, ринкову кон'юнктуру, про ціни на товари у портах світу. Едвард Ллойд почав фіксувати інформацію, а потім вивішувати на стінах своєї кав'ярні усі отримані ним відомості. З роками стінні газети перетворилися на щоденний друкований орган "Ллойдс ліст" ("Lloyd's list").

Кав'ярня Ллойда поступово перетворювалася на морський клуб, де укладали різноманітні торгові угоди, угоди взаємного страхування, проходило фрахтування суден. 13 грудня 1771 р. 79 купців уклали угоду щодо надання Ллойду організаційної форми приватної корпорації, якою керував Комітет. За рішенням Парламенту Англії 1871 р. ця корпорація отримала юридичний статус корпорації морського страхування, а з 1911 р. – дозвіл на усі види страхування.

Сучасний Ллойд не є страховою компанією у звичайному розумінні цього слова, а є свого роду страховою біржею, на якій зустрічаються члени корпорації Ллойд. Сама корпорація не бере на себе відповідальність за договорами страхування, надаючи це членам синдикатів Ллойда.

Загалом налічується близько 28 тис. осіб – членів Ллойд, з них 5 тис. займаються страховим бізнесом. Інші члени у практичній стороні страхової справи участі не беруть. Від їхнього імені діють агенти, що проводять розміщення ризиків у синдикатах. Клієнти-страхувальники не можуть укладати договори безпосередньо з синдикатами, а лише через сертифікованих брокерів "Ллойда". Брокери намагаються знайти для клієнтів найкращі умови серед синдикатів корпорації.

У XIX ст. конкурентом Англії у сфері страхування стала Німеччина. У першій половині XX ст. поряд з Англією та Німеччиною виник новий світовий центр розвитку страхової справи – США.

У кінці XX – на початку XXI ст. утворилося три найрозвинутіші страхові регіони: Європа, Північна Америка та Азія.

В Україну класичне страхування прийшло із Західної Європи ще у XVIII ст. з виникненням філій англійських страхових компаній. У 1857 р. в Одесі створено Російське товариство пароплавства і торгівлі, розмір страхового капіталу якого становив 1 млн руб.

У містах діяли товариства взаємного страхування від вогню. Одне з таких товариств утворено в Полтаві 1863 р. Згодом такі самі товариства з'явилися в Києві, Одесі та Харкові. Їхня діяльність обмежувалася територією відповідного міста. Ці товариства обслуговували ризики здебільшого великих домовласників, купців і фабрикантів.

У другій половині XIX ст. спектр страхових послуг був досить широким, проте найпопулярнішим й надалі залишалося страхування від вогню. Страхові товариства приймали заяви на страхування будівель, тварин, меблів, вантажів. Набуло поширення страхування життя.

Перші українські страхові організації на землях Західної України виникли після прийняття австрійським урядом законів про товариства (1867) та про кооперативні спілки (1873). У 1891 р. у Львові відкрито "Дністер" – акціонерне товариство взаємного страхування від вогню (будівель, нерухомого майна, зернових культур). Організаторами створення товариства були українська інтелігенція, греко-католицьке духовенство, представники міщан та селян.

Першим президентом "Дністра" став доктор Теофілій Бережницький, а директором – доктор Ярослав Кулачківський, почесним президентом було обрано Львівського митрополита Сильвестра Сембратовича, а після його смерті, з 1901 р., – митрополита Андрея Шептицького.

У 1895 р. при Товаристві взаємного страхування засновано Товариство взаємного кредиту з обмеженою відповідальністю, яке 1929 р. перетворено на самостійний банк "Дністер".

У 1903 р. фонди "Дністра" уже перевищували мільйон крон. У 1907 р. "Дністер" проводив активну діяльність у 57 повітах Галичини і у 8 повітах Буковини. Воно застрахувало 187639 житлових будинків, 334850 господарських будівель, 2765 церков та 1753 парафіяльні будинки.

З 1909 р. керівництво "Дністра" очолив відомий громадський діяч, юрист і підприємець Стефан Федак.

Товариство взаємного страхування життя і пенсій "Карпатія" засноване 1911 р. у м. Чернівці. Президентом товариства обрали професора Стефана Смаль-Стоцького, а його заступниками – Теофілія Дембіцького, президента Земельного іпотечного банку зі Львова, та Костянтина Клима, полкового лікаря й водночас куратора буковинського крайового банку.

Восени 1913 р. центральні органи товариства перенесено з Чернівців до Львова – найбільшого господарського центру східного регіону Австро-Угорської імперії.

За часів Радянського Союзу страхування було державною монополією, яку очолював Держстрах СРСР. За відсутності конкуренції та нормальних ринкових відносин воно розвивалося нерівномірно, з відставанням від західних країн.

Після отримання незалежності в Україні було скасовано державну монополію у сфері страхування. Виникли нові страхові компанії, почав формуватися страховий ринок, який поступово стає невід’ємною складовою нового господарського механізму.

Загальна кількість страхових компаній України станом на 31.12.2014 становила 382, у тім числі компаній, які займаються страхуванням життя, – 57, та іншими видами страхування – 325. За 2014 рік частка валових страхових премій становила 1,7 % від валового внутрішнього продукту

(ВВП) [33]. Цей сектор економіки має значний потенціал, оскільки у світі частка страхових премій становить в середньому 6–7 % ВВП, а в розвинутих країнах – понад 10 % [50].

7.3. Актуарна математика. Актуарій

Математичні моделі та методи, які використовують у страховій справі, вивчає **актуарна математика** (actuarial mathematics). Це насамперед економіко-математичні моделі розрахунку страхових премій, запасів та страхових резервів, динаміки фінансового стану страхових компаній.

Разом з відповідними економічними і юридичними дисциплінами актуарна математика утворює ширшу галузь знань – актуарну науку (actuarial science), яка є теоретичною основою страхового бізнесу.

Актуарій (від лат. actuarius – реєстратор громадянських актів, писар, секретар, діловод) – спеціаліст з оцінки ризиків, фінансовий аналітик і консультант у сфері страхування, людина, яка застосовує на практиці актуарну математику. Офіційно вповноважена особа, яка має відповідну фахову підготовку та обчислює страхові тарифи. На актуарія покладена відповідальність за те, щоб страхові фонди були достатніми на той момент, коли страховику доведеться виконувати свої зобов’язання за договорами страхування.

Науковий підхід до актуарних розрахунків започатковано у XVII ст.

У 1662 р. опубліковане дослідження англійського вченого Джона Граунта "Природні і політичні спостереження, зроблені над бюлетенями смертності" (англ. "Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality"). Він перший обробив дані про смертність людей і побудував таблиці смертності.

Майже одночасно з Д. Граунтом питання залежності страхування життя від смертності людей досліджував голландський вчений Ян де Вітт, який залишив нам працю про тарифи зі страхування довічної ренти.

Подальший розвиток теорія актуарних розрахунків отримала в працях англійського астронома і геофізика Едмонда Галлея (1693), який дав визначення головних функцій таблиць смертності, вирахував ймовірність дожиття і смерті, тарифи зі страхування ренти, ввів поняття середньої тривалості життя [2]. Запропоновану Е. Галлеєм форму таблиці смертності застосовують досі. На розроблену ним методику спираються сучасні прийоми розрахунку тарифів зі страхування життя і пенсій.

Математик Абрахам де Муавр спростив актуарні розрахунки. У XVIII ст. видатні математики того часу – Л. Ейлер, С. Лакруа, Н. Фусс, В. Керсебум, А. Депарсьє – розробляли теорію актуарних розрахунків.

Вікові традиції має також актуарна освіта. Першими професійними організаціями актуаріїв були інститут актуаріїв у Лондоні (1848) та факультет актуаріїв в Единбурзі (1856). Ці інституції створили Британську систему підготовки і сертифікації актуаріїв, яка, з невеликими варіаціями, функціонує у більшості англомовних країн, у тім числі США та Австралії.

В Україні кваліфікаційні вимоги до сертифікації актуаріїв, порядок видання свідоцтва на право займатися актуарними розрахунками та посвідчувати їх визначені розпорядженням Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг України "Про затвердження Кваліфікаційних вимог до осіб, які можуть займатися актуарними розрахунками" від 08.02.2005 № 3519.

Відповідно до цих вимог, особа, яка претендує на право займатися актуарними розрахунками та посвідчувати їх, повинна мати:

а) вищу освіту за математичним, технічним або економічним напрямом;

б) досвід роботи з виконання актуарних розрахунків у межах території України не менший, ніж три роки;

в) документи про успішне складання професійних екзаменів, передбачених американською або/та британською екзаменаційними системами;

г) кваліфікаційне свідоцтво, видане відповідно до Положення Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг України від 25.12.2003 № 183.

Детальну інформацію про складання кваліфікаційних іспитів можна знайти на сайтах Товариства актуаріїв України [35] та Навчального центру для актуаріїв і фінансових аналітиків, який створений у Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка [30].

Запитання

1. Дайте означення страхування відповідно до законодавства України.
2. Як класифікують страхування за об’єктами страхування?
3. Кого називають страховиком, а кого – страхувальником?
4. Що таке страховий випадок?
5. Як відрізняються поняття страхова сума та страхова виплата?
6. Що таке франшиза, її види?
7. Назвіть синоніми терміну страховий платіж.
8. Що таке страховий тариф?
9. Що вивчає актуарна математика?
10. Назвіть вимоги до осіб, які мають право займатися актуарними розрахунками в Україні.

8. Моделювання страхових виплат

Актуарна математика є складною багатогранною наукою, яка охоплює математичні моделі та методи актуарної науки і ґрунтується на сучасних досягненнях теорії ймовірностей і математичної статистики та інших математичних дисциплін.

Виділимо аспекти, важливі для класифікації моделей актуарної математики.

Окремою галуззю страхової науки є особисте страхування. Під особистим страхуванням (life insurance) розуміють страхування життя, здоров'я, пенсій. Майнове страхуванням (non-life insurance) охоплює усі види страхової діяльності, не пов'язані з особистим страхуванням (страхування житла, автомобілів, підприємств, банківських капіталів тощо). Актуарні розрахунки з особистого страхування будуються на надійних природних статистичних даних, тому його ще називають "безризиковим" страхуванням. На противагу йому, невизначеність, пов'язана з іншими видами страхування, менш точно піддається стохастичному моделюванню, тому ці види страхування називають "ризиковим" страхуванням.

Основою актуарних розрахунків є ймовірнісна модель можливих виплат компанії. Нехай S – випадкова величина (в. в.) виплат компанії з деякої частини її ризиків (окремому страховому продукту на заданому інтервалі часу тощо). У **моделі індивідуальних ризиків** (individual risk model) цю величину визначають, як суму виплат для окремих об'єктів страхування. Якщо не брати до уваги вартість грошей у часі, вона запишеться так:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \tag{8.1}$$

де X_k – в. в. виплат для k-го об'єкта страхування.

Зазвичай припускають, що випадкові величини X_k є незалежними, а число об'єктів страхування n – наперед відоме.

У **моделі колективних ризиків** (collective risk model) сумарні виплати розглядають для портфеля загалом. У виразі для суми страхових виплат величини окремих страхових виплат та їхня кількість є випадковими величинами.

Далі зупинимось лише на найпростіших моделях індивідуальних ризиків на короткому інтервалі часу, без урахування вартості грошей у часі, використовуючи праці [2, 3, 18, 19, 21, 22, 25, 26].

8.1. Стохастичне моделювання індивідуальних виплат за страховим полісом

У моделі індивідуальних ризиків в. в. виплат компанії S за окремим страховим продуктом визначають за формулою (8.1), як суму індивідуальних виплат X_k, $k=1,2,\dots,n$ для окремих об'єктів страхування. Для опису цієї величини, насамперед, потрібно дати стохастичну модель індивідуальних виплат.

Розглянемо найпростішу угоду короткотермінового страхування. Страхувальник платить страховій компанії (страховику) суму p одиниць, яку називають страховою премією (premium). Страхова компанія, у разі настання страхового випадку протягом року (подія *A*), зобов'язується виплатити застрахованій особі чи її спадкоємцям страхову суму, яка описується в. в. B (benefit). Страховик не проводить ніяких виплат, якщо страховий випадок не настане.

Припустимо, що відома ймовірність настання страхового випадку, яку позначимо q. Тоді виплати страхової компанії за окремим полісом можна записати так

$$X = I_A B, \tag{8.2}$$

де I_A – індикатор страхового випадку – бернулівська в. в., яка дорівнює "1" з ймовірністю q та "0" – з ймовірністю $1-q$

$$I_A : P\{I_A = 1\} = q,\ P\{I_A = 0\} = 1-q\ . \tag{8.3}$$

Для визначення функції розподілу в. в. X можна скористатися загальними результатами про розподіл добутку двох випадкових величин. Однак цю функцію простіше отримати у формі ймовірнісної суміші розподілів [5].

Нехай в. в. X отримується у результаті досліду, про який можна зробити m взаємовиключних гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_m$: $P(H_i) = p_i$, $i = 1,2,\ldots,m$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Якщо має місце гіпотеза H_i, функція розподілу випадкової величини X дорівнює $F_i(x)$. Потрібно знайти повну функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X з урахуванням випадковості її закону розподілу.

Згідно з означенням, $F(x) = P\{X < x\}$. Знайдемо цю ймовірність за формулою повної ймовірності

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} P(H_i) P\{X < x | H_i\} = \sum_{i=1}^{m} P(H_i) F_i(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i F_i(x). \quad (8.4)$$

Якщо випадкова величина X абсолютно неперервна, то, диференціюючи (8.4), отримаємо її густину

$$f(x) = F'(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i f_i(x). \quad (8.5)$$

Легко переконатись, що функції (8.4) та (8.5) володіють властивостями функцій розподілу і густини. Утворені таким способом розподіли називають ймовірнісною сумішшю розподілів.

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію в. в. X. За формулою повного математичного сподівання отримаємо

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i m_i, \quad (8.6)$$

де $m_i = M(X | H_i)$ – умовне математичне сподівання випадкової величини X за умови, що має місце гіпотеза H_i.

Для другого початкового моменту аналогічно знайдемо

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{m} p_i M(X^2|H_i) \ . \qquad (8.7)$$

Дисперсію випадкової величини X обчислюємо за формулою

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2. \qquad (8.8)$$

Застосуємо отримані результати для розрахунку характеристик виплат страхової компанії за окремим полісом (8.2). У цьому випадку є дві взаємовиключні гіпотези: $H_1=\{I_A=1\}$ – з ймовірністю $p_1=q$ та $H_2=\{I_A=0\}$ – з ймовірністю $p_2=1-q$. Відповідні функції розподілу мають вигляд

$$F_1(x)=F_B(x), \ F_2(x)=U_+(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ 1, \ x>0 \end{cases}, \qquad (8.9)$$

де $F_B(x)$ – функція розподілу страхових виплат у випадку настання страхового випадку; $U_+(x)$ – права асиметрична функція Гевісайда [20].

Тому для функції розподілу страхових виплат X отримаємо

$$F(x)=qF_B(x)+(1-q)U_+(x). \qquad (8.10)$$

Припустимо, що математичне сподівання в. в. B дорівнює μ, а дисперсія – σ^2: $M(B)=\mu$, $D(B)=\sigma^2$. Тоді за формулами (8.6)–(8.8) знайдемо характеристики випадкової величини X :

$$M(X)=q\mu, \ D(X)=q(1-q)\mu^2+q\sigma^2. \qquad (8.11)$$

Простішим є випадок, коли в. в. B є дискретно розподіленою випадковою величиною

$$B: P\{B=b_i\}=p_i \, , \, i=1,2,\ldots,m; \ \sum_{i=1}^{m} p_i=1. \qquad (8.12)$$

Тоді в. в. X буде також дискретно-розподіленою в. в.

$$X: P\{X=0\}=(1-q), \ P\{X=b_i\}=qp_i, i=1,2,\ldots,m \ . \qquad (8.13)$$

Математичне сподівання та дисперсія у цьому випадку становлять:

$$M(X)=q\sum_{i=1}^{m}p_i b_i=qM(B)=q\mu, \qquad (8.14)$$

$$M(X^2)=q\sum_{i=1}^{m}p_i b_i^2=qM(B^2)=q\Big(D(B)+M^2(B)\Big)=q(\sigma^2+\mu^2), \qquad (8.15)$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=q(1-q)\mu^2+q\sigma^2. \qquad (8.16)$$

Отримані вирази повністю відповідають (8.11).

У найпростішому випадку, коли страхові виплати за умови настання страхового випадку є сталими і дорівнюють b, отримаємо:

$$X: P\{X=0\}=1-q,\ P\{X=b\}=q\ , \qquad (8.17)$$

$$M(X)=qb;\ \ D(X)=q(1-q)b^2. \qquad (8.18)$$

Приклад 8.1. Страхування автомобілів

Розглянемо річну угоду страхування автомобіля. Страхову суму позначимо w, розмір безумовної франшизи – f. Тоді залежність розміру відшкодування b від розміру пошкоджень d має вигляд

$$b=\begin{cases}0,\ d\le f\\ d-f,\ f<d\le w\\ w-f,\ w<d\end{cases}. \qquad (8.19)$$

Отож, страхові виплати не перевищать величини $b_1=w-f$.

Розглянемо випадкову величину виплат B за настання страхового випадку. Функцію розподілу цієї в. в. можна вважати кусково-неперервною функцією, з розривом у точці b_1 величиною p_1. Для конкретизації візьмемо її у такому вигляді

$$F_B(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ (1-p_1)\left(1-\left(1-\dfrac{x}{b_1}\right)^2\right),\ 0<x\le b_1\\ 1,\ x>b_1\end{cases}. \qquad (8.20)$$

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію цієї в. в.:

$$M(B) = p_1 b_1 + \int_0^{b_1} x dF_B(x) = \frac{1}{3}(1+2p_1)b_1, \tag{8.21}$$

$$D(B) = M(B^2) - M^2(B) = \frac{4}{9}(1-p_1)\left(\frac{1}{8}+p_1\right)b_1^2. \tag{8.22}$$

Функцію розподілу загальної в. в. виплат X знайдемо за формулою (8.10). Вона матиме два розриви при $x=0$ та при $x=b_1$ величиною відповідно $1-q$ та qp_1:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ 1-q+q(1-p_1)\left(1-\left(1-\dfrac{x}{b_1}\right)^2\right), \ 0 < x \le b_1 \\ 1, \ x > b_1 \end{cases}. \tag{8.23}$$

Обчислити характеристики в. в. X можна безпосередньо, однак простіше скористатися формулами (8.11).

Проведемо обчислення для таких параметрів: $q = 0{,}15$, $b_1 = 2000$, $p_1 = 0{,}1$. З (8.21), (8.22), (8.11) знайдемо: $M(B)=800$, $D(B)=360000$, $M(X)=120$, $D(X)=135600$.

8.2. Нормальне наближення сумарних страхових виплат компанії

Перейдемо до моделювання в. в. сумарних виплат компанії з деякого страхового продукту. У моделях індивідуальних ризиків на короткому інтервалі часу цю величину визначають, як суму виплат для окремих об’єктів страхування (8.1)

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ . \tag{8.24}$$

За припущення про незалежність окремих страхових позовів її математичне сподівання та дисперсія дорівнюють:

$$M(S)=\sum_{i=1}^{n} M(X_i)=\sum_{i=1}^{n} \mu_i \ , \tag{8.25}$$

$$D(S)=\sigma^2(S)=\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} D_i=\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \ . \tag{8.26}$$

Згідно з центральною граничною теоремою у формі Ляпунова [17], якщо доданки у сумі (8.24) мають однаковий масштаб, при великих n її розподіл буде близьким до нормального:

$$\frac{S-M(S)}{\sigma(S)} \underset{n\to\infty}{\sim} N(0;1).$$

Тому можна записати наближену рівність для функції розподілу в. в. страхових виплат

$$F_S(u)=P\{S<u\}\approx N\left(\frac{u-M(S)}{\sigma(S)}\right), \tag{8.27}$$

де $N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу.

Запишемо формулу для квантиля рівня α функції розподілу в. в. виплат. Скористаємося рівнянням

$$F_S(u_\alpha)=N\left(\frac{u_\alpha-M(S)}{\sigma(S)}\right)=\alpha ,$$

тоді отримаємо

$$u_\alpha = M(S)+N^{-1}(\alpha)\sigma(S). \tag{8.28}$$

Квантилі стандартного нормального розподілу позначають $x_\alpha = N^{-1}(\alpha)$. Найуживаніші з них наближено дорівнюють: $x_{0,9}\approx 1,281552$, $x_{0,95}\approx 1,644854$, $x_{0,99}\approx 2,326348$.

Приклад 8.2. Страхові виплати для групи однотипних найпростіших страхових контрактів

Страхова компанія планує залучити 2500 однорічних контрактів певного виду зі страховою платою 10000 грн та ймовірністю настання страхового випадку $q = 0{,}02$.

Обчисліть математичне сподівання та стандартне відхилення сумарних страхових витрат за страховими позовами.

Розв'язування

Відповідно до прийнятих позначень: $n = 2500$, $b = 10000$, $q = 0{,}02$. Знаходимо характеристики в. в. страхових виплат за окремим позовом X:

$$M(X) = bq = 200,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = b^2 q(1-q) = 196 \cdot 10^4,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1400.$$

Тоді математичне сподівання та стандартне відхилення сумарних страхових виплат будуть такими:

$$M(S) = nM(\xi) = 5 \cdot 10^5, \ \sigma(S) = \sqrt{n}\,\sigma(X) = 7 \cdot 10^4.$$

Приклад 8.3. Страхові виплати для групи однотипних страхових контрактів страхування життя

Страхова компанія заключила 10000 договорів страхування життя терміном на рік на таких умовах: у випадку смерті протягом року від нещасного випадку розмір страхової виплати становить 1 млн грн, а у випадку природної смерті розмір страхової виплати дорівнює 0,25 млн грн. Ймовірність смерті дорівнює 0,005, у 90 % випадків смерть настає з природних причин, а в 10 % – від нещасного випадку.

Знайдіть математичне сподівання та стандартне відхилення сумарних страхових витрат за страховими позовами.

Розв'язування

Початкові дані: $n = 10000$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0{,}25$, $q = 0{,}005$, $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}9$.

Виплати за окремим страховим позовом описує така дискретно розподілена в. в.

$$X : P\{X = 0\} = 1 - q, \ P\{X = b_1\} = q_1 = qp_1, \ P\{X = b_2\} = q_2 = qp_2.$$

Послідовно знаходимо:

$q_1 = qp_1 = 0{,}0005$, $q_2 = qp_2 = 0{,}0045$,

$M(X) = b_1 q_1 + b_2 q_2 =$ 0,001625,

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = b_1^2 q_1 + b_2^2 q_2 - M^2(X) =$ 0,000778611,

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} =$ 0,0279036.

Далі отримаємо характеристики сумарної величини позовів:

$$M(S) = N \cdot M(X) = 16{,}25, \ \sigma(S) = \sqrt{N}\sigma(X) = 2{,}790357.$$

Запитання

1. Чому особисте страхування ще називають "безризиковим" страхуванням?
2. Як моделюють сумарні страхові виплати у моделі індивідуального ризику на короткому інтервалі часу?
3. Сформулюйте найпростішу угоду короткотермінового страхування.
4. Що таке ймовірнісна суміш розподілів?
5. Що таке права асиметрична функція Гевісайда?
6. Опишіть функцію розподілу в. в. виплат за індивідуальним позовом, коли випадкова величина виплат за настання страхового випадку є неперервно розподіленою в. в.
7. Опишіть функцію розподілу виплат за індивідуальним позовом, коли випадкова величина виплат за настання страхового випадку є дискретно розподіленою.
8. Опишіть функцію розподілу виплат за індивідуальним позовом, коли випадкова величина виплат за настання страхового випадку є сталою.
9. Опишіть угоду страхування автомобіля з безумовною франшизою.
10. Опишіть найпростішу угоду страхування життя.
11. Побудуйте і поясніть графік функції розподілу в. в. виплат за настання страхового випадку в автострахуванні (8.20).
12. Побудуйте і поясніть графік функції розподілу безумовної в. в. виплат в автострахуванні (8.23).
13. Як обчислюють квантиль для випадку нормально розподіленої випадкової величини?

9. Розрахунок страхових премій

Одною з головних математичних задач актуарних розрахунків є питання про розмір страхової премії (страхового тарифу). Малий розмір премій є привабливим для страхувальника, однак він може бути недостатнім для виконання страховиком своїх зобов'язань.

Визначальним є принцип еквівалентності відповідальності страхувальника та страховика. Він полягає у тому, що страхова премія має бути в певному сенсі адекватна майбутнім страховим відшкодуванням.

Насамперед, уточнимо значення деяких термінів [11, 19, 21]. Терміни "страховий платіж", "страховий внесок" та "страхова премія" визначають плату за послугу страхування і тотожні терміну "брутто-премія". "Чиста нетто-премія" забезпечує еквівалентність зобов'язань сторін, її визначають як математичне сподівання величини страхових виплат за окремою страховою угодою. "Надбавка надійності", "ризикова надбавка" або "стабілізаційна надбавка" зменшує ризик страховика щодо проведення страхових виплат. Разом з "чистою нетто-премією" вони складають "нетто-премію" або "повну нетто-премію". "Навантаження" враховує видатки страховика на ведення бізнесу, прибуток тощо. "Брутто-премія" дорівнює "повній нетто-премії" плюс "навантаження".

Термін "премія" будемо використовувати як узагальнений для усіх видів премій, коли з контексту зрозуміло, про який вид премії ідеться. Оцінка навантаження, а отже, і брутто-премії є дуже конкретною, її у посібнику не розглядатимемо. Величину повної нетто-премії позначатимемо малою латинською літерою p, чисту нетто-премію – цією літерою з індексом нуль p_0, а сумарну премію для полісів деякої категорії – великою латинською літерою P.

9.1. Принципи визначення страхових премій

Випадкова величина страхових виплат S (ризик страховика) містить такі випадкові чинники, як сам факт виплати, розмір виплати та момент виплати. Страхову премію визначають як деякий функціонал від випадкової величини виплат S та багатьох інших параметрів.

Опишемо деякі поширені принципи, пов'язані з визначенням страхових премій.

1. Чиста нетто-премія

Так називають премію, яку визначають як математичне сподівання випадкової величини страхових виплат за окремим полісом

$$p_{0i} = M(X_i),\ i = 1,2,\ldots n. \tag{9.1}$$

Цей принцип певною мірою відповідає принципу еквівалентності зобов'язань страхувальника і страховика.

2. Принцип пропорційного збільшення

Повну нетто-премію визначають за правилом

$$p_i = (1+\theta)M(X_i),\ i = 1,2,\ldots n, \tag{9.2}$$

де $\theta > 0$ – деяка стала, яку називають **відносною ризиковою надбавкою, або відносною надбавкою надійності**.

3. Квантильний принцип

Квантилем рівня $0 < \alpha < 1$ в. в. сумарних виплат S (α-процентилем, якщо α вимірюють у процентах) називають величину [17]

$$s_\alpha = \sup\{x | F_S(x) \le \alpha\}, \tag{9.3}$$

де $F_S(x)$ – інтегральна функція розподілу в. в. S.

Коли $F_S(x)$ – неперервна та монотонно зростаюча, тоді

$$s_\alpha = F_S^{-1}(\alpha). \tag{9.4}$$

Згідно з квантильним принципом, надбавку надійності визначають з умови рівності сумарної нетто-премії квантилю випадкової величини сумарних страхових виплат:

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i = s_\alpha(S). \qquad (9.5)$$

Такий вибір гарантує виконання страховиком страхових зобов'язань з ймовірністю α.

4. Принцип Чебишова

Якщо $D(S) < +\infty$, то виконується нерівність Чебишова [17]:

$$\forall z > 0 \; P\left\{\left|S - M(S)\right| \geq z\right\} \leq \frac{D(S)}{z^2}. \qquad (9.6)$$

При $z = k\sigma$ з цієї нерівності отримаємо

$$P\left\{S \leq M(S) + k\sigma(S)\right\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}. \qquad (9.7)$$

Остання нерівність показує, що з надійністю $1 - 1/k^2$ сумарна величина страхових виплат не перевищить величини $M(S) + k\sigma(S)$. Тому відносну надбавку надійності можна визначати з умови

$$P = M(S) + k\sigma(S), \qquad (9.8)$$

де P – сумарна нетто-премія; $k > 0$ – деяка стала.

Принцип Чебишова близький до квантильного. За будь-якого розподілу в. в. страхових виплат зі скінченною дисперсією він гарантує страхові виплати з надійністю $1 - 1/k^2$. Якщо ж в. в. виплат S має нормальний розподіл, як бачимо з (8.28), він збігається з квантильним, і має місце зв'язок

$$k = N^{-1}(\alpha), \qquad (9.9)$$

де $N(x)$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу.

Зауважимо, що величини у правих частинах рівностей (9.1), (9.3) та (9.8), по суті, є вартісними мірами ризику для окремої страхової угоди або групи страхових угод [45].

9.2. Розрахунок нетто-премій для моделі індивідуальних ризиків на короткому інтервалі часу

Припустимо, що компанія планує продати n страхових полісів короткотермінового страхування, умови і позначення для яких описано у п. 8.1.

Чисту нетто-премію для i-го полісу будемо визначати відповідно до принципу (9.1) як математичне сподівання виплат компанії за цим полісом

$$p_{0i} = M(X_i),\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{9.10}$$

Будемо виходити з припущення про нормальний розподіл сумарних виплат компанії. Для визначення повної нетто-премії скористаємося принципами пропорційного збільшення чистої нетто-премії (9.2) та забезпечення сумарних страхових виплат із заданою ймовірністю α (9.5).

Подамо нетто-премію для страхової угоди з номером i у вигляді

$$p_i = (1+\theta)M(X_i), \tag{9.11}$$

де $M(X_i) = m_i = p_{0i}$ – чиста нетто-премія; θ – відносна надбавка надійності; $\theta M(X_i)$ – надбавка надійності. У цьому випадку сумарний нетто-дохід страхової компанії буде дорівнювати

$$P = \sum_{i=1}^{N} p_i = (1+\theta)M(S) = (1+\theta)\sum_{i=1}^{N} M(X_i). \tag{9.12}$$

Використовуючи припущення про нормальний розподіл сумарних страхових виплат, за формулами (9.5) та (8.28) отримаємо таке рівняння для визначення величини θ:

$$M(S) + x_\alpha \sigma(S) = (1+\theta)M(S).$$

З нього знаходимо

$$\theta_\alpha = x_\alpha \frac{\sigma(S)}{M(S)}. \tag{9.13}$$

Розглянемо типові приклади розрахунку нетто-премій.

Приклад 9.1. Розрахунок премій для групи однотипних найпростіших страхових контрактів

Страхова компанія планує залучити 2500 однорічних контрактів зі страховою платою 10000 грн на індивідуальне страхування життя певної категорії людей з ймовірністю смерті $q = 0{,}02$.

Обчисліть чисту нетто-премію, надбавку надійності та нетто-премію, виходячи з умови забезпечення виплат за страховими позовами з надійністю 95 %.

Розв'язування

Відповідно до прийнятих позначень: $n = 2500$, $b = 10000$, $q = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}95$. Відповідний квантиль для функції стандартного нормального розподілу дорівнює $x_{0,95} \approx 1{,}644854$.

Випадкова величина виплат за окремим позовом описується так: $X : P\{X = 0\} = 1 - q, P\{X = b\} = q$.

Знаходимо характеристики в. в. X:

$M(X) = bq = 200$,

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = b^2 q(1-q) = 1960000$,

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1400$.

Тоді математичне сподівання та стандартне відхилення сумарних страхових виплат будуть такими:

$M(S) = n \cdot M(X) = 500000$, $\sigma(S) = \sqrt{n}\sigma(X) = 70000$.

Надбавку надійності знаходимо з (9.13): $\theta = 0{,}230280$. Шукані премії одержимо за формулами (9.10) та (9.11): $p_0 = 200$ [грн], $p = 246$ [грн].

Приклад 9.2. Розрахунок премій для групи страхових контрактів різного типу

Страхова компанія випускає однорічні страхові поліси на страхування життя з винагородою 1, 2, 3 одиниць для окремих осіб з ймовірністю смерті, відповідно, 0,03 (60 років), 0,02 (50 років), 0,01 (40 років). Заплановано продати страхових полісів кожного виду відповідно 4000, 800 та 500 одиниць.

Виходячи з умови забезпечення виплат за страховими позовами з надійністю 95 % обчисліть відносну надбавку надійності та нетто-ціну страхового полісу кожного виду.

Розв'язування

Відповідно до прийнятих позначень $n_1 = 4000$, $n_2 = 800$, $n_3 = 500$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $q_1 = 0{,}03$, $q_2 = 0{,}02$ $q_3 = 0{,}015$, $x_\alpha = 1{,}644854$.

Знаходимо математичне сподівання та дисперсію страхових виплат за полісами кожного виду за формулами:

$$M(X_i) = b_i q_i;\ D(X_i) = M(X_i{}^2) - M^2(X_i) = b_i{}^2 q_i(1 - q_i).$$

Припустимо, що усі страхові випадки – незалежні, тоді

$$M(S) = n_1 \cdot M(X_1) + n_2 \cdot M(X_2) + n_3 \cdot M(X_3),$$

$$D(S) = n_1 \cdot D(X_1) + n_2 \cdot D(X_2) + n_3 \cdot D(X_3),$$

$$\sigma(S) = \sqrt{D(S)}.$$

Далі, за формулами (9.10), (9.13), (9.11), отримаємо:

$p_{01} = 0{,}03$, $p_{02} = 0{,}04$, $p_{03} = 0{,}045$, $\theta = 0{,}147725$,

$p_1 = 0{,}034432$, $p_2 = 0{,}045909$, $p_3 = 0{,}051648$.

Приклад 9.3. Розрахунок премій для групи однотипних контрактів страхування життя

Страхова компанія заключила 10000 договорів страхування життя терміном на рік, на таких умовах: у випадку смерті протягом року від нещасного випадку розмір страхової виплати становить 1 млн грн, а у випадку природної смерті розмір страхової виплати дорівнює 0,25 млн грн. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0,0005, а з природних причин – 0,003.

Підрахуйте величину нетто-премії, яка забезпечить виплати за страховими позовами з ймовірністю 0,99.

Розв'язування

Вихідні дані: $n = 10000$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0{,}25$, $q_1 = 0{,}0005$, $q_2 = 0{,}003$, $x_{0{,}99} = 2{,}326348$.

Знаходимо характеристики випадкової величини виплат за окремим полісом:

$$M(X) = b_1 q_1 + b_2 q_2 = 0{,}001250,$$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = b_1^2 q_1 + b_2^2 q_2 - M^2(X)$ = 0,000685938,

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ = 0,02619041.

Далі знаходимо характеристики сумарної величини позовів:

$M(S) = nM(X) = 12{,}5$, $\sigma(S) = \sqrt{n}\sigma(\xi) = 2{,}619041$.

З (9.14) обчислимо надбавку надійності $\theta = 0{,}487424$, а за формулами (9.11) та (9.12) одержимо: $p_0 = 1250$ [грн], $p = 1859$ [грн].

9.3. Ймовірність збитковості страхового продукту

На основі нормального наближення функції розподілу страхових виплат легко обчислити низку характеристик деякого страхового продукту.

Нехай P – сумарна нетто-премія компанії від продажу полісів. Ймовірність того, що величина страхових виплат компанії перевищить сумарну нетто-премію дорівнює

$$P_d = P\{S > P\} = 1 - P\{S \le P\} = 1 - F_S(P) = 1 - N\left(\frac{P - M(S)}{\sigma(S)}\right). \quad (9.14)$$

З іншого боку, страхові відшкодування компанії з ймовірністю α не перевищать величини відповідного квантиля s_α. Тому з (9.5) отримаємо

$$s_\alpha = M(S) + N^{-1}(\alpha)\sigma(S). \quad (9.15)$$

Отже, позаплановий прибуток компанії (основний прибуток включено у навантаження) з надійністю α дорівнюватиме

$$v_\alpha = P - s_\alpha. \quad (9.16)$$

Наведемо кілька прикладів розрахунку розглянутих величин.

Приклад 9.4. Розрахунок ймовірності збитковості страхового продукту

Страховий продукт передбачає 6000 однорічних договорів, в кожному з яких ймовірність настання страхового випадку $q = 0{,}005$. Виплачувана страхова сума за одним договором дорівнює 100000 грн, а одноразова страхова премія – 1000 грн Навантаження становить 30 %.

Яка ймовірність збитковості цього страхового продукту?

Розв'язування

Вхідні дані: $n=6000$, $q=0{,}005$, $b=100000$. Оскільки брутто-премія дорівнює 1000 грн, а навантаження становить 30 %, то нетто-премія дорівнює $p=1000(1-0{,}30)=700$.

Розраховуємо характеристики випадкової величини виплат за окремим полісом:

$$M(X)=bq=500,$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=b^2q(1-q)=49750000,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=7053{,}3680$$

та характеристики сумарної величини страхових виплат:

$$M(S)=nM(X)=3\cdot10^6,\ \sigma(S)=\sqrt{n}\sigma(X)=0{,}546351\cdot10^6.$$

Нетто-дохід компанії від проданих полісів становить: $P=n\,p=4{,}2\cdot10^6$. Аргумент функції стандартного нормального розподілу у формулі (3.14) дорівнює: $x=\dfrac{P-M(S)}{\sigma(S)}=2{,}196388$. Далі за цією формулою одержимо шукану ймовірність: $P_d=0{,}014$.

Приклад 9.4. Розрахунок позапланового прибутку за страховим продуктом

У страховій компанії 6000 однотипних договорів, в кожному з яких ймовірність настання страхового випадку становить 0,005. Виплачувана страхова сума за одним договором дорівнює 100000 грн, а одноразова страхова премія – 1000 грн. Навантаження становить 30 %. На який додатковий прибуток може розраховувати страховик з надійністю 95 %?

Розв'язування

Вхідні дані задачі збігаються з попередньою. Тому характеристики випадкової величини виплат за окремим полісом та сумарної величини страхових виплат такі самі, як у попередньому прикладі. Далі з (9.15)–(9.16) отримаємо: $s_{\alpha} = 3{,}899867 \cdot 10^6$ [грн], $v_{\alpha} = 0{,}301332 \cdot 10^6$ [грн]. Отже, позаплановий прибуток компанії становить 301332 грн.

Запитання

1. Що таке чиста нетто-премія?
2. Що таке ризикова надбавка?
3. Що називають "навантаженням"?
4. Що таке брутто-премія?
5. Як розраховують повну нетто-премію?
6. З яких умов визначають відносну надбавку надійності?
7. Що таке квантиль рівня α?
8. Опишіть квантильний принцип визначення надбавки надійності.
9. Запишіть нерівність Чебишова П. Л.
10. Як розраховують позаплановий прибуток компанії за деяким страховим продуктом з заданою надійністю?

10. Елементи математичної демографії

Актуарні розрахунки ґрунтуються на статистичній інформації про негативні та катастрофічні події, на основі якої розраховують ймовірність настання страхових випадків та визначають функцію розподілу випадкової величини збитків. Для страхування життя важливими є таблиці тривалості життя або таблиці смертності (life or mortality table). Вперше такі таблиці запропонував Едмунд Галлей (E. Halley) 1693 р. у праці "An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Various Tables of Births and Funerals at the City of Breslau" [2].

10.1. Ймовірнісні характеристики тривалості життя

Припустимо, що тривалість життя описують випадковою величиною $X > 0$. Функцію розподілу цієї величини – ймовірність того, що людина не доживе до віку x років, – називають **функцією тривалості життя** (life function) і позначають $F(x)$:

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{10.1}$$

Доповнювальну функцію до цієї функції називають **функцією виживання або функцією дожиття** (survival function) і позначають $s(x)$:

$$s(x) = 1 - F(x) = P\{X \geq x\}. \tag{10.2}$$

Ця функція дорівнює ймовірності того, що особа доживе до віку x.

Функція виживання має очевидні властивості, які випливають з її означення і природи модельованої величини:

1) $s(x)$ – неперервна;

2) $s(x)$ – строго спадна;

3) $s(0) = 1$;

4) $s(x)=0$, $x>\omega$, де ω – гранична тривалість життя.

Густину функції тривалості життя називають **кривою смертності** (mortality curve):

$$f(x)=F'(x)=-s'(x). \tag{10.3}$$

Інтенсивністю смертності (force of mortality) називають величину μ_x:

$$\mu_x=\frac{f(x)}{s(x)}=-\frac{s'(x)}{s(x)}=-(\ln s(x))'>0. \tag{10.4}$$

За цілих x ця величина наближено дорівнює

$$\mu_x\approx\frac{s(x)-s(x+1)}{s(x)}. \tag{10.5}$$

Знаючи інтенсивність смертності, на основі (10.4) легко знайти функцію виживання

$$s(x)=\exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right). \tag{10.6}$$

Ці функції є базовими для побудови інших величин, які широко використовують у страховій практиці. Приведемо найважливіші з них.

1. Ймовірність прожити ще n років для людини віку x – позначають ${}_n p_x$:

$${}_n p_x=P\{X\ge x+n|X\ge x\}=\frac{P\{X\ge x+n\}}{P\{X\ge x\}}=\frac{s(x+n)}{s(x)}. \tag{10.7}$$

Величину ${}_1p_x$ прийнято позначати p_x: $p_x\equiv{}_1p_x$.

Зауважимо, що при $k<n$ виконується рівність

$${}_n p_x=\frac{s(x+n)}{s(x)}=\frac{s(x+k)s(x+n)}{s(x)s(x+k)}={}_k p_x\cdot{}_{n-k}p_{x+k}, \tag{10.8}$$

з якої, при цілих n, випливає співвідношення

$${}_n p_x=p_x\cdot p_{x+1}\cdot\ldots\cdot p_{x+n-1}. \tag{10.9}$$

Також, легко встановити формулу

$$
{}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{t+x} dt \right). \qquad (10.10)
$$

2. Ймовірність померти протягом наступних n років для людини віку x – позначають ${}_n q_x$:

$$
{}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{s(x+n)}{s(x)} = \frac{s(x) - s(x+n)}{s(x)}. \qquad (10.11)
$$

Приймають, що $q_x \equiv {}_1 q_x$. На основі формули (10.5) легко встановити, що виконується наближена рівність

$$
q_x \approx \mu_x. \qquad (10.12)
$$

3. Середній час до смерті для особи віку x або середня очікувана тривалість життя особи віку x.

Якщо особа прожила x років, то страхову компанію більшою мірою цікавить випадкова величина її залишкового часу життя $T(x) = X - x$. Функція розподілу цієї величини з урахуванням умови $X \ge x$ дорівнює

$$
\begin{aligned}
F_{T(x)}(t) &= P\{T < t | X \ge x\} = P\{X < t + x | X \ge x\} = \\
&= \frac{P\{x \le X < t + x\}}{P\{X \ge x\}} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}.
\end{aligned} \qquad (10.13)
$$

Середньою очікуваною тривалістю життя (complete expectation of life) особи віку x називають математичне сподівання залишкового часу життя

$$
e_x^0 = E(T(x)). \qquad (10.14)
$$

Виконується співвідношення [22]

$$
e_x^0 = \frac{1}{s(x)} \int_x^{\infty} s(u) du. \qquad (10.15)
$$

10.2. Статистичні оцінки характеристик тривалості життя

Характеристики тривалості життя оцінюють за статистичними даними. Розглянемо достатньо велику групу новонароджених у кількості

l_0 (найчастіше приймають [2], що $l_0 = 10^5$). Випадкові величини тривалості життя представників цієї групи позначимо $X_1, X_2, \ldots, X_{l_0}$. Припустимо, що це незалежні, однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу (10.1). Тоді кількість представників групи, які дожили до віку x, буде випадковою величиною:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I\{X_i \ge x\}, \tag{10.16}$$

де $I\{A\} = \begin{cases} 1, \textit{ подія } A - \textit{відбулася} \\ 0, \textit{ подія } A - \textit{не відбулася} \end{cases}$ – індикатор події A.

Середня кількість l_x живих представників групи у віці x дорівнює

$$l_x = E\left(L(x)\right) = \sum_{i=1}^{l_0} E\left(I\{X_i \ge x\}\right) = \sum_{i=1}^{l_0} P\{X_i \ge x\} = \sum_{i=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x) \cdot \tag{10.17}$$

Отримуємо, що функція виживання дорівнює середній частці живих представників групи у віці x:

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}. \tag{10.18}$$

Далі, на основі (10.8), знайдемо, що

$${}_n p_x = \frac{s(x+n)}{s(x)} = \frac{l_0 s(x+n)}{l_0 s(x)} = \frac{l_{x+n}}{l_x}. \tag{10.19}$$

Для фіксованої групи новонароджених уведемо випадкову величину кількості померлих у віці від x до $x+t$:

$${}_t D_x = L(x) - L(x+t) = \sum_{i=1}^{l_0} I\{x \le X_i < x+t\}. \tag{10.20}$$

Математичне сподівання цієї величини визначає середню кількості померлих у віці від x до $x+t$ років з групи новонароджених l_0:

$${}_t d_x = E({}_t D_x) = E(L(x)) - E(L(x+t)) = l_x - l_{x+t} = l_0(s(x) - s(x+t)). \tag{10.21}$$

Коли $t = 1$, використовують спрощене позначення $d_x \equiv {}_1 d_x$.

Далі, легко встановлюємо

$$ {}_n q_x = \frac{s(x) - s(x+n)}{s(x)} = \frac{{}_n d_x}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=x}^{x+n-1} d_j . \qquad (10.22) $$

Статистична демографічна ситуація відображається у таблицях тривалості життя (таблицях смертності, англ. – mortality (life) table). Методика розрахунку таких таблиць регламентується відповідною методикою Державної служби статистики України [24].

Повні таблиці містять такі величини, розраховані для однорічних інтервалів життя від 0 до 100 років :

1) $q_x = d_x / l_x$ – ймовірність померти у віці від x до $x+1$ років;
2) $p_x = 1 - q_x$ – для особи віку x ймовірність дожити до віку $x+1$ років;
3) l_x – середня кількість осіб, які доживають до віку x;
4) $d_x = l_x - l_{x+t}$ – кількість осіб, які помирають у віці від x до $x+1$ років;
5) $L_x = (l_x + l_{x+1})/2$ – середня кількість людей, які жили у віці від x до $x+1$, за припущення, що смертність протягом року – рівномірна;
6) $T_x = \sum_{k=x}^{\omega} L_k$ – кількість людино-років майбутнього життя при досягненні віку x, де $\omega = 104$ – величина граничної тривалості життя;
7) $e_x^0 = T_x / l_x$ – середня очікувана тривалість життя при досягненні віку x.

Для успішної діяльності страхова компанія потребує цілого набору таблиць тривалості життя, які відображають демографічні показники різних груп населення. Ці групи формують за статтю, місцем проживання, професією, станом здоров’я.

У Додатку В наведено таблицю величини l_x для чоловічого та жіночого населення СРСР у 1984–1985 роках [37], а в Додатку Г – повні таблиці для чоловіків сільської місцевості України 2008 р. [24].

За допомогою таблиць тривалості життя можна розрахувати ймовірність різних ситуацій, пов'язаних зі смертністю.

Приклад 10.1. Використання таблиць тривалості життя

За даними таблиці тривалості життя (Додаток Б) визначте для чоловіка у віці 30 років ймовірність: а) померти протягом року; б) прожити ще три роки; в) померти протягом трьох років; г) дожити до 98 років.

Розв'язування

а) для особи віком 30 років ймовірність померти протягом року (q_{30}) визначають безпосередньо з таблиці: $q_{30} = 0{,}00614$;

б) ймовірність прожити ще три роки дорівнює

$${}_3p_{30} = p_{30}p_{31}p_{32} = \frac{l_{33}}{l_{30}} = 0{,}98336;$$

в) ймовірність померти протягом трьох років становить

$${}_3q_{30} = 1 - {}_3p_{30} = \frac{d_{30} + d_{31} + d_{32}}{l_{30}} = 0{,}01664;$$

г) ймовірність дожити до 98 років дорівнює

$${}_{68}p_{30} = \frac{l_{98}}{l_{30}} = 0{,}00120.$$

Запитання

1. Що таке функція тривалості життя?
2. Вкажіть основні властивості функції виживання.
3. Що таке крива смертності?
4. Дайте означення інтенсивності смертності.
5. Що позначають величини ${}_n p_x$ та ${}_n q_x$?
6. Дайте означення середньої очікуваної тривалості життя.

7. Запишіть статистичну оцінку функції виживання.
8. Запишіть статистичну оцінку величини ${}_n p_x$.
9. Запишіть статистичну оцінку величини ${}_n q_x$.
10. Які основні величини містять таблиці смертності?

Список використаної літератури

1. Бакаєв Л. О. Кількісні методи в управлінні інвестиціями / Л. О. Бакаєв. – К.: КНЕУ, 2000. – 151 с.
2. Бауэрс Н. Актуарная математика / Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс и др. – М.: Янус-К, 2001. – 656 с.
3. Бронштейн Е. М. Основы актуарной математики. Страхование жизни и пенсионные схемы: Учеб. пособие / Е. М. Бронштейн, Е. И. Прокудина. – Уфа: УГАТУ, 2002. – 132 с.
4. Бугрій М. І. Основи фінансово-кредитного аналізу / М. І. Бугрій. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. – 375 с.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятности и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Л.: Наука, 1988. – 480 с.
6. Заболоцький М. В. Математичний аналіз: підручник / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк . – К.: Знання, 2008. – 422 с.
7. Закон України "Про банки і банківську діяльність": за станом на 06.02.2015 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/2121-14
8. Закон України "Про загальнообов’язкове державне пенсійне страхування": за станом на 01.01.2015 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1058-15
9. Закон України "Про Національний банк України": за станом на 06.02.2015 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/679-14
10. Закон України "Про недержавне пенсійне забезпечення": за станом на 20.07.2014 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1057-15

11. Закон України "Про страхування": за станом на 06.02.2015 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/ 85/96-вр
12. Закон України "Про фінансовий лізинг": за станом на 20.09.2015 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/723/97-вр
13. Закон України "Про цінні папери та фондовий ринок": за станом на 06.11.2014 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/3480-15
14. Єлейко Я. І. Основи фінансового аналізу: Навч. посібник / Я. І. Єлейко, О. М. Кандибка, М. Л. Лапішко, Т. С. Смовженко. – К.: Нац. банк України; Львів: Львівський банківський інститут, 2000. – 141 с.
15. Історія страхування: підручник / С. К. Реверчук, Т. В. Сива, С. І. Кубів, О. Д. Вовчак; за ред. С. К. Реверчука. – К.: Знання, 2005. – 213 с.
16. Інформаційно-аналітичний портал "Лізинг в Україні" [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://leasinginukraine.com
17. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: посібник / М. В. Карташов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 494 с.
18. Кінаш О. М. Основи актуарних розрахунків: навчально-методичний посібник / О. М. Кінаш, В. М. Сороківський, М. В. Папка. – Львів, 2012. – 188 с. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.lnu.edu.ua/faculty/mechmat/ Departments/ mathstat/books/aktuarna.pdf
19. Козьменко О. В. Актуарні розрахунки: навч. посібник / О. В. Козьменко, О. В. Кузьменко. – Суми: Університетська книга, 2011. – 224 с.
20. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука. 1968. – 720 с.

21. Корнилов И. А. Основы страховой математики: учеб. пособие / И. А. Корнилов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 384 с.
22. Кошкин Г. М. Основы актуарной математики: учебное пособие / Г. М. Кошкин. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 116 с.
23. Мельников А. В. Математические модели финансового анализа / А. В. Мельников, Н. В. Попова, В. С. Скорнякова. – М.: Анкил, 2006. – 439 с.
24. Методика побудови таблиць смертності та середньої очікуваної тривалості життя для населення України та регіонів за статтю та типом поселення. Затверджена Наказом Державного комітету статистики України 26.04.2011 №103. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.ukrstat.gov.ua
25. Підкуйко С. І. Актуарна математика / С. І. Підкуйко. – Львів, 2000. – 63 с.
26. Плиса В. Й. Страхування / В. Й. Плиса. – К.: Каравела, 2010. – 472 с.
27. Постанова НБУ "Про затвердження Положення про порядок здійснення банками України вкладних (депозитних) операцій з юридичними і фізичними особами": за станом на 15.02.2016 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/z1256-03
28. Сайт Головного управління статистики у Львівській області [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.lv.ukrstat.gov.ua
29. Сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.ukrstat.gov.ua
30. Сайт Кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/
31. Сайт Національного банку України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.bank.gov.ua

32. Сайт Національної комісії з цінних паперів та фондового ринку [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.nssmc.gov.ua
33. Сайт Національної комісії, що здійснює державне регулювання у сфері ринків фінансових послуг [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.nfp.gov.ua
34. Сайт Ощадбанку [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://deposit-oschadnybank.crm.ua/
35. Сайт Товариства актуаріїв України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://actuary.in.ua
36. Сайт Укрексімбанку [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.eximb.com/ukr/personal/deposits
37. Статистические материалы: III. Основные показатели таблиц смертности и средней продолжительности жизни населения 1984–1985 гг. // Вестник статистики. – 1987. – №3. – С. 79-80.
38. Стойко О. Я. Банківські операції / О. Я. Стойко. – К.: КУНЕС, 2002. – 258 с.
39. Фабоцци Ф. Управление инвестициями / Ф. Фабоцци. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 932с.
40. Фабоцци Ф. Рынок облигаций: Анализ и стратегии / Ф. Фабоцци. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2005. – 876 с.
41. Фінансовий калькулятор [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://fin-calc.org.ua
42. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
43. Четыркин Е. М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – М.: Дело, 2004. – 400 с.
44. Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. – М.: ИНФРА–М, 2001. – 1048 с.
45. Artzner P. Coherent measures of risk / P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath // Mathematical Finance. – 1999. – Vol.9. – N 3. – P. 203–227.

46. Benninga S. Financial modeling / S. Benninga. – 3rd ed. – MIT Press, 2008. – 1133 p.
47. CFA Institute [Electronic resource]. – Access mode: https://www.cfainstitute.org
48. CFA Society Ukraine [Electronic resource]. – Access mode: https://www.cfasociety.org/ukraine
49. Equitable Life Assurance Society [Electronic resource]. – Access mode: http://www.equitable.co.uk
50. Sigma 3/2013 "World insurance in 2012: Progressing on the long and winding road to recovery" [Electronic resource]. – Access mode: http://www.swissre.com

Додаток А

Порядкові номери днів у році

Місяць / День	Січ.	Лют.	Бер.	Кв.	Тр.	Черв.	Лип.	Серп.	Вер.	Жовт.	Лист.	Груд.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	–	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	–	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	–	90	–	151	–	212	243	–	304	–	365

Додаток Б

Функція стандартного нормального розподілу

x	*0,00*	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Додаток В

Основні показники таблиць смертності населення СРСР, 1984–1985 [37]

Вік x років	l_x чоловіки	l_x жінки	Вік x років	l_x чоловіки	l_x жінки	Вік x років	l_x чоловіки	l_x жінки
0	100000	100000	**29**	92546	95432	**59**	66913	84937
1	97099	97743	**30**	92216	95337	**60**	65130	84068
2	96457	97152	**31**	91864	95236	**61**	63260	83149
3	96235	96954	**32**	91492	95128	**62**	61311	82157
4	96108	96850	**33**	91103	95012	**63**	59290	81074
5	96015	96774	**34**	90697	94887	**64**	57201	79885
6	95939	96715	**35**	90275	94752	**65**	55048	78580
7	95869	96666	**36**	89835	94605	**66**	52831	77150
8	95800	96622	**37**	89373	94446	**67**	50554	75589
9	95733	96581	**38**	88881	94274	**68**	48221	73889
10	95668	96543	**39**	88352	94089	**69**	45836	72044
11	95607	96507	**40**	87779	93890	**70**	43405	70047
12	95550	96473	**41**	87157	93676	**71**	40935	67894
13	95495	96440	**42**	86486	93445	**72**	38435	65582
14	95438	96407	**44**	85005	92926	**73**	35914	63108
15	95373	96371	**45**	84204	92634	**74**	33384	60473
16	95295	96331	**46**	83364	92318	**75**	30857	57679
17	95198	96286	**47**	82483	91977	**76**	28349	54734
18	95080	96235	**48**	81554	91610	**77**	25872	51646
19	94938	96178	**49**	80569	91216	**78**	23442	48428
20	94774	96116	**50**	79519	90792	**79**	21075	45097
21	94588	96050	**51**	78398	90333	**80**	18789	41674
22	94383	95981	**52**	77205	89833	**81**	16594	38187
23	94162	95910	**53**	75941	89285	**82**	14519	34666
24	93927	95837	**54**	74609	88604	**83**	12555	31146
25	93680	95762	**55**	73212	88028	**84**	10735	27665
26	93420	95685	**56**	71750	87319	**85**	9063	24265
27	93146	95605	**57**	70218	86563	**86**	7546	20988
28	92856	95521	**58**	68608	85768			

Додаток Г

Таблиці смертності чоловіків сільської місцевості України, 2008 [24]

x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
0	0,01220	0,98780	100000	1220	98977	6062135	60,62
1	0,00152	0,99848	98780	150	98705	5963158	60,37
2	0,00072	0,99928	98630	71	98594	5864453	59,46
3	0,00056	0,99944	98559	55	98531	5765859	58,50
4	0,00057	0,99943	98504	57	98475	5667327	57,53
5	0,00049	0,99951	98447	49	98423	5568852	56,57
6	0,00032	0,99968	98399	31	98383	5470429	55,59
7	0,00044	0,99956	98368	43	98346	5372046	54,61
8	0,00046	0,99954	98324	45	98302	5273700	53,64
9	0,00031	0,99969	98279	31	98264	5175398	52,66
10	0,00043	0,99957	98249	42	98227	5077135	51,68
11	0,00028	0,99972	98206	28	98193	4978907	50,70
12	0,00020	0,99980	98179	20	98169	4880714	49,71
13	0,00035	0,99965	98159	34	98142	4782546	48,72
14	0,00054	0,99946	98125	53	98098	4684404	47,74
15	0,00069	0,99931	98071	67	98038	4586306	46,77
16	0,00099	0,99901	98004	97	97956	4488268	45,80
17	0,00139	0,99861	97907	136	97839	4390312	44,84
18	0,00156	0,99844	97772	152	97695	4292473	43,90
19	0,00212	0,99788	97619	207	97516	4194777	42,97
20	0,00216	0,99784	97412	211	97307	4097261	42,06
21	0,00261	0,99739	97202	253	97075	3999955	41,15
22	0,00280	0,99720	96948	272	96813	3902880	40,26
23	0,00321	0,99679	96677	311	96521	3806067	39,37
24	0,00359	0,99641	96366	346	96193	3709546	38,49
25	0,00407	0,99593	96020	391	95825	3613353	37,63
26	0,00411	0,99589	95629	393	95433	3517528	36,78
27	0,00430	0,99570	95236	410	95031	3422095	35,93
28	0,00504	0,99496	94827	478	94588	3327064	35,09
29	0,00549	0,99451	94349	518	94090	3232476	34,26
30	0,00614	0,99386	93831	576	93543	3138386	33,45

Продовження Додатку Г

x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
31	0,00646	0,99354	93255	603	92953	3044844	32,65
32	0,00719	0,99281	92652	666	92319	2951890	31,86
33	0,00780	0,99220	91986	718	91627	2859571	31,09
34	0,00821	0,99179	91269	749	90894	2767944	30,33
35	0,00856	0,99144	90519	775	90132	2677050	29,57
36	0,00867	0,99133	89744	778	89355	2586918	28,83
37	0,00915	0,99085	88966	814	88560	2497562	28,07
38	0,00959	0,99041	88153	846	87730	2409003	27,33
39	0,01063	0,98937	87307	928	86843	2321273	26,59
40	0,01098	0,98902	86379	949	85904	2234430	25,87
41	0,01141	0,98859	85430	975	84943	2148526	25,15
42	0,01237	0,98763	84455	1045	83933	2063583	24,43
43	0,01319	0,98681	83411	1100	82860	1979650	23,73
44	0,01483	0,98517	82310	1221	81700	1896789	23,04
45	0,01511	0,98489	81090	1225	80477	1815089	22,38
46	0,01647	0,98353	79865	1315	79207	1734612	21,72
47	0,01736	0,98264	78549	1364	77867	1655405	21,07
48	0,01826	0,98174	77185	1410	76481	1577538	20,44
49	0,01938	0,98062	75776	1469	75041	1501058	19,81
50	0,02161	0,97839	74307	1606	73504	1426016	19,19
51	0,02302	0,97698	72701	1674	71864	1352512	18,60
52	0,02431	0,97569	71027	1727	70164	1280648	18,03
53	0,02577	0,97423	69300	1786	68407	1210484	17,47
54	0,02723	0,97277	67515	1839	66595	1142077	16,92
55	0,02731	0,97269	65676	1794	64779	1075481	16,38
56	0,03050	0,96950	63882	1948	62908	1010702	15,82
57	0,03273	0,96727	61934	2027	60921	947794	15,30
58	0,03308	0,96692	59907	1982	58916	886873	14,80
59	0,03695	0,96305	57925	2140	56855	827957	14,29
60	0,03677	0,96323	55785	2051	54759	771101	13,82
61	0,04492	0,95508	53734	2414	52527	716342	13,33
62	0,04104	0,95896	51320	2106	50267	663815	12,93
63	0,04310	0,95690	49214	2121	48153	613548	12,47
64	0,04733	0,95267	47093	2229	45978	565395	12,01
65	0,04510	0,95490	44864	2023	43852	519417	11,58
66	0,04975	0,95025	42841	2131	41775	475564	11,10
67	0,05108	0,94892	40710	2079	39670	433789	10,66
68	0,05439	0,94561	38630	2101	37580	394119	10,20
69	0,05992	0,94008	36529	2189	35435	356540	9,76
70	0,06162	0,93838	34340	2116	33282	321105	9,35

Закінчення Додатку Г

x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x^0
71	0,06745	0,93255	32224	2173	31137	287823	8,93
72	0,06981	0,93019	30051	2098	29002	256685	8,54
73	0,07791	0,92209	27953	2178	26864	227684	8,15
74	0,07769	0,92231	25775	2002	24774	200820	7,79
75	0,08067	0,91933	23773	1918	22814	176046	7,41
76	0,08924	0,91076	21855	1950	20880	153232	7,01
77	0,09823	0,90177	19905	1955	18927	132352	6,65
78	0,10413	0,89587	17949	1869	17015	113425	6,32
79	0,11291	0,88709	16080	1816	15173	96410	6,00
80	0,11747	0,88253	14265	1676	13427	81238	5,69
81	0,12891	0,87109	12589	1623	11778	67811	5,39
82	0,13375	0,86625	10966	1467	10233	56033	5,11
83	0,14125	0,85875	9500	1342	8829	45800	4,82
84	0,15758	0,84242	8158	1286	7515	36971	4,53
85	0,16084	0,83916	6872	1105	6320	29456	4,29
86	0,17349	0,82651	5767	1000	5267	23137	4,01
87	0,18730	0,81270	4766	893	4320	17870	3,75
88	0,20237	0,79763	3874	784	3482	13550	3,50
89	0,21877	0,78123	3090	676	2752	10068	3,26
90	0,23657	0,76343	2414	571	2128	7317	3,03
91	0,25586	0,74414	1843	471	1607	5188	2,82
92	0,27670	0,72330	1371	379	1182	3581	2,61
93	0,29915	0,70085	992	297	843	2400	2,42
94	0,32326	0,67674	695	225	583	1556	2,24
95	0,34904	0,65096	470	164	388	973	2,07
96	0,37651	0,62349	306	115	249	585	1,91
97	0,40565	0,59435	191	77	152	337	1,76
98	0,43639	0,56361	113	50	89	184	1,62
99	0,46867	0,53133	64	30	49	96	1,49
100	0,50233	0,49767	34	34	47	47	1,37

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Заболоцький Микола Васильович

Прокопишин Іван Анатолійович

Основи фінансової математики

Навчальний посібник

Редактор *Р. П. Спринь*

Комп’ютерне верстання *І. А. Прокопишин*

Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 8,4
Тираж 100 пр. Зам. № 38

Видавець та виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.