МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Людмила НІКІТІНА
Ірина ЯЦЕНКО

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності 122 – Комп’ютерні науки

Харків – 2023

УДК 519.81(075.8)
Н 62

Рекомендовано до публікації рішенням кафедри систем інформації ім. В.О.Кравця Національного технічного університету "Харківський Політехнічний Інститут" (протокол № 9 від 21.04.2023 р.).

Рецензенти:

Сергій ЛЕОНОВ, доктор технічних наук, професор, професор кафедри обчислювальної техніки та програмування Національного технічного університету «Харківський Політехнічний Інститут»,

Олександр ЯНКОВСЬКИЙ, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електронних обчислювальних машин Харківського національного університету радіоелектроніки.

Нікітіна Людмила, Яценко Ірина

Н 62 Моделі та методи прийняття рішень: навчальний посібник / Л. Нікітіна І. Яценко. – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – 179 с., рис. 37, табл. 46.

ISBN 000-000-000-000-0

Навчальний посібник присвячений розгляду питань існуючих моделей та методів підтримки прийняття рішень. Розглянуто типові моделі подання задачі прийняття рішення та методи вирішення проблемних ситуацій – вибір кращої альтернативи із заданої множини, групове впорядкування альтернатив, методи прийняття рішень за наявністю багатьох критеріїв та в умовах невизначеності. Наводяться приклади, що пояснюють застосування теоретичних підходів до рішення практичних завдань.

Матеріал навчального посібника рекомендовано для студентів спеціальності 122 – Комп'ютерні науки.

УДК 519.81(075.8)

ISBN 000-000-000-000-0

ЗМІСТ

ВСТУП

Людська діяльність пов'язана з прийняттям безлічі рішень задля досягнення поставленої мети. При прийнятті рішень людині доводиться враховувати багато чинників, таких як обмеженість ресурсів, невизначеність зовнішніх умов, присутність конкуруючих сторін, які прагнуть досягти своїх цілей, що не завжди збігаються з нашими. Тому знання основ теорії прийняття рішень необхідне всім, хто має справу з прийняттям рішень та управлінням – керівникам підприємств, менеджерам, системним аналітикам, інженерам та звичайним людям.

Теорія прийняття рішень (ТПР) – це область дослідження, в основі якої лежать поняття та методи математики, статистики, економіки, менеджменту та психології. Метою теорії прийняття рішень є вивчення закономірностей вибору людьми шляхів вирішення проблем та завдань, а також способів досягнення бажаного результату.

Мета досліджень у теорії прийняття рішень полягає у тому, щоб якнайкраще організувати процес прийняття рішень у проблемних ситуаціях. ТПР повинна орієнтувати особу, яка приймає рішення (ОПР), на необхідність формування та дослідження моделі прийняття рішення, що адекватно відображає аналізований об'єкт або процес. При пошуку рішень слід передбачити можливість формальної постановки завдання прийняття рішення (ПР), вибору методів та моделей ПР, оцінки знайдених рішень та вибору найкращого рішення.

Сучасні технології стали невід'ємною частиною життя як окремо взятої людини, так й усього суспільства загалом. Такі технології є сукупністю певних методів, спеціально розроблених прийомів, які включають використання інновацій, технологічних рішень, що сприяють подальшому розвитку певного проекту. Головною характеристикою сучасних технологій є складність завдань прийняття рішень. Спільними рисами таких завдань є велика розмірність, багатоаспектний характер, слабка структурованість. Це зумовлює необхідність застосування математичних методів та моделей теорії прийняття рішень під час автоматизації процесу розв'язання таких завдань.

Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки надає можливість виконати розробку та практичну реалізацію математичних моделей та методів прийняття рішень для отримання найкращих результатів.

Для більш ефективного пошуку рішень розробляються комп'ютерні системи підтримки прийняття рішень (СППР). Особливе місце серед СППР займають інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень (ІСППР), орієнтовані на динамічні проблемні області і функціонують в режимі реального часу. Такі системи називають інтегрованими інтелектуальними системами, в яких поєднуються точні моделі та методи пошуку рішень з логіко-лінгвістичними моделями та методами, що базуються на знаннях фахівців-експертів, моделях людських міркувань, некласичних логіках та накопиченому досвіді.

1 ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

1.1 Основні поняття та означення

Прийняття рішення (ПР) – це процес вибору лінії поведінки для вирішення певної проблеми. Прийняття рішень — творча, відповідальна задача. Вона полягає в тому, щоб відповідно до обставин, що склалися, визначити напрям наступних дій, які дозволять людині або організації досягти мети у конкретній сфері діяльності.

Задача прийняття рішень (ЗПР) – одна з найпоширеніших у будь-якій предметній області. Її вирішення зводиться до вибору однієї або декількох альтернатив з деякої множини. Вибір рішення можливий тільки на підставі компонентів – мети, альтернатив, критеріїв вибору.

Задача прийняття рішень (ЗПР) полягає у визначенні найкращого (оптимального) способу дій для досягнення поставленої мети. Під метою розуміють ідеальне уявлення бажаного стану чи результату діяльності. Якщо фактичний стан не відповідає бажаному, має місце проблема. Вироблення плану дій щодо усунення проблеми становить сутність завдання прийняття рішень.

Проблеми можуть виникати у таких випадках:

- функціонування системи в даний момент не забезпечує досягнення поставленої мети;

- функціонування системи у майбутньому не забезпечить досягнення поставленої мети;

- зміна цілей діяльності.

Проблема завжди пов'язана із певними умовами, які узагальнено називають ситуацією. Сукупність проблеми та ситуації утворює проблемну ситуацію. Виявлення та опис проблемної ситуації дає вихідну інформацію для постановки задачі прийняття рішень.

Прийняття рішень відбувається у часі, тому вводиться поняття процесу прийняття рішень (ППР). Цей процес складається з послідовності етапів та процедур і спрямований на усунення проблемної ситуації.

Під процесом прийняття рішення розуміють послідовність процедур, що приводять до знаходження рішення.

У процесі прийняття рішень формуються альтернативні (взаємовиключні) варіанти рішень та оцінюється їхня перевага. Перевага – це інтегральна оцінка якості рішень, заснована на об'єктивному аналізі (знанні, досвіді, проведенні експериментів та розрахунків) та суб'єктивному розумінні цінності, ефективності рішень.

Теорія прийняття рішень (ТПР) − область дослідження, в якій використовуються поняття і методи математики, статистики, економіки, менеджменту і психології, яка вивчає закономірності вибору людьми шляхів вирішення різного роду завдань, а також досліджує способи пошуку найбільш вигідних з можливих рішень.

У наш час теорію прийняття рішень застосовують переважно для аналізу тих проблем, які можна відносно легко й однозначно формалізувати, а результати досліджень – адекватно інтерпретувати. Методи ТПР використовують у різних галузях: управлінні об’єктами та системами, проектуванні складних технічних і організаційних систем, плануванні розвитку міст, доборі програм розвитку економіки й енергетики регіонів, організації нових економічних зон тощо.

Загальна схема прийняття рішень має складається з таких етапів:

1) визначення мети (цілі) та засобів її досягнення;
2) побудова варіантів досягнення мети (множини альтернатив);
3) формування множини наслідків (оцінка альтернатив);
4) визначення принципу порівняння альтернатив (визначення принципу оптимальності);
5) структурування множини альтернатив:

–розбиття на класи (кластеризація);

–впорядкування;

–вибір найкращої (найкращих).

Якщо принцип оптимальності задається скалярною функцією вибору, то маємо задачу оптимізації (наприклад, лінійного програмування).

Задачу ПР можуть розв'язувати три групи осіб: особи, що приймають рішення (ОПР), експерти, та консультанти.

Особою, що приймає рішення, називають людину (або колективний орган), що виконує пошук розв'язання задачі. ОПР визначає, чи є мета досяжною та які засоби є допустимими в досягненні мети.

Експерт - це спеціаліст в певній галузі, який володіє інформацією про вирішувану задачу, але не несе прямої відповідальності за результати її розв'язання.

Консультант (аналітик) - спеціаліст в теорії прийняття рішень. Розробляє модель задачі, процедуру вирішення, організовує роботу експертів та ОПР.

У найпростіших випадках ОПР виконує функції всіх трьох.

Для вибору найкращого рішення індивідуальна ОПР визначає критерій вибору. Групова ОПР здійснює вибір на основі принципу узгодження.

Кінцевим результатом задачі прийняття рішення є рішення, яке є приписом до дії. Зі змістовної точки зору рішенням може бути спосіб дії, план роботи, варіант проекту тощо. Рішення є однією з форм розумової діяльності та проявом волі людини.

Рішення називається допустимим, якщо воно задовольняє обмеженням: ресурсним, правовим, морально-етичним. Рішення називається оптимальним (найкращим), якщо воно забезпечує екстремум (максимум або мінімум) критерію вибору при індивідуальній ОПР або задовольняє принцип узгодження при груповій ОПР.

Узагальненою характеристикою рішення є його ефективність. Ця характеристика включає ефект рішення, що визначає ступінь досягнення цілей, та вартість рішення – сукупність витрат ресурсів для ухвалення та реалізації рішення. Отже, ефективність рішення - це рівень досягнення цілей, віднесений до витрат з їхнього досягнення. Рішення тим ефективніше, чим більший ступінь досягнення цілей та менша вартість витрат.

1.2 Класифікація задач прийняття рішень

1.2.1 Класифікація задач прийняття рішень за ступенем визначеності

За ступенем визначеності виділяють класи задач: розв'язувані за умов повної визначеності, ймовірнісної визначеності, невизначеності, стратегічної невизначеності (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 - Класифікація задач ПР за ступенем визначеності

Ступінь визначеності	Характеристика задач
Повна визначеність	Повнота та достовірність інформації при прийнятті рішень. Не потрібно додатково уточнювати достовірні ситуації гіпотетичними ситуаціями. Цілі та обмеження визначаються у вигляді цільових функцій та нерівностей. Функція переваги зазвичай збігається з цільовою функцією, якщо ціль одна. Якщо цілей кілька, то головна цільова функція залежить від приватних цільових функцій. Можна будувати формальну математичну модель (методи оптимізації).
Ймовірнісна визначеність (ризик)	Задачі є стохастичними, відомі лише статистичні дані про фактори, що впливають на вироблення рішень. Рішення формується на основі теорії статистичних рішень. Деяка повнота враховується ймовірнісними характеристиками деяких подій. Узагальненим критерієм оптимального рішення є середній ризик, тому вони називаються задачами ПР в умовах ризику.

Невизначеність	Задачі вирішуються в умовах, коли відсутня чітка та повна інформація про фактори та характеристики системи або дані характеризують ситуацію з деяким ступенем нечіткості, розмитості. Найбільш типовими ці задачі є для сфери управління в економічних системах. Їхні характерні риси - неповнота інформації, мала достовірність, складні взаємозв'язки між факторами. Основну роль у прийнятті рішень тут грають не формальні методи, а ОПР, які працюють із системою підтримки прийняття рішень
Стратегічна невизначеність	Задачі вирішуються в умовах активної протидії (з боку зовнішнього середовища або внутрішньої структури системи) ефективному виробленню рішень. У таких задачах враховують вплив на результат рішення осіб, які переслідують цілі, невідомі чи протилежні загальносистемним.

1.2.2 Класифікація задач прийняття рішень за ступенем використання даних експериментів

У визначених проблемних ситуаціях для рішення задач використовується достовірна (апріорна), точна, заздалегідь відома інформація. В умовах невизначеності апріорної інформації недостатньо, тому що її занадто мало, отже, для поповнення інформаційного фонду з метою визначення вихідної ситуації необхідно проводити експерименти для отримання апостеріорної інформації. Для управління процесом отримання апостеріорної інформації використовують методи планування та управління.

1.2.3 Класифікація задач прийняття рішень за кількістю критеріїв

За кількістю критеріїв задачі поділяються на однокритеріальні та багатокритеріальні.

Однокритеріальні (скалярні) задачі характеризуються тим, що в них використовується тільки один критерій оцінки альтернатив, щодо якого вирішується задача.

Багатокритеріальні (векторні) задачі мають кілька критеріїв ефективності, які враховуються одночасно.

1.2.4 Класифікація задач прийняття рішень за аспектом часу

За ступенем впливу чинника часу на рішення задачі виділяють статичні і динамічні задачі ПР.

Для статичних задач час прийняття рішення не грає великої ролі.

Ефективність рішення динамічних задач залежить від часу, що виділяється на рішення або існує для рішення.

1.2.5 Класифікація прийняття рішень за рівнем структуризації елементів у задачі

Структуровані задачі прийняття рішень мають наступні властивості: змінні визначення задачі наявні у вигляді скалярного або векторного числових значень; задачі мають єдину, чітко виражену цільову функцію; є можливість побудови чіткого алгоритму рішення. Відповідно до цього існують такі класи задач:

1) добре структуровані задачі, у яких залежність між факторами (ознаками) визначена у вигляді цілих або дійсних чисел;

2) неструктуровані задачі, у яких відома лише множина основних факторів, але неможливо задати кількісні залежності між ними; іноді відомо, що фактор у певних межах впливає на рішення, але структура, що описує зв'язки між факторами, не визначена;

3) слабо структуровані (змішані) задачі з кількісно та якісно визначеними ознаками, при цьому переважають якісні елементи, які характеризують маловідомі або невизначені сторони проблеми.

1.2.6 Класифікація задач прийняття рішень за типом ОПР

Управлінські рішення можуть прийматися особисто ОПР або групою ОПР. Відповідно до цього існують такі класи завдань:

1) індивідуальні - рішення формує та приймає окремий суб'єкт (керівник, головний фахівець або інша людина), який наділений повноваженнями та дає ресурси для прийняття рішень у відповідній сфері та на відповідному етапі процесу управління;

2) групові – у прийнятті рішень бере участь група менеджерів чи консультантів-фахівців із конкретних проблем.

1.3 Формальне подання задачі приняття рішення

Під задачею прийняття рішення розумітимемо задачу вибору найкращого способу дії з деякої множини допустимих варіантів.

Формально задачу прийняття рішення можна подати так:

Задано кінцеву чи нескінченну множину варіантів X (альтернатив) і множину можливих результатів Y. Множини X і Y – довільні абстрактні множини.

Передбачається наявність причинного зв'язку між вибором деякої альтернативи $x_i \in X$ та настанням відповідного результату $y_j \in Y$, тобто, вибір деякого варіанта $x_i \in X$ призводить до деякого результату $y_j \in Y$. У деяких випадках передбачається, що є можливість безпосередньої оцінки якості альтернативи, що дозволяє виключити з розгляду кілька результатів.

Потрібно вибрати такий варіант x_i, який дає можливість отримати найбільш сприятливий у певному сенсі результат y_j.

1.4 Аналіз задачі прийняття рішення

Аналіз задачі прийняття рішення складається з наступних факторів:

1) визначення характеру зв'язку альтернатив та результатів;

2) вивчення та визначення системи переваг особи, яка приймає рішення;

3) формування критеріїв та цільових функцій.

1.4.1 Визначення характеру зв'язку альтернатив та результатів

1. Детермінований зв’язок альтернатив та результатів.

У разі детермінованого зв'язку існує однозначне відображення множини альтернатив X на множину результатів Y

$$X \rightarrow Y,$$

яке реалізується функцією $y=\varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Зв’язок альтернатив з результатами може бути представлений у вигляді графа (рис. 1.1).

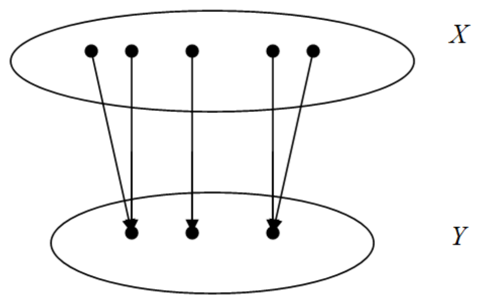


Рисунок 1.1 - Детермінований зв’язок альтернатив та результатів

2. Зв'язок із ймовірнісним характером.

Зв'язок носить йімовірнісний характер, коли вибір альтернативи *x* визначає ймовірності результатів на множині *Y*. У цьому випадку вибір x_i вже не гарантує настання певного результату y_i, а задача прийняття рішення називається задачею прийняття рішення в умовах ризику (рис. 1.2).

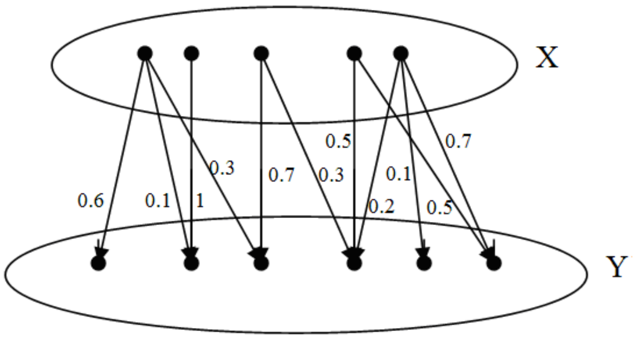


Рисунок 1.2 – Ймовірнісний зв’язок альтернатив та результатів

Граф ймовірнісних зв'язків на рис. 1.2 є зваженим – кожна стрілка має вагу, тобто ймовірність P_i отримання результату y_j при виборі альтернативи x_i. Для будь-яких *i* ймовірності пар (x_i , y_j) є несумісними:

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

3. Зв'язок альтернатив з результатами в умовах повної невизначеності.

Тут передбачається, що стрілки на графі (рис. 1.3) не мають ваг, тобто, інформація ймовірнісного характеру відсутня. У цьому випадку оперують щільностями розподілу ймовірностей.

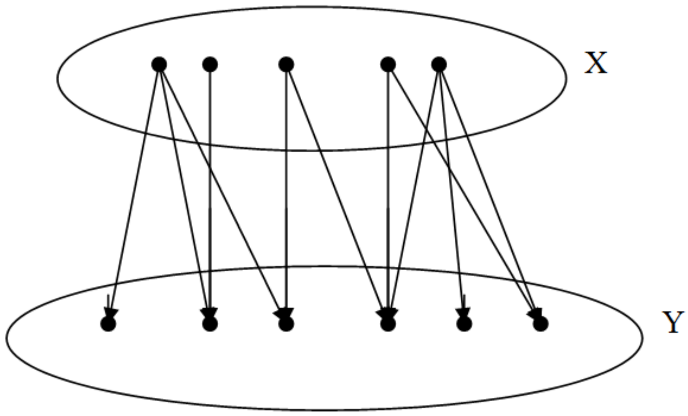


Рисунок 1.3 – Зв'язок альтернатив з результатами в умовах повної невизначеності

Невизначеність при виборі та реалізації зв'язків альтернатив з результатами може мати і складніший характер.

Множину зв'язків можна обмежити трьома основними типами зв'язків, розглянутих вище. Співвідношення зв’язків можна подати по-іншому (рис. 1.4).

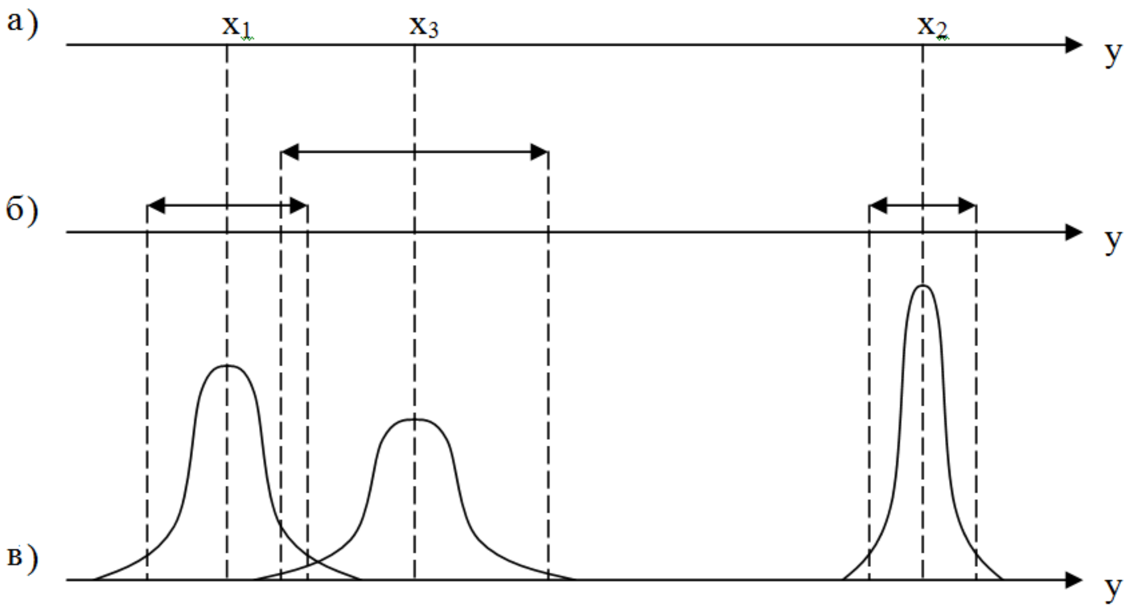


Рисунок 1.4 – Варіанти зв’язків альтернатив з результатами

На рис. 1.4:

варіант а) відповідає детермінованому зв'язку альтернатив x_1 , x_2, x_3 з результатами y_j;

варіант б) – це задача прийняття рішення в умовах статистичної невизначеності; вибір альтернативи x_1 , x_2, x_3 дозволяє виявити діапазон відповідного результату y;

варіант в) – це вибір рішення за умови повної невизначеності; на рис. 1.4, в показані щільності розподілу ймовірностей настання події при виборі альтернатив x_1 , x_2, x_3.

Кожен із варіантів може мати певний механізм оцінки якості результату.

Альтернативна стратегія (спосіб дії) – це спосіб використання ресурсів, який вибирає ОПР. Стратегії, що задовольняють обмеженням, називаються можливими або допустимими. Реалізація тієї чи іншої допустимої стратегії зазвичай призводить до різних результатів. Для порівняння між собою якості різних стратегій використовують критерій якості (критерій ефективності, критерій оптимальності).

Критерієм прийняття рішень називають алгоритм, визначений для кожної ситуації прийняття рішень, який дозволяє обрати єдине оптимальне рішення x^o з множини X або встановити множину таких рішень, які називають еквівалентними за даним критерієм. У проблемній ситуації можливе застосування декількох критеріїв. Вибір конкретного з них виконує ОПР відповідно до наявних цілей та системи переваг. Математична модель цілі рішення, що дозволяє кількісно оцінити рівень досягнення цієї цілі, називається критерієм оптимальності.

1.4.2 Вивчення та визначення системи переваг ОПР

Для кожного з розглянутих видів зв'язків альтернатив з результатами можуть бути реалізовані різні способи задання системи переваг.

У найпростішому випадку кожен результат може бути оцінений деяким дійсним числом r, тобто множина результатів Y однозначно відображається функцією f на множину значень R.

При порівнянні результатів порівнюються відповідні числа. Наприклад, у задачі максимізації результат y_i вважається кращим, ніж результат y_j, якщо $f(y_i)>f(y_j)$. Результати вважаються еквівалентними, якщо $f(y_i)=f(y_j)$. Для порівняння результатів застосовуються вирази $y_i \succ y_j$ та $y_i \sim y_j$. Функція f називається **цільовою функцією** чи **критерієм оптимальності**, **цільовим функціоналом**.

Якщо зв'язок між множиною альтернатив і множиною результатів є детермінованим, тобто, $y=\varphi(x)$, то функція f, задана на множині Y, трансформується в деяку функцію J, задану на множині X і суперпозицією φ на f:

$$X \rightarrow R,\ J=\varphi * f\ .$$

У цьому випадку задача вибору оптимального результату зводиться до задачі вибору оптимальної альтернативи на множині X і вирішується методами теорії оптимізації.

1.4.3 Формування критеріїв та цільових функцій

У ряді випадків якість та корисність результату оцінюються не одним числом, а кількома. Іншими словами, існує кілька показників якості (кілька критеріїв) рішення, що описуються функціями f_k:

$$Y \rightarrow R\ .\ k=1,2,\ldots,m,$$

причому кожну із приватних цільових функцій f_i потрібно максимізувати. При виконанні багатокритеріальних оцінок результатів виникають складніші математичні моделі ситуації вибору. Критерії можуть бути суперечливими і досягати максимумів у різних точках множини Y. Тому виникають різні труднощі у вирішенні оптимізаційних задач – як алгоритмічні, так і концептуальні. З іншого боку, з'являються варіанти рішень, які неможливо порівнювати.

З урахуванням вищевикладеного і обмежуючись перерахованими вище зв'язками альтернатив з результатами, можна скласти таблицю основних задачі вибору (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Основні класи задач вибору

Один критерій	Багато критеріїв	
$z=f(y)$ $f: Y \rightarrow R$	$Z=f(y)$ $f=(f_1, f_2, \dots, f_m)$ $f_k: Y \rightarrow R,\ k=1,2,\dots,m$	Визначеність
$\check{z}$	$\check{Z}$	Невизначеність

В даний час при розробці програмних додатків часто використовується саме критерійна мова опису переваг, тому наступна найважливіша група проблем пов'язана з формуванням критеріїв та цільових функцій (функціоналів). Ці проблеми вирішуються у тісному зв'язку з методами подолання різних видів невизначеностей з урахуванням тих чи інших гіпотез.

1.5 Підходи до автоматизації прийняття рішень

При розгляді можливості автоматизації прийняття рішень є питання розподілу функцій між комп'ютером і людиною. При вирішенні цього питання слід враховувати умови функціонування системи, можливість розробки типових способів рішення задач, кількість розв'язуваних задач, співвідношення використовуваних кількісних та якісних характеристик рішень тощо. Залежно від зазначених факторів може бути обраний один з двох підходів автоматизації процесів прийняття рішень - ***інформаційний*** або ***когнітивний***.

Інформаційний підхід має такі характеристики:

– носіями знань про проблемну область, цілі та умови задачі є людина-розробник та людина-користувач системи;
– задачі, що вирішуються, є типовими, розрахунковими, описуються кінцевим набором числових параметрів, можливістю перевірки правильності рішень на числових даних;
– задачі формулюються на етапі розробки системи з урахуванням усіх можливих факторів впливу.

Перевагою інформаційного підходу є використання спрощених математичних моделей проблемної області та відносна простота програмної реалізації.

Недоліками інформаційного підходу є те, що користувач системи має вирішувати конфліктні ситуації, які можуть виникати при невідповідності математичних моделей, приймати рішення у не передбачених програмою ситуаціях, для адаптації системи до поточних умов може передбачатися введення людиною деяких констант та ознак, а також оцінка, корекція або введення остаточних рішень.

Застосування інформаційного методу виправдано в системах, призначених для роботи в стандартних типових умовах, а також у тих випадках, коли людина має у своєму розпорядженні достатній час для глибокого аналізу обстановки, а комп'ютер відіграє роль сховища інформації та допоміжного засобу для оцінки варіантів рішень. Оцінка варіантів рішень притаманна інформаційно-розрахунковим системам плануючого типу при щодо вузькому колі розв'язуваних завдань.

Інформаційний підхід застосовують для рішення вузького кола типових задач, роботи в типових умовах, а також у випадках, коли ОПР має достатній час для глибокого аналізу ситуації, а комп'ютер відіграє роль сховища інформації та допоміжного засобу для оцінки варіантів рішень.

Когнітивний підхід до прийняття рішень ґрунтується на знаннях і має такі характерні риси:

- усі необхідні знання (або їхня частина), необхідні для прийняття рішень у широкому діапазоні умов проблемної області, формалізуються та поміщаються до бази знань комп'ютера;
- окрім виконання розрахунків, система має маніпулювати компонентами знань, релевантними поставленій задачі та ефективно їх використовувати при пошуку рішення;
- у ході рішення задачі програма може формулювати або додатково визначати умови пошуку та прийняття рішення, виконувати евристичний пошук альтернативних рішень у непередбачуваних ситуаціях.

На основі когнітивного підходу створюють автоматизовані системи підтримки прийняття рішень, що можуть адаптуватися до зовнішніх умов, мають здатність до самонавчання та самоорганізації. У таких системах функціями людини є:

- створення загального математичного забезпечення на етапі проектування;
- формалізація та введення в систему експертних знань на етапі налаштування системи на певну предметну область (визначення кола розв'язуваних задач);
- формулювання сценаріїв поведінки системи.

При використанні когнітивного підходу на етапі розробки системи необхідно при постановці задач прийняття рішень чітко визначити склад та призначення компонентів знань, а також умови їхнього використання.

Задачі прийняття рішень мають велике практичне значення, тому є предметом багатьох наукових досліджень. Дослідження можна поділити на два напрями – ***психологічна теорія рішень*** та ***теорія раціональних рішень***.

Психологічна теорія рішень використовує експериментальні методи для побудови моделей поведінкових аспектів ОПР. При цьому виявляються переваги та недоліки ОПР та вплив навколишнього оточення на процес прийняття рішення. Цей напрямок найближчий до когнітивного підходу.

Теорія раціональних рішень розвивається математиками та економістами та орієнтується на використання обчислювальних процедур. Вона базується на інформаційному підході до прийняття рішень. Предметом вивчення теорії є заключний етап процесу прийняття рішень - вибір оптимального (найкращого) варіанта рішення, при цьому передбачається, що вся підготовча робота, використання знань про предметну область, виконана людиною. Практичне значення теорії раціональних рішень полягає в тому, що в ній розглядаються формалізовані постановки задач та алгоритми та методи їх рішення.

Типові елементарні задачі прийняття рішень за рівнем повноти заданих умов (вихідних даних) можна поділити на ***замкнуті*** та ***відкриті***.

Формулювання замкнутої задачі прийняття рішень має включати такі елементи:

- опис мети розв'язання задачі та функції корисності результатів розв'язання;
- множину альтернативних рішень;
- опис можливих результатів рішень.

Постановка замкнутої задачі припускає безпосередній перехід до математичних моделей теорії раціональних рішень. Метою моделей є досягнення максимуму або мінімуму деякої функції, що залежить від обраних при прийнятті рішення параметрів, а допустимі дії визначаються обмеження, що накладаються на ці параметри, у формі рівностей або нерівностей. Перехід від змістовного формулювання задачі природною мовою до її математичної моделі вимагає певної розумової роботи, що полягає у зіставленні абстрактних математичних понять фізичним реаліям, і може бути реалізовано на комп'ютері без використання когнітивного підходу.

При формулюванні відкритої задачі названі вище елементи можуть бути задані частково, або бути неточними. Для рішення таких задач необхідно, перш за все, на підставі знань про проблемну область довизначити умови, яких бракує, а потім застосувати один з методів, що використовуються для замкнутих задач. Саме когнітивний підхід застосовують для пошуку рішень відкритих задач.

Ступінь складності задач прийняття рішень визначається кількістю фізичних або абстрактних об'єктів проблемної області, кількістю характеристик об’єктів, кількістю та типами відношень між об’єктами, складністю цілей, кількістю заданих критеріїв оптимальності рішень (функції корисності).

1.6 Процес прийняття рішень

Незалежно від класу задачі процес прийняття рішень людиною включає такі етапи:

- формування уявлення про задачу;
- прогнозування результатів альтернативних варіантів рішень;
- оцінка корисності результатів;
- вибір рішення.

ОПР зводить формування внутрішнього уявлення про задачу до створення деякої її моделі, що відображає суттєві риси вихідної задачі і водночас має бути пристосованою до можливостей зберігання та переробки інформації. Ця модель не є точною копією дійсності, вона дозволяє усвідомити зміст задачі і зосередити увагу на суттєвій для рішення інформації.

При прийнятті рішень ОПР здійснює структуризацію (розподіл на складові) і редукцію (зменшення розмірності) задачі. При цьому ОПР керується деякими принципами:

- принцип ієрархічності структури цілей: аналіз задачі та виділення підцілей;

– принцип ієрархічності альтернативних способів дій: для спрощення вибору множина альтернатив може послідовно поділятися на класи та підкласи за певними ознаками; у результаті утворюється ієрархічна структура альтернатив, яку можна використовувати для оцінки їхньої корисності;
– принцип редукції складного до простого: розгляд обмеженого числа альтернативних рішень та виключення інших; такий прийом може призводити до рішень, які не є найкращими;
– принцип конкретизації: використання під час рішення завдання лише інформації, заданої явно; при цьому зростає відсоток неправильних рішень.

При досягненні складних цілей, що включають кілька компонентів, людина використовує один із трьох методів:

– метод одночасного досягнення цілей;
– метод черговості, коли цілі досягаються послідовно у часі;
– метод розміщення цілей, що полягає в почерговому досягненні цілей зі зміною черговості залежно від поточних обставин.

При прийнятті рішень відкритих задач доцільно розділяти процес пошуку рішень на дві частини – когнітивну та інформаційну. Мета когнітивної частини – побудова алгоритму розв'язання задачі певного класу з урахуванням наявних знань. Такий алгоритм надалі може бути використаний для рішення інших задач такого класу. При використанні такого підходу необхідно подавати задачі на кількох рівнях знань. Якщо потрібно побудувати алгоритм прийняття рішень класу задач, деталізований до рівня комп'ютерної програми, необхідно представити завдання трьох рівнях:

– рівні фізичних об'єктів та процесів;
– рівні даних та перетворень;
– рівні комп'ютерної програми.

На рівні фізичних об'єктів та процесів виконується ієрархія операцій, які використовують два види знань – нормативні та об'єктивні знання (рис.1.5).

Операції відповідають етапам прийняття рішень, результатом яких є правила аналізу даних конкретного екземпляра задачі, одержувані шляхом логічного виведення з наявних знань.

Нормативні знання визначають функціональне призначення та регламентують поведінку системи та її оточення. Об'єктивні знання – це знання про систему понять і закономірностей фізичної реальності.

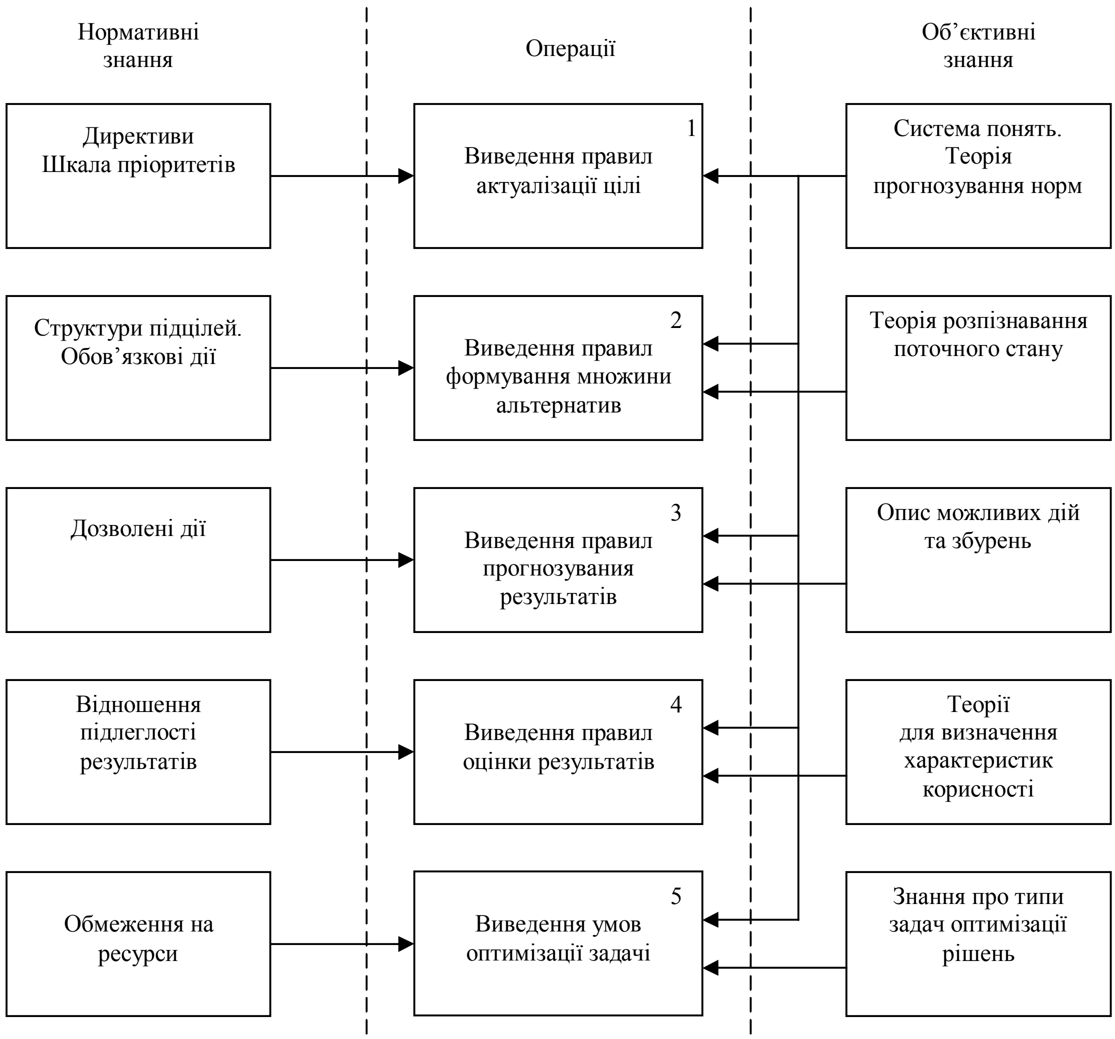


Рисунок 1.5 – Операції, що виконуються на рівні об'єктів та процесів

Норми можуть задаватися людиною чи системою та мають суб'єктивний характер. Якщо є кілька законодавців (авторитетів) норм, то норми можуть суперечити одні одній. Прикладом вирішення такої суперечності може бути призначення ваг джерелам норм.

Знання про систему понять та закономірностей мають об'єктивний характер. Об'єктивні знання розкривають семантику понять, що використовуються для подання знань, описують властивості об'єктів системи та її оточення. Такі знання можуть бути задані у вигляді деяких моделей об'єктів та систем.

Задачею етапу прогнозування результатів є перевірка реалізовності рекомендованих нормами процесів, врахування впливу на них випадкових і залежних від інших систем чинників і, у разі потреби, доповнення структури цілей підцілями, введеними для компенсації зазначених збурень.

Внаслідок впливу факторів, що збурюють, результати дій можуть бути невизначеними і розпадатися на множину сприятливих результатів, що відповідають досягненню підцілі, і множину несприятливих результатів. Це може вимагати введення додаткових процесів та підцілей, а в деяких випадках призвести до появи додаткових альтернатив під час вибору рішення.

Розробка правил розрахунку ймовірностей результатів при виконанні операції прогнозування дозволяє розраховувати статистичні характеристики критеріїв якості рішень, які використовуються під час їх вибору.

Оцінка корисності результатів рішень має здійснюватися з урахуванням правил, виведених логічним шляхом з наявних знань. Поняття корисності є основним у теорії раціональних рішень. Зокрема, при прийнятті рішень необхідно впорядкувати альтернативи за ступенем переваги для рішення, а потім вибрати варіант, що має найбільшу корисність.

На рівні даних та їхніх перетворень виконується подальша деталізація подання задачі прийняття рішень. Кожен перетворювач даних є компонентом знань про порядок вирішення деякої приватної обчислювальної або логічної задачі. Описи таких перетворювачів містяться в розділах об'єктивної частини знань. До складу знань входять і концептуальні моделі даних (моделі концепт-поняття фізичної реальності). На цьому рівні необхідно визначити порядок переходу від загальних концептуальних моделей до приватних моделей.

На рівні комп'ютерної програми концептуальні моделі даних кожного алгоритму ставляться у відповідність фізичні моделі даних, що визначають структури даних у пам'яті комп'ютера, виконується програмна реалізація алгоритмів.

Проблема представлення знань та їх використання у комп'ютерних системах зводиться до моделювання функцій абстрактного мислення. Таке моделювання може бути виконано шляхом побудови деякої формальної системи, що містить визначення вихідних понять та правила виведення нових знань із наявних.

1.7 Мова бінарних відношень

Прийняття рішення - це вибір підмножини альтернатив з вихідної множини X. При цьому множина X може бути порожньою, містити один або більше одного елемента.

Вибір тієї чи іншої альтернативи з вихідної множини X повинен бути так чи інакше обумовлений. Значимі критерії альтернатив встановлюються ОПР. При нестачі інформації про критерії вибору, який їй належить зробити, ОПР може звернутися до експертів у предметній галузі. Для можливості вибору тієї чи іншої альтернативи з вихідної множини у ОПР має бути, по-перше, можливість порівнювати їх між собою, і, по-друге, можливість оцінювати ці альтернативи.

Часто виявляється зручним описувати та обґрунтовувати вибір рішення, спираючись на мову бінарних відношень. Мова бінарних відношень використовує такі обмеження:

- окремий результат сам собою не оцінюється, і критеріальні функції не вводяться;
- кожна пара результатів y_i та y_j може перебувати в одному з наступних співвідношень
    - y_i переважає (строго домінує) y_j;

- y_i переважає y_j;
- y_i не менш переважає (не строго домінує) y_j;
- y_i не менш переважає y_j;
- y_i еквівалентний y_j;
- y_i та y_j неможна порівняти між собою.

Вважаємо, що переваги особа, що приймає рішення, встановлює у певній множині A. Зазвичай це множина результатів, тобто $A=Y$.

При детермінованому зв'язку X з Y можливо $A=Y$.

При багатокритеріальній оцінці результатів $A=f(Y)$, $f=f_1,f_2, \ldots ,f_m$. При цьому передбачається, що система переваг ОПР задається у просторі векторних оцінок результатів. Можна також вважати, що цей простір і є простір результатів, а система переваг ОПР задається за допомогою бінарного відношення R на A. Бінарним відношенням на множині A називається довільна підмножина R множини A^2, де A^2 – множина усіх упорядкованих пар виду (a_i,a_j), де $a_i,a_j \in A$. Тобто, маємо $R \subseteq A$, а також $A \subseteq A$.

Нагадаємо основні позначення та положення, що використовуються в теорії множин:

- $a \in A$ елемент a входить у множину A;
- $A \ni a$ множина A містить елемент a;
- $A \subset B$ множина A входить (включено) до множини B;
- $\alpha \supset \beta$ властивість α включає властивість β;
- $A \cup B$ об'єднання множин A і B - відношення, яке утворюють пари (x,y), що входять до відношення A та B;
- $A \cap B$ перетин множин A і B - відношення, якому належать пари (x,y), спільні для відношень A та B;
- $A \setminus B$ різниця множин A і B – відношення, яке складається з пар (x,y), що входять до відношення A, але не належать B.

Нехай A і B – кінцеві множини. Нехай кожному елементу $a_i \in A$ поставлений у відповідність той самий елемент $b_j \in B$. Така попарна відповідність називається взаємно-однозначною відповідністю. Множина A і B є еквівалентними: A~B.

Еквівалентні множини мають такі властивості:

– симетричність $A \sim B \quad B \sim A$;

– транзитивність $A \sim B,\ B \sim C \quad A \sim C$,

$A \sim C,\ B \sim C \quad A \sim B$;

– рефлексивність $A \sim A$.

Бінарні відношення мають такі властивості:

– відношення переваги
  - властивість симетричності x P y → y P x;
  - властивість асиметричності x P y → $\neg$(y P x);
  - властивість порівнянності альтернатив x P y → (x P z) $\vee$ (z P y);
    тут і нижче використані логічні зв'язки булевої алгебри
    → – імплікація (якщо … , то …),
    $\vee$ – диз'юнкція (АБО),
    $\wedge$ – кон'юнкція (І),
    $\neg$ – заперечення (НЕ);
  - властивість транзитивності (x P y) $\wedge$ (y P z) → (x P z)
  - властивість антирефлексивності $\neg$(x P x).

– відношення байдужості альтернатив
  - властивість рефлексивності x J y;
  - властивість симетричності (x J y) → (y J x);
  - властивість транзитивності (x J y) $\wedge$ (y J z) → (x J z);
  - властивість еквівалентності переваг

(x P y) $\wedge$ (x J z) → (z P y);

(x P y) $\wedge$ (y J z) → (x P z).

Для наочності можна задавати бінарні відношення на кінцевих множинах графічно із застосуванням наступних правил:

1) елементи кінцевої множини A зображуються точками на площині;

2) якщо задано відношення $R \subseteq A^2$ і $(a_i,a_j) \in R$, де $a_i,a_j \in A$, то стрілка проводиться від a_i до a_j;

3) якщо $(a_i,a_i) \in R$, то малюється петля-стрілка, що виходить з точки a_i і входить до тієї ж точки.

Отримана фігура називається орієнтованим графом, вершинами якого є a_i, а стрілками – відношення між ними.

Граф рефлексивного відношення містить петлі у всіх вершинах, антирефлексивного - не містить жодної петлі.

Граф зв'язного відношення містить дуги між будь-якими двома вершинами графа.

У графі асиметричного відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов'язані лише однією спрямованою дугою.

Граф антисиметричного відношення може мати петлі, але зв'язок між вершинами відображається лише однією спрямованою дугою.

Зв'язок між будь-якою парою альтернатив визначається послідовністю бінарних відношень. "Сильним" бінарним відношенням відповідають великі вимоги до переваги однієї альтернативи над іншою і, отже, більше незрівнянних альтернатив. Найсильнішим є повне домінування однієї альтернативи над іншою. Більш "слабкі" бінарні відношення визначають умови, у яких, попри суперечливі оцінки, одна альтернатива оголошується кращою, ніж інша.

На основі обраного бінарного відношення здійснюється попарне порівняння всіх альтернатив, причому альтернативи, що виявилися кращими при всіх порівняннях, виділяються в нову множину – ядро. Розмір ядра характеризується кількістю альтернатив.

1.8 Функція корисності

На практиці не завжди потрібна максимізація чи мінімізація того чи іншого критерію. Може виявитися, що потрібно утримати певне його значення. Для зручності у цьому разі використовують функцію корисності (ФК).

Функція корисності - функція, значення якої відбиває наближення її аргументів (як аргумент виступає певне рішення, виражене як вектор критеріїв) до раціонального значення.

У разі оптимізації за одним критерієм ФК може приймати як аргумент скалярне значення.

У ФК локалізована логіка, що чисельно виражає різницю між поточним та необхідним значенням.

Найбільш поширеним підходом до рішення задач ПР є побудова ФК $U(x)$ з такими властивостями:

$U(x_i) > U(x_j)$, якщо $(x_i,x_j) \in P$;

$U(x_i) = U(x_j)$, якщо $(x_i,x_j) \in I$.

Якщо ФК існує, то вона визначає лінійний квазіпорядок на множині X. Правильним є і зворотне: якщо на множині X побудований лінійний квазіпорядок, то можлива побудова ФК (наприклад, шляхом зіставлення альтернативам множини X, розташованим у порядку зменшення їх переваги, натуральним числам у зростаючому порядку; однаково кращим альтернативам будуть надані однакові числа).

1.9 Застосування дослідження операцій у прийнятті рішень

У дослідженні операцій використовуються математичні моделі, що описують зв'язки критеріїв із можливими рішеннями.

Дослідження операцій вивчає застосування математичних, кількісних методів пошуку рішень для більшості предметних областей.

Етапи рішення задач у дослідженні операцій:

1) побудова моделі операції;

2) вибір критерію оптимальності;

3) знаходження оптимального рішення.

Особливості задач дослідження операцій:

1) використовувані моделі мають об'єктивний характер; за наявності адекватної моделі та сформульованого критерію оптимальності оптимальне рішення може бути отримане єдино можливим чином;

2) роль ОПР зводиться до визначення мети операції, тобто формулювання критерію оптимальності, а група аналітиків знаходить найкраще рішення.

Існують наступні типові моделі дослідження операцій:

1) розподіл ресурсів;

2) управління запасами;

3) масове обслуговування;

4) упорядкування;

5) вибір маршруту;

6) заміни об’єктів;

7) пошук;

8) конфліктні ситуації та ін.

Після побудови математичної моделі задачі для рішення застосовують методи оптимізації.

Контрольні запитання

1 Поясніть суть задачі прийняття рішень.

2 Що називають процесом прийняття рішення?

3 Яка мета теорії прийняття рішень?

4 Поясніть загальну схему прийняття рішень.

5 Яке рішення називається допустимим?

6 Поясніть класифікацію задач прийняття рішень.

7 Наведіть формальне подання задачі прийняття рішення.

8 З яких факторів складається аналіз задачі прийняття рішення?

9 Прокоментуйте варіанти зв’язків альтернатив з результатами.

10 У чому полягає система переваги особи, що приймає рішення?

11 Як сформувати критерії та цільові функцій для прийняття рішень?

12 Як використовується мова бінарних відношень у прийнятті рішень?

13 Що таке функція корисності?

14 Поясніть застосування дослідження операцій у прийнятті рішень.

2 КРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

У досить простих ситуаціях прийняття рішень вдається обмежитись єдиним критерієм оптимальності. Відповідні задачі прийняття рішень (ЗПР) називаються одноцільовими або однокритеріальними (скалярними, монокритеріальними). В іншому випадку мають місце багатоцільові або багатокритеріальні (полікритеріальні або векторні) ЗПР.

Найпростішим, найбільш розвиненим і частіше вживаним засобом у додатках для опису задач прийняття рішень є критеріальна мова.

Критеріальна мова опису задач прийняття рішень передбачає, що:

– оцінюються всі альтернативи з множини X незалежно одна від одної і від того, хто робить цю оцінку;
– кожній окремо взятій альтернативі з множини X ставиться у відповідність число $r(x)$ - значення критерію (однокритеріальний вибір);
– або кожній окремо взятій альтернативі з множини X ставиться у відповідність набір чисел $r_1(x)$, $r_2(x)$, ... $r_n(x)$ - значення критеріїв (багатокритеріальний вибір).

Будь-який процес прийняття рішень супроводжується певною кількістю різноманітних проблем - проблеми концептуального характеру та проблеми формально - математичного та обчислювального характеру.

До потенційних проблем належать складні логічні проблеми, які неможливо вирішити із застосуванням лише формально-математичних методів та комп'ютерів. Вирішення цих проблем має творчий характер. При вирішенні концептуальних проблем важливу роль відіграють не формально-математичні методи, а знання, досвід та інтуїція ОПР. Формальні методи тут також застосовуються, але вони відіграють допоміжну роль, як засіб, що полегшує та обмежує евристичну діяльність ОПР.

Нині у науці приділяється серйозна увага розробці формалізованих процедур вирішення концептуальних проблем, тобто формалізації евристичних процедур.

Залежно від класів ЗПР для рішення задач застосовуються відповідні методи рішення. Спрощена класифікація ЗПР за кількістю цілей, детермінованістю, залежністю критерію оптимальності від часу та можливими методами рішення наведена у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Класи та методи рішення ЗПР

Класи ЗПР			Методи рішення
Однокритеріальні	Статичні	Рішення в умовах визначеності	Методи математичного програмування
		Рішення в умовах ризику	Теорія ймовірностей Метод Монте-Карло Методи математичного програмування Експертні методи
		Рішення в умовах невизначеності	Методи теорії ігор Метод міні-макса Методи теорії статистичних рішень Експертні методи
	Динамічні	Рішення в умовах визначеності	Методи варіаційного числення Методи оптимізації
		Рішення в умовах ризику	Методи теорії випадкових процесів Експертні методи
		Рішення в умовах невизначеності	Методи теорії ігор Експертні методи
Багаторитеріальні			Методи теорії багатокритеріальних ЗПР Метод дерева цілей Експертні методи

Математичне програмування — це прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремум функції (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання. Такі задачі називають оптимізаційними.

Залежно від виду цільової функції та системи обмежень галузі математичного програмування поділяють на:

- лінійне програмування – цільова функція і функції обмежень, що входять в систему обмежень є лінійними (рівняння першого порядку);
- нелінійне програмування – цільова функція або одна із функцій обмежень, що входять в систему обмежень є нелінійними (рівняння вищих порядків);
- цілочисельне (дискретне) програмування – якщо на хоча б одну змінну накладена умова цілочисельності;
- динамічне програмування – якщо параметри цільової функції і/або система обмежень змінюються в часі або цільова функція має адитивний/мультиплікативний вигляд чи сам процес прийняття рішення має багатокроковий характер.

Залежно від того, чи відома вся інформація про процес заздалегідь, галузі математичного програмування поділяють на:

- стохастичне програмування – відома не вся інформація про процес заздалегідь: параметри що входять в цільову функцію або в функцію обмежень є випадковими або доводиться приймати рішення в умовах ризику;
- детерміноване програмування – відома вся інформація про процес заздалегідь.

Методи теорії статистичних рішень використовуються, коли невизначеність ситуації обумовлена об'єктивними обставинами, які або невідомі, або носять випадковий характер. Теорія ігор використовується у випадках, коли невизначеність ситуації обумовлена свідомими діями розумного суперника.

Метод Монте-Карло – загальна назва групи числових методів, заснованих на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується так, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати.

Метод Монте-Карло дозволяє приблизно відтворювати реальні явища. Він об'єднує аналіз чутливості (сприйнятливості) і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. Цей метод на основі визначення функціональних залежностей у реальній системі дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі.

Теорія ігор – сукупність методів математичного аналізу та оцінки правил поведінки учасників конфліктної ситуації. Кожна конфліктна ситуація передбачає взаємодію двох чи більше учасників цієї ситуації (гравців) для досягнення кожним з них своєї мети. Протилежні інтереси учасників гри створюють конфліктну ситуацію.

Метод Мінімаксу - алгоритм прийняття рішень для мінімізації можливих втрат з тих, які особа, яка приймає рішення, не може уникнути при розвитку подій за найгіршим для неї сценарієм.

Класичні методи варіаційного числення грунтуються на рівняннях Ейлера, Лагранжа, Якобі, Вейєрштрасса (класичні) і застосовуються до рішення задач, у яких області змін змінних не містять обмежень. Сучасні методи грунтуються на принципі максимуму Понтрягіна і методі динамічного програмування Беллмана.

Чисельні методи оптимізації - методи наближеного або точного розв'язання математичних задач оптимізації, що зводяться до виконання кінцевого числа елементарних операцій над числами.

Теорія випадкових (стохастичних) процесів – це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку. У широкому розумінні випадковим процесом називається будь-який процес, що протікає в часі, керований імовірнісними законами. Випадковий процес характеризується деякою функціональною залежністю від часу. Випадковий процес характеризується неперервним часом, переходи системи від одного стану до іншого можуть відбуватися в будь-який момент часу протягом спостережуваного періоду.

Методи теорії багатокритеріальних задач прийняття рішень використовуються для рішення задач багатокритеріальної оптимізації. Задача багатокритеріальної оптимізації полягає у пошуку вектора цільових змінних, який задовольняє накладеним обмеженням та оптимізує векторну функцію, елементи якої відповідають цільовим функціям. Ці функції утворюють математичний опис критерію задовільності та, зазвичай, взаємно конфліктують. Звідси, «оптимізувати» означає знайти такий розв'язок, за якого значення цільових функцій були б прийнятними для постановника задачі.

2.1 Однокритеріальні задачі прийняття рішень

Критерію $r(x)$ може надаватися різний зміст, але майже завжди його можна інтерпретувати як виграш або програш, який отримує особа, яка вибрала альтернативу x із множини альтернатив X. Якщо наслідки вибору альтернативи відомі точно, тобто, вибір детермінований, порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних чисел. Прийняття рішення зводиться до вибору оптимальної (найкращої) альтернативи x із множини альтернатив X.

Найкращою (оптимальною) альтернативою $x \in X$ називається така альтернатива, яка забезпечує мінімальне (програш) або максимальне (виграш) значення критерію при виборі альтернативи x.

Такі задачі прийняття рішень називають оптимізаційними. Для їх вирішення розроблено багато різних методів одновимірної та багатовимірної оптимізації, які досить докладно описані у літературі.

Серед методів одновимірної оптимізації до найпоширеніших належать методи бісекції, золотого перерізу, ламаних.

При розв'язанні задач багатовимірної оптимізації зазвичай використовують методи лінійного програмування (у тому числі різні модифікації симплекс-метода), різні варіанти градієнтних методів, варіаційні методи, методи динамічного програмування. Всі ці методи математично формалізовані. Їхньою розробкою та обґрунтуванням займається спеціальний розділ математики, який називають зазвичай "методами вирішення екстремальних задач" або "методами оптимізації".

У разі, якщо наслідки вибору альтернативи x із множини альтернатив X точно не відомі, але відомі ймовірності їх появи $p(x)$, то прийняття рішень зазвичай зводиться до вибору альтернативи x, яка задовольняє принцип «найменшого гарантованого програшу» або «найбільшого гарантованого виграшу». Розробкою методів прийняття рішень у таких ситуаціях займаються у розділах математики, які називають «теорією ігор» та «дослідженням операцій».

2.2 Багатокритеріальні задачі прийняття рішень

Оцінювання альтернатив за одним критерієм у більшості випадків є спрощеним і малопридатним, тому виникає необхідність їх оцінювання не по одному, а по декількох якісно різних критеріях. Прикладом може бути оцінка альтернативних проектів за критеріями: ціна, якість, час виконання. У рідких випадках одна з альтернатив може виявитися найкращою за всіма критеріями. Найчастіше маємо ситуації, коли складно зробити однозначний вибір найкращого рішення, тим більше, що критерії можуть бути суперечливими.

Для рішення багатокритеріальних задач виконують побудову відповідних математичних моделей і застосовують певні математичні методи. Одним із способів формалізації таких проблем є використання багатокритерійних оптимізаційних моделей.

У багатокритеріальних слабоструктурованих задачах частину інформації, необхідної для повного та однозначного визначення вимог до вирішення, неможливо отримати. Аналітик на основі наявної інформації може визначити основні змінні, встановити зв'язок між ними, побудувати адекватну модель, але не може встановити кращі поєднання критеріїв. Тут основою розробки рішення стають суб'єктивні переваги ОПР, які багато в чому визначають результат рішення. Рішення стає суб'єктивним, хоча будується з урахуванням об'єктивної моделі.

Багатокритеріальні задачі можна вирішити за допомогою методів дослідження операцій, якщо критерії є незалежними та задано напрямок покращення критеріїв. Такі задачі є задачами багатокритеріальної оптимізації. Вирішення таких задач ґрунтується не на суб'єктивному рішенні ОПР, а на обчислюваній ефективній межі. Тому багатокритеріальна оптимізація належить до вивчення операцій.

Теорія багатокритеріальної оптимізації ґрунтується на аксіомах вибору рішення та вивчає наслідки цих аксіом. Вибір оптимального рішення є багатокритеріальним, але самі методи вибору рішень залишаються тими самими, що й у однокритеріальних задачах, вирішуваних методами однокритеріальної оптимізації.

При розробці методів прийняття рішень часто використовують концепцію функції корисності, у межах якої людина вирішує задачу максимізації певної функції. Для реалізації цієї концепції будується математична модель, яка використовує функцію корисності, та формулювання обмежень на можливі рішення. Однак, людина не завжди може усвідомити та логічно сформулювати свої уподобання, тому аналітики звертаються до моделей людини, розроблених психологами. Однією з таких моделей є концептуальна або ментальна модель навколишнього світу, яку людина використовує при прогнозуванні своїх дій.

Моделі прийняття багатокритеріальних рішень мають допомогти людині уникнути поверхневих рішень та дозволити проаналізувати всі можливі рішення.

Багатокритеріальні механізми вибору характеризуються тим, що як структура використовується векторний критерій (множина варіантів відображається на кілька критеріальних шкал).

Правило вибору рішення має враховувати всі компоненти векторного критерію, які використовуються для порівняння варіантів. Для цього використовуються такі механізми:

1) скаляризовані багатокритеріальні механізми;

2) лексикографічні векторні механізми вибору;

3) векторний механізм вибору найкращого рішення;

4) векторний механізм вибору ефективного рішення (механізм Парето);

5) векторний механізм вибору слабоефективного рішення (механізм Слейтера).

2.2.1 Модель багатокритеріального прийняття рішення

Розглянемо модель задачі прийняття рішення:

- X – множина альтернатив;
- Y – множина результатів;
- f: $Y \rightarrow R$, I=1, … ,m – множина критеріїв;
- φ: $X \rightarrow Y$ – детермінована функція, яка відображає множину альтернатив на множину результатів.

Вважаємо, що кожному рішенню $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, де $y = \varphi(x)$. Якість або корисність результату (а тим самим і відповідного рішення x) оцінюється декількома (m) числами відповідно до залежностей f_i. Вважаємо, що кожну з функцій f_i треба максимізувати. Якість рішення x оцінюється вектором оцінок J_i та вибирається рішення, що має максимальний вектор. В результаті маємо багатокритеріальну модель прийняття рішень або задачу багатокритеріальної оптимізації виду:

$$J_i(x) \rightarrow \max_{x \in X}, \; i = 1, \dots, m, \; X \subset R^n.$$

$X \subset R^n$ означає: усі альтернативи або рішення є параметризованими й кожному з рішень відповідає точка $x \in R^n$, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Множина X називається ***множиною допустимих значень*** та позначається через D.

2.2.2 Методи багатокритеріальної оптимізації

Вирішується задача багатокритеріальної оптимізації виду:

$$f_i(x) \to \max_{x \in X}, f_i : D \to R, i= 1, \dots ,m, D \subseteq R^n.$$

Задано m функцій або функціоналів f_i, що відображають множину D n-мірних векторів $x=(x_1,x_2, \dots , x_n)$ у множині дійсних чисел R. Вибір оптимальних значень x проводиться не у всьому n-мірному просторі R^n, а в межах деякої її підмножини D. Прикладами таких задач можуть бути задачі вибору параметрів деякого програмного комплексу або задачі вибору плану розвитку фірми, коли параметри оцінюються показниками f_1, … , f_n. Обмеження $x \in D$ – технологічні та інші можливості реалізації значень x_i. Частина обмежень може формуватися на основі наявної апріорної інформації, яка дозволяє виключити з розгляду явно невдалі варіанти x.

Велике значення щодо задач такого типу має принцип Парето і поняття Парето-ефективного і слабо ефективного рішення.

Якщо якість чи корисність результату визначається не одним числом, а декількома, то це означає, що існує кілька показників якості рішення, що описуються приватними цільовими функціями

$$f_k: Y \to R, r=1, 2, \dots ,m,$$

які потрібно максимізувати.

В теорії багатокритеріальних задач зазвичай використовуються такі відношення домінування:

$$(y_i,y_j) \in R_p \leftrightarrow \forall k: [f_k(y_i) \geq f_k(y_j)] \wedge [f(y_i) \neq f(y_j)];$$

$$(y_i,y_j) \in R_s \leftrightarrow \forall k: [f_k(y_i) \geq f_k(y_j)],$$

тут $f=(f_1, f_2,\dots ,f_m)$.

Відношення домінування R_p називається відношенням Парето, а відношення R_s – відношенням Слейтера.

Якщо для деякої точки $y^o \in Y$ не існує більш переважаючої за Парето точки, тобто, такої точки y, що $(y,y^o) \in R_p$, то точка y^o називається ефективним або ***Парето-оптимальним*** рішенням багатокритеріальної задачі

$$f_k(y) \rightarrow \max, k=1,2, \dots ,m; y \in Y.$$

Множина, яка включає в себе всі ефективні елементи множини Y, позначається $P_j(Y)$ або $P(Y)$ і називається множиною Парето для векторного відношення

$$f: Y \rightarrow R_m, f=(f_1, f_2,\dots ,f_m).$$

Множина $P(f) = f(P(Y))$ називається множиною ефективних оцінок. Сенс множини ефективних оцінок полягає в тому, що оптимальний результат слід шукати тільки серед елементів множини елементів, що не домінують $P(Y)$ (принцип Парето). В іншому випадку завжди знайдеться точка $y \in Y$, яка є більш переважаючою з урахуванням усіх приватних цільових функцій.

Ефективність рішення не може бути покращена за будь-яким показником без погіршення ситуації за рештою показників.

Оптимальність за Парето – такий стан системи, у якому значення кожного окремого критерію, який описує стан системи, не може бути покращено без погіршення становища інших елементів.

Таким чином, за словами самого Парето: «Будь-яка зміна, яка нікому не приносить збитків, а деяким людям приносить користь (за їхньою власною оцінкою), є покращенням». Отже, визнається право на всі зміни, які не завдають нікому додаткової шкоди.

Множину станів системи, оптимальних за Парето, називають «множиною Парето», «множиною альтернатив, оптимальних у сенсі Парето», або «множиною парето-оптимальних альтернатив».

Ситуація, коли досягнуто ефективності за Парето – це ситуація, коли всі вигоди від обміну вичерпані.

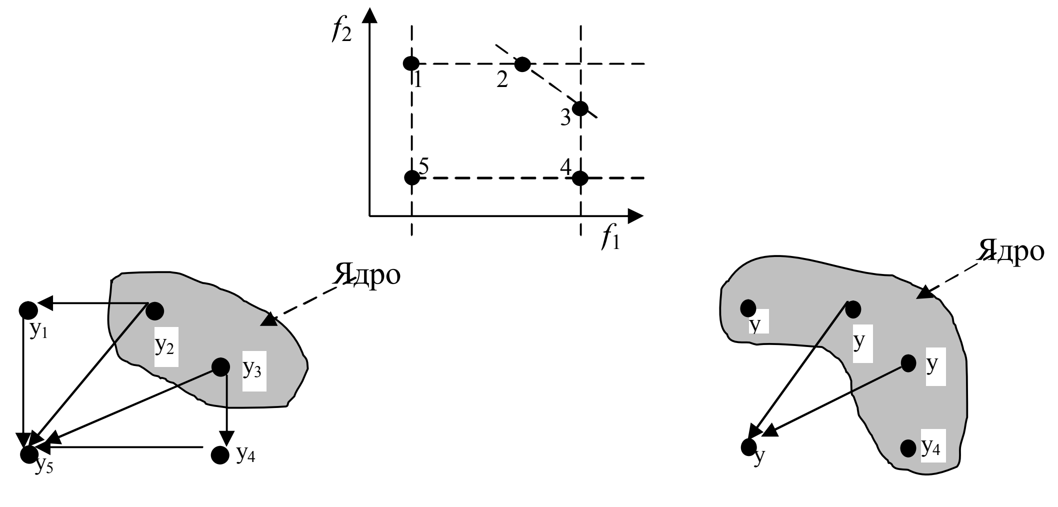
Точка $y' \in Y$ називається слабо ефективним рішенням багатокритеріальної задачі, або рішенням, оптимальним за Слейтером, якщо не існує кращої за Слейтером точки, тобто, такої точки y, що $(y,y') \in R_s$.

Результат y називається слабо ефективним, якщо він не може бути покращений відразу за всіма m критеріями, що задаються за допомогою приватних цільових функцій $f_i(y)$, I=1,2, … ,m.

Множина слабо ефективних елементів позначається через $S_f(Y)$ або просто $S(Y)$. В результаті багатокритеріальної оптимізації часто отримують саме ці рішення, хоча вони становлять менший інтерес, ніж ефективні рішення.

Приклад 2.1.

Нехай задана векторна цільова функція f=(f_1,f_2) на множині Y=$\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ (рис. 2.1), а приватні цільові функції f_i слід максимізувати. Маємо двокритеріальну задачу.



Граф відношення Парето Граф відношення Слейтера

Рисунок 2.1 – Приклад двокритеріальної задачі

У цій задачі найкращого рішення нема.

Множина найкращих елементів за Парето:

$$R_p=\{(y_2,y_1),(y_1,y_5),(y_2,y_5),(y_4,y_5),(y_3,y_5),(y_3,y_4)\}$$

Множина найкращих елементів за Слейтером:

$$R_s=\{(y_2,y_5),(y_3,y_5)\}$$

2.2.3 Функції вибору

Функція вибору являє собою загальний підхід, що полягає не в оцінці кожної альтернативи за допомогою одного або декількох критеріїв, не в попарному порівнянні альтернатив за перевагою, а у виділенні з деякої множини альтернатив підмножини «кращих» варіантів.

Нехай X – множина (можливо, нескінченна) усіх альтернатив. Тоді через 2^X позначається множина всіх підмножин X. Серед усіх підмножин X виділяється клас XD допустимих пред’явлень:

$$XD \subseteq 2^X.$$

Функцією вибору на класі допустимих пред'явлень XD називається функція

$$C: XD \rightarrow 2^X$$

така, що для будь-якої множини $A \in XD$

$$C(A) \subseteq A.$$

Функція вибору ставить у відповідність кожній множині альтернатив (з класу допустимих пред'явлень) деяку її підмножину. В результаті відбувається звуження множини альтернатив, що моделює процес вибору кращих варіантів.

За допомогою функції вибору можна описувати і раніше розглянуті варіанти вибору, сформульовані критеріальною мовою або мовою бінарних відношень. Перевагою функції вибору є можливість моделювання складніших принципів вибору. Наприклад, можна вирішувати задачу вибору із заданої множини альтернатив «середнього» або «типового» варіанта. Типові ситуації вибору описуються функціями вибору, які задовольняють певним обмеженням. Це дозволяє будувати та вивчати різні класи функцій вибору. Найчастіше на функції вибору накладаються обмеження, що зводяться до виконання властивостей (аксіом), наприклад, властивості успадкування, властивості відкидання та властивості узгодженості.

Спадкування (С-властивість) передбачає, що варіант, який вибирається з деякої множини, буде також вибраний, якщо пред'явити для вибору будь-яку підмножину, що містить цей варіант:

$$\forall Y' \subseteq Y \in YD \rightarrow C(Y) \cap Y' \subseteq C(Y').$$

$C(Y)$ - це вибрані елементи з Y. Якщо якісь із них будуть пред'явлені у складі підмножини Y', тобто перетин $C(Y) \cap Y'$ є не пустим, то вони також мають увійти у вибір $C(Y')$.

Слід зазначити, що при виборі альтернативи з «середніми» характеристиками середнє у множині Y може не співпадати з середнім у більш вузькій множині Y', $Y' \in Y$.

Відкидання (В-властивість) називається також умовою незалежності від відкинутих альтернатив. Вона означає, що якщо видалити з множини якісь невибрані альтернативи, то вибір на решті множини не зміниться:

$$\forall Y' \subseteq Y \in YD,\ C(Y) \subseteq Y' \rightarrow C(Y') = C(Y).$$

Якщо підмножина Y' включає в себе усі вибрані з Y варіанти $C(Y) \subseteq Y'$, то вибір на Y' співпадає з вибором на Y.

Узгодженість (У-властивість) означає, що якщо варіант вибирається у кожній з двох множин (пред'явлень), він буде вибраний й у поєднанні цих множин:

$$\forall Y', Y'' \in YD, Y' \cup Y'' \in YD: C(Y') \cap C(Y'') \subseteq C(Y' \cup Y'').$$

2.3 Методи багатокритеріальної оптимізації при зведенні задач до однокритеріальних

Усі методи розв’язування задач багатокритеріальної оптимізації засновані на зведенні початкової задачі з векторним критерієм до оптимізаційної задачі із скалярним критерієм. Між собою методи відрізняються тільки механізмом реалізації такого зведення. Розглянемо найбільш поширені з них: головного критерію, згортання критеріїв – лінійної та максимінної згортки, послідовних поступок, ідеальної точки, цільового програмування.

2.3.1 Метод головного критерію

У методі головного критерію як цільова функція вибирається один із функціоналів f_i, наприклад f_1, який найповніше з точки зору ОПР відображає мету прийняття рішення. Решта вимог до результату, що описуються функціоналами $f_2, \dots , f_m$, враховуються за допомогою додаткових обмежень. Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації перетворюється на задачу однокритеріальної оптимізації:

$$f_1(\mathrm{x}) \rightarrow \max_{x \in D}; \; D' \subseteq D \subseteq R'';$$

$$D' = \{x \in D \mid f_1(x) \geq t_i, I=2, \dots ,m\}.$$

Формально отримуємо просту задачу пошуку максимуму функціоналу f_1 на новій допустимій множині D'. Обмеження $f_1(x) \geq t_i$ показує, що функціонали $f_2, \dots, f_m$ обмежені знизу, і можна не добиватися їхніх максимальних значень.

Приклад 2.2.

Вирішується задача про розміщення підприємства.

Маємо сім альтернативних варіантів $x_1 - x_7$, кожен з яких експертами оцінено в умовних одиницях за чотирма чинниками (критеріями):

f_1 – відстань до постачальника сировини;

f_2 – наявність трудових ресурсів;

f_3 – вартість постачання електроенергії;

f_4 – транспортне сполучення.

Експерти визначили головний критерій - наявність трудових ресурсів та обмеження оцінок за іншими критеріями (табл. 2.1). Треба прийняти найкраще рішення про розміщення підприємства за методом головного критерію.

Таблиця 2.1 - Чинники розміщення виробництва

Альтернативи	Критерії				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f2 - головний критерій
x_1	45	29	81	29	Обмеження:
x_2	43	34	79	28	f1>=45
x_3	42	32	76	24	f3>79
x_4	41	34	83	28	f4>=25
x_5	46	35	80	26	
x_6	43	32	83	27	
x_7	44	35	79	25	
	max=	35			

Рішення.

1. З колонки f_2 вибираємо найбільші значення. Вони знаходяться у рядках альтернатив x_5 та x_7 (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – Множина альтернатив, відібраних за головним критерієм

Альтернативи	Критерії			
	f_1	f_2	f_3	f_4
x_1	45	29	81	29
x_2	43	34	79	28
x_3	42	32	76	24
x_4	41	34	83	28
x_5	**46**	**35**	**80**	**26**
x_6	43	32	83	27
x_7	**44**	**35**	**79**	**25**

2. Зі знайденої множини альтернатив вибираємо ту, яка задовольняє заданим обмеженням на оцінки критеріїв (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Альтернатива, яка задовольняє обмеженням

Альтернативи	Критерії			
	f_1	f_2	f_3	f_4
x_1	45	29	81	29
x_2	43	34	79	28
x_3	42	32	76	24
x_4	41	34	83	28
x_5	**46**	**35**	**80**	**26**
x_6	43	32	83	27
x_7	**44**	**35**	**79**	**25**

3. Найкращою альтернативою є x_5.

Рішення цієї задачі подано дуже спрощено. Зазвичай такі задачі вирішуються із застосуванням методів лінійного програмування.

При застосуванні методу головного критерію слід враховувати наступні зауваження.

Для переходу від задачі багатокритеріальної оптимізації до задачі однокритеріальної оптимізації у кожному конкретному випадку потрібне обгрунтування.

Застосування цього на інтуїтивному рівні зазвичай стикається з труднощами, пов'язаними з наявністю декількох «головних» критеріїв, що суперечать один одному.

Не завжди виявляється алгоритм вибору нижніх меж t_i, неправильне їх задання може призвести до порожньої множини D'.

2.3.2 Метод лінійної згортки

Цей метод «скаляризації» (згортки) задачі багатокритеріальної оптимізації дозволяє замінити векторний критерій оптимальності

$$f=(f_1, \dots, f_m)$$

на скалярний

$$J: D \to R.$$

Він заснований на лінійному об'єднанні всіх приватних цільових функціоналів $f_1, \dots, f_m$ в один:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D}; \ \alpha_i > 0, \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Тут α_i - вагові коефіцієнти, які можна розглядати як показники відносної значущості окремих критеріальних функціоналів f_i. Чим більше значення надається критерію f_i, тим більший ваговий коефіцієнт йому присвоюється.

Приклад 2.3.

Треба прийняти найкраще рішення про розміщення підприємства за методом лінійної згортки.

Маємо сім альтернативних варіантів $x_1 - x_7$, кожен з яких експертами оцінено в умовних одиницях за чотирма чинниками тобто, критеріями (табл. 2.4):

f_1 – відстань до постачальника сировини;

f_2 – наявність трудових ресурсів;

f_3 – вартість постачання електроенергії;

f_4 – транспортне сполучення.

Експерти встановили вагові коефіцієнти важливості критеріїв:

α_1=0,3; α_2=0,4; α_3=0,1; α_4=0,2.

Таблиця 2.4 - Чинники розміщення виробництва

Альтернативи	Критерії				
	f_1	f_2	f_3	f_4	
	α_1=0,3	α_2=0,4	α_3=0,1	α_4=0,2	**вагові коефіцієнти**
x_1	45	29	81	29	$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$
x_2	43	34	79	28	
x_3	42	36	76	24	
x_4	41	34	83	28	
x_5	46	35	80	26	
x_6	43	32	83	27	
x_7	44	35	79	25	

Рішення.

1. До таблиці 2.4 додаємо колонку з результатами розрахунку $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ (табл. 2.5).

2. У колонці з результатами розрахунків (табл. 2.5) вибираємо найбільше значення. Рядок, у якому воно знаходиться, є найкращою альтернативою.

Таблиця 2.5 - Результати розрахунків

Альтернативи	Критерії				$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)$
	f_1	f_2	f_3	f_4	
	α_1=0,3	α_2=0,4	α_3=0,1	α_4=0,2	
x_1	45	29	81	29	39
x_2	43	34	79	28	40
x_3	42	36	76	24	39,4
x_4	41	34	83	28	39,8
x_5	46	35	80	26	41
x_6	43	32	83	27	39,4
x_7	44	35	79	25	40,1
				max=	**41**
		найкраща альтернатива			**x_5**

У нашому випадку найкращою альтернативою є x_5.

За наявності приватних критеріїв, що мають суттєво різний характер, складно визначити набір коефіцієнтів α_i, виходячи з неформальних міркувань, які часто пов'язані з результатами експертного аналізу.

2.3.3 Метод максимінної згортки

Цей метод формально можна представити у вигляді:

$$J(x) = \min f_i(x) \to \max_{x \in D} .$$

На цільовий функціонал $J(x)$ тут впливає лише окремий критерій оптимальності, якому даній точці x відповідає найменше значення функціоналу $f_i(x)$, тобто проводиться розрахунок на «найгірший випадок». При цьому по значенню $J(x)$ можна визначити гарантовану нижню оцінку для всіх функціоналів $f_i(x)$. Цей факт розцінюється як перевага максимінного критерію перед методом лінійної згортки.

За необхідності можна нормувати окремі цільові функціонали, тобто, привести у взаємну відповідність масштаби вимірювання значень окремих $f_i(x)$, використовуючи «зважену» форму максимінного критерію:

$$J(x) = \min \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D} .$$

Підбір значень вагових коефіцієнтів α_{i} на основі апріорної інформації дозволяє впливати на процес оптимізації.

Нормалізацію критеріїв (зведення до порівнянного безрозмірного вигляду) можна проводити різними способами, найбільш поширеними серед них є такі:

$$w_i^1(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_2; \end{cases} \qquad w_i^2(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\min}}, \forall i \in I_2, \end{cases}$$

де $f_i^{\max}$ – максимальне значення критерію $f_i(x)$ на множині допустимих альтернатив X, $\forall i \in I_1 \cup I_2$;

$f_i^{\min}$ – мінімальне значення критерію $f_i(x)$ на множині допустимих альтернатив X, $\forall i \in I_1 \cup I_2$;

I_1 – множина індексів, для яких цільові функції максимізуються;

I_2 – множина індексів, для яких цільові функції мінімізуються.

Критерії «згортають» в одну цільову функцію, формуючи так званий узагальнений критерій, у якому враховано відносну важливість кожного з критеріїв за допомогою вагових коефіцієнтів, що мають задовольняти такі співвідношення:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \ \alpha_i \geq 0, \ i \in I, \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Внаслідок цього вихідна багатокритерійна задача зводиться до звичайної задачі оптимізації з одним критерієм.

Приклад 2.4.

Треба прийняти найкраще рішення про розміщення підприємства.

Маємо сім альтернативних варіантів x_1 – x_7, кожен з яких експертами оцінено в умовних одиницях за чотирма чинниками (критеріями):

f_1 – відстань до постачальника сировини;

f_2 – наявність трудових ресурсів;

f_3 – вартість постачання електроенергії;

f_4 – транспортне сполучення.

Експерти встановили вагові коефіцієнти важливості критеріїв:

α_1=0,3; α_2=0,4; α_3=0,1; α_4=0,2 (табл. 2.4).

Знайти найкраще рішення про розміщення підприємства за методом максимінної згортки.

Рішення.

1. До таблиці 2.4 додаємо рядок зі значеннями $f_i^{\min}$ (табл. 2.6):

Таблиця 2.6 – Мінімальні значення за кожним критерієм

Альтернативи	Критерії			
	f_1	f_2	f_3	f_4
	α_1=0,3	α_2=0,4	α_3=0,1	α_4=0,2
x_1	45	29	81	29
x_2	43	34	79	28
x_3	42	36	76	24
x_4	41	34	83	28
x_5	46	35	80	26
x_6	43	32	83	27
x_7	44	35	79	25
min f_i=	**41**	**29**	**76**	**24**

2. Оскільки оцінки критеріїв є різномірними, виконаємо нормалізацію за методом $(f_i(x) - f_i^{\min})/f_i^{\min}$, отримуємо таблицю 2.7.

Таблиця 2.7 – Нормовані значення критеріїв

Альтернативи	Критерії			
	f_1	f_2	f_3	f_4
	α_1=0,3	α_2=0,4	α_3=0,1	α_4=0,2
x_1	0,10	0,00	0,07	0,21
x_2	0,05	0,17	0,04	0,17
x_3	0,02	0,24	0,00	0,00
x_4	0,00	0,17	0,09	0,17
x_5	0,12	0,21	0,05	0,08
x_6	0,05	0,10	0,09	0,13
x_7	0,07	0,21	0,04	0,04
min fi=	**41**	**29**	**76**	**24**

3. До табл. 2.7 додаємо стовпчик з розрахунками $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$:

Таблиця 2.8 – Результати розрахунків

Альтернативи	Критерії				$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$
	f_1	f_2	f_3	f_4	
	α_1=0,3	α_2=0,4	α_3=0,1	α_4=0,2	
x_1	0,10	0,00	0,07	0,21	0,07751
x_2	0,05	0,17	0,04	0,17	0,12088
x_3	0,02	0,24	0,00	0,00	0,10387
x_4	0,00	0,17	0,09	0,17	0,11151
x_5	0,12	0,21	0,05	0,08	0,14127
x_6	0,05	0,10	0,09	0,13	0,09022
x_7	0,07	0,21	0,04	0,04	0,11699
min fi=	**41**	**29**	**76**	**24**	

3. У доданому стовпчику знаходимо максимальне значення:

Таблиця 2.9 – Вибір найкращої альтернативи

Альтернативи	Критерії				$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$
	f_1	f_2	f_3	f_4	
	α_1=0,3	α_2=0,4	α_3=0,1	α_4=0,2	
x_1	0,10	0,00	0,07	0,21	0,07751
x_2	0,05	0,17	0,04	0,17	0,12088
x_3	0,02	0,24	0,00	0,00	0,10387
x_4	0,00	0,17	0,09	0,17	0,11151
x_5	0,12	0,21	0,05	0,08	0,14127
x_6	0,05	0,10	0,09	0,13	0,09022
x_7	0,07	0,21	0,04	0,04	0,11699
min fi=	**41**	**29**	**76**	**24**	
				max=	**0,14127**
				найкраща альтернатива	**x5**

4. Найкращою альтернативою є x_5.

У даному прикладі наведено найпростіший спосіб рішення. Зазвичай такі задачі вирішуються із застосуванням методів лінійного програмування.

2.3.4 Метод послідовних поступок

Метод послідовних поступок належить до категорії лексикографічної оптимізації. Суть методу послідовних поступок полягає в тому, що вихідна багатокритеріальна задача замінюється послідовністю однокритеріальних задач, область допустимих рішень яких звужується від задачі до задачі за допомогою додаткових обмежень з урахуванням вимог до критеріїв. При формулюванні кожної задачі по відношенню до важливішого критерію робиться поступка, величина якої залежить від вимог задачі і оптимального рішення за цим критерієм.

Розв'язування багатокритеріальної задачі методом послідовних поступок полягає у виконанні наступних дій:

1) часткові критерії нумерують у порядку їхньої відносної важливості;

2) максимізують перший, найважливіший критерій:

$$f_1(x) \to \max,\ \ x \in X,$$

отримують оптимальне значення першого критерію $f_1^{\max}$;

3) призначають величину припустимого зниження значення Δ_1 цього критерію і максимізують другий за важливістю частковий критерій за умови, що значення першого критерію повинно відрізнятися від максимального не більш ніж величину встановленого зниження (поступки):

$$f_2(x) \to \max,\ \ f_1(x) \geq f_1^{\max} - \Delta_1,\ \ x \in X;$$

в результаті рішення задачі отримуємо оптимальне значення критерію $f_2^{\max}$;

4) знову призначають величину поступки, але вже другому критерію і знаходять максимум третього за важливістю критерію за умови, щоб значення у перших двох критеріїв не відрізнялися від раніше знайдених максимальних значень більш як на величини відповідних поступок;

5) аналогічним чином по черзі використовуються й інші часткові критерії;

6) якщо задача вирішується для k критеріїв, то маємо:

$$f_{k+1}(x) \to \max,$$

$$f_1(x) \geq f_1^{\max} — \Delta_1,$$
$$f_2(x) \geq f_2^{\max} — \Delta_2,$$
$$...$$
$$f_k(x) \geq f_k^{\max},$$
$$x \in X;$$

задачу вирішено, коли розглянуті всі критерії;

7) оптимальною зазвичай вважають будь-яку стратегію, яка отримана під час розв'язування задачі пошуку умовного максимуму останнього за важливістю критерію.

Приклад 2.5.

Треба прийняти найкраще рішення про розміщення підприємства. Маємо сім альтернативних варіантів x_1 – x_7, кожен з яких оцінено в умовних одиницях за чотирма критеріями f_1, f_2, f_3, f_4 (табл. 2.1). Критерії впорядковані в порядку зменшення важливості для ОПР. Вирішуємо задачу $f(x) \rightarrow \max$.

Таблиця 2.10 – Оцінки критеріїв в умовних одиницях

Альтернативи	Критерії			
	f_1	f_2	f_3	f_4
x_1	45	29	81	29
x_2	43	34	79	28
x_3	42	36	76	24
x_4	41	34	83	28
x_5	46	35	80	26
x_6	43	32	83	27
x_7	44	35	79	25

Рішення.

1. Знаходимо оптимальне значення першого критерію $f_1^{\max}$ та призначаємо величину припустимого зниження значення Δ_1=3:

Таблиця 2.11 – Результати першого кроку

1)	Альтернативи	Критерії			
		f_1	f_2	f_3	f_4
	x_1	45	29	81	29
	x_2	43	34	79	28
	x_3	42	36	76	24
	x_4	41	34	83	28
	x_5	46	35	80	26
	x_6	43	32	83	27
	x_7	44	35	79	25
$\Delta_1=3$	$\max(f_1)$	46			
$f_1(x) \geq f_1^{max} — \Delta_1$		43			

2. Для реалізації другого етапу методу видаляємо альтернативи x_3, x_4, оцінки яких за першим приватним критерієм не задовольняють необхідним обмеженням:

Таблиця 2.12 – Результати другого кроку

2)	Альтернативи	Критерії			
		f_1	f_2	f_3	f_4
	x_1	45	29	81	29
	x_2	43	34	80	28
	x_5	46	35	80	26
	x_6	43	32	83	27
	x_7	44	35	79	25
$\Delta_2=4$	$\max(f_2)$		35		
$f_2(x) \geq f_2^{max} — \Delta_2$			31		

Знаходимо оптимальне значення другого критерію $f_2^{\max}$ та призначаємо величину припустимого зниження значення $\Delta_2=4$.

3. Для реалізації третього етапу методу видаляємо альтернативу x_1, оцінка якої за третім приватним критерієм не задовольняє необхідним

обмеженням. Знаходимо оптимальне значення третього критерію f_3^{max} та призначаємо величину припустимого зниження значення Δ_3=3.

Таблиця 2.13 – Результати третього кроку

3)	Альтернативи	Критерії			
		f_1	f_2	f_3	f_4
	x_2	43	34	80	28
	x_5	46	35	80	26
	x_6	43	32	83	27
	x_7	44	35	79	25
$\Delta_3=3$	$\max(f_3)$			83	
$f_3(x) \geq f_3^{max} - \Delta_3$				80	

4. Видаляємо альтернативу x_7, оцінка якої за третім приватним критерієм не задовольняє необхідним обмеженням. Знаходимо оптимальне значення четвертого критерію f_4^{max}. Рядок, у якому знаходиться максимальне значення за четвертим критерієм, дає найкращу альтернативу - x_2.

Таблиця 2.14 – Результати четвертого кроку

4)	Альтернативи	Критерії			
		f_1	f_2	f_3	f_4
	x_2	**43**	**34**	**80**	**28**
	x_5	46	35	80	26
	x_6	43	32	83	27
	$\max(f_4)$				28

Таким чином, під час застосування методу послідовних поступок багатокритеріальну задачу зводять до почергової максимізації часткових критеріїв і вибору величин поступок. Величини поступок характеризують відхилення пріоритету перших приватних критеріїв над іншими від лексикографічного: чим менші поступки, тим жорсткіший пріоритет.

Метод послідовних поступок може призводити до рішень, що не належать множини Парето-оптимальних рішень. ОПР повинна розуміти, що процедури методу необхідно завершувати перевіркою обраного рішення на оптимальність за Парето.

2.3.5 Метод ідеальної точки

Метод ідеальної точки полягає у знаходженні рішення, якому у просторі значень приватних критеріїв відповідає точка, найближча до тієї, яку задає ОПР, яка вибирає поєднання найкращих значень всіх існуючих приватних критеріїв. Тому така точка не може бути реалізована за заданих обмежень для допустимих рішень. Якщо ОПР не уточнює бажаних значень для показників приватних критеріїв, то вважається, що вибір орієнтується саме на ідеальну (бажану) точку. Знайдене рішення із зазначеною властивістю і приймають як найкраще рішення за методом ідеальної точки.

Наведемо формальне подання цього методу.

Нехай треба знайти найкраще рішення

$$J(x) = \max f_i(x) \rightarrow \max_{x \in D},$$

де $f_i(x)$ - приватні критерії задачі багатокритеріальної оптимізації.

Позначимо через $f_i^{\max}$ - найкращі значення цих критеріїв у заданій області допустимих рішень $x \in D$. У просторі значень критеріїв точка з координатами

$$(f_1^{\max}, f_2^{\max}, \ldots, f_k^{\max})$$

є утопічною точкою, яка є недосяжною.

На основі відстані у просторі часткових критеріїв вводять поняття ідеальної точки, яка є найближчою до утопічної точки. Вона дає оптимальне рішення.

Приклад 2.6

Необхідно за методом ідеальної точки вибрати найкращий варіант із семи допустимих варіантів рішень, які оцінюються за чотирма критеріями. Критерії максимізуються.

Задачу вирішуємо за наступним алгоритмом.

1. До заданої таблиці 2.10 додаємо рядок з максимальними значеннями за кожним критерієм. Отримуємо координати утопічної точки у просторі критеріїв.

2. До таблиці, отриманої після кроку 1 додаємо стовпчик, у якому обчислюються відстані альтернатив від утопічної точки за формулами:

$$v_1 = \sqrt{((f_1^{\text{ут}}-f_1(x_1))^2+((f_2^{\text{ут}}-f_2(x_1))^2+\ldots+((f_k^{\text{ут}}-f_k\,(x_1))^2)}$$

$$\ldots$$

$$v_m = \sqrt{((f_1^{\text{ут}}-f_1(x_m))^2+((f_2^{\text{ут}}-f_2(x_m))^2+\ldots+((f_k^{\text{ут}}-f_k\,(x_m))^2)}$$

3. Зі стовпчика Відстань вибираємо мінімальне значення, яке має альтернатива, позначена у цьому рядку (табл. 2.15). Ця альтернатива є найкращим рощенням.

Таблиця 2.15 - Вибір найкращого рішення за методом ідеальної точки

Альтернативи	Критерії				Відстань
	f_1	f_2	f_3	f_4	
x_1	45	29	81	29	7,34847
x_2	43	34	79	28	5,47723
x_3	42	36	76	24	9,48683
x_4	41	34	83	28	5,47723
x_5	46	35	80	26	**4,3589**
x_6	43	32	83	27	5,38516
x_7	44	35	79	25	6,08276
УТ	46	36	83	29	
мінімальну відстань					4,3589
має альтернатива					x_5

Метод ідеальної точки може призводити до рішень, не оптимальних за Парето. Його процедури оптимізації необхідно доповнити ідентифікацією обраного рішення на оптимальність за Парето.

2.3.6 Метод аналізу ієрархій

Метод аналізу ієрархій (МАІ) дозволяє структурувати складну проблему прийняття рішень у вигляді ієрархії, виконати кількісну оцінку альтернатив та порівняти результати. МАІ є інтерактивним методом. ОПР аналізує проблему і будує ієрархічну структуру, яка включає мету, критерії, альтернативи та інші фактори, що впливають на вибір рішення. Елементи ієрархії містять опис різних аспектів розв’язуваної задачі: матеріальні і нематеріальні чинники, кількісні та якісні характеристики, об’єктивні дані та суб’єктивні експертні оцінки. Далі із застосуванням процедури парних порівнянь визначають пріоритети або встановлюють перевагу елементів побудованої ієрархічної структури.

На заключному етапі виконується синтез (лінійна згортка) пріоритетів на ієрархії, в результаті якої обчислюються пріоритети альтернативних рішень щодо головної мети. Кращою вважається альтернатива з максимальним значенням пріоритету.

Алгоритм застосування методу аналізу ієрархій:

1) побудова ієрархічної моделі проблеми, що включає ціль, альтернативні варіанти досягнення цілі і критерії для оцінки якості альтернатив;

2) визначення пріоритетів усіх елементів ієрархії з використанням методу парних порівнянь;

3) синтез глобальних пріоритетів альтернатив шляхом лінійної згортки пріоритетів елементів на ієрархії;

4) перевірка компонентів ієрархії на узгодженість;

5) вибір рішення на основі отриманих результатів.

Ієрархічна структура — це графічне представлення проблеми у вигляді багаторівневої структури (рис. 2.2), де головна ціль (найважливіший критерій f_1^1) є вершиною, а кожен інший елемент залежить від одного або більше вище розташованих елементів. Підмножини критеріїв f_i^j утворюють інші рівні ієрархії. Важливість критеріїв зменшується з кожним наступним рівнем. На нижньому рівні ієрархії знаходяться альтернативи x_i.

Верхній індекс елементів f_i^j вказує рівень ієрархії, нижній — порядковий номер критерію (рис. 2.2).

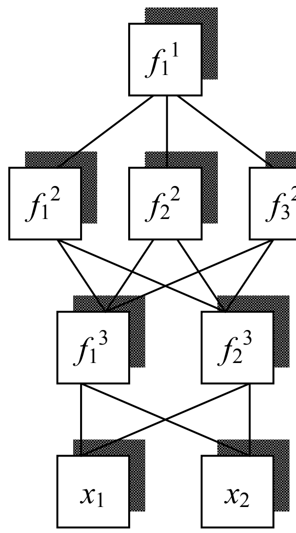


Рисунок 2.2 – Приклад узагальненої ієрархії проблеми

Виконується декомпозиція задачі на простіші складові, визначається відносна значущість альтернатив за ієрархічною системою критеріїв. Відносна значущість виражається чисельно у вигляді векторів пріоритетів.

За характером зв’язків між критеріями й альтернативами визначається два типи ієрархій:

1) ієрархії з однаковим числом і функціональним складом альтернатив, у яких кожен критерій, що має зв’язок з альтернативами, пов’язаний з усіма розглянутими альтернативами;

2) ієрархії з різним числом і функціональним складом альтернатив, у яких кожен критерій, що має зв’язок з альтернативами, пов’язаний не з усіма альтернативами.

Для порівняння альтернатив застосовуються методи попарного порівняння, порівняння альтернатив щодо стандартів і порівняння альтернатив копіюванням.

Попарне порівняння елементів ієрархії.

Розглядається ієрархія з однаковими числом і функціональним складом альтернатив. Для встановлення відносної важливості елементів ієрархії використовується шкала парних порівнянь Т.Сааті (табл. 2.16).

За цією шкалою експерт ставить деяке число у відповідність ступеню переваги одного порівнюваного об'єкта перед іншим. Експерт порівнює вагомість двох об'єктів у досягненні цілі, розташованої на вищому рівні ієрархії, і оцінює це порівняння числом в інтервалі від 1 до 9 або оберненим до нього. Інколи може використовуватися шкала з меншим числом градацій.

Таблиця 2.16 - Шкала парних порівнянь Т. Сааті

Ступінь важливості	**Пояснення**
1 - однакова	Два елементи вносять однаковий внесок у досягнення мети
3 - слабка	Існують недостатньо переконливі міркування на користь переваги одного з елементів
5 - істотна	Є дані для того, щоб довести перевагу одного з елементів
7 - значна	Переконливе свідчення на користь одного з елементів перед іншим
9 - абсолютна	Незаперечні переконливі свідчення на користь переваги одного з елементів над іншим
2,4,6,8 - проміжні значення між сусідніми судженнями	Ситуація, коли необхідне компромісне рішення
обернені величини чисел, наведених вище	Якщо при порівнянні одного елемента з другим, отримано одне з чисел (1−9), то при порівнянні другого з першим, матимемо обернену величину

Закон ієрархічної безперервності вимагає, щоб елементи нижчого рівня були попарно порівняні з елементами наступного рівня і так до вершини ієрархії. Результати порівнянь формують матрицю, де попарно порівнюють відносну важливість лівих елементів таблиці (критеріїв) з елементами (критеріями) вгорі. Якщо елемент зліва важливіший за елемент вгорі, тоді в комірку таблиці 2 заносять позитивне ціле число, якщо навпаки – дробове. Якщо обидва критерії рівнозначно впливають на досягнення головної мети – 1.

Після побудови ієрархії виконується порівняння її елементів. Якщо приймається метод попарного порівняння, то будується множина матриць попарних порівнянь. Для цього в ієрархії виділяють елементи двох типів: елементи-«батьки» і елементи-«нащадки». Елементи-«нащадки» впливають на відповідні елементи вищого рівня ієрархії, які є для них «батьками».

Матриці попарних порівнянь будуються для всіх елементів-«нащадків», що пов’язані з відповідним елементом-«батьком». Елементами-«батьками» можуть бути елементи, що належать будь-якому ієрархічному рівню, крім останнього, на якому розташовані альтернативи.

Парні порівняння проводяться в термінах домінування одного елемента над іншим. Отримані судження виражаються в цілих числах за дев’ятибальною шкалою (табл. 2.16).

Заповнення квадратних матриць попарних порівнянь здійснюється за такими правилами:

1) якщо елемент f_1 домінує над елементом f_2, то клітинка матриці, що відповідає рядкові f_1 і стовпчику f_2 заповнюється цілим числом, а клітинка, що відповідає f_2 і f_1, заповнюється оберненим до нього числом;

2) якщо елемент f_2 домінує над f_1, то ціле число ставиться в клітинку, що відповідає рядкові f_2 і стовпчику f_1, а дріб проставляється в клітинку, що відповідає f_1 і f_2;

3) якщо елементи рівноцінні, то в симетричних клітинках матриці ставляться одиниці:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1/\mu_1 & \mu_1/\mu_2 & \dots & \mu_1/\mu_n \\ \mu_2/\mu_1 & \mu_2/\mu_2 & \dots & \mu_2/\mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n/\mu_1 & \mu_n/\mu_2 & \dots & \mu_n/\mu_n \end{pmatrix}$$

Для отримання кожної матриці попарних порівнянь порядку n експерт виносить $n(n-1)/2$ суджень.

Таблицю парних порівнянь можна записати у вигляді оберненої симетричної квадратної матриці. Матриця формується зі значень парних порівнянь критеріїв на другому рівні щодо загальної мети, розташованої на першому рівні. Такі ж матриці будують для парних порівнянь кожної альтернативи на нижчому рівні щодо критеріїв вищого рівня.

Після формування матриці парних порівнянь за наявними критеріями визначають власний вектор матриці, перевіряють узгодженість матриці за допомогою її власного числа, оскільки власний вектор забезпечує впорядкування пріоритетів, а власне значення є мірою узгодженості оцінок.

Нормалізація головного власного вектора матриці дає вектор пріоритетів. Т.Сааті запропонував чотири алгоритми наближених методів визначення нормованих власних векторів квадратної оберненої симетричної матриці:

1) підсумувати елементи кожного рядка і нормалізувати їх у спосіб ділення кожної суми на суму усіх елементів; сума нормалізованих елементів дорівнює одиниці; перший елемент результуючого вектора буде пріоритетом першого критерію, другий — другого і т.д.;

2) підсумувати елементи кожного стовпця і отримати зворотні величини цих сум; нормалізувати їх так, щоб їхня сума дорівнювала одиниці, розділити кожну зворотну величину на суму всіх зворотних величин;

3) розділити елементи кожного стовпця на суму елементів цього стовпчика (нормалізувати стовпчики), додати елементи кожного отриманого

рядки і розділити цю суму на число елементів рядка; це процес усереднення по нормалізованих стовпчиках;

4) помножити n елементів кожного рядка і отримати корінь n-го ступеня. Нормалізувати отримані числа.

МАІ допускає певний рівень неузгодженості. Відносна неузгодженість не має бути більшою за 10% (в деяких випадках, коли немає потреби у високій точності, дозволяється не більше за 20 %). Якщо відносна неузгодженість виходить за ці межі, тоді експертам необхідно дослідити задачу і перевірити свої судження.

На етапі оцінювання альтернатив визначають вектори пріоритетів альтернатив щодо критеріїв, а також вектор глобальних пріоритетів, на основі якого ухвалювали рішення щодо вибору альтернативи. Кращою вважається альтернатива з максимальним значенням пріоритету.

Контрольні запитання

1. Які задачі називають критеріальними задачами ПР?
2. Які класи та методи рішення задач ПР ви знаєте?
3. Які особливості мають однокритеріальні задачі прийняття рішень?
4. Які задачі називають багатокритеріальними задачами ПР?
5. Сформулюйте загальну постановку задачі багатокритерійної оптимізації.
6. Які альтернативи називають ефективними за Парето?
7. Які альтернативи називають ефективними за Слейтером?
8. Що являє собою функція вибору?
9. Прокоментуйте властивості функції вибору.
10. Назвіть та поясніть методи пошуку ефективних альтернатив.
11. Для чого потрібна нормалізація критеріїв при розв’язанні багатокритеріальних задач?
12. Назвіть та поясніть причини та способи нормалізації.

13. Як застосовуються методи згортки при розв'язанні багатокритерійних задач?

14. Які види згорток ви знаєте?

15. Поясніть суть методів головного критерію, лінійної, максимінної згортки.

16. Поясніть метод послідовних поступок розв'язування багатокритерійних задач.

17. Поясніть метод ідеальної точки.

18. Чи забезпечують методи згортки, послідовної поступки та головного критерію визначення єдиного оптимального розв'язку багатокритеріальної задачі?

19. Яким чином можна враховувати пріоритети критеріїв?

20. Поясніть суть методу аналізу ієрархій.

3 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ ТА НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

3.1. Прийняття рішень в умовах визначеності

До класу прийняття рішень в умовах визначеності належать задачі, для вирішення яких наявна достатня і достовірна кількісна інформація. Такі задачі мають характеристики:

– задача є добре формалізованою, створена адекватна математична модель проблемної області;
– існує єдина цільова функція (критерій оптимізації), що дозволяє робити висновки про якість порівнюваних альтернативних варіантів;
– існує можливість кількісної оцінки значень цільової функції;
– задача має певні ступені свободи (ресурси оптимізації), тобто параметри функціонування системи, які можливо змінювати в деяких межах для поліпшення значення цільової функції.

Для рішення таких задач застосовуються методи математичного програмування.

Як методи математичного моделювання задач прийняття рішень в умовах визначеності традиційно використовуються критеріальний аналіз, лінійне та нелінійне програмування. Всі ці підходи ґрунтуються на систематизованому аналізі, у процесі якого використовують кількісні оцінки, які повинні допомогти ОПР усвідомити, який курс дій слід вибрати.

Лінійне та нелінійне програмування використовується в задачах з одним критерієм вибору рішення та набором обмежень на ведені змінні.

Приклад 3.1.

Максимізувати прибуток підприємства з урахуванням вартості реалізації одиниці продукції, витрат ресурсів, запасів ресурсів.

При оптимальному плануванні на основі лінійного програмування модель може мати вигляд:

$$E = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \to \max\ (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j * x_j \le b_i; \quad i = 1,...,m;$$

$$d_j \le x_j \le D_j; \quad j = 1,...,n.$$

де E – прибуток підприємства; c_j – вартість реалізації одиниці продукції; a_{ij} – витрати ресурсів; b_i – запас i-го ресурсу.

Для рішення задачі необхідно мати значення параметрів: c_j, a_{ij}, b_i, d_j, D_j.

У практичних розрахунках ці величини приймаються детермінованими.

3.2 Моделі вибору рішень за умов визначеності

При прийнятті рішень одним із основних питань є питання вибору. Вибір рішення виконується з урахуванням моделі вибору.

Нехай A - задана множина. R – довільне бінарне відношення на A, тобто. система переваг ОПР. Тоді пара $<A,R>$ називається **моделлю вибору**.

Можна застосувати три основні формальні моделі вибору:

1) вибір найкращого;
2) вибір максимального;
3) вибір раціонального.

3.2.1 Модель вибору найкращого елемента

Нехай задана модель $<A,R>$. Елемент $a^o \in A$ називається **найкращим** по R у A, якщо

$$(a^o, a) \in R \text{ при } \forall a \in A \backslash a^o.$$

Поняття найкращого елемента демонструється на рис. 3.1. У варіанті (а) найкращими елементами є a_1 і a_2 і можна зробити висновок, що елемент a_3 не є найкращим. У варіанті (б) найкращих елементів немає.

При використанні графів поняття найкращого елемента відповідає наявності вершини, з'єднаної стрілками, що виходять з неї, з усіма іншими вершинами графа. При цьому можуть бути і будь-які інші додаткові з'єднання.

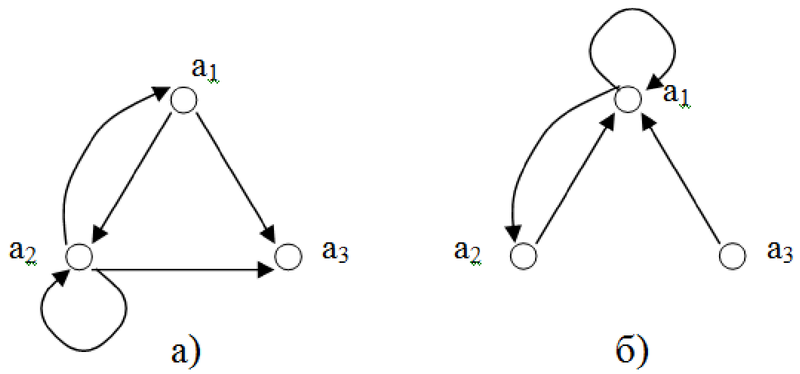


Рисунок 3.1 – Поняття найкращого елемента

3.2.2 Модель вибору максимального елемента

Нехай задана модель <A,R>. Елемент $a^o \in A$ називается **максимальним** по R в A, якщо

$$\forall a \in A\text{: } (a, a^o) \in \mathrm{R} \rightarrow (a^o, a) \in R.$$

Множину всіх максимальних у <A,R> елементів позначимо як $\mathrm{Max}_R\, A$.

Граф відношення, що має максимальні елементи, повинен містити вершини, в яких кожній стрілці, що входить, (якщо така є) відповідає «компенсуюча» стрілка, що виходить, спрямована у вершину, з якої виходить зазначена вхідна стрілка.

Наприклад, максимальними по R елементами є a_1, a_2 (рис. 3.1, а)) і a_2, a_3 (рис. 3.1, б).

Найкращий R в A елемент є і максимальним. Зворотне є правильним лише тоді, коли відношення R має властивість слабкої зв'язності:

$$\forall\, a_1, a_2 : (a_1 \neq a_2) \rightarrow ((a_1, a_2)) \in R) \vee ((a_2, a_1) \in R)\ .$$

3.2.3 Модель вибору оптимального елемента

Елемент $a^o \in A$ називается ***R*-оптимальним** по A, якщо

$$\forall\, a \in A,\ a \neq a^o \rightarrow (a^o, a) \in R.$$

Оптимальною є вершина, куди не входить жодна стрілка.

На рис. 3.1 (а) R-оптимальних елементів нема, на рис. 3.1 (б) a_3 є R-оптимальним елементом.

Для проблеми прийняття рішень є важливим поняття ***зовнішньої стійкості***:

Множина Max_R A є ***зовнішньо стійкою***, якщо для будь-якого елемента $a \in A \setminus \mathrm{Max}_R\, A$ знайдеться такий $a^o \in \mathrm{Max}_R\, A$, що справедливо $(a^o, a) \in R$.

Якщо множина Max_R A є зовнішньо стійкою, то наступний вибір оптимального елемента (на основі, наприклад, залучення додаткової інформації) може проводитися тільки в межах множини $\mathrm{Max}_R\, A$. В іншому випадку, коли стійкості немає, такий висновок вже не матиме розумного обґрунтування.

Зовнішньо стійка множина $\mathrm{Max}_R\, A$ називається ***ядром відношення*** R в A. Іноді термін «ядро» стосовно множини $\mathrm{Max}_R\, A$ використовується і без вимоги зовнішньої стійкості.

На рисунках 3.1 (а) и 3.1 (б) множини $\mathrm{Max}_R\, A$ є зовнішньо стійкими. На рис. 3.2 представлено множину $\mathrm{Max}_R\, A = \{a_1, a_2\}$, що не є зовнішньо стійкою.

Таким чином під задачею прийняття рішення, сформульованою мовою бінарних відношень, розуміють задачу виділення ядра, тобто множини максимальних елементів з A по деякому бінарному відношенню R:

$$A^* = \text{Max}_R\, A.$$

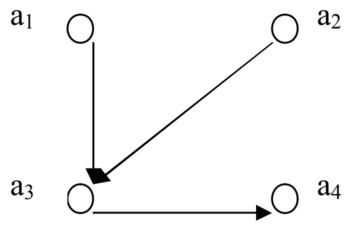


Рисунок 3.2 – Відсутність зовнішньої стійкості

Важливими з практичної точки зору є такі спеціальні види бінарних відношень:

– квазіпорядок (R – є рефлексивним та транзитивним);
– строгий порядок (R – є антирефлексивним та транзитивним);
– еквівалентність (R – є рефлексивним, симетричним та транзитивним).

3.3 Прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності

При прийнятті рішень при невизначеності стану зовнішнього середовища ОПР може не досягнути цілі, оскільки відомо, у яких станах з певною ймовірністю може перебувати середовище, але заздалегідь невідомо, у якому стані воно перебуватиме. Такі задачі ПР називають прийняттям рішень в умовах ризику.

При прийнятті рішень в умовах невизначеності ОПР не знає і не може точного передбачити основні величин і параметри розвитку певного явища. Тобто, ОПР не має статистичних даних про можливі стани середовища.

Зменшення ризику можна досягти шляхом мінімізації невизначеності.

Теорія прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності ґрунтується на наступних вихідних положеннях.

1. Об’єкт прийняття рішення є чітко детермінованим, і за ним відомі основні з можливих факторів ризику.

2. Стосовно об’єкта прийняття рішення вибрано показник, який якнайкраще характеризує ефективність цього рішення.

3. Для об’єкта прийняття рішення вибрано показник, який характеризує рівень його ризику.

4. Визначена кількість альтернатив прийняття рішення.

5. Окреслені ситуації можливого розвитку подій під впливом зміни факторів ризику.

6. За кожним поєднанням альтернатив прийняття рішень і ситуацій розвитку події може бути визначений кінцевий показник ефективності рішення.

7. Для кожної ситуації, яка аналізується, розглядається можлива або неможлива оцінка ймовірності її реалізації.

8. Вибір рішення здійснюється за найкращою з розглянутих альтернатив.

Формально задачу прийняття рішень в умовах невизначеності можна подати наступним чином.

> Маємо задану множину альтернатив X і множину можливих результатів Y. В умовах невизначеності ми не можемо гарантувати настання певного результату при виборі рішення x. Вважаємо, що система переваг ОПР пов'язана з оцінкою корисності наслідків y. Вибір x здійснюється з однією метою – отримати «хороший» результат y, що належить до множини максимальних елементів з множини Y за заданим відношенням R_Y, тобто до ядра. Модель прийняття рішення має вигляд $<Y,R_Y>$. Можливими способами задання відношення R_Y можуть бути одно- чи багатокритеріальні системи оцінок результатів.

У разі, коли множини альтернатив X і результатів Y є кінцевими, ситуацію вибору альтернативи в умовах невизначеності можна представити у вигляді матриці рішень (табл. 3.1).

Вектор Z={ z_1, … , z_m} описує невизначеність обстановки і передбачається кінцевим, як і вектори альтернатив $X=\{x_1, \dots, x_n\}$ і $Y=\{y_{11}, \dots, y_{nm}\}$. Тобто, маємо функцію двох аргументів $y=F(x, z)$: $X \times Z \rightarrow Y$.

Розуміти матрицю рішень слід так. Якщо вибрано рішення x_j, то можуть реалізуватися різні результати з відповідного рядка матриці: $y_{j1}, \dots, y_{nm}$. Який саме результат реалізується, залежить від значення параметра невизначеності z, який може мати різний сенс.

Таблиця 3.1 – Матриця рішень

X	Z				
	z_1	…	z_j	…	z_m
x_1	y_{11}	…	y_{1j}	…	y_{1m}
…	…	…	…	…	…
x_j	y_{j1}	…	y_{jj}	…	y_{jm}
…	…	…	…	…	…
x_n	y_{n1}	…	y_{nj}	…	y_{nm}

У випадку повної визначеності табл. 3.1 складатиметься з одного стовпця - у цьому випадку маємо один стан середовища.

Розрізнятимемо дві основні ситуації:

– вектор Z відбиває так звані «природні» невизначеності, тобто, невизначеність «стану природи» у момент прийняття рішення;
– множина $Z=\{z_1, \dots, z_m\}$ – це множина альтернатив, на якій (одночасно з нами) здійснює вибір рішення інший суб'єкт, керуючись своїм баченням переваги R_y (невизначеність типу «активний партнер»); при цьому вибране нами рішення x характеризує невизначеність обстановки для іншого суб'єкта.

У загальному випадку існує ***функція реалізації***

$$y=F(x, z),$$

де $x \in X$ – множина альтернатив (рішень);

$y \in Y$ – множина результатів;

$z \in Z$ – множина станів середовища.

При розв'язанні задач вважатимемо, що у момент прийняття рішення значення параметра z невідомо.

Функція реалізації ставить у відповідність кожній парі (x, z) результат y. Будемо вважати, що кожен результат оцінюється дійсним числом і потрібно максимізувати цю оцінку (маємо однокритеріальну оцінку результату, значення y і є оцінкою рішення). При цьому функція реалізації перетворюється на відповідну дійсну функцію (цільову функцію) $J(x,z)$, яку слід максимізувати або мінімізувати по х залежно від цілі розв'язуваної задачі.

Введемо бінарне відношення домінування R_1 на множині X:

$$x_1 \overset{R_1}{\succ} x_2 \leftrightarrow \forall z \in Z: J(x_1, z) \geq J(x_2, z),$$

при цьому хоча б для одного z маємо строгу нерівність ($\succ$ - знак строгого домінування).

Знаком ~ позначимо відношення еквівалентності:

$$x_1 \overset{R_1}{\sim} x_2 \leftrightarrow \forall z \in Z: J(x_1, z) = J(x_2, z) .$$

Приклад 3.2.

Розглянемо числову матрицю рішень, де $Z=\{z_1, z_2\}$, $X=\{x_1, \ldots , x_5\}$. Кожному рішенню $x_i \in X$ відповідають дві числові оцінки корисності

$$y_{1i} = J(x_i, z_1);$$

$$y_{2i} = J(x_i, z_2),$$

що відповідні до двох можливих станів середовища. Значення y_{1i} і y_{2i} можна розглядати як координати точки x_i у просторі y_1, y_2. П'яти можливим рішенням відповідатимуть п'ять точок у площині (y_1, y_2). Абсциса кожної точки є результатом відповідного рішення при стані середовища $z = z_1$, а ордината – при $z = z_2$ (рис. 3.3).

Тут, як і в багатокритеріальних задачах, діє принцип Парето, і нас повинні цікавити тільки недоміновані в сенсі відношення R_1 рішення x_i. На рис. 3.3 це рішення x_2 та x_3.

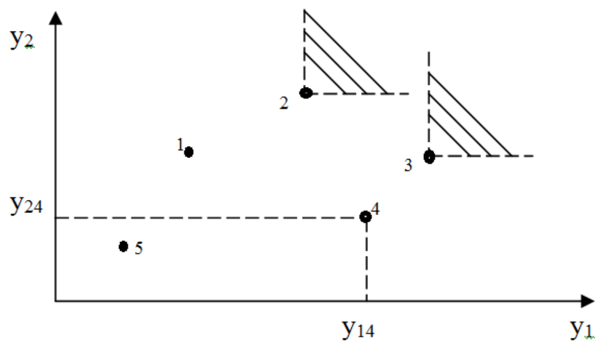


Рисунок 3.3 – Принцип домінування рядків у матриці рішень

Основні принципи паретовського аналізу багатокритеріальних задач переносяться і однокритеріальні задачі прийняття рішень за умов невизначеності. На основі принципу Парето вихідна множина альтернатив X має бути скорочена шляхом видалення домінованих за Парето альтернатив. Це можна зробити, застосовуючи чисельні методи виділення Парето-оптимальних рішень.

При розгляді методів прийняття рішень за умов невизначеності використовується поняття оцінної функції. Очевидно, якщо прийняття рішень відбувається в умовах визначеності, то матриця рішень міститиме тільки один стовпець. Прийняття рішень в умовах невизначеності полягає, по суті, також у формуванні одностовпцевої матриці рішень і зведенні задачі до випадку повної визначеності. Ця процедура виконується неоднозначно за допомогою різних оціночних функцій.

Нехай задана ($n \times m$)-матриця рішень (y_{ij}). Оцінною функцією називається вектор-функція Ψ, що перетворює цю матрицю в одностовцеву матрицю $\{y_i\}$:

$$y_i = \Psi\ (y_{11}, y_{12}, \ \dots\ , y_{nm}),$$

тобто y_i залежить від усіх елементів вихідної матриці. Багато методів прийняття рішень мають оцінні функції виду

$$y_i = \Psi\ (y_{i1}, y_{i2}, \dots , y_{i\mathrm{m}}),$$

коли i-й елемент одностовпцевої матриці залежить лише від елементів i-го рядка вихідної матриці рішень.

Будь-яке рішення в умовах неповної інформації приймається відповідно до певної оцінної функції. Вибір оцінної функції є неформальним і має здійснюватися з урахуванням якісних характеристик ситуації, у якій приймається рішення.

3.4 Прийняття рішень в умовах ризику

При прийнятті рішень в умовах ризику припускають, що кожній альтернативі відповідає свій розподіл ймовірностей на множині результатів. Якщо множина альтернатив і результатів кінцеві, то вважаються відомими ймовірності всіх результатів під час вибору даної альтернативи.

Розглянемо задачу прийняття рішень у загальному випадку, коли є n альтернатив $x_1, \dots , x_n$ та l результатів $y_1, \dots , y_l$.

Станами середовища є можливі комбінації альтернатив та результатів відображень z_j: $X \to Y$, j=1, … , S. У разі кінцевих множин X та Y маємо

$$\mathrm{S} = \prod_{j=1}^{n} S_j ,$$

де S_j – кількість комбінацій альтернативи x_j та можливих результатів;

S – максимально можливе число таких комбінацій.

Вибір стану середовища z_j і альтернативи x_i повністю визначає результат $y_j(x_i)$.

Кожному стану середовища z_j відповідає ймовірність його настання

$$p(z_j) = \prod_{j=1}^{n}\ p_i(y_j(x_i)), j=1, \dots , S ,$$

де $p_i(y_j(x_i))$ – задана ймовірність настання результату y_j при виборі альтернативи x_i.

Для обчислення $p(z)$ слід перемножити ймовірності подій, що зумовлюють стан z_j. Після цього можна побудувати таблицю функції реалізації.

Можливість подання задачі прийняття рішень в умовах ризику у вигляді функції реалізації означає, що статистичну невизначеність, що виявляється в неоднозначному (імовірнісному) зв'язку між альтернативою та результатом, можна інтерпретувати як вплив середовища на результат. Прикладом такої задачі може бути прийняття оптимальних проектних рішень в умовах технологічного розкиду параметрів виробу.

При прийнятті рішення в умовах невизначеності важливо розрізняти дві основні ситуації:

1) результат $y \in Y$, що відповідає рішенню x, реалізується багатократно (наприклад, вибір конструктивних параметрів виробу, що випускається серійно);

2) результат y реалізується однократно (наприклад, вибір оптимальних параметрів унікального виробу).

У ситуації (1) доцільно замінити задачу прийняття рішень імовірнісною задачею та вибирати таку альтернативу x, яка максимізує математичне очікування критерію, тобто, є рішенням задачі

$$J_1(x) = \overline{J(x,z)} \rightarrow \max_{x \in X},$$

де $\overline{J(x,z)}$ - математичне очікування випадкової величини $J(x, z)$.

Найбільш поширеними методами пошуку рішень за умов ризику є наступні методи (критерії).

1. Критерій Байєса-Лапласа – розрахунок на середній результат:

$$J(x,z) = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} p_j \right), \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$ (для матриці доходів);

$$J(x,z) = \min_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} p_j \right), \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$ (для матриці затрат)

де a_{ij} – оцінка результату, p_j – ймовірність стану z_j.

2. Критерій Бернуллі – розрахунок на середній результат при недостатній інформації про середовище:

$$J(x,z) = \max_i \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} y_{ij} \right)$$ (для матриці доходів),

$$J(x,z) = \min_i \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} y_{ij} \right)$$ (для матриці затрат).

3. Критерій Ходжа-Лемана – гарантує певний мінімум:

$$J(x,z) = \max_i \left(c \sum_{j=1}^{m} y_{ij} p_j + (1-c) \min_j y_{ij} \right),$$

де параметр c $(0 \le c \le 1)$, з одного боку, задає ступінь довіри до розподілу ймовірностей, а з іншого – ступінь небажаності появи дуже малих значень.

4. Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціоналу - обмеження через величину дисперсії щодо середнього значення

$$J(x,z) = \min_i D_i = \min_i \left(\sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \sum_{j=1}^{m} y_{ij} p_j \right)^2 p_j \right)$$

5. Критерій Гермейєра – є узагальненням максимінного критерію

$$J(x,z) = \max_i \min_j y_{ij} p_j$$ (для матриці доходів),

$$J(x,z) = \min_i \max_j y_{ij} p_j$$ (для матриці затрат),

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1.$$

6. Критерій суб'єктивно-середнього жалю – спирається на суб'єктивну ймовірність станів зовнішнього середовища:

$$J(x,z) = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} p_j \right), \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$ (для матриці доходів);

$$J(x,z) = \min_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} p_j \right), \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$ (для матриці затрат);

$$p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} y_{ij} \right).$$

7. Критерій Хоменюка - суб'єктивні ймовірності обчислюються за допомогою матриці жалю:

$$J(x,z) = \max_i \sum_{j=1}^{m} y_{ij}\, p_j,$$

$$p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} (\max_i y_{ij} - y_{ij}) \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\max_i y_{ij} - y_{ij}) \right)$$ (для матриці доходів),

$$J(x,z) = \min_i \sum_{j=1}^{m} y_{ij}\, p_j,$$

$$p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} (\min_i y_{ij} - y_{ij}) \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\min_i y_{ij} - y_{ij}) \right)$$ (для матриці затрат).

Наведемо приклади застосування деяких критеріїв.

Критерій Байєса-Лапласа.

Правило вибору оптимальної альтернативи на основі розв'язання задачі оптимізації називається критерієм математичного очікування (критерієм Байєса-Лапласа). Якщо припустити, що функціонал J характеризує «корисність» або «дохід», отриманий від рішення x і доходу, що реалізувався, то математичне очікування можна розглядати як «середній дохід» і, вирішуючи задачу, ми фактично максимізуємо «середній дохід».

Приклад 3.3.

Фірма виконує будівництво споруди. Треба прийняти рішення про вибір фірми-підрядника.

Дано (рис. 3.4): можливі терміни виконання роботи та оцінки у балах за виконання робіт (а), дві альтернативні фірми (б), таблиці ймовірностей виконання фірмами робіт у минулому - раніше заданого терміну, у заданий термін, пізніше.

Знайти найкраще рішення про укладання договору з фірмою-підрядником за критерієм отримання максимальних балів за виконані роботи.

Термін виконання	Позначення	Оцінка (бали)
Раніше	Р	5
Вчасно	В	4
Пізніше	П	-2

а) можливі терміни виконання роботи

Альтернативи	Позначення
Фірма Х1	x1
Фірма Х2	x2

б) альтернативи

	Р	В	П
x1	0,80	0,17	0,57
x2	0,14	0,67	0,14

в) таблиця ймовірностей виконання робіт

Рисунок 3.4 – Вихідні дані задачі

Рішення.

1. Розрахуємо ймовірності станів середовища z_j. При цьому будемо враховувати попарні комбінації термінів виконання робіт альтернативними фірмами x_1 і x_2. Ймовірність станів z_i отримуємо так:

$$p(z_1) = p(x_1^P) * p(x_2^P) = 0{,}80*0{,}14 = 0{,}11;$$

$$p(z_2) = p(x_1^P) * p(x_2^B) = 0{,}80*0{,}67 = 0{,}53$$

і т.д.

Результати розрахунків зведені у табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Ймовірності станів середовища

	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9
p(zi)	0,11	0,53	0,11	0,02	0,11	0,02	0,08	0,38	0,08
x1	Р	Р	Р	В	В	В	П	П	П
x2	Р	В	П	Р	В	П	Р	В	П

2. Складемо матрицю доходів (табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Матриця доходів

	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9
p(zi)	0,11	0,53	0,11	0,02	0,11	0,02	0,08	0,38	0,08
x1	5	5	5	4	4	4	-2	-2	-2
x2	5	4	-2	5	4	-2	5	4	-2

3. За критерієм Байєса-Лапласа у табл. 3.4 розрахуємо середні бали з урахування можливих станів середовища:

$$\overline{J(x_1, z)} = 5*0,11 + 5*0,53 + 5*0,11+$$

$$+4*0,11 + 4*0,53 + 4*0,11 +$$

$$+(-2)*0,11 + (-2)*0,53 + (-2)*0,11= 7,90;$$

$$\overline{J(x_2, z)} = 5*0,11 + 4*0,53 +(-2)*0,11 +$$

$$+ 5*0,02 + 4*0,22 +(-2)*0,03 +$$

$$5*0,08 + 4*0,38 +(-2)*0,08 = 9,30.$$

Таблиця 3.4 – Вибір рішення

	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	
p(zi)	0,11	0,53	0,11	0,02	0,11	0,02	0,08	0,38	0,08	
x1	5	5	5	4	4	4	-2	-2	-2	7,90
x2	5	4	-2	5	4	-2	5	4	-2	9,30
									max=	9,30
									Рішення	x2

$\overline{J(x_1, z)} > \overline{J(x_2, z)}$, тому керуючись критерієм числа очікуваних балів за виконання робіт, приймаємо рішення, що доцільно найняти фірму Х2. «У середньому» така стратегія призведе до успіху, хоча в кожній конкретній ситуації може реалізовуватись будь-який результат.

Критерій недостатньої підстави Бернуллі.

Цей критерій застосовується в умовах повної невизначеності, коли інформація про можливі стани середовища z відсутня.

Критерій недостатньої основи полягає в наступному. Якщо немає даних, щоб вважати одну подію з повної системи несумісних подій вірогіднішою за інші, то всі події слід вважати рівноймовірними. При кінцевому числі розглянутих множин цей принцип призводить до оцінної функції

$$y_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \to \max_i$$

Множник *1/m* можна опустити без зміни впорядкування альтернатив, і після цього перейти до операції підсумовування «доходів» по рядках матриці рішень.

Приклад 3.4.

Вирішимо задачу прикладу 3.2, застосувавши метод Бернуллі (табл. 3.5).

Таблиця 3.5 – Результати рішень за методом Бернуллі

	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	
x1	5	5	5	4	4	4	-2	-2	-2	2,33
x2	5	4	-2	5	4	-2	5	4	-2	2,33

Альтернативи є рівнозначними.

При практичному використанні розглянутих статистичних критеріїв можуть виникати значні труднощі, наприклад, при побудові набору станів середовища. Стани z_i повинні бути несумісними, а весь набір $\{z_i\}$ повинен мати властивість повноти у статистичному сенсі. Проблема формування набору $\{z_i\}$ для складних ситуацій прийняття рішень є окремим і складним завданням. Подібні завдання слід вирішувати особливими нестатистичними методами, або, припускаючись певного ризику, переходити до заміни ймовірностей деякими коефіцієнтами впевненості.

3.5 Прийняття рішень за умов повної невизначеності

Застосування методів теорії ймовірностей при одноразовій реалізації результату прийнятого рішення є неправомірним. Схожа ситуація виникає і при багаторазовій реалізації результату, але при припущенні, що або розподіл ймовірностей параметра z невідомий, або параметр невизначеності z не є випадковим, але змінюється невідомим чином (не має властивості статистичної стійкості). У цих випадках інформація про фактор невизначеності має вигляд:

$$z \in Z,$$

де Z – деяка множина. Такої інформації недостатньо для однозначного розв'язання задачі $J(x,z) \rightarrow \max\limits_{x}$ вибору альтернативи x.

Визначимо вектор x як функцію z:

$$x = x(z).$$

Ця формула дозволяє відобразити множину невизначеності природних факторів Z на множину $G_x \subset X$, яка називається множиною невизначеності рішень x. Вибір конкретного елемента з множини G_x може базуватися на введенні різних гіпотез щодо поведінки середовища.

Для вибору найкращих рішень в умовах невизначеності найчастіше застосовують наступні критерії.

1. Критерій Вальда (найбільша обережність) – розрахунок на найгірший результат:

$$J(x,z) = \max_i \min_j y_{ij} \text{ (для матриці доходів),}$$

$$J(x,z) = \min_i \max_j y_{ij} \text{ (для матриці затрат).}$$

2. Критерій азартного гравця – розрахунок на сприяння середовища ОПР:

$$J(x,z) = \max_i \max_j y_{ij}$$ (для матриці доходів),

$$J(x,z) = \min_i \min_j y_{ij}$$ (для матриці затрат).

3. Критерій Севіджа – розрахунок на мінімальне жалкування:

$$J(x,z) = \min_i(\max_j(\max_i y_{ij} - y_{ij}))$$ (для матриці доходів),

$$J(x,z) = \max_i(\min_j(y_{ij} - \min_\text{i} y_{ij}))$$ (для матриці затрат).

4. Нейтральний критерій на жалю – середовище може бути не тільки ворожим, а й прихильним або нейтральним до ОПР.

У разі нейтрального середовища маємо критерій

$$J(x,z) = \min_i(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\max_i y_{ij} - y_{ij}))$$ (для матриці доходів),

$$J(x,z) = \max_i(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\min_i y_{ij} - y_{ij}))$$ (для матриці затрат).

Цей метод є аналогом нейтрального критерію для матриці виграшів.

5. Критерій Гурвіца – балансування результату між найгіршим та найкращим:

$$J(x,z) = \max_i(\alpha \min_j y_{ij} + (1-\alpha)\max_j y_{ij})$$

де $\alpha -$ константа, яка задовольняє умові $0 \le \alpha \le 1$.

6. Критерій добутку:

$$J(x,z) = \max_i \prod_{j-1}^{m} y_{ij}, \quad y_{ij} > 0; \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}$$

Якщо умова y_{ij}>0 порушується, тоді всі елементи функції реалізації збільшують на деяку константу α ($a > |\min_{i,j} a_{ij}|$). Константу α визначають співвідношенням

$$a = |\min_{i,j} y_{ij}| + 1.$$

Розглянемо деякі критерії на прикладах.

Критерій Вальда.

Однією з найважливіших гіпотез щодо поведінки середовища є ***гіпотеза антагонізму***.

Гіпотеза антагонізму полягає в припущенні, що середовище поводиться «найгіршим» чином для особи, яка приймає рішення. Для вибору оптимальної альтернативи слід вирішити таку задачу оптимізації:

$$J_4(x) = \min_{z \in Z} J(x,z) \rightarrow \max_{x \in X},$$

тобто підібрати "найгірший" можливий варіант. Такий принцип вибору оптимальної альтернативи x* називається також принципом гарантованого результату (або критерієм Вальда). Число $J_A(x^*)=J^*$ називається гарантованою оцінкою, а сам елемент x^* - гарантованим рішенням. Сенс цього рішення в тому, що при будь-якому значенні параметра невизначеності z вибір рішення $x=x^*$ гарантує, що за будь-якого z значення цільового функціоналу $J(x,z)$ буде не менше, ніж J^*.

Оцінна функція даного критерію для дискретного випадку має вигляд:

$$y_i = \min_j y_{ij}$$

Якщо значення функціоналу $J(x,z)$ відображає не «корисність» чи «дохід» альтернативи, а втрати, то задача пошуку рішення полягає в мінімізації функції $J(x,z)$, а максимінний критерій перетворюється на мінімаксний:

$$J_5(x) = \max_{z \in Z} J(x,z) \rightarrow \min_{x \in X}.$$

Максимінні та мінімаксні критерії є вкрай «обережними» та іноді призводять до нелогічних висновків.

Приклад 3.5.

Нехай функція $J(x,z)$ задана з допомогою таблиці 5, де елементи матриці рішень мають сенс втрат, заданих у деяких умовних одиницях. Ставиться завдання мінімізувати втрати.

Таблиця 3.6 - Матриця втрат

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	10 100	100
x_2	10 000	10 000

З першого погляду здається, що логічним є вибір рішення x_1, оскільки можливо, що фактор невизначеності набуде значення z_2. Проте, за мінімаксним критерієм слід вибрати альтернативу x_2, у цьому разі ми гарантовано отримаємо втрати не більше 10 000, незалежно від значення z.

Покажемо, як можна виправити становище із «зайвою» обережністю. Припустимо, що задана таблиця 3.7, що є реалізацією функціоналу $J(x,z)$.

Таблиця 3.7 – Матриця рішень

X	Z				
	z_1	…	z_j	…	z_m
x_1	y_{11}	…	y_{1j}	…	y_{1m}
…	…	…	…	…	…
x_j	y_{j1}	…	y_{jj}	…	y_{jm}
…	…	…	…	…	…
x_n	y_{n1}	…	y_{nj}	…	y_{nm}

Тут $y_{ij}= J(x,z)$. Передбачається, що множини X і Z є кінцевими. Замість $\{y_{ij}\}$ введемо нову матрицю:

$$r_{ij} = \max_{k=1,\dots,n} y_{kj} - y_{ij}\,,$$

якщо y – дохід;

$$r_{ij} = y_{ij} - \min_{k=1,\dots,n} y_{kj}\,,$$

якщо y – втрати.

r_{ij} – це різниця між найкращим значенням у стовпці та значенням y_{ij} при тому ж j. Обробка матриці виконується по стовпцях. Побудована матриця r_{ij} називається матрицею жалю.

Критерій мінімального жалю

Цей критерій був запропонований Севіждем. Він полягає у застосуванні мінімаксного критерію до матриці жалю, незалежно від того, який характер мали елементи y_{ij} - «доходи» або «втрати». Числа r_{ij} завжди мають характер «втрат» та їх необхідно мінімізувати. Оцінна функція за умови, що вихідна матриця є матрицею доходів, має вигляд:

$$y_i = \max_j \left(\min_i \; y_{ij} - y_{ij} \right) \rightarrow \min_i .$$

Матриця жалю для розглянутого прикладу має вигляд:

Таблиця 3.8 - Матриця жалю

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	100	0
x_2	0	9 900

Згідно з критерієм Севіжда вибираємо першу альтернативу, цього вибору ми прагнули інтуїтивно.

Критерій Гурвіца (песимізму-оптимізму)

Дозволяє зробити вибір оптимального рішення. Він охоплює різні підходи до прийняття рішень – від найоптимістичнішого до більш песимістичного.

Оптимістичний підхід передбачає, що y_{ij} – «виграш» або «дохід» і слід зробити вибір x^* з умови

$$\max_i \max_j \; y_{ij} \rightarrow i_*; \; x^* = x_{i*} .$$

При песимістичному підході рішення, що обирається, відповідає

$$\max_i \min_j y_{ij}.$$

При використанні критерію Гурвіца встановлюється баланс між випадками граничного оптимізму та крайнього песимізму. Якщо y_{ij} означає «прибуток» (тобто відповідні величини необхідно максимізувати), вибирається рішення з умови

$$\max_i \{\alpha \max_j y_{ij} + (1 - \alpha) \min_j y_{ij}\},\ 0 \le \alpha \le 1,$$

де α – коефіцієнт песимізму-оптимізму.

Оцінна функція для випадку «доходів» має вигляд:

$$y_i = \alpha \max_j y_{ij} + (1- \alpha) \min_j y_{ij} \rightarrow \max_i .$$

У разі «витрат» оптимальне рішення задовольняє співвідношення:

$$\min_i \{\alpha \min_j y_{ij} + (1 - \alpha) \max_j y_{ij}\} .$$

Проміжні значення α характеризують схильність ОПР до песимізму або оптимізму. За відсутності вираженої складності вважають α=1/2.

Приклад 3.6.

Підприємство, яке займається обслуговуванням населення, має визначити рівень пропозиції послуг так, щоб задовольнити потреби клієнтів упродовж наступних свят. Точна кількість клієнтів невідома, але очікується, що вона може дорівнювати одному з чотирьох значень: z_1=200, z_2=250, z_3=300, z_4=350. Для кожного із значень z_i існує найкращий рівень пропозиції з погляду витрат. Відхилення від цих рівнів призводять до додаткових витрат через перевищення пропозиції над попитом, або через неповне задоволення попиту.

Витрати J в умовних одиницях наведено в табл. 3.9.

Таблиця 3.9 – Матриця витрат

X	Z			
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	5	10	18	25
x_2	8	7	8	23
x_3	21	18	12	21
x_4	30	22	19	15

Кожен із рівнів пропозиції x_i виявляється найкращим для певного стану середовища z_i: x_1 – при z_1, x_2 – при z_2, x_3 – при z_3, x_4 – при z_4, тобто. таблиця містить «зайвих» x_i. Застосування мінімаксного критерію дозволяє отримати гарантоване значення J^*=21 та $x^*=x_3$.

За критерієм Севіджа побудуємо матрицю жалю:

$$\{ r_{ij} \} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 11 & 4 & 6 \\ 25 & 15 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Після мінімаксної обробки матриці $\{r_{ij}\}$ отримуємо $x^*=x_2$, що відповідає «жалкуванню», рівному 8.

Застосування критерію Гурвіца при α-= ½ дає рішення $x^*=x_1$ або $x^*=x_2$ (табл. 3.10).

Таблиця 3.10 – Критерій Гурвіца

	$\min\limits_j y_{ij}$	$\max\limits_j y_{ij}$	$\alpha \min\limits_j y_{ij} + (1 - \alpha) \max\limits_j y_{ij}$
x_1	5	25	15
x_2	7	23	15
x_3	12	21	16,5
x_4	15	30	22,5

Розглянуті вище критерії застосовуються часто, але мають ряд недоліків і можуть давати логічно суперечливий результат. Зазначені труднощі можна продемонструвати на наведених нижче прикладах.

Приклад 3.7.

ОПР має застосувати один з критеріїв для прийняття рішення, але не може зупинитися на жодному з критеріїв:

- мінімаксному,
- Гурвіца ($\alpha = 3/4$),
- Бернуллі згідно з матрицею «доходів» (табл. 3.11).

Таблиця 3.11 – Матриця доходів

X	Z		
	z_1	z_2	z_3
x_1	2	12	-3
x_2	5	5	-1
x_3	0	10	-2

ОПР вирішує вважати альтернативу x_i кращою, ніж x_j у тому випадку, якщо на це вказує більшість із трьох розглянутих критеріїв.

Порядок отриманих переваг має вигляд:

1. $x_2 \succ x_3 \succ x_1$;
2. $x_3 \succ x_1 \succ x_2$;
3. $x_1 \succ x_2 \succ x_3$

Більшість критеріїв вказує на те, що $x_1 \succ x_2$, $x_2 \succ x_3$, $x_3 \succ x_1$, тобто, отримано так зване «порочне коло» (порушення транзитивності). Можна ввести впорядкування виду

$$x_1 \overset{P}{\succ} x_2 \leftrightarrow \forall z \in Z\colon\ F(x_1,z) \geq F(x_2,z)\ ,$$

де хоча б одна нерівність строга. Це властивість строгого домінування одного рядка матриці рішень над іншою. Інтуїтивно хочеться, щоб «хороший» критерій задовольняв вимогу:

Якщо $x_1 \overset{P}{\succ} x_2$, то x_2 не може бути оптимальним.

В той же час застосування максимінного або мінімаксного критерію та критерію Гурвіца до матриці доходів (табл. 3.12) призводить до оптимальності як x_1, так і x_2, що суперечить розглянутій вимозі.

Таблиця 3.12 – Матриця доходів

X	Z		
	z_1	z_2	z_3
x_1	0	1	3/4
x_2	0	1	1/2

Доцільно пред'явити ще одну вимогу до «хорошого» критерію:

Додавання до матриці рішень нового рядка, яка домінується одним із вже наявних рядків, не впливає на оптимальність прийняття рішень.

У наведеному нижче прикладі показано, що порушення такої вимоги може бути правомірним.

Приклад 3.8.

Добродій Х випадково зайшов у незнайомий ресторан, офіціант повідомив йому, що відвідувач може отримати відварену лососину за 2,5 у.о., або біфштекс за 4 у.о. У першокласному ресторані він вибрав би біфштекс, але, беручи до уваги невідому атмосферу, і враховуючи різницю цін, він вибирає лососину. Незабаром офіціант повертається і повідомляє, що в меню є також смажені равлики та жаб'ячі лапки по 4,5 у.о. Добродій Х не їсть равликів та жаб'ячі лапки, але змінює своє замовлення – скасовує лососину та замовляє біфштекс.

У матрицю рішень додано новий рядок, який начебто не повинен вплинути на оптимальне рішення, але досвід добродія Х підказав йому, що равлики та жаб'ячі лапки подають тільки в хороших ресторанах, і це дозволило йому зробити висновок про те, що ресторан є гарним, і змінити рішення.

Приклад 3.9.

Застосування критерію Гурвіца на вирішення наступної задачі дає рішення, що суперечить здоровому глузду. Дано матрицю доходів:

Таблиця 3.13 – Матриця доходів

X	Z				
	z_1	z_2	z_3	…	z_{100}
x_1	0	1	1		1
x_2	1	0	0		0

Згідно з критерієм Гурвіца обидва рішення є рівноцінними та їх оцінки для будь-якого α є рівними $1 - \alpha$. Однак, якщо справжній стан середовища невідомий, то ми інтуїтивно вибрали б рішення x_1, вважаючи, що станом середовища «імовірніше» виявиться один із станів $z_2,\ldots, z_{100}$, а не z_1.

У цій задачі виникає проблема «повного незнання», але ми припускаємо, що ймовірність одного зі станів $z_2,\ldots, z_{100}$ виявиться вищою, ніж стану z_1.

Таким чином, складність проблеми прийняття рішень значною мірою визначається самим процесом формалізації задачі, наприклад, як відповідної матриці рішень. Процес формалізації повинен виконуватися досвідченим фахівцем у предметній галузі – системним аналітиком.

Контрольні запитання

1. Які характеристики має прийняття рішень в умовах визначеності?
2. Які методи для моделювання та рішення задач прийняття рішень в умовах визначеності?
3. Назвіть та охарактеризуйте моделі вибору рішень за умов визначеності.
4. Поясніть поняття зовнішньої стійкості.

5. Охарактеризуйте задачі прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності.
6. Як формально можна подати задачу прийняття рішень в умовах невизначеності?
7. Що таке матриця рішень?
8. Що називають функцією реалізації?
9. Чим характеризуються задачі прийняття рішень в умовах ризику?
10. Чим характеризуються задачі прийняття рішень в умовах повної невизначеності?
11. Поясніть різницю між задачами прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності.
12. Назвіть та охарактеризуйте найбільш поширені методи пошуку рішень за умов ризику.
13. Назвіть та охарактеризуйте найбільш поширені методи пошуку рішень за умов невизначеності.
14. Які труднощі можуть виникати при виборі критерію прийняття рішень?

4 БАГАТОСТАДІЙНІ ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

У реальному світі більшість дій суспільства орієнтовані на те, щоб знайти правильне рішення для складної проблеми, враховуючи інтереси та вимоги різних осіб, які приймають рішення. Складні задачі можна розв’язувати як прості багатоетапні задачі.

Приклади, які ми розглядали у попередніх розділах, включали єдине рішення. Однак на практиці часто існують задачі, коли рішення приймають послідовно крок за кроком. Такі задачі є складними і виконується їхня декомпозиція. Результат рішення на одному кроці впливає на наступне рішення. Цю послідовність неможна виразити матрицею рішень, тому потрібно використовувати якийсь інший спосіб опису та розв'язання задачі.

Багатостадійний процес прийняття рішень – це процес із багатьма стадіями, дискретними чи безперервними, які включають послідовні рішення.

Задачі багатостадійного (багатоетапного, багатокрокового) прийняття рішень є багатогранними. Для представлення таких задач можуть розглядатися різні моделі багатостадійності від простих до досить складних. Існують традиційні підходи, що дозволяють зрозуміти головні риси та особливості багатостадійних задач прийняття рішень в умовах визначеності та невизначеності.

Для розуміння багатостадійних задач прийняття рішень особливо важливим є моделювання, цілі, оскільки процеси та умови ПР у кожному випадку є унікальними. Модель багатостадійного прийняття рішень може враховувати соціальні, культурні, етичні, освітні, психологічні, екологічні, технологічні, технічні, організаційні та управлінські аспекти макро-, мікро- та мезосередовища. Такі моделі особливо важливі для ОПР, які ніколи не стикалися з подібною ситуацією.

Згідно з одним з підходів припускають, що вирішувана проблема є одноцільовою, і ціллю є, наприклад, максимізація "доходів" (прибутку, корисності) або мінімізації "витрат". Передбачається, що отримання "доходів" реалізується на кожному етапі процесу прийняття рішень, а потім ці "доходи" підсумовуються (принцип адитивності). Саме такий підхід ми використаємо у цьому розділі.

4.1 Процес прийняття багатостадійних рішень

Багатостстадійна модель прийняття рішень складається з ряду етапів. Основними етапами такої системи є ініціація, ідентифікація, оцінювання, пошук рішень, прийняття рішення.

1. Ініціація.
   1.1. Розробка загальної стратегії рішення задачі.
   1.2. Розробка можливих моделей рішення задачі.
   Результат: опис задачі та розроблена попередня загальна модель її рішення.
2. Ідентифікація.
   2.1. Розробка вимог та деталізація цілей.
   2.2. Визначення набору критеріїв.
   2.3. Групування критеріїв.
   Результат: сформований набір критеріїв для рішення задачі.
3. Оцінювання задачі
   3.1. Виявлення вимог для оцінювання аналогічних задач.
   3.2. Формулювання альтернатив для оцінювання.
   3.3. Визначення вимог для оцінювання реальної задачі.
   Результат: сформована множина альтернатив для оцінювання задачі.
4. Пошук рішень
   4.1. Створення матриці прийняття рішень.
   4.2. Вибір методу встановлення переваг для порівняння.
   4.3. Вибір методів рішення задачі.

4.4. Застосування методів пошуку рішень.

4.5. Порівняння результатів рішень.

Результат: Множина найкращих рішень.

5. Прийняття рішень

5.1. Якщо знайдені рішення не задовільні, перейти до пунктів 1, 2, чи 3.

5.2. Якщо знайдені рішення задовільні, вибрати й застосувати рішення.

У реальному житті моделювання багатостадійних проблем стосується майбутнього, а прийняття рішень визначається різними типами значень критеріїв. Розроблена багатостадійна може модель підходити для розв'язання складних проблем у різних предметних областях для вирішення широкого кола складних задач.

4.2 Моделювання багатостадійних задач прийняття рішення

Рішення, які виконуються за кілька етапів, складаються з проміжних рішень на кожному етапі з першого до останнього. ОПР повинна вибрати на кожному етапі який крок зробити далі для досягнення конкретної кінцевої цілі найкращим чином (як правило, за критерієм корисності).

Можна розглядати купу випадків такого роду: робота над отриманням ступеня магістра, будівництво, планування IT-проєктів, розслідування, відновне лікування тощо.

Засобом для моделювання багатостадійних задач прийняття рішень та їх аналізу є дерева рішень. У найбільш простому вигляді дерево рішень – це графічне подання процесу рішення у вигляді ієрархічної, послідовної структури.

Розглянемо одноцільові задачі прийняття рішень. Часто рішення таких задач має ціллю визначення максимальних «доходів» або мінімальних «витрат». Передбачається, що отримання «доходів» реалізується кожному етапі процесу прийняття рішень, і «доходи», отримані на проміжних етапах, сумуються.

Модель рішення такої задачі може бути представлена у вигляді графа – дерева рішень. Дерево рішень показує шляхи з вершин, що входять до множини початкових вершин, до вершин кінцевої множини вершин. З кожною вершиною графа асоціюється деякий стан S_i, в якому знаходиться об'єкт прийняття рішень, а дуги відповідають можливим переходам з одного стану до іншого залежно від прийнятих рішень.

Дерево рішень є графом зв'язків альтернатив з результатами. Рішення, що приймаються на кожному кроці, формують ланцюжок, у якому кожне рішення залежить від попереднього результату (множини результатів). Дерево рішень відображає структуру проблеми. Пошук рішення на дереві виконують зліва направо.

Детерміністське дерево рішень (рис. 4.1) є моделлю прийняття рішень за умов визначеності.

Процес прийняття рішень відбувається послідовно у часі, це відповідає руху по дереву рішень зліва направо. Серед множини початкових і множини кінцевих вершин розрізняють допустимі. Вважається, що кожна гілка графа має свою вагу – дійсне число, що відповідає локальним «доходам» або локальним «витратам» при переході до іншого стану. Основне завдання полягає в оптимальному виборі початкової вершини (з множини допустимих) і шляху з неї в певну допустиму кінцеву вершину. Під оптимальністю розуміють побудову допустимого шляху, що реалізує максимальний прибуток або мінімальні витрати. Множини допустимих початкових і кінцевих вершин можуть бути одноелементними.

На рис. 4.1 граф містить лише основні (вирішальні) вершини. У кожну таку вершину можна потрапити у різний спосіб – тобто, кожна вершина має кілька дуг, що входять до неї.

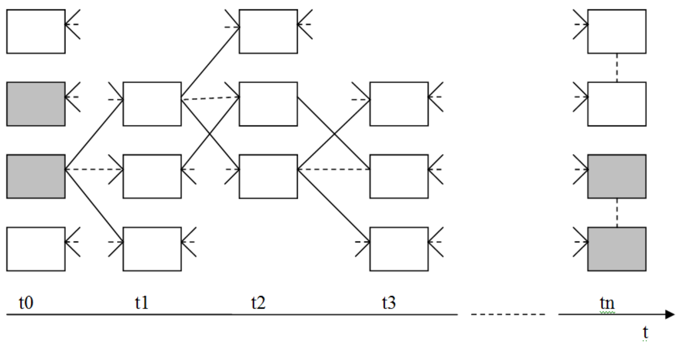


Рисунок 4.1 – Дерево рішень за умов визначеності

При прийняття рішень в умовах ризику вважається, що є кінцева кількість стадій та кінцева кількість станів S_i. З вершини S_i може виходити кілька дуг, що відповідає кільком альтернативам d_i при прийнятті рішення (рис. 4.2). Вибір конкретної альтернативи переводить систему у нову «вирішальну» вершину (новий стан).

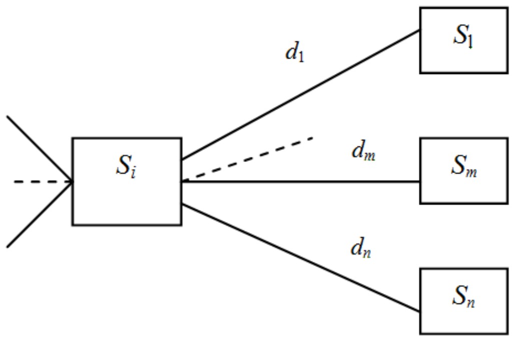


Рисунок 4.2 – Вирішальні вершини

Багатостадійні рішення можуть прийматися за умов невизначеності. У цьому випадку вибір конкретного рішення визначає не новий стан системи, а задає лотерею на множині нових станів або щільність розподілу ймовірностей (рис. 4.3).

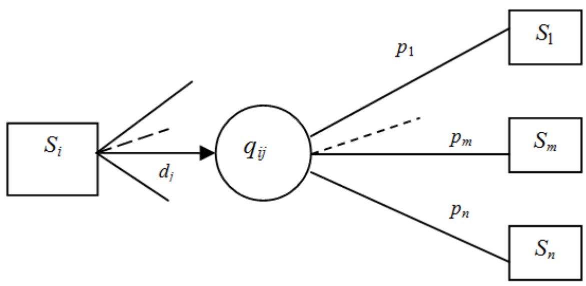


Рисунок 4.3 – Ймовірнісний зв'язок вершин

Після вибору d_j ми потрапляємо до деякої «випадкової» допоміжної вершини q_{ij} і далі переходимо до однієї з вершин S_l, S_m, S_n з урахуванням заданих ймовірностей p_l, p_m, p_n, де $\Sigma p_i = 1$. У цьому випадку використовується ймовірнісна невизначеність.

За повної невизначеності структура (рис. 4.3) зберігається, але дуги не матимуть ваги.

4.3 Метод динамічного програмування

Динамічне програмування — це підхід до оптимізації, який перетворює складну проблему на послідовність більш простих задач. Істотною характеристикою цього підходу є багатоетапність процедури оптимізації. Динамічне програмування надає загальну основу для аналізу багатьох типів проблем.

У динамічному програмуванні можна використовувати різні методи оптимізації для вирішення проміжних задач, котрі є складовими більш загальної задачі. Перш за все, необхідно зрозуміти, як конкретну велику задачу ефективно представити у вигляді стадій та які підзадачі треба вирішити на кожній стадії.

У термінології динамічного програмування кожна точка, де приймаються рішення, зазвичай називається етапом процесу прийняття рішень. На будь-якому етапі нам потрібно лише знати, на якому етапі рішення ми знаходимося, щоб мати можливість приймати наступні рішення. Наші подальші рішення не залежать від того, як ми прибули на певний етап.

При прийнятті рішень використовують принцип оптимальності.

Будь-яка оптимальна стратегія пошуку рішення має таку властивість, що незалежно від поточної стадії та поточного рішення, рішення, що залишилися, повинні входити до оптимальної стратегії щодо стану, який є результатом поточного рішення.

Динамічне програмування є водночас і методом математичної оптимізації, і методом комп'ютерного програмування. В обох контекстах воно використовує підхід спрощення пошуку розв'язку складної задачі через розбиття її на простіші підзадачі, часто методом рекурсії. Хоча деякі задачі не можуть бути розв'язані таким чином, рішення, які охоплюють кілька точок у часі, дійсно часто розбиваються рекурсивно на підзадачі. Белман називав це принципом оптимальності. Подібно до цього, в комп'ютерних науках про проблему, яка може бути розбита на підзадачі рекурсивно, говорять що вона має оптимальну підструктуру.

Рекурсивне подання задач та їхніх складових під задач дає можливість знайти оптимальне рішення загальної задачі через розв’язання її компонентів.

Найважливішими компонентами задач динамічного програмування є стадії, стани, рекурсивна оптимізація.

Стадії. Суттєвою особливістю підходу динамічного програмування є структурування задач оптимізації на кілька етапів, які вирішуються послідовно один за одним. Хоча кожна одноетапна задача розв’язується як звичайна оптимізаційна задача, її розв’язок допомагає визначити характеристики наступної одноетапної задачі в послідовності.

Часто етапи являють собою різні періоди часу при плануванні рішення задачі. Наприклад, задачу визначення рівня запасів окремого товару можна подати як задачу динамічного програмування. Змінна рішення – це сума замовлення на початку кожного місяця; метою є мінімізація загальних витрат на замовлення та зберігання запасів; основне обмеження вимагає, щоб попит на продукт був задовільнений. Якщо ми можемо робити замовлення запасів лише на початку кожного місяця, і нам потрібна оптимальна політика замовлення на наступний рік, ми можемо розбити проблему на 12 етапів, кожен з яких представляє рішення про замовлення на початку відповідного місяця.

Іноді етапи не мають часових рамок. Наприклад, у простій ситуації, вибору оптимального маршруту для перевезення пасажирів задача визначення маршрутів з мінімальними затримками між будинками пасажирів та автостоянками у центрі міста може бути сформульована як задача динамічного програмування. У цьому випадку змінна рішення полягає у виборі шляху на будь-якому перехресті, а стадії рішення визначаються як кількість перехресть, які потрібно пройти. Але задачі, які можна сформулювати як багатостадійні задачі динамічного програмування, але які не мають часових наслідків, часто важко розпізнати.

Стани. З кожною стадією задачі оптимізації пов'язані стани процесу рішення. Стани відображають інформацію, необхідну для повної оцінки наслідків поточного рішення для майбутніх дій.

У задачі планування запасів кожна стадія має лише одну змінну, що описує стан: рівень запасів окремого товару. У задачі мінімізації затримок на маршруті також маємо одну змінну стану: перехрестя, на якому пасажир перебуває на певному етапі.

Визначення станів системи є, мабуть, найважливішим питанням розробки моделі динамічного програмування. Для цього немає встановлених правил. Насправді, здебільшого, це мистецтво, яке часто вимагає творчості та тонкого розуміння проблеми, що вивчається. Основними властивостями, які повинні мотивувати вибір станів, є:

– стани повинні передавати достатньо інформації для прийняття майбутніх рішень незалежно від того, як процес досяг поточного стану;
– кількість змінних стану має бути невеликою, оскільки обчислювальні зусилля, пов’язані з підходом динамічного програмування, є непомірно дорогими, коли у формулюванні моделі бере участь більше двох або, можливо, трьох змінних стану.

Ця остання особливість значно обмежує застосовність динамічного програмування на практиці.

Рекурсивна оптимізація. Кінцевим компонентом підходу динамічного програмування є розробка процедури рекурсивної оптимізації, яка будується на розв’язанні загальної N-етапної проблеми шляхом спочатку розв’язання одноетапної задачі та послідовного включення етапів один за одним і вирішення одноетапних проблем, поки не буде знайдено загальний оптимум.

Ця процедура може базуватися на зворотному індуктивному процесі, де перший етап, який потрібно проаналізувати, є завершальним етапом проблеми, а проблеми розв’язуються, у зворотному напрямі, повертаючись на один етап за раз, доки не будуть включені всі етапи.

Крім того, рекурсивна процедура може базуватися на прямому індукційному процесі, де першим етапом, який потрібно розв’язати, є початковий етап проблеми, а проблеми розв’язуються на один етап за раз, доки не будуть включені послідовно решта етапів. У певних налаштуваннях задачі можна застосувати лише один із цих процесів індукції (наприклад, у більшості задач, пов’язаних із невизначеністю, допускається лише зворотна індукція).

Основою процедури рекурсивної оптимізації є так званий принцип оптимальності, який уже було сформульовано: оптимальна стратегія має властивість, що незалежно від поточного стану та поточного рішення, інші рішення повинні складати оптимальну стратегію щодо стану внаслідок поточного рішення.

Наведемо формальне подання задачі динамічного програмування. Припустімо, що ми маємо багатостадійний процес прийняття рішень, де прибуток (або вартість) конкретного етапу становить:

$$f_n(d_n, s_n), \tag{4.1}$$

де d_n — допустиме рішення, яке можна вибрати з множини D_n, а

s_n — стан процесу з n етапами.

Зазвичай множина можливих рішень D_n, доступних на даному етапі, залежить від стану процесу рішення на етапі s_n, і може бути формально записана як $D_n(s_n)$. Для спрощення нашого представлення множину можливих рішень будемо позначати просто D_n.

Припустімо, що всього в процесі є N етапів, і ми продовжуємо вважати n кількістю етапів, що залишилися в процесі рішення. Це передбачає скінченну кількість етапів у процесі прийняття рішення і, отже, включає час.

Крім того, ми припускаємо, що стан s_n системи з n етапами є повним описом системи для прийняття рішень і що знання попередніх станів непотрібне. Наступний стан процесу повністю залежить від поточного стану процесу та поточного прийнятого рішення. Тобто, можна визначити функцію переходу так, що, для заданого стану процесу s_n, з n наступними стадіями, наступний стан процесу з $(n - 1)$ наступними стадіями визначається як

$$s_n - 1 = t_n(d_n, s_n), \tag{4.2}$$

де d_n – рішення, обране для поточної стадії та стану.

Слід зазначити, що немає невизначеності щодо того, яким буде наступний стан, коли відомі поточний стан і поточне рішення.

Багатостадійний процес прийняття рішень можна описати діаграмою, наведеною на рис. 4.4.

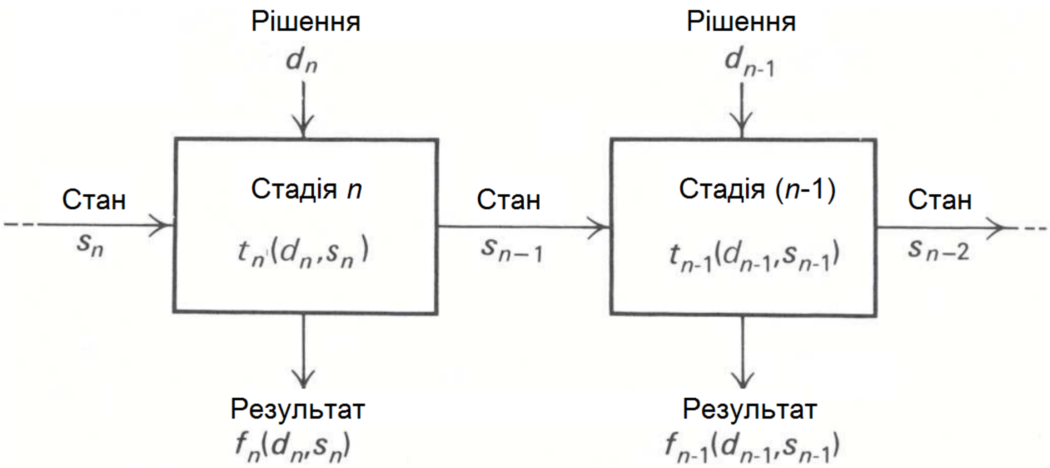


Рисунок 4.4 – Багатостадійний процес рішення

Маючи поточний стан s_n, який є повним описом системи для прийняття рішень із n подальшими стадіями, ми хочемо вибрати рішення d_n, яке максимізує загальний прибуток на інших стадіях. Рішення d_n, яке має бути вибране з набору D_n допустимих рішень, дає на цій стадії результат $f_n(d_n,s_n)$ і призводить до нового стану s_n−1 з (n − 1) подальшими стадіями. Новий стан на початку наступної стадії визначається функцією переходу $s_n-1 = t_n(d_n,s_n)$, і новий стан є повним описом системи для прийняття рішень з (n − 1) наступними стадіями. Стадії повернення не залежать одна від одної.

Для ілюстрації розглянемо приклад оптимізації складу товарів. У цьому випадку стан s_n системи може бути представлений рівнем запасів I_n за n місяців до горизонту планування. Рішення d_n — це сума O_n для замовлення поточного місяця. Сумарний рівень запасів I_n−1 з рештою (n − 1) місяцями визначається співвідношенням запасів і балансу:

$$I_n - 1 = I_n + O_n - R_n,$$

де R_n — потреба поточного місяця.

Таким чином, формально функція переходу з n етапами визначається так:

$$I_n - 1 = t_n\,(I_n,\, O_n) = I_n + O_n - R_n\,.$$

Для задачі оптимізації складу товарів ціллю є мінімізація розміру замовлення товару і витрат вантажоперевезення на кожній стадії, які є сумою $C_n(I_n, O_n)$.

Зазвичай головною ціллю рішення задач є максимізація прибутку або мінімізація витрат на всіх стадіях. Єдиними обмеженнями на усіх стадіях процесу рішення є те, що на кожній стадії рішення повинні вибиратися з множини допустимих рішень D_n і переходи з одного стану до іншого мають виконуватися згідно (4.2).

Отже, якщо ми перебуваємо в стані s_n з n подальшими етапами, задача оптимізації полягає у виборі змінних d_n, d_{n-1}, . . . , d_0 для рішення задачі:

$$v_n(s_n) = \max[f_n(d_n, s_n) + f_{n-1}(d_{n-1}, s_{n-1}) + \cdots + f_0(d_0, s_0)]\ ,$$

за умови

$$s_{m-1} = t_m(d_m, s_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$
$$d_m \in D_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.3}$$

$v_n(s_n)$ є цільовою функцією, оскільки вона представляє максимально можливий прибуток за n стадій. Формально визначимо:

$v_n(s_n)$ – оптимальне значення всіх наступних рішень, враховуючи, що ми перебуваємо в стані s_n і маємо пройти n стадій.

Оскільки $f_n(d_n, s_n)$ включає лише змінну рішення d_n, а не змінні рішення $d_{n-1}, \ldots, d_0$, ми можемо спочатку максимізувати цю останню групу для кожного можливого d_n, а потім вибрати d_n, щоб максимізувати весь вираз. Тому ми можемо переписати рівняння (4.3) наступним чином:

$$v_n(s_n) = \max[f_n(d_n, s_n) + \max[f_{n-1}(d_{n-1}, s_{n-1}) + \cdots + f_0(d_0, s_0)]]\ ,$$

за умови

$$s_{n-1} = t_n(d_n, s_n) \quad s_{m-1} = t_m(d_m, s_m)\ (m = 1, 2, \ldots, n\text{-}1),$$
$$d_n \in D_n \qquad d_m \in D_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n\text{-}1). \tag{4.4}$$

Друга частина (4.4) є функцією оптимізації для $(n - 1)$-стадійної задачі динамічного програмування, визначеної заміною n на $(n - 1)$ у (4.3). Тому можна переписати (4.4) як рекурсивне співвідношення:

$$v_n(s_n) = \max[f_n(d_n, s_n) + v_{n-1}(s_{n-1})]\ ,$$

за умови

$$s_{n-1} = t_n(d_n, s_n),$$
$$d_n \in D_n. \tag{4.5}$$

Щоб підкреслити, що це оптимізація по d_n, ми можемо переписати рівняння (4.5) так:

$$v_n(s_n) = \max[f_n(d_n, s_n) + v_{n-1}(t_n(d_n, s_n))]\ ,$$

за умови

$$d_n \in D_n. \tag{4.6}$$

Співвідношення (4.5, 4.6) є формальним поданням принципу оптимальності. Як ми зазначали, цей принцип говорить, що оптимальна послідовність рішень для багатостадійної задачі має властивість, що незалежно від поточного рішення d_n і поточного стану s_n, усі наступні рішення повинні бути оптимальними, враховуючи стан $s_n - 1$, що є результатом поточне рішення.

Оскільки $v_n(s_n)$ визначається рекурсивно через $v_{n\text{-}1}(s_{n\text{-}1})$, щоб розв'язати рівняння (4.5, 4.6) необхідно розпочати обчислення, розв'язавши проблему «нульової стадії». Проблема нульової стадії не визначається рекурсивно, оскільки після останньої стадії процесу прийняття рішення більше немає етапів. Тоді задача нульової стадії полягає в наступному:

$$v_0(s_0) = \max[f_0(d_0,s_0)]\ ,$$

за умови

$$d_0 \in D_0. \tag{4.7}$$

Часто у задачі нульової стадії немає, оскільки $v_0(s_0)$ є однією стадією для всіх кінцевих стадій. У прикладі з вибором шляху через послідовність перехресть з мінімальною затримкою проблема нульової стадії складалася з прийняття затримки для перехрестя, що відповідає кожному кінцевому стану.

Ми вивели функцію оптимізації для зворотної індукції. Можна так само легко вивести функцію оптимізації і для прямої індукції. Припускаючи, що ми продовжуємо нумерувати стани «назад», ми можемо визначити функцію оптимізації для прямої індукції наступним чином:

$u_n(s_n)$ – оптимальне значення всіх попередніх рішень, вважаючи, що ми перебуваємо у стані s_n і маємо пройти n стадій.

Тоді функція оптимізації визначається так:

$$u_{n\text{-}1}\,(s_{n\text{-}1}) = \max[u_n(s_n) + f_n(d_n,\, s_n)]\ ,$$

за умови

$$s_{n\text{-}1} = t_n(d_n,s_n)\ ,\ d_n \in D_n, \tag{4.8}$$

де виконано підстановку

$$u_n(s_n) = 0$$

або шляхом розв’язання певної задачі, зовнішньої щодо рекурсивного відношення, яка надає значення перебування в певному початковому стані.

Для прямої індукції потрібно розглядати проблему як перевірку всіх комбінацій поточних станів і дій, які створюють конкретний стан на наступному етапі, а потім вибрати оптимальну серед цих комбінацій.

Наведені формули справедливі незалежно від того, чи є рішення дискретними, неперервними чи сумішшю обох. Все, що необхідно, це те, щоб рекурсивне співвідношення було розв’язним для оптимального рішення на кожній стадії, і це дає змогу визначити глобальне оптимальне рішення загальної задачі. Задача оптимізації, яка визначається на кожній стадії, може призвести до застосування широкого спектру методів, наприклад, лінійного програмування, теорії мереж, цілочисельного програмування тощо, залежно від природи функції переходу, набору обмежень D_n, і форму оптимізаційної функції.

Рівняння (4.5), (4.6), (4.8) виконуються незалежно від кількості станів. Рекурсивне відношення потрібно вирішити для всіх можливих станів системи на кожній стадії. Якщо простір станів, тобто множина можливих станів, є безперервною, і тому на кожному етапі можлива нескінченна кількість станів, тоді кількість станів зазвичай стає кінцевою шляхом дискретної апроксимації множини можливих станів, і використовуються ті самі процедури.

4.4 Детермінований випадок. Метод Беллмана

Метод Беллмана – інша назва метода динамічного програмування. Розглянемо суть застосування цього методу на прикладі.

Приклад 4.1.

Маємо дерево рішень (рис. 4.5) з позначенням витрат. Треба знайти багатостадійне рішення, яке дасть мінімальні витрати.

На дереві рішень є одна початкова та одна кінцева вершини. Реально кінцевими є чотири вершини, що відповідають стадії t_3. Вершина на стадії t_4 є фіктивною (нульовим станом), вона введена для зведення задачі до графа з однією кінцевою вершиною (одним кінцевим станом). Так само можна робити і з початковими вершинами, якщо їх кілька. Числа біля дуг графа є витрати по переходу від однієї «вирішальної» вершини до іншої. Дуги між стадіями t_3 та t_4 мають нульові ваги, тобто. всі вершини, що є на стадії t_3, є кінцевими.

Вирішуємо задачу вибору шлях від початкової вершини до кінцевої із мінімальними сумарними витратами.

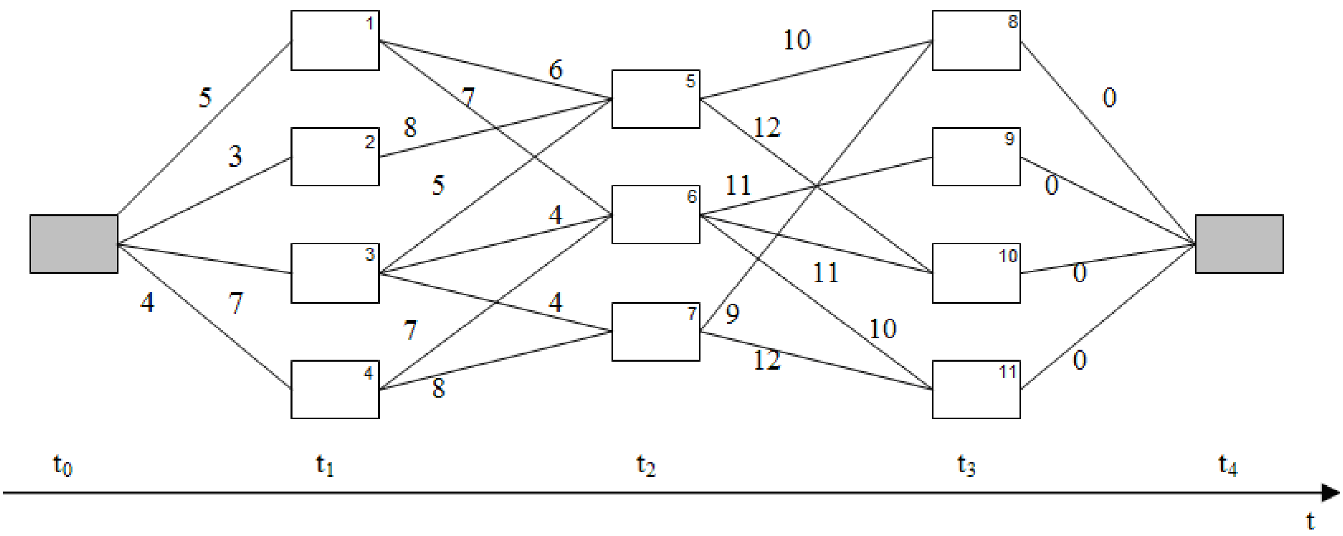


Рисунок 4.5 – Дерево рішень із заданими витратами

Спробуємо розв’язати цю задачу, не використовуючи метод динамічного програмування. Будемо рухатися зліва направо по графу, починаючи з фіктивного нульового стану. Маємо альтернативи витрат 5, 3, 7, 4. Вибираємо вершину 2 з мінімальними витратами, що дорівнюють 3. З цієї вершини далі, на стадії t_1, маємо тільки один варіант переходу до вершини 5 з вартістю 8, тобто, сумарні витрати становлять 11. На стадії t_2 маємо два варіанти переходу. Вибираємо перехід з мінімальними витратами до вершини 8. Таким чином, витрати становитимуть 21.

Вирішимо цю ж задачу, застосувавши метод Беллмана.

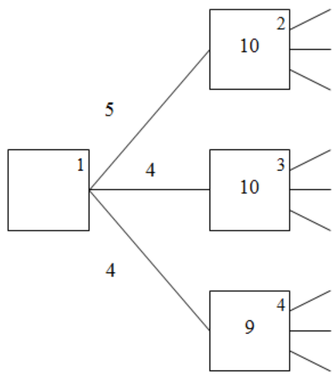
Ідея методу Беллмана полягає у наступному.

1. Задача пошуку оптимального шляху починає вирішуватися з кінця.

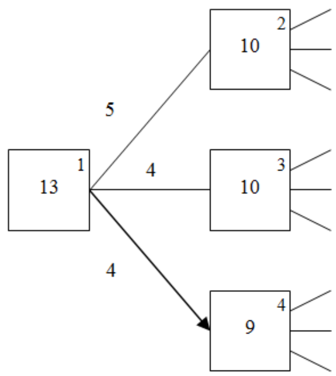
2. Вихідна задача розглядається як множина аналогічних задач з різними початковими вершинами і однією кінцевою вершиною. У ході рішення вважається, що як початкова вершина послідовно виступають усі без винятку вершини вихідного графа.

У прикладі просуватимемося по графу(рис. 4.5) зправа наліво. У вершинах виставлятимемо числа: у правому верхньому кутку – порядковий номер вершини, у центрі – мінімальні сумарні витрати при проходженні цієї вершини.

Номери вершин позначені у кутках прямокутників (на рис. 4.6 а це 2, 3, 4), а отримані шляхом розрахунків суми витрат – у центрах. Треба помітити вершину 1. Вартість шляху з вершин 2, 3, 4 становить відповідно 15, 14, 13, мінімальну вартість 13 маємо при переході з вершини 9. У вершину 1 записуємо мінімальну вартість, і між вершинами 9 і 1 малюємо стрілку, яка буде частиною оптимального шляху (рис. 4.6, б).



а)



б)

Рисунок 4.6 – Метод динамічного програмування Беллмана

Розмітимо граф (рис.4.5), просуваючись зправа наліво.

Для визначення оптимального шляху проходимо граф справа наліво, виконуючи розрахунки та розставляючи стрілки (рис. 4.7).

Вершина на етапі t_0 містить позначку 20 - це знайдена вартість оптимального шляху з початкової вершини до цільової.

На графі може бути більше одного оптимального шляху. Відповідно до методу Беллмана у ході рішення задачі знаходять усі оптимальні шляхи.

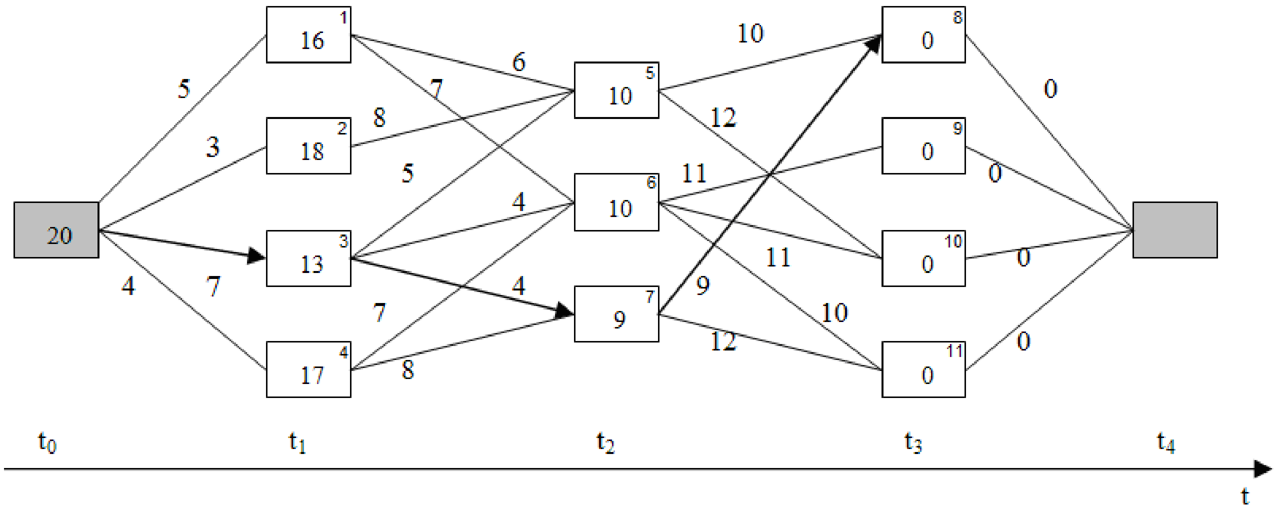


Рисунок 4.7 – Розмічений граф

Застосувавши функцію оптимізації для зворотної індукції методу динамічного програмування, отримали оптимальне значення витрат 20, що менше від значення 21, що ми отримали, вирішуючи задачу без методу динамічного програмування.

Проведена процедура дає змогу знаходити абсолютний глобальний мінімум.

4.5 Багатостадійні задачі прийняття рішень в умовах невизначеності

У процесі детермінованого динамічного програмування, якщо система перебуває в стані s_n з n подальшими стадіями, і рішення d_n вибрано з набору допустимих рішень для цієї стадії та стану, тоді на даній стадії повертається значення $f_n(d_n,s_n)$ і стан системи на наступній стадії, визначений як $s_{n-1}= t_n(d_n,s_n)$, обидва точно відомі. Цей детермінований процес можна представити за допомогою дерева рішень (рис. 4.8). Маючи поточний стан рішення і конкретне рішення, можемо визначити з повною впевненістю, до стану воно веде на наступній стадії. При зворотному ході по стадіях переходи між станами також відомі і відбуваються по гілках дерева (рис. 4.8).

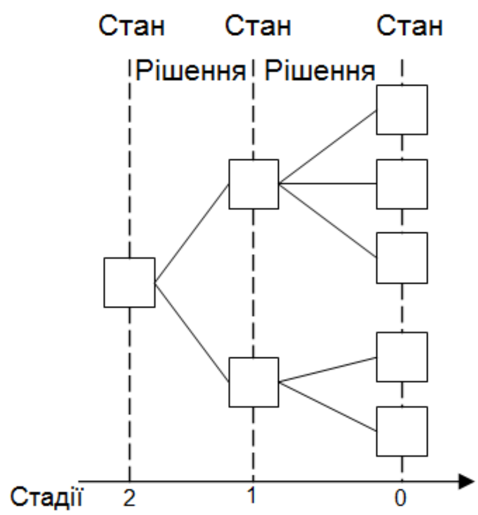


Рисунок 4.8 – Дерево рішень для динамічного програмування у детермінованому випадку

Коли в задачі динамічного програмування присутня невизначеність, конкретне рішення для даного стану та даної стадії саме по собі не визначає стан системи на наступній стадії; це рішення може навіть не визначати прибуток на поточній стадії. У динамічному програмуванні в умовах невизначеності, враховуючи стан системи s_n з n наступними стадіями і поточним рішенням d_n, відбувається невизначена подія, яка визначається випадковою змінною $\tilde{e}_n$, значення якої e_n не знаходиться під контролем ОПР.

Функція повернення стадії може залежати від цієї випадкової величини, тобто

$$f_n(d_n,s_n, \tilde{e}_n),$$

тоді як стан системи s_{n-1} з $(n-1)$ подальшими стадіями залежатиме тільки від випадкової величини

$$\tilde{s}_{n-1} = t_n(d_n,s_n, \tilde{e}_n).$$

Результати випадкової змінної регулюються розподілом ймовірностей $p_n(e_n|d_n,s_n)$, який може бути однаковим для кожної стадії або може залежати від стадії, стану на поточній стадії та навіть рішення на поточній стадії.

На рис. 4.9 зображено дерево рішень для динамічного програмування в умовах невизначеності, де квадратами зображені стани, в яких необхідно приймати рішення, а колами – невизначені події, результати яких не контролюються ОПР.

Такі дерева рішень можуть бути корисними для аналізу рішень в умовах невизначеності, якщо кількість можливих станів не надто велика. Дерево рішень забезпечує графічне представлення послідовності рішень, результатів і результуючих станів у тому порядку, в якому рішення мають бути прийняті, а результати стають відомими ОПР у ході рішення.

На відміну від детермінованого динамічного програмування, у якому оптимальні рішення на кожному етапі можна визначити на початку, у динамічному програмуванні в умовах невизначеності оптимальне рішення на кожному етапі можна вибрати лише після того, як ми знаємо результат невизначеної події на попередньому етапі.

На початку все, що можна визначити, це набір рішень, які будуть прийняті умовно в результаті послідовності невизначених подій.

У динамічному програмуванні в умовах невизначеності, оскільки стадія повернення та результуюча стадія можуть бути невизначеними на кожній стадії, ми не можемо просто оптимізувати суму функцій стадії повернення. Потрібно оптимізувати очікуваний результат на стадіях рішення задачі, беручи до уваги послідовність, у якій можуть бути прийняті рішення, і результати невизначених подій, які можуть бути відомими ОПР. У цій ситуації зворотна індукція може бути застосована для визначення оптимальної стратегії, але пряма індукція - ні.

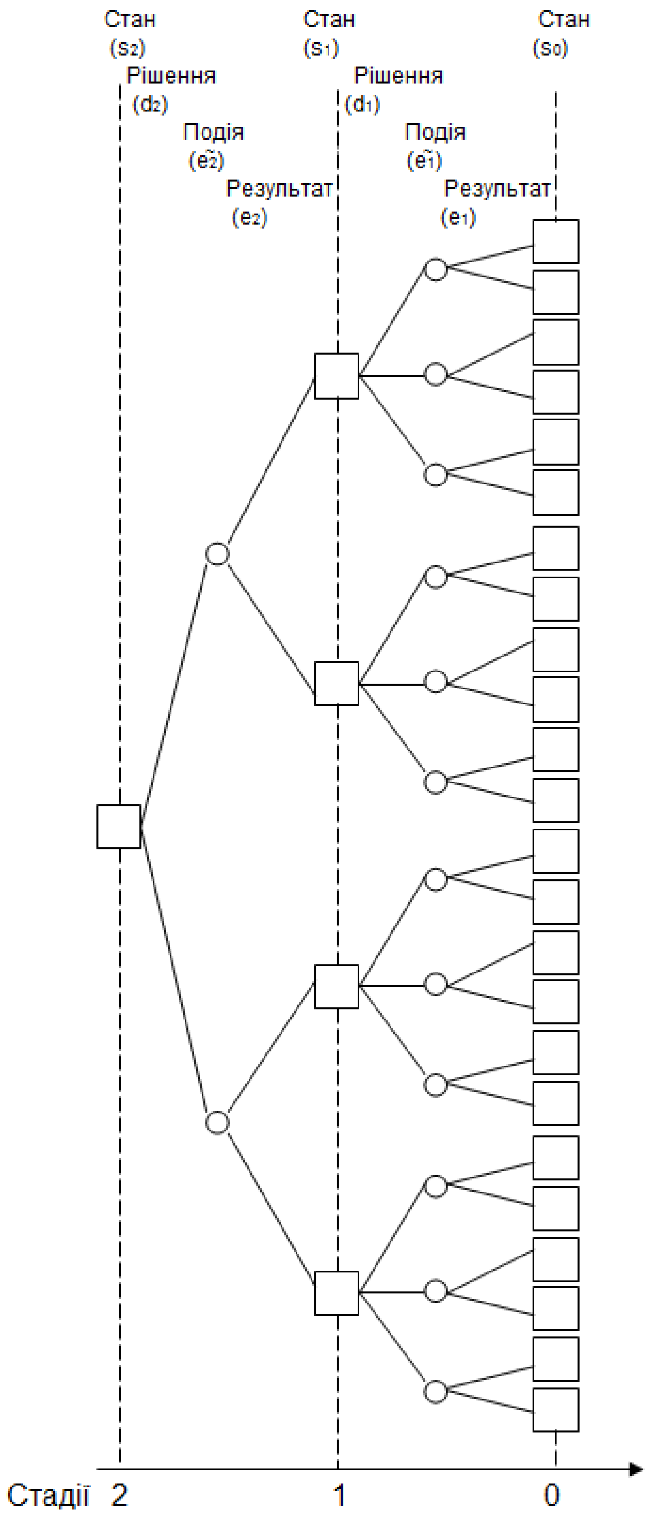


Рисунок 4.9 - Дерево рішень для динамічного програмування у випадку невизначеності

Складність прямої індукції полягає в тому, що неможливо задати значення станам на наступному етапі, які не залежать від невизначеного розвитку процесу від цього майбутнього стану. З іншого боку, із зворотною індукцією таких труднощів не виникає, оскільки спочатку оцінюються стани нульової стадії, а потім стани від стадії до стадії оцінюються шляхом обчислення очікуваних значень можливих рішень та вибору оптимального.

Процес зворотної індукції починають з обчислення значення функції оптимізації на стадії 0. Далі обчислюють значення оптимізаційної функції на попередньому етапі. Для цього спочатку обчислюють очікуване значення для кожної можливої події з урахування відповідної ймовірності та додаємо повернуте значення з попередньої стадії. Потім для кожного стану на попередній стадії вибирають рішення, яке має максимальне (або мінімальне) очікуване значення. Після визначення значення функції оптимізації для стадії 1 продовжують подібним чином визначати значення функції оптимізації на попередніх етапах шляхом зворотної індукції.

Таким чином, значення функція оптимізації для динамічного програмування в умовах невизначеності визначається в такій рекурсивній формі:

$$v_n(s_n) = \mathrm{Max}\ E\,[f_n(d_n, s_n, \tilde{e}_n) + v_n{-}1(\tilde{s}_n{-}1)]\ ,$$

за умови

$$\tilde{s}_{n-1} = t_n(d_n, s_n, \tilde{e}_n), \qquad (4.9)$$

$$d_n \in D_n,$$

де E[·] позначає очікуване значення величини в дужках.

Для ініціювання рекурсивних обчислень визначимо значення функції оптимізації на нульовій стадії наступним чином:

$$v_0(s_0) = \mathrm{Max}\ E\,[f_0(d_0, s_0, \tilde{e}_0)]\ ,$$

за умови

$$d_0 \in D_0.$$

Задачі оптимізації, які визначають значення функції оптимізації з відсутністю наступних стадій, не є рекурсивними, і тому можуть бути вирішені прямим способом. Якщо цільовою функцією є максимізація очікуваних дисконтованих витрат, то рівняння. (4.9) модифікується шляхом множення члена $v_{n-1}(\tilde{s}_{n-1})$ на β_n, коефіцієнт дисконтування для періоду n.

Продемонструємо застосування методу Беллмана на прикладі.

Приклад 4.2.

Торгова фірма повинна визначити оптові закупки у зовнішнього виробника з наступним перепродажем товару протягом року в своїх торгових точках. Фірма повинна зробити вибір: закупити велику або невелику партію товару. При закупці невеликої партії товару в подальшому можна докупити товар у виробника, можливо, за новими оптовими цінами. При закупці великої партії товару є небезпека понести збитки через можливий невисокий попит на цей товар. Таким чином, рішення ґрунтується на майбутньому попиті, який заздалегідь точно невідомий. Крім того, передбачається, що попит із часом може змінитися. За умовами контракту додаткова закупка товару може бути виконана лише через 4 місяці після початку календарного року за умови закупки невеликих партій. Рішення про нову закупівлю можна прийняти при встановленні достатньо високого попиту на товар. Необхідно прийняти правильне рішення як при початковій закупівлі, так і при можливій додатковій закупівлі товару з метою забезпечення максимально очікуваного прибутку протягом одного року.

Щомісячний торговий прибуток фірми у кожній з можливих ситуацій розміру закупівлі та попиту на товар наведено у табл. 4.1.

Припускаємо, що попит буде високим чи низьким. За потреби можна розширити градацію попиту.

Експерти дослідили попередні коливання попиту на даний товар і встановили, що ймовірність високого попиту на товар становить 0.75, а ймовірність низького попиту – 0.25.

Експерти також для стадії 0 дали прогноз про можливі значення щомісячного прибутку в залежності від розміру закупленої партії товару та попиту на нього.

Таблиця 4.1 – Очікуваний щомісячний прибуток в залежності від попиту

	z_1 (високий попит) $p(z_1)=0.75$	z_2 (низький попит) $p(z_2)=0.25$
x_1 (мала партія)	50	40
x_2 (велика партія)	200	60

Експерти припустили, що сумарний щомісячний дохід від продажу докупленого через 4 місяці товару буде дещо меншим, ніж при початковій закупівлі великої партії і становитиме 180 у.о. на місяць при високому попиті та 40 у.о. за низького попиту. Причинами цього може бути, наприклад, додаткова оренда складських приміщень, зміна закупівельних оптових цін тощо.

Витрати на закупівлю великої партії товару на стадії 0 становлять 1000 у.о, дрібної партії – 200 у.о.

Витрати на додаткову закупівлю товару через 4 місяці становлять 840 у.о.

Потрібно рекомендувати керівництву торгової фірми рішення, яке забезпечить отримання максимального прибутку за рік.

Оскільки рівень попиту товар заздалегідь невідомий, йдеться про прийняття рішення за умов невизначеності. Можна поставити задачу як максимізацію математичного очікування обсягу очікуваного прибутку. Насправді, у кожному окремому випадку розрахунок може не збігатися з реально отриманими результатами, але в середньому при багаторазовому повторенні ситуації вибору розрахункові значення дадуть хорошу оцінку для середнього фактичного прибутку.

Якщо описана ситуація є унікальною (одиничною), то доцільно при прийнятті рішення використати критерій Гурвіца чи Севіджа. Для повної гарантії в розрахунках слід ґрунтуватися на максимінному критерії.

Принаймні на першій стадії дослідження корисно використовувати принцип гарантованого результату для попередньої оцінки наявних потенційних можливостей та вибору остаточного критерію.

Дерево рішень задачі можна представити у такому вигляді:

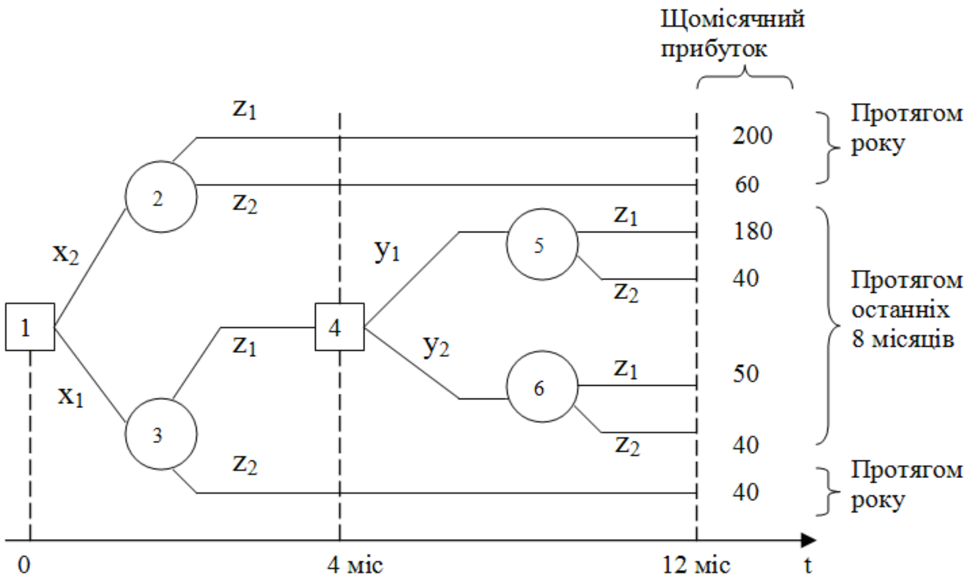


Рисунок 4.10 – Дерево рішень

На дереві рішень (рис. 4.10) «вирішальні» вершини (стани) представлені у квадратах, а невизначені події (стан попиту на товар), результати яких не контролюються ОПР – у колах. Усі вершини пронумеровані.

На стадії 0 маємо альтернативні рішення: x_1 – закупівля малої партії товару, x_2 – закупівля великої партії.

Значення змінних x_1, x_2, z_1, z_2 знаходяться у табл. 4.1.

На стадії 1 (через 4 місяці від початку року) альтернативними рішеннями є: y_1 – рішення про додаткову закупівлю товару через 4 місяці; y_2 – рішення про відмову від додаткової закупівлі товару.

Наведемо розв'язання задачі за допомогою критерію Байєса-Лапласа.

Відповідно до методу Беллмана рішення виконується шляхом просування по «вирішальних» вершинах графа зправа наліво. Першою обробляється «вирішальна» вершина 4 (рис. 4.11). Це рішення y_1 –про додаткову закупівлю товару через 4 місяці або y_2 – відмову від додаткової закупівлі.

Побудуємо матрицю прибутку для вершини 4 (табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Матриця прибутку в залежності від попиту для вершини 4

Y	Z	
	z_1 (0.75)	z_2 (0.25)
y_1	180*8-840=600	40*8-840=-520
y_2	50*8=400	40*8=320

Матриця рішень (табл. 4.2) є матрицею доходів, що містить сумарний прибуток за останні 8 місяців.

Знайдемо найкраще рішення для вершини 4 (рис. 4.11).

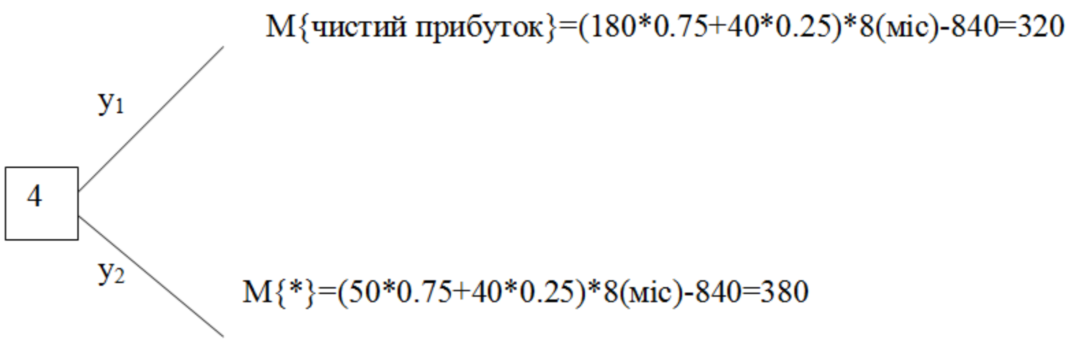


Рисунок 4.11 – Обчислення очікуваного прибутку для вершини 4

Найкращим рішенням за методом Байєса-Лапласа з урахуванням ймовірного попиту на товар є y_2 – відмова від додаткової закупівлі товару, воно дає максимальній прибуток 380 у.о. Цим числом позначається вершина 4 і від неї малюється стрілка з результатом y_2 (рис. 4.12).

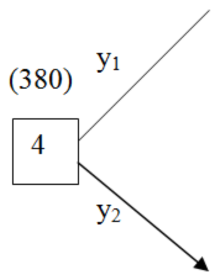


Рисунок 4.12 – Розмічене на дереві найкраще рішення за критерієм Байєса-Лапласа

Рухаючись далі наліво, переходимо до вершини 1 (рис. 4.10).

Складемо матрицю прибутку для вершини 1 (табл. 4.3).

Таблиця 4.3– Матриця прибутку для вершини 1 за критерієм Байєса-Лапласа

X	Z	
	z_1 (0.75)	z_2 (0.25)
x_1	50*4+380-200=380	40*12-200=280
x_2	200*12-1000=1400	60*12-1000=-280

Виконаємо розрахунок очікуваного прибутку з урахуванням ймовірностей попиту на товар для вершини 1 (рис. 4.13).

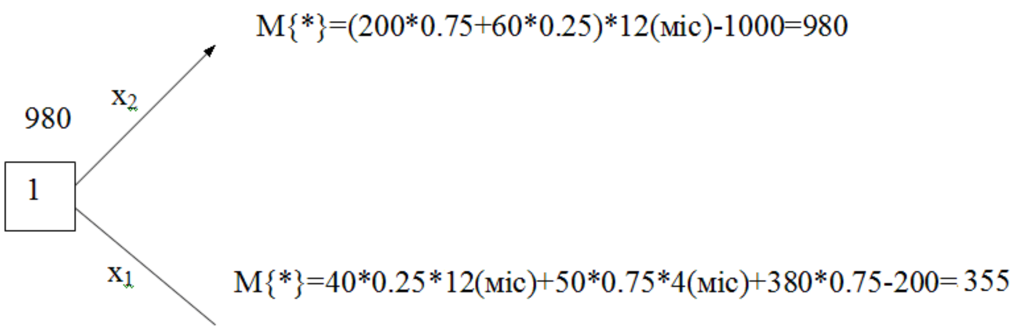


Рисунок 4.13 – Очікуваний прибуток для вершини 1 за критерієм Байєса-Лапласа

Найкращим рішенням за критерієм Байєса-Лапласа є x_2 - закупівля на початку року великої партії товару. Таке рішення, якщо воно буде повторюватися багатократно, дасть у середньому найбільший прибуток.

Вирішимо ту ж задачу, застосувавши принцип гарантованого результату.

У вершині 4 маємо, як і раніше, матрицю «доходів» (табл. 4.2). За принципом гарантованого результату маємо найкраще рішення y_2, оскільки найгірший можливий результат при цьому дорівнює 320 у.о. "доходу" (гарантований прибуток навіть за низького попиту), а при виборі y_1 можна отримати втрати у розмірі 520 у.о. З вершиною 4 зв'язуємо число 320, стрілку направляємо за y_2 (рис.).

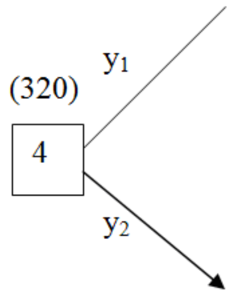


Рисунок 4.14 – Помічене на дереві найкраще рішення за критерієм гарантованого результату

Рухаючись зправа наліво, переходимо до вершини 1 і побудуємо для неї матрицю рішень (табл. 4.3).

Таблиця 4.3 – Матриця рішень для вершини 1 за критерієм гарантованого результату

X	Z	
	z_1 (0.75)	z_2 (0.25)
x_1	50*4+320-200=320	40*12-200=280
x_2	200*12-1000=1400	60*12-1000=-280

За критерієм гарантованого результату на стадії 0 найкращою є альтернатива x_1 (закупка малої партії товару), і на стадії 1 через 4 місяці – y_2 (відмова від додаткової закупівлі). Така стратегія прогнозує гарантований «дохід» у 280 у.о. на рік.

Таким чином, у ситуації невизначеності на різних етапах рішення багатостадійної задачі прийняття рішень метод Беллмана дозволяє знаходити оптимальні стратегії поведінки у будь-якій «вирішальній» вершині.

Розглянута методика рішення багатостадійних задач може бути перенесена на складніші багатоальтернативні дерева рішень.

4.6 Марковські моделі прийняття рішень

4.6.1 Ланцюг Маркова

Ланцюг Маркова — послідовність випадкових подій з кінцевим чи лічильним числом результатів, де ймовірність настання кожної події залежить тільки від стану, досягнутого в попередній події. Характеризується тією властивістю, що, говорячи нестрого, при фіксованому сьогоденні майбутнє не залежить від минулого.

Дискретні марковські ланцюги (ДМЛ) - однорідні марковські ланцюги із дискретним часом. Основним математичним співвідношенням для ДМЛ є рівняння, за допомогою якого визначається стан системи на будь-якому k-тому кроці її існування.

Послідовність дискретних випадкових величин $\{S_n\}_{n\geq 0}\}$ називається простим ланцюгом Маркова (з дискретним часом), якщо

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = i_{n+1} \mid S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0) = \mathbb{P}(S_{n+1} = i_{n+1} \mid S_n = i_n)$$

У найпростішому випадку умовний розподіл наступного стану ланцюга Маркова залежить лише від поточного стану і не залежить від усіх попередніх станів.

Область значень випадкових величин $\{S_n\}$ називається простором станів ланцюга, а n - номером кроку.

Ергодичні марківські ланцюги описуються сильно зв'язним графом. Це означає, що в такій системі можливий перехід з будь-якого поточного стану у будь-який наступний стан за кінцеве число кроків.

У ланцюгу Маркова задається матриця перехідних ймовірностей на n-му кроці $P(n)$

$$P_{ij}(n) \equiv \mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i)$$

та вектор початкового розподілу ланцюга

$$\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots)^T, \text{ де } p_i \equiv \mathbb{P}(S_0 = i).$$

Ланцюг Маркова називається однорідним, якщо матриця перехідних ймовірностей не залежить від номера кроку:

$$P_{ij}(n) = P_{ij}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Надалі матимемо справу з дискретними однорідними ланцюгами Маркова.

4.6.2 Марковський процес прийняття рішень

Марковський процес прийняття рішень — специфікація задачі послідовного прийняття рішень для середовища, що є повністю спостережуваним, з марковською моделлю переходу і додатковими винагородами. Служить математичною основою для моделювання прийняття рішення в ситуаціях, де результати частково випадкові і частково під контролем ОПР. Сьогодні ця специфікація використовується в багатьох областях, включаючи робототехніку, автоматизоване управління, економіку та виробництво.

У керованому марковському процесі є можливість певною мірою керувати значеннями перехідних ймовірностей. Прикладами таких процесів є будь-які торгові операції, у яких ймовірність збуту та отримання ефекту може залежати від реклами, заходів щодо покращення якості продукції, вибору покупця, ринку збуту тощо.

Суть моделі Маркова полягає в тому, що ОПР заходиться в середовищі, яке змінює стан випадковим чином в залежності від вибору дій ОПР. Стан середовища впливає на поточну винагороду (прибуток) і на ймовірність майбутніх переходів до можливих станів. Метою ОПР є вибір дій для максимізації загальної винагороди. Ефективні алгоритми пошуку рішень для марковських моделей, засновані на динамічному програмуванні та лінійному програмуванні, дозволяють моделювати та вирішувати великі задачі планування у штучному інтелекті, дослідження операцій, економіки, робототехніки та поведінкових наук.

Формально марковську модель прийняття рішень можна задати кортежем

$$\{S, A, P, R\},$$

де S – кінцева множина станів;

A – кінцева множина дій, доступних зі стану s (часто представляється у вигляді множин A_s);

$P_a(s,s')$ – ймовірність того, що дія a в стані s у час t приведе до стану s' у час t+1,

$R_a(s,s')$ – виграш, одержуваний після переходу в стан s' зі стану s з ймовірністю переходу $P_a(s, s')$.

Йдеться про багатостадійні задачі прийняття рішень з кінцевим числом станів s_j (j=1, … , m) системи S, що оптимізується.

Припускається, що в дискретні моменти часу t_1, t_2, … система переходить у новий стан відповідно до деякої матриці перехідних ймовірностей P з відповідними очікуваними винагородами при переходах у матриці R:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mm} \end{bmatrix}$$

Елемент p_{ij} матриці P відповідає ймовірності переходу системи з стану s_i в стан s_j. Сума елементів будь-якого рядка матриці дорівнює 1: $\Sigma_{j=1,m}\ p_{ij}$ =1. Елемент r_{ij} матриці R відповідає винагороді при переході системи з стану s_i в стан s_j.

Керованим ланцюгом Маркова (КЛМ) називається випадковий процес, що має марковськ властивість і включає в якості елементів математичної моделі кортеж $\{S,A,P,R\}$. Рішення, прийняте у конкретний момент (крок процесу) називається приватним управлінням.

Стратегією π називається послідовність рішень

$$\pi = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

де f_k=<a_1, a_2, … , a_n>- вектор управління.

Задання стратегії означає повний опис конкретних рішень, що приймаються на всіх етапах процесу в залежності від стану, в якому знаходиться в цей момент процес.

Якщо у послідовності π усі f_k (вектори управління) однакові, то така стратегія називається стаціонарною, тобто незалежною від номера кроку. Стратегія $\pi = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ називається марковською, якщо рішення f_k, прийняте в кожному конкретному стані залежить тільки від часу n, але не залежить від попередніх станів.

Оптимальною буде така стратегія, яка максимізує повний очікуваний дохід для всіх етапів рішення.

Стратегія рішення полягає в тому, що в кожному стані ОПР повинна вибрати певну дію. У марковському процесі прийняття рішень ймовірність переходу та винагорода залежать лише від поточного стану та дії, вибраної ОПР, без урахування минулих ситуацій.

Марковська модель прийняття рішень для певного середовища розвивається дискретними часовими періодами. Стан середовища описується розподілом ймовірностей. ОПР спостерігає поточну ситуацію середовища у часі і обирає певну дію. Мета ОПР – підібрати стратегію, яка максимізує сумарний прибуток у певному періоді часу. Оптимальна стратегія для ОПР є детермінованою функцією тільки від поточного стану.

Наведемо формальне подання прийняття рішень у марковській моделі.

Нехай маємо значення функції ймовірності переходу зі стану s в стан s' $P_a(s,s')$ і функції виграшів $R_a(s,s')$. Вирішується задача знаходження стратегії π, яка максимізує очікуваний дисконтований прибуток. Для заданої стратегії π

і для початкового стану s розрахунок очікуваного майбутнього прибутку виконується за допомогою функції

$$V^{\pi}(s) = E\{R_0 + \gamma^1 R_1 + \gamma^2 R_2 + \dots \mid s_0{=}s;\ \pi\} =$$
$$= E\{\Sigma^{\infty}_{t=1}\, \gamma^t R_t \mid s_0{=}s;\ \pi\},$$

де R_i – миттєва винагорода на i-му кроці.

Стратегія π* є оптимальною, якщо вона максимізує функцію виграшу для кожного початкового стану.

Загальний розмір очікуваної винагороди

$$V^*(s) = \max_{\pi} V^{\pi^*}(s)$$

має рекурсивну властивість

$$V^*(s) = R_s(s,s') + \gamma\, \Sigma_s\, P_a(s,s')\, V^{\pi}(s')$$

Оптимум шукається серед детермінованих стратегій.

Приклад 4.3.

Деяка фірма спеціалізується на розробці програмного забезпечення для комп'ютерних систем. На початку кожного року вона вирішує задачу оновлення апаратного та програмного забезпечення. Експерти встановили три можливі стани обладнання фірми (система S): «хороший» (1), «задовільний» (2) або «поганий» (3). Таким чином, система може бути в одному з трьох станів. Матриця перехідних ймовірностей має вигляд:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сенс матриці можна пояснити таким чином (рис. 4.15). Якщо фірма перебувала у «хорошому» стані (рядок s_1), то наступного моменту зміни стану (наступний момент аналізу стану фірми) вона може опинитися у хорошому стані з ймовірністю $p_{11}=0.2$, у середньому стані з ймовірністю $p_{12}=0.5$ або у поганому стані з ймовірністю $p_{13}=0.3$.

Рисунок 4.15 - Сенс матриці ймовірностей переходів

Аналогічним чином з матриці R отримують розмір винагороди при відповідних переходах зі стану до стану.

Якщо матриця перехідних ймовірностей не змінюється, досить просто проаналізувати весь життєвий цикл системи S. у період часу, що розглядається.

Припустимо, що залежно від станів, у яких послідовно виявляється система, може бути обчислений дохід, який фірма приносить. Логічно припустити, що дохід за період t_{i+1}-t_i залежить від рівня оснащеності фірми сучасним устаткуванням і технологічним оточенням, включаючи професійний рівень персоналу. У свою чергу, рівень оснащеності значною мірою залежить від стану, в якому знаходилася фірма на початку розглянутого періоду та наприкінці його. Якщо, наприклад, у момент часу t_i система знаходилася в «хорошому» стані і в момент часу t_{i+1} цей стан зберігся, то, мабуть, дохід буде максимальним (при виконанні інших умов, пов'язаних з наявністю замовлень, ситуації на ринку та т.п.). Для моделювання цієї ситуації можна матриці перехідних ймовірностей P^1 поставити у відповідність матрицю доходів R^1:

$$R^1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Елемент r_{ij} матриці означає дохід, отриманий за період t_{i+1}-t_i при переході системи зі стану i у стан j. Наприклад, число 5 – це дохід, виражений у деяких у.о., при збереженні системою «задовільного» стану. Негативні значення – це втрати.

Маючи матриці P^1 і R^1, можна досить просто прогнозувати результати функціонування системи. При постійних матрицях система може застаріти, постійно перебуваючи у «поганому» стані та завдаючи збитків.

У реальних фірмах за результатами проводиться періодичне оновлення обладнання зі зміною технологічного оснащення та навчанням персоналу. Такий процес моделюється зміною матриць перехідних ймовірностей та доходів.

Нехай для нашого прикладу матриці змінилися:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix}; \; R^2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

У матриці доходів R^2 враховано витрати на реорганізацію та модифікацію. Наприклад, елемент r_{11} матриці R^2 виявляється меншим за відповідний елемент матриці R^1.

На кожному етапі ОПР може прийняти рішення не проводити модернізацію фірми та мати матриці P^1 та R^1 або прийняти рішення про необхідні зміни та отримати матриці P^2, R^2. У цій задачі слід максимізувати очікуваний (ймовірний) дохід. Це багатоетапне завдання, оскільки вибір здійснюється щоразу у задані дискретні моменти часу.

Розглянемо основні моменти вибору оптимального рішення. Нехай планування стратегії поведінки фірми складається на певний період. Рішення може бути засноване на методі динамічного програмування Беллмана відповідно до загальної концепції аналізу та оптимізації багатостадійних задач.

Нехай період часу $t_{i+1} - t_i$ відповідає одному року, а планування проводиться на трирічний період. Представимо графічно дерево рішень (рис. 4.16).

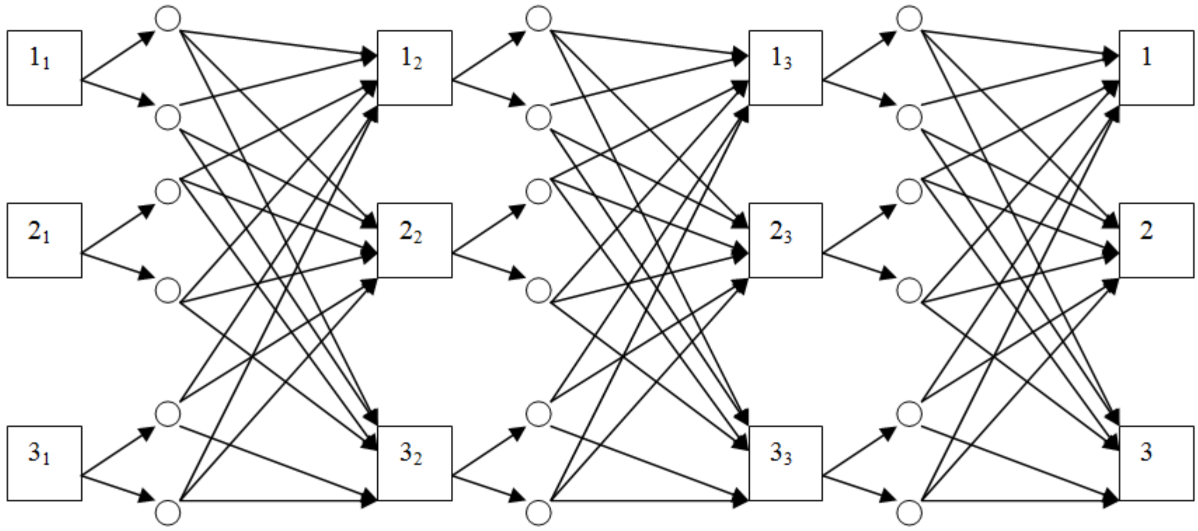


Рисунок 4.16 – Дерево рішень

На рисунку у квадратах знаходяться вирішальні вершини. Кожен квадрат відповідає стану i_j системи у певний час, i – номер стану (1- хороший, 2- задовільний, 3 – поганий), j – номер року. Стрілки, що виходять із вирішальних вершин, відповідають двом рішенням: верхня (x_1) – не проводити модернізацію, нижня (x_2) – проводити. У колах перебувають допоміжні вершини, тобто. це випадкові вершини, перехід з яких виконується відповідно до обраної матриці перехідних ймовірностей.

Використовуючи алгоритм динамічного програмування, починаємо рішення задачі з кінця, тобто. рухаємося зправа наліво по вирішальних вершинах.

Розглянемо вершину 1_3 останньої стадії прийняття рішення. При прийнятті рішення x_1 про відмову від проведення модернізації маємо:

$$d_1(1_3) = 0.2*7+0.5*6+0.3*3 = 5.3\ .$$

При виборі рішення x_2 (модернізація) маємо:

$$d_2\ (1_3) = 0.3*6+0.6*3+0.1*(-1) = 4.7\ .$$

Оскільки 5.3>4.7, то рішення x_1 є кращим. Тому помічаємо вершину числом 5.3 та верхню стрілку (рішення x_1).

У вершині 2_3 маємо:

$$d_1(2_3) = 0.5*5+0.5*1 = 3.0 ,$$

$$d_2(2_3) = 0.1*7+0.6*4+0.3*0 = 3.1 .$$

Помічаємо вершину 2_3 числом 3.1 і напрям 2 (рішення x_2).

Для вершини 3_3:

$$d_1(3_3) = -1.0 ,$$

$$d_2 (3_3) = 0.05*6+0.4*3 - 0.55*2 = 0.4 .$$

Помічаємо вершину 3_3 числом 0.4 і напрям 2 (рішення x_2).

Отримані значення 5.3, 3.1 та 0.4 характеризують один останній етап зміни стану та отримані локальні доходи. У подальших обчисленнях використовуються ці локальні прибутки.

На другому році маємо:

$$d_1(1_2) = 0.2*5.3+0.5*3.1+0.3*0.4+5.3 = 8.03 ,$$

$$d_2(1_2) = 0.3*5.3+0.6*3.1+0.1*0.4+ 4.7= 8.19 .$$

$$d_1(2_2) = 0*5.3+0.5*3.1+0.5*0.4+3.0 = 4.75 ,$$

$$d_2(2_2) = 0.1*5.3+0.6*3.1+0.3*0.4+ 3.1= 5.61 .$$

$$d_1(3_2) = 0*5.3+0*3.1+1*0.4 - 1 = -0.6 ,$$

$$d_2(3_2) = 0.05*5.3+0.4*3.1+0.55*0.4+ 0.4 = 2.13 .$$

Для першого року отримуємо:

$$d_1(1_1) = 0.2*8.19+0.5*5.61+0.3*2.15+8.03 = 13.112 ,$$

$$d_2(1_1) = 0.3*8.19+0.6*5.61+0.3*2.15+ 8.19= 14.226 .$$

$$d_1(2_1) = 0*8.19+0.5*5.61+0.5*2.13+4.75 = 8.63 ,$$

$$d_2(2_1) = 0.1*8.19+0.6*5.61+0.3*2.13+ 5.61= 10.434 .$$

$$d_1(3_1) = 0*8.19+0*5.61+1*2.13 – 0.6 = 1.53 ,$$

$$d_2(3_1) = 0.05*8.19+0.4*5.61+0.55*2.13+ 2.13= 5.955 .$$

Представимо розмічене дерево рішень:

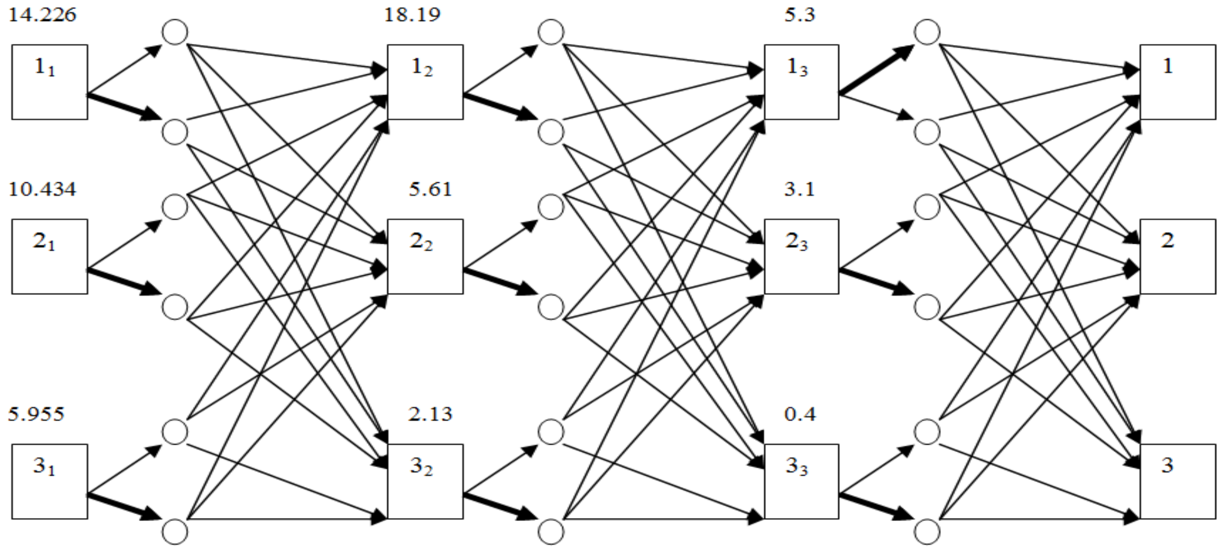


Рисунок 4.17 – Розмічене дерево рішень

Тепер, рухаючись зліва направо по дереву рішень, можна прочитати оптимальне рішення. Числа 14.226, 10.434 і 5.955 – це оптимальні очікувані доходи, якщо система спочатку перебувала відповідно у станах 1, 2 і 3. Ці доходи очікуються, якщо ОПР буде поводитися оптимально, тобто, переходити на кожній стадії в наступні стани за стрілками.

У якому б стані фірма не була на початку першого року, доцільно проводити модернізацію. Те саме стосується й другого року. На третьому році модернізацію проводити доцільно, якщо до початку цього року фірма перебуває у станах 2 чи 3. Якщо вона перебуває у стані 1, то модернізація недоцільна.

Контрольні запитання

1. Що являє собою багатостадійний процес прийняття рішень?
2. Для чого застосовують модель багатостадійного прийняття рішень?
3. Опишіть процес прийняття багатостадійних рішень.
4. Наведіть приклади багатостадійних рішень.
5. Що називають деревом рішень?
6. Що таке детерміністське дерево рішень?

7. Як будують дерево рішень для багатостадійних задач в умовах невизначеності?
8. У чому суть методу динамічного програмування?
9. Назвіть та поясніть основні компоненти задач динамічного програмування.
10. Поясніть поняття стадії у підході динамічного програмування.
11. Поясніть поняття стану у підході динамічного програмування.
12. Що називають рекурсивною оптимізацією?
13. Поясніть формальне подання задачі динамічного програмування.
14. У чому суть марковської моделі прийняття рішень?
15. Поясніть формальне подання марковської моделі прийняття рішень.
16. Як у марковській моделі використовуються матриці перехідних ймовірностей та винагород?
17. Як формується стратегія найкращого рішення у марковській моделі?
18. Наведіть приклади предметних областей для застосування марковських моделей прийняття рішень.

5 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

У різних сферах людської діяльності виникають ситуації, які називаються конфліктними. Такі ситуації характеризуються розбіжностями у інтересах окремих суб'єктів, їх взаємною протидією, а також необхідністю врахування можливих дій суперників при розробці рішень.

Конфліктна ситуація – це ситуація, у якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, що мають суперечливі цілі, причому виграш кожної зі сторін залежить від поведінки інших. Суб’єкти-учасники більшості конфліктів зацікавлені в приховуванні від супротивника власних намірів. Тому прийняття рішень в умовах конфлікту, зазвичай, відбувається в умовах невизначеності. Розв’язанням конфлікту є прийняття рішень в конфліктних ситуаціях.

Залежно від дій, вжитих гравцями, реалізується певний результат; гравці мають переваги на цих результатах і зазвичай існує конфлікт інтересів, оскільки різні гравці воліють отримати різні результати. Тому кожен гравець стикається з питанням про те, які дії є для нього найкращими. Оскільки гравці взаємозалежні, то відповідь на це питання залежатиме не тільки від власних уподобань гравця, а й від того, як діють інші гравці. Отже, гравець повинен робити передбачення щодо того, що робитимуть інші гравці.

Конфліктні ситуації можуть виникати з різних причин, що зумовлює необхідність розв'язання цих ситуацій за допомогою спеціальних методів. Математичні моделі прийняття рішень в умовах конфлікту вивчаються та досліджуються у розділі прикладної математики - теорії ігор. Теорія ігор намагається математично представити поведінку в стратегічних ситуаціях, в яких успіх суб'єкта, що робить вибір, залежить від вибору інших учасників.

Теорія ігор − це теорія математичних моделей прийняття рішень в умовах невизначеності, коли суб’єкт («гравець»), що ухвалює рішення, має в своєму розпорядженні інформацію лише про множину можливих ситуацій, в одній з яких він насправді перебуває, та множину рішень («стратегій»), які він може прийняти, і про кількісну міру того «виграшу», який він міг би отримати, вибравши в даній ситуації дану стратегію».

Основною метою теорії ігор є прогноз поведінки гравців і відшукання деякого найбільш правдоподібного результату (або множини результатів) гри.

Концепцією рішення (не ухваленням рішень) називають правило, яке дозволяє за заданим описом гри отримати такі передбачення. Концепція рішення має відповідати таким умовам:

– давати передбачення, що узгоджуються з емпіричними спостереженнями та інтуїцією;
– бути досить універсальною та застосовною до широкого кола ситуацій, які представляють практичний інтерес;
– передбачати здебільшого один результат.

Знайти концепцію, яка задовольняє одночасно всім цим умовам, неможливо. Різні існуючі теорії, концепції та підходи є таким чином теоретичними компромісами.

5.1 Основні поняття теорії ігор

Гра – це формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Формальна математична модель відрізняється від реальної конфліктної ситуації тим, що гра ведеться за певними правилами: вважаються відомими варіанти дії сторін; результат гри при конкретному варіанті дії; обсяг інформації кожної сторони щодо поведінки інших сторін.

Гравець – одна зі сторін у конфліктній ситуації.

Результат гри – це один з трьох можливих варіантів: виграш, програш або нічия. Зазвичай результати гри є кількісними значеннями.

Правила гри – система умов, що регламентують можливі варіанти дій конфліктуючих сторін про поведінку інших, послідовність чергування окремих рішень, прийнятих у процесі гри та результат, до якого приводить дана сукупність рішень. Правила гри доступні кожній із сторін.

Ходом називається вибір гравцем однієї з передбачених правилами гри дій і її здійснення. Ходи поділяють на особисті та випадкові. ***Особистий хід*** – це свідомий вибір дії гравцем. ***Випадковий хід*** – вибір дії, що не залежить від волі гравця або вибір рішення під впливом будь-якого механізму випадкового вибору.

Гра називається ***парною***, якщо в ній можна виділити дві антагоністичні сторони. За більшої кількості антагоністичних сторін гра називається ***множинною***.

Гра з нульовою сумою - гра, в якій одна із сторін виграє, а інша – програє.

Антагоністична гра - парна гра з нульовою сумою. Такі ігри найчастіше розглядаються у теорії ігор.

Гра з повною інформацією - гра, в якій кожна сторона під час кожного особистого ходу знає результати всіх попередніх ходів (як особистих, так і випадкових). Можливі наслідки випадкових ходів задаються розподілом ймовірностей.

Стратегія - сукупність правил, що однозначно визначають вибір рішення при кожному особистому ході окремого гравця в залежності від ситуації, що склалася в процесі гри. У іграх, які складаються з одних випадкових ходів, стратегії немає.

Оптимальна стратегія забезпечує гравцеві максимальний виграш. Завданням теорії ігор є виявлення оптимальної стратегії гравців. Метою теорії ігор є оптимізація поведінки гравця у стратегічних іграх, в яких поряд з випадковими є особисті ходи.

Азартні ігри складаються тільки з випадкових ходів, вони не розглядаються в теорії ігор.

У ***скінченній грі*** кожна з конфліктуючих сторін має лише скінченну кількість стратегій. За наявності у кожної сторони нескінченного числа стратегій гра називається ***нескінченною***.

Теорія ігор виходить з того, що у парній грі кожен з гравців прагне забезпечити собі максимальний виграш, завдаючи збитків супротивнику.

Всі значення виграшів у матричній грі з нульовою сумою для одного з гравців зводять у матрицю виграшів (матрицю гри, платіжну матрицю). Виграші іншого гравця є протилежними за знаком. Зазвичай вважається, що рядки матриці відповідають стратегіям першого гравця, стовпці – стратегіям другого; перший вибирає рядок, другий - стовпець, на перетині стоїть виграш першого гравця (якщо він негативний, то перший гравець у програші).

Нехай у парній грі грають два гравці, наприклад гравець A та гравець B. Себе зазвичай ототожнюють з гравцем A. Якщо в гравця A є m можливих стратегій: A_1, A_2 ....A_m, а в його супротивника B – n можливих стратегій: B_1, B_2 ...B_n, то така гра називається грою mхn.

Виграш гравця A за умови вибору ним стратегії A_i, та стратегії супротивника B_j позначають як a_{ij}. Кількість таких ситуацій дорівнюватиме mхn.

Гра mхn представляється як матриця mхn (рис. 5.1). Розмірність гри визначається кількістю стратегій.

	Стратегії гравця B			
Стратегії гравця A	B_1	B_2		B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Рисунок 5.1 – Матриця гри

Наведемо приклади побудови матриці гри.

Приклад 5.1.

Двоє гравців *A* та *B* одночасно і не знаючи вибору супротивника кладуть на стіл по монеті. При збігу сторін монет обидві монети забирає перший гравець, при розбіжності – другий. Гравці намагаються максимізувати кількість своїх монет. Кожен гравець має по дві стратегії: викласти монету орлом або решкою, тобто, $A_i=\{O,P\}$ та $B_i=\{O,P\}$. Число можливих ситуацій – чотири. Нехай для гравця *A* у випадку виграшу a_{ij}=1, а при програші a_{ij}=-1. Матриця гри має вигляд:

	Стратегії гравця B	
Стратегії гравця A	O	P
O	1	-1
P	-1	1

Рисунок 5.2 – Матриця гри з монетами

Приклад 5.2.

Події відбуваються під час війни. До міста 2 роти нападників можуть увійти лише через два мости. Місто обороняють 3 роти. Місто буде взято, якщо на одному з мостів нападники матимуть чисельну перевагу.

Побудувати матрицю гри для захисників міста, вважаючи, що успішна оборона дає виграш (+1), а втрата міста дає (-1).

Маємо двох гравців: А – захисник міста, В – нападник.

Стратегії гравця А: виділити на захист першого моста 0, 1, 2, 3 роти (решту відправити захищати другий міст).

Стратегії гравця В: атакувати перший міст силами 0, 1, 2 рот (решту відправити атакувати другий міст).

Побудуємо матрицю гри. Позначимо стратегії кожного гравця двома числами: перше число – кількість рот на першому мосту, друге – на другому мосту. Для гравця А маємо виграш, якщо на кожному з мостів є не менше рот, ніж у супротивника. Матриця гри має вигляд:

	Стратегії гравця В		
Стратегії гравця А	0--2	1--1	2--0
0--3	1	-1	-1
1--2	1	1	-1
2--1	-1	1	1
3--0	-1	-1	1

Рисунок 5.3 – Матриця гри з захопленням мостів

Стратегії, розглянуті в наведених прикладах називаються ***чистими***, бо кожен гравець застосовує у грі лише одну зі своїх можливих стратегій.

Приклад 5.3.

На один і той же ринок фірма *А* може постачати один із трьох своїх продуктів A_1, A_2, A_3, а фірма *В* – один із чотирьох продуктів B_1, B_2, B_3, B_4. Платіжна матриця містить розміри прибутку для всіх поєднань на ринку продуктів обох фірм і має вигляд:

	Стратегії гравця В			
Стратегії гравця А	B_1	B_2		B_n
A_1	3	-2	0	9
A_2	17	4	-5	6
A_3	5	-8	1	-7

Рисунок 5.4 – Матриця гри з постачанням продуктів на ринок

Матриця гри дозволить фірмі прийняти рішення про те, який продукт постачати на ринок, і виконати вибір певної чистої стратегії. При виборі можна враховувати переваги ОПР.

Платіжні матриці (матриці виграшів) в умовах конфлікту та в умовах невизначеності й ризику є подібними. Відмінність полягає в тому, що в умовах конфлікту як розумні суперники (гравці) виступають свідомі суб'єкти, які виробляють свою стратегію відповідно до дій один одного; а в умовах невизначеності та ризику "суперником" ОПР є зовнішнє середовище, протидія якого не є свідомою та яке не може реагувати на дії ОПР. Тому ігри, які відповідають конфліктним ситуаціям, називаються ***стратегічними***, а ігри, що відповідають умовам невизначеності та ризику – ***статистичними***.

Аналіз матриці гри дозволяє розробити рекомендації щодо вибору оптимальних рішень гравців.

Теоретико-ігрові методи прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності можуть мати широке застосування в медицині, в економічному і соціальному плануванні і прогнозуванні, в ряді питань науки та техніки. Але застосування теорії ігор при зведення гри до матричної форми є обмеженим через незнання всіх можливих стратегій, їх значну кількість та складність оцінки виграшу.

5.2 Формальне подання задачі прийняття рішень у конфліктних ситуаціях

Вважатимемо, що задача прийняття рішень формулюється у вигляді задачі оптимізації

$$J(x,z) \to \max_{x \in X},\ z \in Z\,.$$

У попередніх випадках параметром z керувала природа. В даному випадку припускаємо, що параметром z управляє розумний противник, який має свої цілі:

$$I(x,z) \to \max_{z \in Z},\ x \in X$$

Нехай суб'єкт A вибирає рішення з альтернатив $x \in X$, суб'єкт B вибирає з $z \in Z$. Кожен суб'єкт прагне досягнути своєї цілі.

Розбіжність між функціоналами I та J визначає ***ступінь антагонізму*** гравців. Якщо J=-I за будь-яких x і z, то така ситуація називається антагоністичною, суворо конкурентною грою, грою з нульовою сумою (J+I=0). Але така ситуація трапляється рідко. Типовим є конфлікт, у якому інтереси гравців не збігаються, але й не є суворо протилежними.

Існують ситуації, коли не два, а k гравців прагнуть максимізувати свої виграші $p_i(x_1,x_2, \ldots , x_k)$, i=1, … ,k. У цьому випадку, наприклад, для першого гравця, який обирає рішення x_1, решта x_i складатиме факт невизначеності z:

$$p_1\,(x_1,z) \to \max_{x \in X},\ z=(\,x_2, \ldots , x_k).$$

Якщо $\sum_{i=1}^{k} p_{\mathrm{i}} = 0$, то маємо не гру з нульовою сумою, а антагоністичну гру.

Приклад 5.4.

Заарештовано двох осіб, підозрюваних у скоєнні злочину. Прокурор не має повного доказу їхньої провини. Кожен із підозрюваних має дві альтернативи – зізнатися у скоєнні злочину чи ні. Якщо обидва заарештовані не зізнаються, то їм буде пред'явлено звинувачення у скоєнні щодо незначного злочину, і обидва отримають по 1 року позбавлення волі. Якщо один зізнається, а інший – ні, то перший за видачу спільника та допомогу слідству буде повністю звільнений від відповідальності, а другий отримає повний термін – 10 років позбавлення волі. Якщо зізнаються обидва, то за щире каяття їм знизять термін до 7 років.

Побудуємо матрицю гри:

X	Z	
	z_1=Н	z_2=П
x_1=Н	1--1	10--0
x_2=П	0--10	7--7

Рисунок 5.5 – Матриця гри для підозрюваних

На перетині рядка i і стовпця j стоїть пара чисел (p,q), де $p=J(x,z)$, $q=I(x,z)$. Потрібно мінімізувати функціонали J та I.

Викладемо міркування гравця A.

Результат рішення залежить від рішення гравця B, тому слід зробити деякі припущення про його можливу поведінку у процесі рішення задачі. Правомірність таких припущень залежить від нашої поінформованості щодо поведінки противника.

Прийняття рішень в умовах ризику може розглядатися як гра проти природи. У цьому випадку ми припускали, що кожен вибір $z=z_i$ характеризується своєю ймовірністю, тобто. стратегія поведінки будувалася на оцінці частоти появи тих чи інших станів середовища z_i. При грі з «розумним» гравцем, який має свої певні цілі, слід застосовувати інші гіпотези і виробляти інші стратегії вирішення завдань вибору альтернатив.

Розрізняються такі основні гіпотези.

Гіпотеза 1. Кожен із суб'єктів A та B не має інформації про вибір, зроблений іншою стороною. Додаткові гіпотези щодо поведінки другого гравця відсутні. Тут роблять так само, як і під час вирішення задач за умов повної невизначеності. Можна скористатися принципом найкращого гарантованого результату. Гарантована оцінка для гравця A:

$$J^* \rightarrow \max_{x\in X} \min_{z\in Z} J(x,z) \ ,$$

а для гравця B:

$$I^* \rightarrow \max_{z\in Z} \min_{x\in X} I(x,z) \ .$$

Рішаючи задачі максимізації, знайдемо вектори x* и z*, які реалізують гарантовані оцінки.

Приклад 5.5.

Дамо графічну ілюстрацію застосування принципу гарантованого результату.

Нехай $J(x,z) = x_2 – z_2$, $I(x,z) = – \mathrm{J}(x,z)$. Треба мінімізувати J и I.

У цьому випадку маємо антагоністичну гру:

$$J(x,z) = x_2 - z_2 \rightarrow \min_{x \in X}, \ z \in Z,$$

$$J(x,z) = - J(x,z) = x_2 - z_2 \rightarrow \max_{z \in Z}, \ x \in X.$$

Вважатимемо, що X=Z=R є множинами усіх дійсних чисел. Замість пошуку мінімуму функції I можна шукати максимум функції $–I$=J. Для нашого прикладу гарантована оцінка витікає з умови:

$$J^* \rightarrow \min_{x} \max_{z} J(x,z)$$

Позначимо

$$\varphi(x) = \max_{z} J(x,z) .$$

Для обчислення одного значення функції φ при фіксованому x необхідно вирішити задачу оптимізації функції $\varphi(x)$, тобто. знайти її максимум.

Отримуємо:

$$\varphi(x) = \max_{z} (x_2 - z_2) = x_2,$$

оскільки будь-яке значення z≠0 веде до зменшення функції J.

Тепер найдемо

$$\min_{x} \varphi(x) = \min_{x} x_2 = 0.$$

Це досягається при x=0. Таким чином, отримуємо J^*=0 і при цьому x^*=0. Це є гарантованим результатом, так як за будь-якого z будемо мати значення J не гірше (тобто, не більше), ніж нуль. При будь-якому z

$$J(x^*,z) = J(0,z) = - z_2 \leq J_0 = 0.$$

На рисунку 5.6 отриманий результат відображено графічно. На рисунку представлені лінії постійного рівня функції $J(x,z)$, тобто, геометричне місце точок на площині, де J = const. Якщо функція залежить від двох змінних, то говорять про поверхню рівня. У тривимірному просторі поверхня рівня може мати вигляд «сідла».

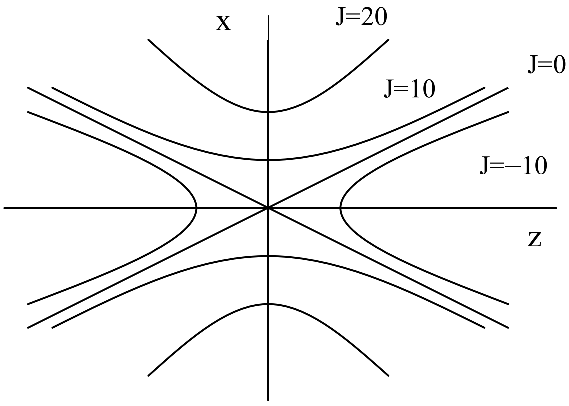


Рисунок 5.6 – Принцип гарантованого результату для прикладу 5.5

Гіпотеза 2. Припускаємо, що суб'єкт *B* слідує принципу максиміну та вибирає z^* за умови

$$I^* \rightarrow \max_{z \in Z} \min_{x \in X} I(x,z) .$$

Тоді можна вибирати x за правилом:

$$J(x,z^*) \rightarrow \max_{x \in X} ,$$

де z^* гарантуюче рішення другого гравця. Позначимо рішення задачі через x^{**}. При цьому

$$J^* = J(x^{**},z^*) \geq J^*,$$

де J^* - гарантована оцінка, отримана за принципом максиміну. Така нерівність може бути строгою, і, дотримуючись гіпотези 2, у разі її правомірності ми можемо отримати реальний виграш, вибравши рішення x^{**}, а не x^*.

Приклад 5.6.

Матрицею гри задана гра з нульовою сумою (рис. 5.7). У матриці на перетині рядків і стовпців наведено виграш гравця *A* в умовних одиницях, тобто, програш гравця *B*, суперника *A*.

X	Z			
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	5	-10	9	0
x_2	6	7	8	1
x_3	8	7	15	2
x_4	3	4	-1	4

Рисунок 5.7 – Матрицею гри з нульовою сумою

Для гравця А гарантуючою є стратегія $x^*=x_3$, а гарантованою є оцінка $J^*=2$. Якби ми вибрали інше рішення, то могли б залежно від дій гравця B отримати і менше значення виграшу, ніж 2. Гравець B прагне мінімізувати наш виграш та свій програш. Маємо $z^*= z_4$, гравець B ніколи не програє більше 4 у.о.

Якщо вибрати x^{**} за умови

$$J(x,z^*) \to \max_{x \in X},$$

то отримаємо $x^{**}= x_4$, $J(x^{**},z^*) = J^* > J^* = 2$. Таким чином, слідуючи гіпотезі 2, можна отримати найкращий результат у порівнянні з прийняттям рішень на основі принципу гарантованого результату.

Гіпотеза 3. Припустимо, що суб'єкт міркує як і у попередній грі, тобто, використовує стратегію z^{**}, а не z^*. З огляду на це вибираємо оптимальну стратегію з урахуванням цієї гіпотези:

$$J(x,z^{**}) \to \max_{x \in X} \Rightarrow x^{***}, J^{***}.$$

Гіпотеза 4. Нехай ми знаємо перший хід противника (за умовами гри він має нам його повідомити). Наша поведінка визначатиметься стратегією у вигляді функції $x=x(z)$. Ми можемо її визначити в результаті розв'язання задачі оптимізації

$$J(x,z) \to \max_{x \in X}.$$

Ця умова дозволяє для кожного фіксованого х визначити шукане значення x, тобто, задати функцію $x(z)$. У цьому випадку також можна визначити гарантований результат

$$\hat{J} = \min_{z \in Z} \max_{x \in X} J(x,z) = \min_{z \in Z} J(x(z),z).$$

Результат $\hat{J}$ буде відрізнятися від значення J^*, знайденого за гіпотезою 1, у всіх випадках маємо $\hat{J} \geq J^*$.

Прийняття гіпотези 4 дозволяє поліпшити результат, отриманий за принципом максимінного гарантованого результату.

Гіпотеза 5. Нехай B знає наш перший хід. У цьому випадку він, найімовірніше, дотримуватиметься стратегії $z=z(x)$, яка будується в результаті розв'язання оптимізаційного задачі

$$J(x,z) \rightarrow \max_{x \in X} \Rightarrow z=z(x).$$

Таким чином, припускаємо, що ми повідомили свій хід противнику, який використовуватиме стратегії $z(x)$. Таке припущення дозволяє впливати на вибір суб'єкта B, щоб він максимально відповідав нашим цілям. Ми можемо вибрати x з умови

$$J(x,z(x)) \rightarrow \max_{x \in X} \Rightarrow \tilde{x}.$$

Якщо максимум у співвідношенні $J(x,z) \rightarrow \max_{x \in X} \Rightarrow z=z(x)$ досягається не в одній точці z, а в деякій множині $M(x)$, то наш гарантований результат $\tilde{J}$ визначається з умови:

$$\tilde{J} = \max_{x \in X} \min_{z \in M(x)} J(x,z).$$

У всіх розглянутих вище випадках використовувалися припущення, що обидва учасники гри не тільки знають свої цілі, а й повністю поінформовані про цільові функції противника. У реальному житті це не завжди виконується. Часто ми не знаємо цілей противників, які також мають обмежену інформацію про наші цілі. Іноді противники використовують дезінформацію. Такі формальні моделі побудувати можна, але це складний процес.

Розглянемо проблеми прийняття рішень у іграх з точки зору нейтральної сторони. Нас будуть цікавити деякі характеристики рішення загалом з урахуванням цільових функцій усіх гравців. Найбільш важливими є властивість ***ефективності*** прийнятих рішень за «виграшами», які отримують гравці, і властивість ***стійкості*** рішень. Третя особа є арбітром у грі двох суб'єктів, які мають цільові функції:

$$J(x,z) \to \max_{x \in X},$$

$$I(x,z) \to \max_{z \in Z}.$$

Таку гру можна вважати багатокритеріальною (в даному випадку двокритеріальною) задачею оптимізації на множині $L=X \times Z$. Аргументом при цьому є вектор $\eta \in L$, $\eta=(x,z)$, а задача набуває вигляду багатокритеріальної задачі:

$$J(\eta) \to \max_{\eta \in L},$$

$$I(\eta) \to \max_{\eta \in L}.$$

При аналізі ефективності рішення можна використовувати принцип Парето, що дозволяє відкинути всі рішення, які можна замінити ефективнішими, які дають великі значення цільових функцій всіх гравців одночасно або частини гравців, але без зменшення значень цільових функцій інших суб'єктів, що беруть участь у грі. Рішення, які не можуть бути покращені вказаним чином, називаються ефективними або Парето-оптимальними. Такі ефективні рішення мають властивість, що покращувати значення цільової функції одного з гравців можна тільки за рахунок інших суб'єктів. Реально вибір здійснюється не одним, а кількома особами, і важливе значення набуває принцип прийняття рішення, пов'язаний з поняттям стійкості.

Будемо називати точку $\eta^{\wedge}=(x^{\wedge},z^{\wedge})$ ***стійким рішенням*** або ***точкою рівноваги гри***, якщо

$$\max_{x\in X} J(x,z^{\wedge}) = J(x^{\wedge},z^{\wedge}),$$

$$\max_{z\in Z} I(x^{\wedge},z) = \mathrm{I}(x^{\wedge},z^{\wedge}).$$

При виборі стійкого рішення $\eta^{\wedge}$ кажуть, що досягнута ***ситуація рівноваги***.

Нестійкість будь-якої ситуації проявляється в тому, що у разі її виникнення їй загрожує розпад, зумовлений можливостями одного з гравців. Гравець намагається шляхом зміни лише своєї стратегії покращити своє становище за рахунок інших. На цій підставі виник ***принцип стійкості Неша***: вибір раціональної стратегії повинен проводитися серед множини точок рівноваги.

Рівноважні рішення називають ***оптимальними за Нешем***. Цей принцип відбиває важливе властивість колективного рішення. Якщо два суб'єкти зуміли домовитися у тому, щоб дотримуватися вибору x=x^, z=z^, то той суб'єкт, який порушує домовленість, передусім і постраждає: властивість стійкості рішення дає відому гарантію проти порушення домовленості. У ситуації рівноваги кожен із гравців отримує виграш, не менший, ніж відповідний максимальний гарантований результат.

Протиріччя між оптимальністю по Парето та оптимальністю за Нешем є протиріччям між вигідністю та стійкістю. Тільки коли стійкі рішення є одночасно паретівськими, можна ефективно використати принцип Неша для рішення реальних задач. В іншому ж випадку завжди вибирають між ефективністю та надійністю прийнятих рішень. Тому одним із важливих напрямів теорії прийняття рішень є вивчення систем, у яких точки стійкості належать множині Парето.

Приклад 5.7.

До нерегульованого перехрестя їдуть на високій швидкості під прямим кутом один до одного два автомобілі. Кожен із водіїв має дві стратегії:

Б – безпечна стратегія: зменшити швидкість до безпечної;

Р - ризикована стратегія: продовжувати їхати на високій швидкості.

Якщо обидва водії дотримуватимуться стратегії Б, то отримаємо благополучний результат, що оцінюється для кожного з водіїв числом 1. Якщо обидва водії будуть дотримуватимуться стратегії Р, то відбувається аварія і втрати кожного водія виражаються числом (-9). При інших комбінаціях (Б,Р) або (Р,Б) результат оцінюється числом 3 для того, хто знизив швидкість (за втрату часу) і числом 3 – для того, хто рухається на високій швидкості (за економію часу). Маємо матрицю гри, подану на рис. 5.8.

X	Z	
	Б	Р
Б	1,1	0,3
Р	3,0	-9,-9

Рисунок 5.8 – Стійкі та нестійкі ситуації

Числа у таблиці становлять відповідні виграші.

Ситуації (Б,Б) та (Р,Р) є нестійкими, тому що кожен водій може отримати найкращий результат завдяки односторонній зміні свого рішення.

Ситуації (Б,Р) та (Р,Б) є стійкими, оскільки якщо вони виникли, у жодного з гравців немає підстав для односторонньої зміни стратегії своєї поведінки.

Таким чином, теорія ігор дозволяє нам приймати кращі рішення загалом.

Якщо ОПР може описати проблемну ситуацію у вигляді моделі теорії ігор, це дозволить проаналізувати можливі стратегії рішень та оптимізувати результат.

Контрольні запитання.

1. Дайте загальну постановку задачі теорії ігор.
2. Які види ігор ви знаєте?
3. За якими ознаками можна класифікувати ігри?
4. Чим задається гра? Як звести конфліктну ситуацію до гри?
5. Назвіть головні поняття теорії ігор та дайте їх визначення.
6. Яку гру називають матричною? Чим відрізняються чисті та змішані стратегії матричних ігор?
7. Як обчислити нижню та верхню ціну гри? Яке співвідношення між ними виконується?
8. Яку точку називають сідловою в теорії гри?
9. Які ви знаєте критерії існування чистих стратегій?
10. У чому полягає принцип мінімакса в теорії ігор?
11. Яку стратегію називають змішаною? Як її задають?
12. Які стратегії називають дублюючими, домінуючими та номінованими? Як їх виявити? Чи можна виключати їх з платіжної матриці?
13. Чи завжди є розв’язок матричних ігор у змішаних стратегіях? Обґрунтуйте відповідь.

15. Чи може бути в одного гравця декілька оптимальних стратегій? За яких умов? Обґрунтуйте.

6 СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

6.1 Визначення СППР

СППР - сукупність процедур з обробки даних та суджень, які допомагають ОПР у прийнятті рішень. СППР заснована на використанні моделей.

СППР - інтерактивна комп’ютерна система, що використовується для підтримки прийняття рішень у ситуаціях, де неможливо або небажано мати автоматичну систему, що повністю виконує весь процес прийняття рішень. Система не замінює людину, автоматизуючи процедуру прийняття рішення, а забезпечує ОПР різноплановою допомогою у ході вирішення проблеми.

СППР вирішують задачі аналізу даних з допомогою сукупності моделей об'єктивного характеру (фінансові розрахунки, збут, управління запасами), і з допомогою суб'єктивних (експертних) моделей (прогнози продажу продукції, реакції конкурентів тощо). З іншого боку, СППР можуть враховувати знання багатьох експертів. СППР, що використовують бази знань, називаються інтелектуальними.

Нерідко СППР розробляються під час адаптивного проектування, тобто. завершена система виникає в ході адаптивного процесу проектування та впровадження, що має ітеративний характер взаємодії розробника, користувача та системи. У ході розробки створюється прототип (макет) СППР, що має основні риси бажаної системи, який надалі доводиться до кінцевої системи з необхідними характеристиками та функціями.

При створенні СППР необхідно використовувати математично обґрунтовані моделі та методи прийняття рішень. Концептуальна модель СППР (рис. 1) містить:

– інтерфейс користувача, що виконує функції генерації та управління діалогом;

– блоки аналізу проблем та прийняття рішень, що включають процедури та методи для формулювання проблеми, аналізу проблеми та можливості її вирішення за допомогою бази даних, бази моделей, бази знань;

– засоби для отримання знань, побудови моделей та маніпулювання ними.

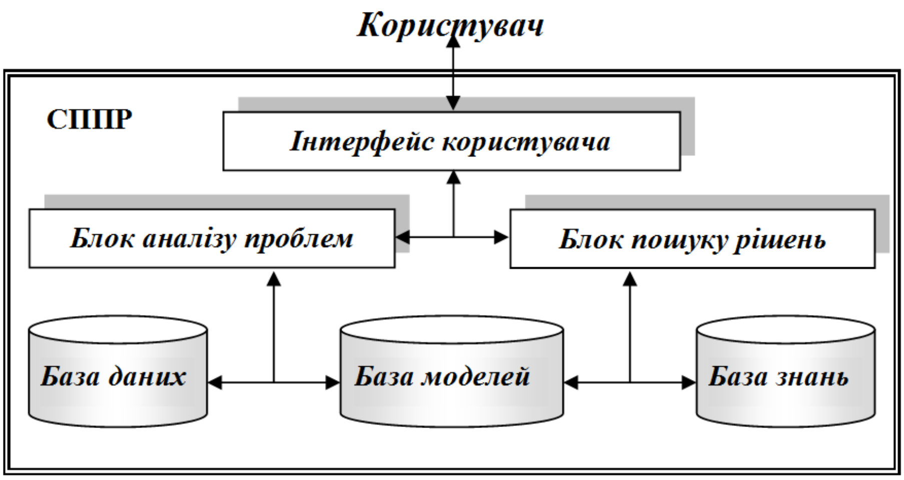


Рисунок 6.1 – Узагальнена структура СППР

Для розробки СППР використовуються:

– теорія прийняття рішень;
– методи добування, подання та обробки знань;
– підходи до побудови діалогових систем.

Таким чином, СППР – це комп'ютерні системи, що дозволяють ОПР використовувати дані, знання, об'єктивні та суб'єктивні моделі для аналізу та розв'язання слабоструктурованих проблем.

6.2 Класифікація СППР

На даний час для СППР нині немає загальноприйнятої вичерпної класифікації. Різні автори пропонують різні класифікації. Класифікація СППР (табл. 5.1) побудована на аналізі особливостей їхньої розробки та застосування, способів отримання, подання та структуризації інформації, можливостей інтерфейсу користувача, що дозволяє виділити суттєві ознаки СППР: концептуальні моделі; тип користувача; розв'язувані завдання; засоби забезпечення; сфери застосування.

Таблиця 6.1 – Класифікація СППР

Основа класифікації	Ознаки	Види систем
Концептуальна модель	Інформаційний підхід	Концептуальна СППР Еволюціонуюча СППР
	Когнітивний підхід	Характерна СППР Розширена характерна СППР
	Інструментальний підхід	Спеціалізована СППР, СППР-генератор, СППР-інструментарій
Користувач	Ієрархічний рівень управління	СППР для вищої, середньої, нижчої ланки управління
	Режим взаємодії користувача з системою	СППР в термінальному режимі, у режимі клерка, у режимі посередника, в автоматизованому режимі
	Тип ОПР при прийнятті рішень	СППР персональної, груп пової, організаційної підтримки
Задачі ПР	Ступінь новизни проблеми	СППР для унікальних проблем, для повторюваних проблем
	Характер опису проблеми	СППР для проблем цілісного вибору, для проблем критеріального вибору
	Тип моделі	СППР з об'єктивними моделями, з суб'єктивними моделями
Засоби забезпечення	Тип виконуваних функцій	СППР, орієнтована на дані, на моделі, на знання
	Мови інтерфейсу користувача	СППР з процедурною, командною, не процедурною, природною мовами
Сфери застосування	Проблемна область	СППР в мікро-, та макроекономіці, в офісній діяльності, в юриспруденції, в медицині та ін.
	Часовий горизонт	СППР для стратегічного планування (довгострокові рішення), для керівництва (середньострокові рішення), для оперативного управління (короткострокові рішення)

6.2.1 Класифікація СППР на основі концептуальної моделі

Під концепцією побудови СППР розуміють суму узагальнених положень або систему поглядів на розуміння сутності, методів, функцій та організації СППР.

Виділяють такі підходи до побудови концептуальних моделей СППР:

– інформаційний підхід;
– підхід з використанням технологій штучного інтелекту;
– інструментальний підхід.

СППР, побудовані з на базі інформаційного підходу, є автоматизованими системами, які використовують інформаційні технології. Основними компонентами таких СППР є інтерфейс користувача, база даних, база моделей.

Характеристиками інтерфейсу користувача є:

– управління стилями ведення діалогу;
– вибір користувачем стилю ведення діалогу;
– відображення даних у різних формах та видах;
– забезпечення гнучкої підтримки користувача.

База даних СППР містить кількісну та якісну інформацію з різних джерел.

Засоби створення та ведення БД надають такі можливості:

– об'єднання різних джерел даних за допомогою процедур вилучення інформації;
– додавання та вилучення джерел даних;
– подання логічної структури даних у термінах користувача;
– повний набір функцій для управління даними.

СПРР мають інструменти для формування моделей прийняття рішень. У базу моделей вбудовується не статичні моделі, а моделі, об’єднані з базою даних. Процедури моделювання забезпечують легке та гнучке управління побудовою моделей з готових блоків, програмних модулів та застосування побудованих моделей. Система управління базою моделей надає можливість:

- каталогізувати та обслуговувати широкий спектр моделей, що підтримують усі рівні прийняття рішень;
- швидко та легко створювати нові моделі;
- пов'язувати нові моделі з існуючими даними;
- управляти базою моделей.

Еволюціонуюча СППР окрім інтерфейсу користувача, бази даних та бази моделей містить базу текстів (БТ) та базу правил (БП). Додані компоненти дозволяють використовувати як менш структуровані види інформації (тексти на природній мові, індексовані документи), так і структурованіші – правила подання декларативних знань, евристичні процедури. Такі функції системи дозволяють адаптувати систему до зміни когнітивного стилю, інформаційних потреб користувача, зміни проблемної області.

СППР, побудовані на підході з використанням технологій штучного інтелекту, зазвичай мають компоненти, засновані на знаннях. Вони здатні «розуміти» проблему.

До складу таких СППР додають мовні підсистеми, підсистеми оперування знаннями, підсистеми обробки проблем.

Підсистема оперування знаннями містить інформацію про проблемну область. Вони розрізняються за характером інформації та методами представлення знань (ієрархічні структури, графи, семантичні мережі, фрейми, системи продукцій, логічні моделі і т.д.).

Система обробки проблем (проблемний процесор - ПП) забезпечує збір інформації, розпізнавання проблеми, підбір та аналіз моделі та ін.). ПП сприймає опис проблеми, зроблений відповідно до синтаксису мовної підсистеми та використовує знання, організовані за правилами, прийнятими у підсистемі оперування знаннями. Ці знання використовують для підтримки рішення. ПП є динамічним компонентом СППР, оскільки моделює поведінку людини, яка вирішує проблему. ПП поєднує інформацію, одержувану від користувача через мовну підсистему та підсистему оперування знаннями, на основі підібраних моделей перетворює формулювання проблеми у детальні процедури, що виконують пошук рішення. Більш складні ПП можуть формувати моделі для вирішення проблеми.

ПП виконує такі функції:

- збір даних;
- розпізнавання проблеми;
- формування концептуальної моделі;
- формування емпіричної моделі;
- верифікація;
- аналіз;
- пошук допустимих рішень;
- перевірка правильності (обґрунтованості) рішення;
- генерація рішення;
- виконання.

У рамках інструментального підходу до побудови концептуальної моделі СППР виділяють такі:

- спеціалізовані чи прикладні;
- генератори;
- інструментарій.

Спеціалізовані СППР орієнтовані кінцевого користувача (окремих осіб чи груп людей) і служать для підтримки рішення окремих прикладних задач.

СППР-генератори - це пакети пов'язаних програмних засобів для рішення задач пошуку та видачі даних, моделювання тощо. Вони використовуються конструкторами прикладних СППР для розробки спеціалізованих СППР і можуть бути вбудовані в прикладну систему.

СППР-інструментарії надають розробникам спеціалізовані мови, операційні системи, засоби вводу/виводу, відображення інформації та ін. До їхнього складу входять:

– інтерфейс користувача;
– лінгвістичний процесор;
– система управління даними;
– система управління моделями;
– система вилучення даних;
– системна директорія.

Інтерфейс користувача та лінгвістичний процесор є багатоканальними, дозволяють виконувати введення-виведення інформації, графіків, мовне введення-виведення інформації на природній мові, використовувати світлове перо і т.д. У системній директорії зберігаються метазнання про систему, що зменшують деталізацію проблеми та запобігають неправильному використанню системи.

6.2.2 Класифікація СППР за типом користувача

За типом користувачів СППР можна поділити на такі класи:

– ієрархія користувачів;
– режим взаємодії користувача із системою;
– ступінь взаємної залежності осіб у процесі прийняття рішення.

При ієрархічному прийнятті рішень виділяють вищий, середній та нижчий рівні. Керівники вищого рівня найчастіше затверджують рішення, підготовлені співробітниками нижчого рівня, які готують та обґрунтовують альтернативи. Тому керівники найвищого рівня рідко є кінцевими користувачами СППР. Як ОПР виступають особи чи групи осіб, які виконують аналіз альтернативних рішень та впливають на рішення. До таких осіб належать керівники, аналітики-посередники, експерти, адміністративні працівники підприємства.

Залежно від способу отримання ОПР інформації від системи виділяють такі режими роботи СППР:

- термінальний режим – інтерактивний режим роботи, ОПР самостійно конструює запити, отримує та інтерпретує відповіді системи, використовує їх у процесі прийняття рішення або для пошуку додаткової інформації;
- режим клерка – робота в режимі непрямого (off-line) доступу; ОПР конструює запити з використанням запропонованих форм, орієнтованих на обробку даних; пізніше, після отримання відповідей, виконує аналіз отриманої інформації та приймає рішення;
- режим посередника – користувачем системи є посередник, який отримує запити від ОПР, формалізує їх та вводить у систему, виконує аналіз проблеми, виконує відбір та інтерпретацію результатів, які передає ОПР;
- автоматизований режим – ОПР отримує стандартні повторювані повідомлення, які автоматично (без спеціального запиту) генеруються системою; при прийнятті рішення ОПР використовує отриману від системи інформацію разом із інформацією від інших джерел.

За рівнем взаємної залежності осіб, які приймають рішення, виділяють такі типи СППР:

- персональна підтримка – незалежне рішення, ОПР несе повну відповідальність, використовуючи всю повноту влади; ОПР забезпечує реалізацію рішення;
- групова підтримка – групове залежне рішення, рішення приймається групою взаємодіючих ОПР у результаті переговорів;
- організаційна підтримка – послідовно-залежне рішення, ОПР приймає лише частину рішення, яке потім передається іншій відповідальній особі.

6.2.3 Класифікація СППР за типом задачі прийняття рішень

Основою класифікації СППР з урахуванням розв'язуваної задачі є:

- ступінь новизни задачі - вирішується унікальна проблема або повторювана;
- характер опису проблеми – цілісний образ варіантів рішень або багатокритеріальний (у тому числі із залученням експертів);
- тип моделі – об'єктивний (заснований на формалізованих закономірностях) або суб'єктивний (заснований на перевагах ОПР).

Найчастіше використовуються багатокритеріальні задачі математичного програмування, задачі призначення, логістичні задачі. Методи рішення таких задач називаються людино-машинними процедурами прийняття рішень.

6.2.4 Класифікація СППР на основі засобів забезпечення

СППР надають засоби для забезпечення ОПР необхідними інструментами для прийняття рішень.

Надані програмні засоби в залежності від ступеня підтримки користувача поділяються на:

1) системи отримання даних – забезпечують можливість безпосереднього доступу до даних;

2) системи аналізу даних - дозволяють маніпулювати даними за допомогою спеціально розробленого програмного забезпечення;

3) системи аналізу інформації – забезпечують доступ до кількох баз даних та невеликих моделей;

4) розрахункові моделі – виконують оцінку наслідків дій з урахуванням обчислювальних процедур;

5) образотворчі моделі – дозволяють оцінювати наслідки дій на основі частково певних імітаційних моделей;

6) оптимізаційні моделі – забезпечують вибір напряму дій, генерують раціональні рішення з урахуванням обмежень;

7) рекомендуючі моделі – генерують набори альтернатив під час вирішення слабоструктурованих завдань.

Системи 1-3 орієнтовані на дані і виконують пошук, видачу, аналіз даних. Системи 4-7 орієнтовані на моделі та забезпечують виконання моделювання, формування альтернативних рішень, вибір найкращих рішень.

Мови інтерфейсу користувача мають три рівні:

- процедурні мови – вимагають явного покрокового опису процедур пошуку, виведення та обчислень;
- командні мови – використовують певні генератори повідомлень та моделі;
- непроцедурні мови – дозволяють формулювати дані та результати у досить загальному вигляді.

Мови для управління пошуком та виведенням даних діляться на групи залежно від видів діалогу:

- користувач у явному вигляді формує умови пошуку та виведення даних, знаючи фізичну та логічну організацію даних;
- користувач використовує генератори повідомлень лінгвістичного процесора; типи повідомлень визначено заздалегідь з потреб користувача;
- користувач визначає бажані дані, не знаючи організації даних; система має деякі функції розпізнавання проблем.

За допомогою мов для управління обчисленнями:

- користувач у явному вигляді задає всі обчислення та будує програмовані моделі, використовуючи мови програмування різних рівнів;
- користувач звертається до однієї з кількох наперед заданих моделей, використовуючи пов'язані з моделлю параметри;

– користувач формулює проблему в бажаних термінах; система визначає логіку моделювання, генерує модель та виконує пошук рішення.

6.2.5 Класифікація СППР за сферою застосування

СППР застосовують у наступних проблемних областях:

– мікроекономіка;
– макроекономіка;
– автоматизація офісу;
– оцінка та розповсюдження технологій;
– юриспруденція;
– медицина та ін.

За часовим аспектом прийняття рішень СППР виконують:

– довгострокові рішення – стратегічне планування та прогнозування діяльності підприємства; вирішуються слабоструктуровані проблеми, СППР включають знання та досвід керівників та керуючих різних рівнів, надають моделі та методи пошуку рішень в умовах невизначеності, з використанням евристик;
– довгострокові рішення – завдання, які вирішує керівництво; вирішуються слабоструктуровані проблеми;
– короткострокові рішення – оперативне управління; вирішуються добре структуровані проблеми.

У сфері автоматизації офісної праці СППР виконують:

– підтримку процесів генерування інформації відповідно до індивідуальних особливостей співробітників;
– підтримку процесів точної та швидкої передачі та розповсюдження інформації, що з'являється в результаті інтелектуальної діяльності управлінського персоналу;

– підтримку процесів зберігання, пошуку, виведення інформації на вимогу.

6.3 Приклади СППР

СППР знаходять застосування майже у всіх сферах сучасного суспільства. Наведемо деякі приклади.

СППР для моделювання процесів поширення радіоактивних речовин у навколишньому середовищі.

Входить до складу системи комплексного радіоекологічного моніторингу України. Забезпечує підтримку прийняття ефективних управлінських рішень щодо попередження та усунення негативних змін стану навколишнього середовища на території України.

Задачею СППР є з урахуванням фрагментарних даних відновити цілісну картину стану забруднення довкілля у зоні поразки. На основі цих даних проводяться обговорення та приймаються групові рішення різними фахівцями та організаціями щодо ліквідації наслідків радіаційного забруднення.

У СППР застосовуються математичні методи моделювання динаміки радіонуклідів у навколишньому середовищі у поєднанні з оперативним моніторингом. На базі цих методів будуються високоточні прогнозно-аналітичні оцінки стану навколишнього середовища, які забезпечують високоефективні рішення з радіаційної безпеки та вироблення контрзаходів.

СППР American Analytical information Management System (AAIMS)

Була розроблена для American Airlines, але використовується іншими авіакомпаніями, виробниками літаків, консультантами та асоціаціями. AAIMS підтримує різноманітні рішення авіакомпаній, аналізуючи зібрані дані про використання літаків авіакомпаній, кількість місць і завантаження, а також статистику руху. Наприклад, він створює прогнози частки ринку авіакомпаній, доходів і прибутковості, а також допомагає керівництву авіакомпаній приймати рішення щодо призначення літаків, запитів на маршрути, класифікації квитків, ціноутворення тощо. Також American Airlines успішно використовувала СППР управління дохідністю. В авіакомпанії польотна місткість явно фіксована. Крім того, коли літак відправляється, непродані місця не можуть приносити дохід, тому їх можна назвати знищеними. СППР управління дохідністю допомагає відстежувати, як зарезервовано місця, і реагувати відповідно. Наприклад, щоб збільшити продажі рейсів із низьким попитом, авіакомпанії можуть пропонувати знижки на квитки та підвищувати ціну авіаквитка, коли на рейс є надлишок попиту. СППР допомагає менеджерам вирішити, скільки додаткових місць можна забронювати та як встановити ціни на кожне місце, щоб літак був заповнений і прибуток був максимальним.

СППР має потужну базу даних, яка зберігає дані про 300 змінних. Вона також зберігає дані часових рядів і може оцінювати зміни змінної на щоденній, щотижневій або щомісячній основі. Система підтримки прийняття рішень також допомагає виконувати аналіз чутливості, який дозволяє фірмам з’ясувати вплив зміни однієї одиниці різних вхідних даних на вихід. Авіакомпанії можуть дізнатися, наскільки зменшаться середні змінні витрати на одного пасажира, якщо вартість палива знизиться на одну грошову одиницю. Так само це також може допомогти авіакомпаніям дізнатися, як вплине на вартість, якщо в меню мандрівників буде зменшено одну страву.

СППР IBMs GeoManager, GADS (Geodata Analysis System)

Ці СППР належать до класу систем підтримки прийняття просторових рішень.

IBMs GeoManager – це система, яка дозволяє конструювати та показувати карти та інші візуальні об'єкти для допомоги при прийнятті рішень щодо географічного розподілу людей та ресурсів. Наприклад, вона дозволяє створити географічну карту злочинності та допомагає правильно перерозподілити сили поліції. Також її використовують для вивчення ступеня урбанізації, у лісовій промисловості, залізничному бізнесі тощо.

СППР GADS надає інструменти візуалізації, аналізу та звітування про активи мережевої інфраструктури. Доступ і агрегування даних мережевої інфраструктури допомагає зрозуміти поточний стан мережі та її розвиток з часом, що дозволяє приймати ефективні рішення про використання ресурсів, завдань з обслуговування та інцидентів.

Основні характеристики задач прийняття просторових рішень:

- велика кількість варіантів рішень,
- результати або наслідки альтернативних рішень є просторово змінними,
- кожна альтернатива оцінюється на основі кількох критеріїв,
- деякі критерії можуть бути якісними, тоді як інші можуть бути кількісними,
- як правило, у процесі прийняття рішень бере участь більше ніж одна особа, яка приймає рішення (або група інтересів),
- особи, які приймають рішення, мають різні переваги щодо відносної важливості критеріїв оцінки та наслідків рішення,
- рішення часто оточені невизначеністю.

СППР Expert Choice

Застосовується для пошуку рішень складних структурованих проблем, виявлення пріоритетів тв. альтернатив, визначення стабільності оціночних критеріїв, інтеграції ресурсів, аналізу прибутків та витрат. Використовує аналітичні запрограмовані у заданій послідовності процеси.

Надає підтримку у поданні проблеми у вигляді ієрархічної моделі з набором сценаріїв, критеріїв, альтернатив. Надає можливість оцінювати важливість критеріїв та альтернатив.

СППР SuperDecisions

Ця комп'ютерна система прийшла на зміну відомому у недалекому минулому програмному продукту ExpertChoice .

Система призначена для розрахунку відносної ефективності (вагомості) альтернатив на основі їхньої багатокритеріальної оцінки. Граф ієрархії критеріїв у загальному випадку включає чотири підграфи: переваги (B — benefits), можливості (O — opportunities), витрати (C — costs) та ризики (R — risks).

Ваги кожної із наявних альтернатив і важливість критеріїв визначаються експертами шляхом парних порівнянь у фундаментальній шкалі, або безпосереднього оцінювання. Після цього, оцінки агрегуються методом зваженої суми. Оцінки за критеріями, що відповідають перевагам і можливостям беруться зі знаком плюс, а оцінки за критеріями, що визначають витрати та ризики — зі знаком мінус.

СППР PROMETHEE Visual

Призначена для побудови системи ранжирування варіантів рішень (альтернатив) на основі їхніх оцінок за кількома критеріями.

Агрегація оцінок здійснюється методом зваженої суми. Критерії можуть бути якісними або кількісними. Оцінки можуть бути абсолютними та відносними.

Особливість методу PROMETHEE — наявність «функції переваги» (звичайна, U-подібна, V-подібна, Гаусівська, ступінчаста), яка задає характер відношення переваги залежно від значень одного чи кількох визначальних параметрів.

СППР Orderhive

Orderhive — це універсальне програмне забезпечення «все в одному», яке пропонує основні бізнес-рішення, як-от автоматизація, керування складом, керування замовленнями, виставлення рахунків і платежів тощо. Інструмент дає компаніям чітке уявлення про їхні повсякденні операції та дозволяє їм приймати оптимальні рішення на основі даних завдяки потужній аналітиці та можливостям звітування програмного забезпечення.

Платформа: веб-інтерфейс, Android, iOS.

Функціональні можливості дозволяють виконувати підтримку прийняття рішень у автоматизації електронної комерції, інтеграції з широким спектром стороннього програмного забезпечення, управлінні складом, виконанні замовлень, управлінні запасами, управлінні доставкою.

СППР Riskturn

Riskturn — це простий, але потужний інструмент фінансового прогнозування, який використовує фінансові та часові змінні для визначення майбутніх грошових потоків компанії. Інструмент має зручний інтерфейс, який створює імовірнісний прогноз як мінімум за 5 кроків і відкриває широкий спектр фіскальних показників, запускаючи моделювання даних методом Монте-Карло.

Підтримка прийняття рішень виконуються на основі аналізу даних та моделювання методом Монте-Карло. Система виконує прогнозування, контроль версій, аналіз чутливості.

IBM Watson Health

IBM Watson Health — це СППР, розроблена IBM, яка допомагає клієнтам проводити медичні дослідження, клінічні дослідження та рішення в галузі охорони здоров’я за допомогою передових технологій, таких як штучний інтелект, аналітика даних, хмарні обчислення тощо. Для підтримки клінічних та медичних рішень використовується штучний інтелект.

СППР Zynx Health

СППР Zynx Health виконує підтримку клінічних рішень на основі доказів, і надає набір онлайн-рішень, які дозволяють лікарям і клініцистам точно лікувати своїх пацієнтів. Команда лікарів, медсестер і суміжних медичних працівників переглядає найновішу рецензовану літературу, щоб розробити клінічно значущі та важливі підсумки та використати найкращі практики, що ґрунтуються на доказах.

Zynx Health розгорнуто в різних закладах охорони здоров'я по всьому світу.

СППР InterQual Criteria

InterQual Criteria, розробка компанії McKesson, пропонує на основі клінічних проявів підтримку прийняття рішень щодо медичних заходів. InterQual Criteria дає змогу приймати найбезпечніші та найефективніші рішення щодо догляду, використовуючи об'єктивні, конкретні критерії медичного та поведінкового здоров'я на всіх рівнях догляду.

Також використовується при плануванні амбулаторної допомоги. Надає доступ до програмного забезпечення через хмарні реалізації.

СППР AVDecision

AVDecision — це повнофункціональне програмне забезпечення для підтримки прийняття рішень, призначене для обслуговування стартапів, малого та середнього бізнесу.

AVDecision надає наскрізні рішення, розроблені для Windows.

Knowmax

Knowamx — це програмне забезпечення для керування знаннями, яке допомагає агентам підтримку рішень для забезпечення кращої взаємодії з клієнтами. Knowmax надає користувачам функції підтримки прийняття рішень на основі дерев рішень, баз знань, образотворчих рішень, системи управління навчанням.

СППР Вибір

аналітична система, заснована на методі аналізу ієрархій (МАІ), є простим та зручним засобом, який допоможе: структурувати проблему;

побудувати набір альтернатив;

виділити фактори, що характеризують їх;

задати значущість цих факторів;

оцінити альтернативи кожному з чинників;

знайти неточності та протиріччя у судженнях особи приймаючої рішення (ОПР)/експерта;

проранжувати альтернативи;

провести аналіз рішення та обґрунтувати отримані результати.

Система спирається на математично обґрунтований метод аналізу ієрархій Томас Сааті.

Може використовуватися при вирішенні наступних типових завдань:

оцінка якості організаційних, проектних та конструкторських рішень;

визначення політики інвестицій у різних галузях; завдання розміщення (вибір місця розташування шкідливих та небезпечних виробництв, пунктів обслуговування);

розподіл ресурсів;

проведення аналізу проблеми за методом "вартість-ефективність";

стратегічне планування;

проектування та вибір обладнання, товарів;

вибір професії, місця роботи, підбір кадрів.

СППР для планування телекомунікаційних мереж

СППР при плануванні телекомунікаційних мереж дозволяє користувачеві динамічно взаємодіяти з різними сценаріями. Сценарії можна вибирати за критеріями чисельності населення, доходу або будь-якими іншими критеріями, запровадженими розробником. Система дозволяє користувачеві аналізувати еволюційні інвестиційні сценарії.

Надає можливість створити бібліотеку рішень для подальшого використання та модифікації. Ці рішення включають інтерактивний доступ до внутрішніх даних, пов'язаних із кожним рішенням. Програмне забезпечення створює автоматичні технічні звіти про аналізовані сценарії.

СППР в телекомунікація Telecom DSS

Система підтримки прийняття рішень була створена, щоб допомогти стратегічному управлінню в галузі телекомунікацій приймати важливі рішення щодо профілів клієнтів і мереж. Базується на принципі використання в реальному часі шаблонів трафіку голосової інформації та пакетів даних, що проходять через систему.

6.4 Перспективи розвитку СППР

У теорії прийняття рішень та області розробки систем підтримки прийняття рішень дослідження та пошуки нових підходів. Дослідження дозволили виявити тенденції та побудувати технологічні сценарії щодо перспектив розвитку систем підтримки прийняття рішень. Зокрема, дослідниками та експертами були визначені ключові напрями розробки СППР та визначена їхня релевантність:

– рекомендаційні системи для електронної комерції (за винятком банківської справи та фінансів);
– графічні (контент-орієнтовані) рекомендаційні системи для мультимедіа;
– графічні (контент-орієнтовані) рекомендаційні системи для 3D-електронної комерції;
– рекомендаційні системи, здатні судити про портфелі продуктів (обмежені їх вартістю);
– рекомендаційні системи для торгівлі цінними паперами та сировинними товарами;

– інтелектуальні посередники для переговорів, підбору партнерів, співпраці.

Експерти визначили ключові технології, методи й моделі, які використовуватимуться в інтелектуальних системах підтримки прийняття рішень:

– ГІС-технології, здатні оцінювати або виявляти переваги щодо окремих об’єктів у великому регіоні, інтенсивно використовуючи візуалізацію в поєднанні з GPS;
– когнітивні особливості експертних систем, що дозволяють усувати негативні наслідки рішень, що приймаються знервованою людиною поспіхом, тощо.

За оцінками експертів, намітилися тенденції розвитку майбутніх інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень, що є додатками 3D-електронної комерції:

– зросте роль і ступінь складності методів на основі АБО-методів, що застосовуються в СППР; особливо методів багатокритеріальної оптимізації, моделей невизначеності та управління;
– клас проблем прийняття рішень, які вважаються чисельно нерозв'язними, буде скорочуватися;
– СППР (починаючи з систем, що рекомендують, і включаючи їх) будуть зближуватися з пошуковими системами та інтелектуальними агентами аналізу даних; місія останніх - доповнювати відсутні дані, які можуть допомогти у вирішенні проблем прийняття рішень, наданих у запитах клієнта.

Останнім часом почали домінувати веб-СППР. У таких системах важливу роль грають інструменти колективного прийняття рішень, вирішальні сітки. Зросла актуальність когнітивних функцій, реалізованих в СППР. Розширилися можливості, що дозволяють ОПР проявити креативність шляхом використання складних методів багатокритеріального аналізу та прийняття рішень, віртуальної та доповненої реальності зі всіма атрибутами та зростаючим ступенем реалізму.

Подальший розвиток СППР відбувається шляхом застосування все більш складних інтелектуальних інформаційних технологій, що дозволяють глибше описувати проблемні ситуації.

У той час як академічні дослідники в області концепції систем підтримки прийняття рішень спрямовані на розвиток технологіє-незалежного характеру концепції, вони також потребують нових технологій. В той час як основна увага залишається на прийнятті рішень, нові технології продовжують допускати форми підтримки прийняття рішень, які раніше були неможливими. Технологія хмарних обчислень є такою технологією.

Хмарні обчислення пропонують на вимогу системам, які виконують велику кількість обчислень, необхідні потужності та надають доступ до величезних обсягів зовнішнього сховища.

Просторові СППР (SDSS) представляють сегмент СППР, де технології хмарних обчислень особливо актуальні. Програми SDSS потребують доступу до загальних географічних даних, отриманих за межами організації. Просторова обробка часто потребує великої кількості комп’ютерів, тому можна скористатися майже необмеженими ресурсами обробки, доступними в хмарі. Оскільки багато форм прийняття просторових рішень зустрічаються відносно рідко, надання внутрішніх ресурсів може виявитися неекономічним для багатьох організацій. Наприклад, аналіз розташування, важливий додаток SDSS, може знадобитися лише тоді, коли відкривається нове відділення.

Прийняття рішень у надзвичайних ситуаціях є хорошим прикладом можливого використання SDSS і хмарних обчислень. Дані можна збирати під час стихійних лих, таких як торнадо чи землетруси, такі події можуть генерувати величезні обсяги даних, які вимагатимуть швидко масштабованих ресурсів, щоб впоратися зі сплеском даних. Вважається, що хмарні обчислення забезпечують потужність, необхідну для моделювання таких явищ. Після стихійних лих, таких як урагани, повені, лавини або цунамі, просторову СППР можна використовувати для різноманітних додатків, таких як екстрена евакуація, пошукові місії або розгортання рятувального персоналу. Прийняття рішень вимагає інтеграції різноманітних джерел просторових даних, включаючи дані про висоту, дані про транспортні та комунальні мережі. Може знадобитися інтенсивне комп'ютерне моделювання з такими складними даними, і, можливо, доведеться враховувати великі обсяги даних у реальному часі. У цьому середовищі такі ресурси, як SDI, можуть надати необхідні дані, а хмарні обчислення можуть надати майже необмежені обчислювальні ресурси для забезпечення швидкого прийняття рішення.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення СППР.
2. Які задачі вирішують СППР?
3. Поясніть концептуальну модель СППР.
4. Наведіть та поясніть класифікацію СППР.
5. Які підходи використовуються до побудови концептуальних моделей СППР?
6. Прокоментуйте інформаційний підхід до побудови СППР.
7. Прокоментуйте застосування технологій штучного інтелекту у побудові СППР.
8. Прокоментуйте інструментальний підхід до побудови СППР.
9. Які класи користувачів СППР ви знаєте? Поясніть їхні особливості.
10. Як при побудові СППР враховуються типи розв'язуваних задач?
11. Поясніть класифікацію СППР на основі засобів забезпечення.
12. Як можна класифікувати СППР за часовим аспектом прийняття рішень?
13. Де СППР знаходять застосування?
14. Прокоментуйте перспективи розвитку СППР.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Баин А.М. Современные информационные технологии систем поддержки принятия решений. М.: Форум, 2009.

2. Васильєв О. Б., Методи розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації: методичні вказівки та завдання до самостійної роботи для студентів IV курсу денної форми навчання напрямів підготовки 6.040301 Прикладна математика та 6.040201 Математика / О. Б. Васильєв, Н. С. Васильєва, О. Д. Кічмаренко. — Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2017. — 48 с.

3. Волошин, О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. /О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. - 2-ге вид., перероб. та допов. - К. : Видавничополіграфічний центр "Київський університет". - 2010. - 336 с.

4. Галасюк В. В. Проблемы теории принятия экономических решений / Консалт. группа "КАУПЕРВУД"; Ин-т системных исслед. интеллект. собственности. Донецк: Наука и образование, 2000. 296 с.

5. Демиденко М.А. Системи підтримки прийняття рішень : навч. посіб. / М.А. Демиденко; Нац. гірн. ун-т. -- Електрон. текст. дані. - Д. : 2016. - 104 с. - Режим доступу: http://nmu.org.ua

6. Задачі багатокритеріальної оптимізації. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://stud.com.ua/9271/ekonomika/zadachi_bagatokriterialnoyi_optimizatsiyi

7. IT для бизнеса: Системы принятия решений как антикризисный інструмент: [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://www.executive.ru/management/itforbusiness/1951354-it-dlya-biznesa-sistemyprinyatiya-reshenii-kak-antikrizisnyi-instrument

8. Каденко С., Циганок В., Андрійчук О., Какрабчук А. Аналіз інструментарію підтримки прийняття рішень у контексті вирішення задач

стратегічного планування. Реєстрація, зберігання і обробка даних. 22. 77-91. 10.35681/1560-9189.2020.22.2.211281.

9. Класифікація задач прийняття рішення. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://stud.com.ua/45747/menedzhment/klasifikatsiya_zadach_priynyattya_rishennya

10. Козлов В. В., Томашевська Т. В., Кузнєцов М. І. Використання оптимізаційних моделей у фінансових системах підтримки прийняття рішень // Статистика України. 2020. № 1. С. 75–83. Doi: 10.31767/su. 1(88)2020.01.09.

11. Ларичев О. И., Петровский А. В. Системы поддержки принятия решений. Современное состояние и перспективы их развития. // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. — Т.21. М.: ВИНИТИ, 1987, http://www.raai.org/library/papers/Larichev/Larichev_Petrovsky_1987.pdf

12. М. Я. Марко, Г. Г. Цегелик. Використання методу послідовних поступок для розв’язування задач підвищення рентабельності виробництва малого підприємстваю Наукові записки, 2017 / 1 (54). С. 141-146.

13. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навчальний посібник / Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 272 с.

14. Методы принятия управленческих решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КНОРУС, 2018. — 286 с.

15. Навч.-метод. посіб. "Системи підтримки прийняття рішень": [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://megalib.info/sistemi-pidtrimki-prijnyattyarishen/

16. Нелінійне і динамічне програмування; поняття про імітаційне моделювання. https://stud.com.ua/9272/ekonomika/neliniyne_dinamichne_programuvannya_ponyattya_imitatsiyne_modelyuvannya

17.Нестеренко О.В. Інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень: навч. посібн./ О.В. Нестеренко, О.І. Савенков, О.О. Фаловський. За ред. П.І. Бідюка. - Київ: Національна академія управління. - 2016. - 188 с.

18.О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик. Основи теорії прийняття рішень. Навчальний посібник – К., 2014. – 94с.

19.Олексюк О.С. Системи підтримки прийняття фінансових рішень на мікрорівні. - К.: Наукова думка, 1998. - 206 с.

20.Петровский А. Б. Системы поддержки принятия решений. / Петровский АРоманов, В. П. Интеллектуальные информационные системы в экономике [Текст] : учебное пособие / Виктор Петрович Романов ; ред. Н. 2 П. Тихомиров ; Российская эконом. академия им. Г. В. Плеханова. - М. : Экзамен, 2003. - 496 с.

21.Петруня Ю.Є. Прийняття управлінських рішень : навчальний посібник / [Ю. Є. Петруня, Б. В. Літовченко, Т. О. Пасічник та ін.] ; за ред. Ю. Є. Петруні. - [3-тє вид., переробл. і доп.]. - Дніпропетровськ: Університет митної справи та фінансів, 2015. - 209 с.

22.Пономарева, К. А. Тенденции развития интеллектуальных систем поддержки принятия решений / К. А. Пономарева. – Текст : элекстронный // Наука без границ. – 2020. – № 5 (45). – С. 107-111. – [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://nauka-bez-granic.ru/№-5-45-2020/5-45-2020/

23.Пономаренко В. С.Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навчальний посібник /, Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 272 с.

24.Попов А.Л. Системы поддержки принятия решений: Учебное пособие: [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/ 1676/5/1335843_schoolbook.pdf

25.С. В. Каденко, В. В. Циганок, О. В. Андрійчук, О. В. Карабчук Аналіз інструментарію підтримки прийняття рішень у контексті вирішення задач стратегічного планування. [Електронний ресурс]. - Режим доступу:

https://www.researchgate.net/publication/347900564_Analiz_instrumentariu_pidtrimki_prijnatta_risen_u_konteksti_virisenna_zadac_strategicnogo_planuvanna

26.Система поддержки принятия решений: помощник руководителя для стратегического и оперативного управления: [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://www.epam-group.ru/about/news-and-events/in-the-news/2009/sistema-podderzhki-prinyatiya-resheniy-pomoschnik-rukovoditelya-dlyastrategicheskogo-i-operativnogo-upravleniya

27.Системи підтримки прийняття рішень : навч. посіб. / М.А. Демиденко; Нац. гірн. ун-т. -- Електрон. текст. дані. - Д. : 2016. - 104 с.

28.Системи підтримки прийняття рішень [Текст] : навч. посібник / О. І. Пушкар, В. М. Гіковатий, О. С. Євсєєв, Л. В. Потрашкова ; ред. О. І. Пушкар. - Харків : Інжек, 2006. - 304 с.

29.Системи підтримки прийняття рішень [Текст] : навчальний посібник для самостійного вивчення дисципліни / Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". - Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2010. - 265 с.

30.Системи підтримки прийняття рішень: Навч. посіб./ О.І.Пушкар, В.М.Гірковатий, О.С.Євсєєв, Л.В.Потрашкова; За ред. О.І.Пушкаря; МОН України, Харк. нац. екон. ун-т. - Х.: ВД "ІНЖЕК", 2006. - 304 с.

31.Системы поддержки принятия решений в бизнесе: [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://www.sib.com.ua/arhiv_2005/6_2005/systems/systems.htm.

32.Системы поддержки принятия решений в 2-х частях: учеб. пособие для вузов. / К.А.Аксенов — Издательство ЮРАЙТ, 2016. - — Ч. 1. — 103 с.

33.Халин В. Г. Системы поддержки принятия решений : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / В. Г. Халин [и др.] ; под редакцией В. Г. Халина, Г. В. Черновой. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 494 с. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://urait.ru/bcode/432974 (дата обращения: 21.01.2020).

34.Ситник В. Ф. Системи підтримки прийняття рішень: Навч. посіб. К.: КНЕУ, 2003. 624 с.

35.Теорія ігор в дослідженні конфліктних ситуацій. Методичні рекомендації до лабораторних робіт для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліст та магістр / В.М. Рева, О.П. Купенко. − Д.: Національний гірничий університет, 2011. − 56 с.

36.Теслюк В.М., Загарюк Р.В. Методи багатокритеріальної оптимізації: – Львів: Видавництво Національного університету ―Львівська політехніка, 2012. – 64 с.

37.Технологии принятия решений: метод анализа иерархий. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://www.citforum.ru/consulting/BI/resolution/

38.Томашевський О. М. Інформаційні технології та моделювання бізнеспроцесів : навч. посібн. / О. М. Томашевський, Г. Г. Цегелик, М. Б. Вітер, В. І. Дудук. - К. : Центр учбової літератури, 2015. - 296 с.

39.Трифонов А.Г.. Многокритериальная оптимизация. Optimization Toolbox Руководство пользователя. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_1/16.php

40.Цілочисельне програмування. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://stud.com.ua/9270/ekonomika/tsilochiselne_programuvannya.

41.Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений: учеб. пособие. - БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

42.AhlNON RAPOPORT. A Study of a Multistage Decision Making Task with an Unknown Duration. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/001872086600800106

43.Andrzej M.J. Skulimowski . Future Trends of Intelligent Decision Support Systems and Models . [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/251405629_Future_Trends_of_Intelligent_Decision_Support_Systems_and_Models

44.Dynamic Programming. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-11.pdf

45.Keenan, Peter B. (2013) "Cloud computing and DSS: the case of spatial DSS, International Journal of Information and Decision Sciences 5(3): 283-294. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/259280672_Cloud_computing_and_DSS_the_case_of_spatial_DSS

46.Mobin Ahmad. Decision Tree as an Art of Solving Multi Stage Decision Problem. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM) e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 13, Issue 6 Ver. II (Nov. - Dec. 2017), PP 60-66 www.iosrjournals.org. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol13-issue6/Version-2/I1306026066.pdf

47.ROM Y. Multi-Stage Decision Processes: The Impact of Attribute-Order on How Consumers Mentally Represent Their Choice. ROM Y. SCHRIFT JEFFREY R. PARKER GAL ZAUBERMAN SHALENA SRNA.

48.W. Hoy. Decision-Making Theory, 2019. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: www.waynekhoy.com

Наукове видання

НІКІТІНА Людмила
ЯЦЕНКО Ірина

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності 122 – Комп’ютерні науки

Укладач НІКІТІНА Людмила Олексіївна

За авторською редакцією