

**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

А.О. Пашко

**СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ВЕКТОРІВ ТА
ПРОЦЕСІВ**

Київ – 2025

УДК 519.2:007.004.94

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Є.В. Івохін
доктор фізико-математичних наук І.В. Розора

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №16 від 24 червня 2025)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №11 від 23 червня 2025 року)

Статистичне моделювання випадкових величин, векторів та процесів. Конспект лекцій/ А.О. Пашко – Київ:2025. – 85 с.

Приведено теоретичні та практичні основи методів статистичного моделювання випадкових величин, випадкових векторів та випадкових процесів. Розглянуто алгоритми статистичного моделювання випадкових подій, дискретних та неперервних випадкових величин і векторів, ланцюгів Маркова, гауссівських випадкових процесів.

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Інформатика» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки».

Конспект лекцій використовується при викладанні дисциплін «Статистичне моделювання в задачах штучного інтелекту», «Стохастичні алгоритми», «Інтелектуальний аналіз фінансових даних».

© Пашко А.О., 2025

Передмова

В конспекті лекцій наведено теоретичні та практичні основи методів статистичного моделювання випадкових величин, випадкових векторів та випадкових процесів. Розглянуто алгоритми статистичного моделювання випадкових подій, дискретних та неперервних випадкових величин і векторів, ланцюгів Маркова, гауссівських випадкових процесів.

Конспект лекцій використовується при викладанні дисциплін «Статистичне моделювання в задачах штучного інтелекту», «Стохастичні алгоритми», «Інтелектуальний аналіз фінансових даних».

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1. СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.....	8
1.1. Обчислювальний експеримент в задачах штучного інтелекту.....	8
1.2. Моделювання дискретних випадкових величин	11
1.3. Моделювання неперервних випадкових величин.....	15
1.4. Генератори псевдовипадкових чисел.....	30
1.5. Перевірка гіпотези про закон розподілу	33
2. МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ.....	44
2.1. Основні характеристики випадкових векторів	44
2.2. Методи моделювання випадкових векторів.....	46
2.3. Моделювання гауссівського випадкового вектора.	57
3. ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.....	59
3.1. Обчислювальний експеримент.....	59
3.2. Інтегрування методом статистичного моделювання	63
4. ЛАНЦЮГИ МАРКОВА. МОДЕЛЮВАННЯ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА.	66
4.1. Означення марковського випадкового процесу.	66
4.2. Моделювання марковських ланцюгів	71
5. МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.....	74
5.1 Алгоритми статистичного моделювання випадкових процесів, що зображуються у вигляді рядів.....	74
5.2. Статистичне моделювання вінерівського випадкового процесу.....	81
5.3. Моделювання узагальненого вінерівського процесу	83
ЛІТЕРАТУРА.....	84

ВСТУП

У сучасній науці, техніці, економіці та інших галузях знань дедалі більшого значення набувають методи математичного моделювання випадкових явищ. Реальні процеси, з якими стикаємося в навколишньому світі — від коливань фінансових ринків до шуму в електронних приладах або поширення інфекційних хвороб — часто мають стохастичну природу. Для їхнього вивчення, прогнозування та оптимального управління необхідно використовувати адекватні математичні моделі, що враховують випадковість та невизначеність.

Конспект лекцій присвячений статистичному моделюванню випадкових величин, випадкових векторів і випадкових процесів — фундаментальних понять теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії випадкових процесів. Особливу увагу приділено статистичному комп'ютерному моделюванню, що дозволяє реалізовувати й аналізувати складні моделі навіть тоді, коли їхній аналітичний розв'язок неможливий або надто складний.

Метою цього конспекту - надати читачеві теоретичну базу та практичні навички для:

- побудови математичних моделей стохастичних об'єктів;
- генерування реалізацій випадкових величин і процесів з заданими характеристиками;
- статистичної перевірки моделей та їхнього налаштування на основі експериментальних даних;
- застосування моделей у прикладних задачах.

Статистичне моделювання — це не лише інструмент аналізу, а й мова опису складного світу, де випадковість є невід'ємною частиною реальності.

В науковій літературі для підкреслення важливості та ефективності статистичного моделювання введено окремий термін - обчислювальний експеримент.

Обчислювальний експеримент — це метод дослідження математичних моделей за допомогою комп'ютерних обчислень. Він полягає у створенні,

реалізації та аналізі моделі об'єкта чи процесу з використанням чисельних алгоритмів і програмних засобів. Обчислювальний експеримент дає змогу вивчати складні системи, які важко або неможливо дослідити теоретично чи в лабораторних умовах.

У сучасній науці та техніці обчислювальний експеримент став третім стовпом досліджень поряд із теоретичним аналізом і фізичним експериментом. Його важливість зумовлена кількома ключовими чинниками:

1. Складність реальних систем. Багато природних, технічних і соціальних процесів описуються складними математичними моделями, які не піддаються точному розв'язанню. Обчислювальний експеримент дозволяє отримати наближені рішення, провести численні спостереження та аналіз поведінки моделі в різних умовах.

2. Безпечність і економічність. Деякі експерименти у фізичному світі є дорогими, тривалими або небезпечними (наприклад, моделювання аварій ядерних реакторів або поширення вірусів). У таких випадках імітаційне моделювання на комп'ютері є єдиною практичною альтернативою.

3. Масштабованість і гнучкість. Завдяки комп'ютерам можна досліджувати поведінку моделі для великої кількості параметрів, проводити серії експериментів, порівнювати результати та виявляти закономірності. Обчислювальний експеримент легко модифікувати — змінити вихідні умови, структуру моделі чи алгоритм.

4. Актуальність у міждисциплінарних дослідженнях. Сучасна наука активно використовує моделювання в біології, економіці, екології, медицині, фізиці, інженерії, соціології тощо. Обчислювальний експеримент є об'єднувальним інструментом, що дозволяє адаптувати математичні підходи до потреб конкретної галузі.

5. Інструмент верифікації. Обчислювальний експеримент часто використовується для перевірки теоретичних припущень і гіпотез. Якщо аналітичний розв'язок відомий, чисельні результати можна зіставити з ним і оцінити точність обраного методу.

У ХХІ столітті обчислювальний експеримент став невід'ємною частиною наукового дослідження. Його роль зростає разом із розвитком комп'ютерної техніки, чисельних методів і програмного забезпечення. Вміння проводити обчислювальні експерименти та аналізувати їхні результати є необхідною компетенцією сучасного дослідника і практика в будь-якій галузі, де присутня випадковість або складність систем.

Конспект лекцій розрахований на студентів старших курсів, аспірантів та фахівців, які займаються статистичним аналізом даних, моделюванням випадкових явищ і дослідженням операцій. Для успішного опанування матеріалу бажано мати знання з теорії випадкових процесів, теорії ймовірностей, математичної статистики та елементарне володіння мовами програмування (наприклад, Python або R).

1. СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

1.1. Обчислювальний експеримент в задачах штучного інтелекту

У сучасну епоху стрімкого розвитку технологій штучний інтелект (ШІ) став ключовим напрямом інновацій у науці, промисловості, медицині, фінансах, освіті та багатьох інших сферах. Завдяки методам машинного навчання, нейронних мереж, обробки природної мови, оптимізації та планування, системи ШІ здатні вирішувати задачі, які ще нещодавно вважалися винятково людськими прерогативами — розпізнавання зображень, переклад мов, стратегічне планування, генерація тексту тощо.

Особливістю задач ШІ є їх висока складність, багатовимірність, стохастичність та адаптивність, що унеможливорює аналітичне розв'язання або повне теоретичне обґрунтування багатьох методів. У такому контексті обчислювальний експеримент виступає як необхідний і незамінний інструмент дослідження, перевірки та вдосконалення алгоритмів штучного інтелекту.

Обчислювальний експеримент у задачах ШІ виконує низку ключових функцій:

- дає змогу емпірично перевірити гіпотези щодо поведінки моделей на складних даних;
- допомагає зіставити ефективність різних алгоритмів за заданими метриками якості;
- дозволяє визначити вплив параметрів моделі, структури даних чи стратегій навчання на кінцевий результат;
- виявляє обмеження та слабкі місця моделей у реальних умовах;
- служить основою для порівняльного аналізу, абляційних досліджень та автоматичного підбору параметрів.

Цей підхід особливо актуальний у випадках, коли навчальні дані великі або неструктуровані, коли аналітичні оцінки недоступні або неточні, коли

розв'язання задачі пов'язане з евристичними, стохастичними пошуками або глибокими нейронними архітектурами.

Дослідимо головні аспекти системного уявлення про етапи, методи та інструменти обчислювального експерименту в контексті ШІ, а також наявність практичних навичок для його проведення в типових задачах: класифікації, регресії, кластеризації, навчання з підкріпленням, генерації даних тощо.

Знання принципів обчислювального експерименту не лише підвищує якість наукових досліджень у галузі ШІ, а й забезпечує відтворюваність, достовірність і обґрунтованість отриманих результатів, що є критично важливим як у прикладних, так і в академічних проектах.

Обчислювальний експеримент у задачах штучного інтелекту (ШІ) — це систематичне дослідження поведінки та характеристик алгоритмів ШІ за допомогою їх чисельної реалізації та багаторазового тестування на реальних або штучно згенерованих даних. Через складність, нелінійність і стохастичну природу багатьох моделей ШІ, саме обчислювальний експеримент дозволяє перевірити гіпотези, порівняти методи, виявити недоліки та підтвердити ефективність підходів у практичних умовах.

У задачах ШІ обчислювальний експеримент слугує:

- Інструментом перевірки ефективності моделі, коли аналітична оцінка неможлива або складна;
- Методом порівняння моделей (наприклад, різних архітектур нейронних мереж чи алгоритмів класифікації);
- Способом налаштування параметрів (гіперпараметрів) моделі: кількість шарів, швидкість навчання, розміри вікна тощо;
- Механізмом тестування узагальнювальної здатності моделі (generalization), стабільності, обчислювальної складності та ін.;
- Шляхом дослідження впливу вхідних даних (баланс вибірки, шум, розмір, тип фіч) на якість навчання.

Обчислювальний експеримент, як будь-який серйозний науковий процес, складається з кількох обов'язкових етапів, кожен із яких важливий для

отримання надійних, достовірних і інтерпретованих результатів. Типовий цикл обчислювального експерименту в ШІ включає:

1. Формулювання задачі. Наприклад: розпізнавання емоцій із зображень, класифікація відгуків як позитивних/негативних, прогнозування цін.
2. Підготовка даних. Збір, очищення, розділення на train/validation/test. Можливе штучне генерування або аугментація (наприклад, для зображень чи текстів).
3. Вибір моделей і алгоритмів. Вибір базового алгоритму (наприклад, Random Forest, CNN, Transformer). Побудова або імпорт архітектури.
4. Навчання моделі. Запуск навчання на навчальній вибірці. Збереження метрик на валідаційній вибірці.
5. Тестування та оцінка. Обчислення метрик якості: accuracy, F1-score, ROC-AUC, RMSE тощо. Аналіз помилок (confusion matrix, heatmap attention, тощо).
6. Повторення з варіаціями. Зміна гіперпараметрів, архітектури, набору даних. Проведення серійного експерименту (grid search, random search, Bayesian optimization).
7. Аналіз результатів. Побудова графіків навчання (learning curves). Візуалізація результатів (наприклад, t-SNE для кластеризації).
8. Формулювання висновків. Яка модель працює краще? Де помиляється? Що вплинуло на продуктивність?

Виклики в обчислювальному експерименті ШІ

- Стохастичність результатів (навчання залежить від початкових ваг, порядку даних).
- Висока обчислювальна складність — експерименти часто потребують GPU/TPU та великого часу.
- Ризик переобучення (overfitting) — на тренувальних даних модель працює добре, а на тестових — погано.
- Складність відтворення результатів — важливо зберігати випадкові зерна (random seed), конфігурації, середовище.

Обчислювальний експеримент у задачах штучного інтелекту — це основний метод розробки, перевірки та вдосконалення інтелектуальних алгоритмів. Саме через нього наука про ШІ переходить від абстрактних ідей до практичних, вимірюваних результатів. Грамотно спланований та проведений експеримент забезпечує надійність, відтворюваність і наукову добросовісність досліджень у галузі, що активно формує майбутнє.

1.2. Моделювання дискретних випадкових величин

Під час дослідження складних систем за методом статистичних випробувань важливо мати можливість отримувати вибіркові значення випадкових величин із різними законами розподілу за допомогою комп'ютера. Основою для моделювання випадкових величин є перетворення одного або кількох незалежних значень випадкової величини R , що рівномірно розподілена на інтервалі $[0,1]$. Ці значення позначаються як α_i , де $i=1,2,3,\dots$, $\alpha_i \in [0,1]$. Значення α_i генеруються за допомогою програмних генераторів випадкових чисел. Методи побудови генераторів випадкових величин, алгоритми моделювання випадкових величин з дискретним та неперервним розподілами описані в роботах [7, 8, 9, 12].

Моделювання випадкових подій. Нехай ймовірність настання певної елементарної випадкової події A під час одного випробування дорівнює $P(A)=p$. Передбачається, що умови кожного випробування однакові, і його можна повторювати нескінченну кількість разів.

Якщо α_i — значення випадкової величини, рівномірно розподіленої в інтервалі $[0,1]$, то можна стверджувати, що подія A настає, якщо $\alpha_i \leq p$ (рис. 1), і не настає, якщо $\alpha_i > p$.

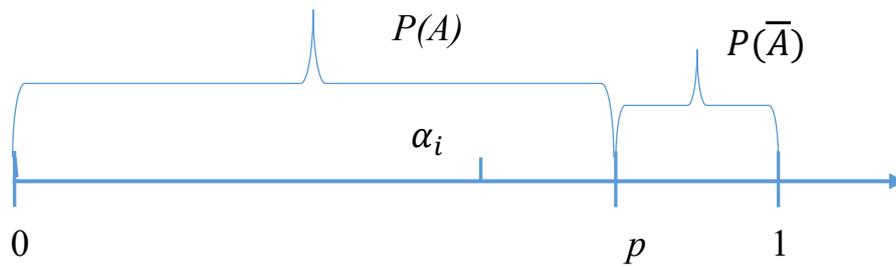


Рис. 1.1. Моделювання настання випадкових подій

Дійсно, якщо $f(\alpha)$ — щільність імовірності рівномірного розподілу, тоді

$$P(\alpha < p) = \int_0^p f(r)dr = p = P(A).$$

Ця модель добре описує події, як-от: обслуговування запитів у системах масового обслуговування (СМО), які можуть бути або вільними, або зайнятими; успішність чи невдача виконання певного завдання; влучення або промах у ціль; розгалуження потоків інформації в різних напрямках.

Група несумісних подій. Припустимо, що існує група несумісних подій A_1, A_2, \dots, A_k , настання яких потрібно змоделювати. Імовірності цих подій відомі:

$$p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), p_3 = P(A_3), \dots, p_k = P(A_k).$$

Оскільки події несумісні, то $\sum p_i = 1$. Для зручності вважаємо, що $p_0 = 0$. На відрізку $[0, 1]$ числової осі відкладають відповідні значення ймовірностей (рис. 2).

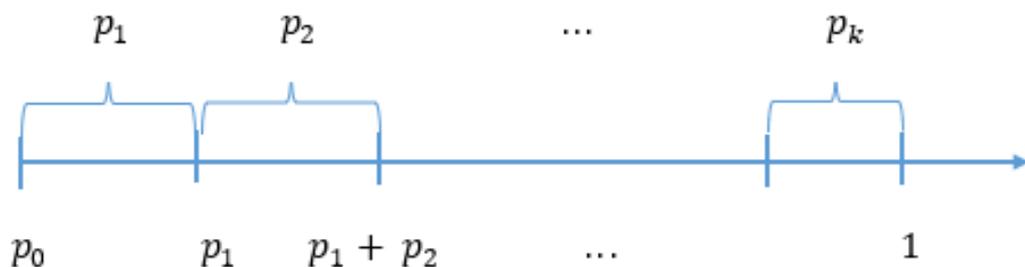


Рис. 1.2. Моделювання групи несумісних подій

Якщо значення α_i , отримане з генератора випадкових чисел, потрапляє в інтервал від $\sum_{k=0}^{i-1} p_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, (i-1)$ до $\sum_{k=0}^i p_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, i$, то вважаємо, що відбулася подія A_i . Цей метод називають визначенням результату випробування за жеребом. Він базується на формулі:

$$P\left(\sum_{k=0}^{i-1} p_k \leq \alpha_i \leq \sum_{k=0}^i p_k\right) = p_i = P(A_i),$$

де $p_0=0$.

Цей підхід широко застосовується в теорії прийняття рішень. Він добре моделює процес вибору однієї з багатьох альтернатив, наприклад, у комп'ютерних іграх, при розгалуженні інформаційних потоків у вузлах мереж, або виборі одного з кількох пристроїв в СМО для обслуговування.

Умовна подія. Умовна подія A — це така подія, що відбувається з ймовірністю $P(A/B)$, лише за умови, що попередньо настала подія B (рис. 3). Для моделювання необхідно задати ймовірність $P(B)$ настання події B . Моделювання умовної події A здійснюється так:

Спершу випадкове число α_1 , отримане з генератора випадкових чисел, використовується для перевірки, чи відбулася подія B . Подія B вважається такою, що настала, якщо виконується нерівність $\alpha_1 \leq P(B)$.

Якщо подія B настала, то далі за допомогою іншого випадкового числа α_2 перевіряється умова $\alpha_2 \leq P(A)$. Якщо вона виконується — вважаємо, що подія A також відбулася. Якщо ж подія B не настала, то подію A не моделюють. Таким чином, можна зменшити загальну кількість необхідних випробувань.

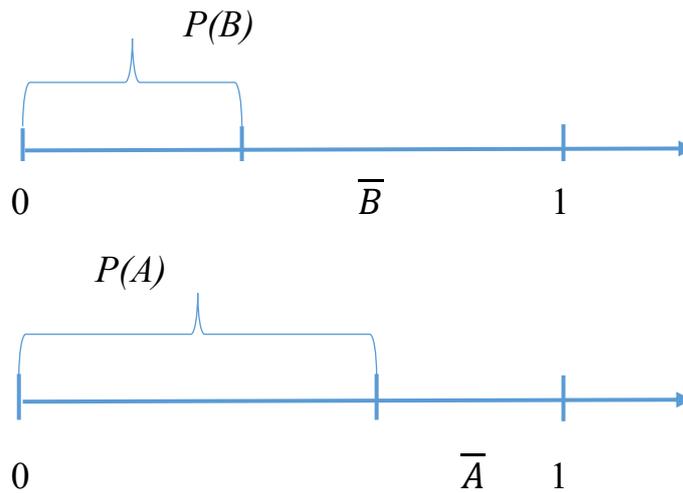


Рис. 1.3. Моделювання настання умовної події

Моделювання випадкової величини з дискретним розподілом.

Дискретну випадкову величину можна змоделювати на основі її розподілу, який задається у вигляді таблиці.

Таблиця 1. Дискретний розподіл випадкової величини

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Тут p_j — імовірність того, що випадкова величина x набуває значення x_j , $j=1, \dots, n$. Виконується умова нормування: $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.

Для моделювання поділяють інтервал $(0;1)$ на n під інтервалів, довжини яких дорівнюють відповідним ймовірностям p_1, p_2, \dots, p_n . Якщо випадкове число α , згенероване генератором випадкових чисел із рівномірним розподілом на $(0;1)$, потрапляє в інтервал, що відповідає p_k , тоді випадкова величина x приймає значення x_k .

Таким чином, при моделюванні дискретної випадкової величини фактично використовується та ж процедура, що і для моделювання повної групи несумісних подій.

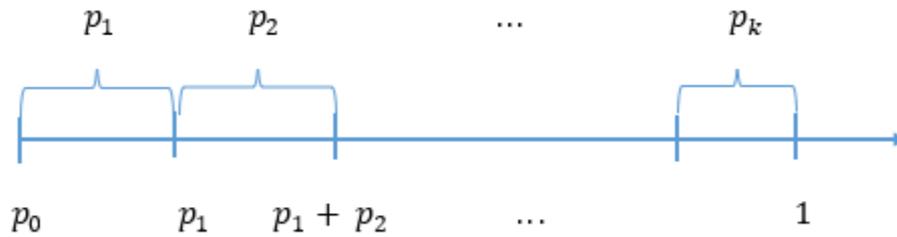


Рис. 1.4. Моделювання дискретної випадкової величини

1.3. Моделювання неперервних випадкових величин

Для генерації неперервних випадкових величин із довільним законом розподілу, базуючись на випадкових числах, рівномірно розподілених у межах $[0, 1]$, застосовуються різні методи: метод оберненої функції, метод відсіювання, наближені методи, спеціальні методи тощо.

Метод оберненої функції. Розглянемо випадок, коли неперервна випадкова величина має функцію щільності $f(x)$ і монотонно зростаючу функцію розподілу $F(x)$ (рис. 5). Суть методу полягає в наступному: за допомогою генератора випадкових чисел формуємо значення α_i , яке є випадковою величиною на інтервалі $[0, 1]$ — це точка на осі ординат. Щоб отримати значення випадкової величини x_i з функцією розподілу $F(x)$, потрібно знайти розв'язок рівняння: $F(x_i) = \alpha_i$.

Оскільки,

$$P(X < x) = P(\alpha < F(x)) = \int_0^{F(x)} f(r) dr = F(x).$$

то, відклавши на осі ординат значення α_i , яке згенеровано рівномірно на $[0, 1]$, і знайшовши на осі абсцис відповідне значення x_i , для якого $F(x_i) = \alpha_i$, отримаємо випадкову величину $x = F^{-1}(\alpha)$, яка має задану функцію розподілу $F(x)$.

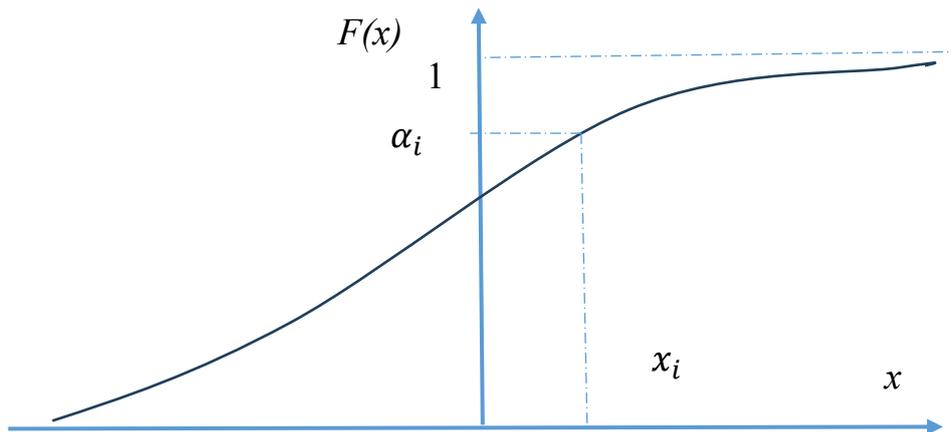


Рис. 1.5. Метод оберненої функції для генерування неперервної випадкової величини.

Таким чином, кожне випадкове число $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ з інтервалу $[0,1]$, перетворюється на послідовність x_1, x_2, x_3, \dots , що має задану щільність розподілу $f(x)$.

Загальний алгоритм моделювання неперервної випадкової величини:

1. Генерується випадкове число $\alpha_i \in [0,1]$.
2. Обчислюється відповідне значення x_i , яке є розв'язком рівняння:

$$\alpha_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx$$

Розглянемо приклади моделювання основних розподілів.

Рівномірний розподіл. У загальному випадку випадкова величина X є рівномірно розподіленою на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей та функція розподілу мають вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Графіки функцій щільності $f(x)$ та ймовірності $F(x)$ зображено на рис. 6.

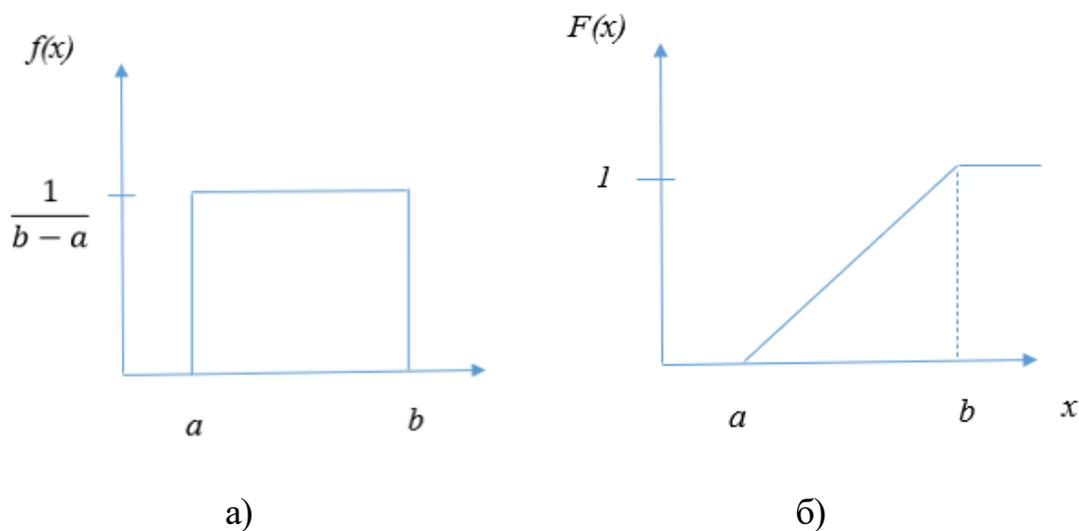


Рис. 1.6. Графік функції щільності (а) і функції розподілу (б) випадкової величини, що має рівномірний розподіл на $[a, b]$.

Для рівномірнорозподіленої випадкової величини X математичне сподівання та дисперсія обчислюються за формулами

$$EX = \frac{a + b}{2}, \quad DX = \frac{b - a}{12}.$$

Для моделювання випадкової величини X можна використати метод оберненої функції.

$$\alpha_i = \int_a^{x_i} \frac{dx}{b - a} = \frac{x_i - a}{b - a}.$$

Функцію розподілу випадкової величини прирівнюємо до значення α_i . Знаходимо значення випадкової величини з рівномірним розподілом на відрізку $[a, b]$:

$$x_i = (b - a)\alpha_i + a.$$

Експоненціальний закон розподілу. Експоненціальний закон розподілу широко використовується в теорії надійності. Щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Для моделювання використаємо метод оберненої функції. Отже, маємо

$$r_i = \int_0^{x_i} f(x) dx = \int_0^{x_i} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x_i}.$$

Тепер знаходимо значення x_i

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha_i)$$

Можна показати, що випадкові величини $(1 - \alpha_i)$ мають такий самий розподіл, що і величини α_i . Тоді, замінивши $(1 - \alpha_i)$ на α_i отримаємо

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(\alpha_i).$$

Випадкові величини з експоненціальним законом розподілу (рис. 7) широко застосовуються в задачах моделювання та аналізу систем масового обслуговування, наприклад, під час моделювання процесів виходу з ладу та ремонту обладнання, які виникають у складних системах, у разі визначення інтервалів часу між послідовними викликами абонентів у телефонній мережі або замовлень від незалежних клієнтів у будь-якій мережі обслуговування (швидка допомога, служби ремонту, виклик таксі і т. ін.)

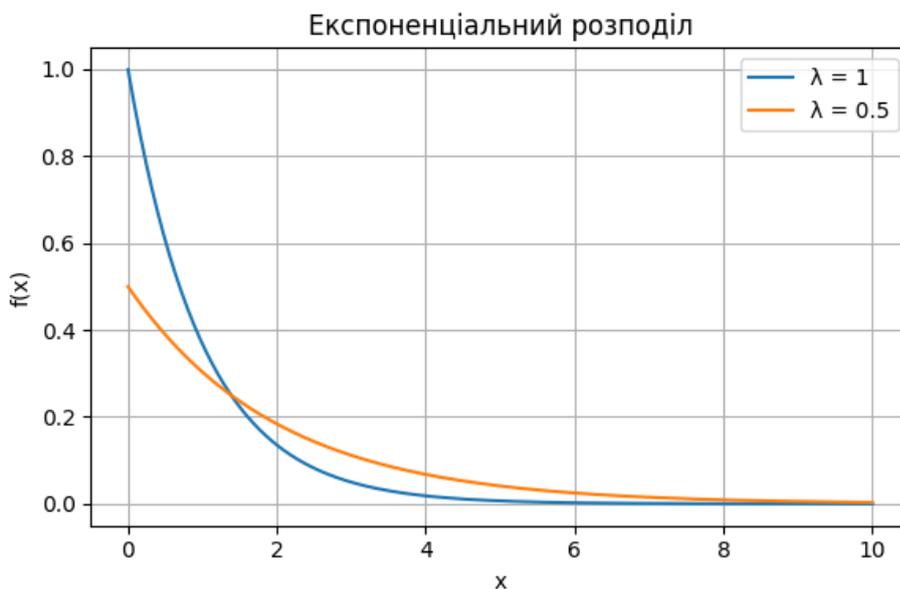


Рис. 1.7. Щільність експоненціального розподілу

Розподіл Парето. Розподіл Парето має функція розподілу

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^b, \quad b > 0, \quad x_{min} > 0.$$

Середнє значення $E\xi = \frac{bx_{min}}{b-1}$, при $b > 1$.

Дисперсія $D\xi = \left(\frac{x_{min}}{b-1}\right)^2 \frac{b}{b-2}$, при $b > 2$.

Формула моделювання для методу оберненої функції має зображення

$$\xi = \frac{x_{min}}{(1 - \alpha)^{\frac{1}{b}}}$$

де α - рівномірно розподілена на відрізку (0; 1).

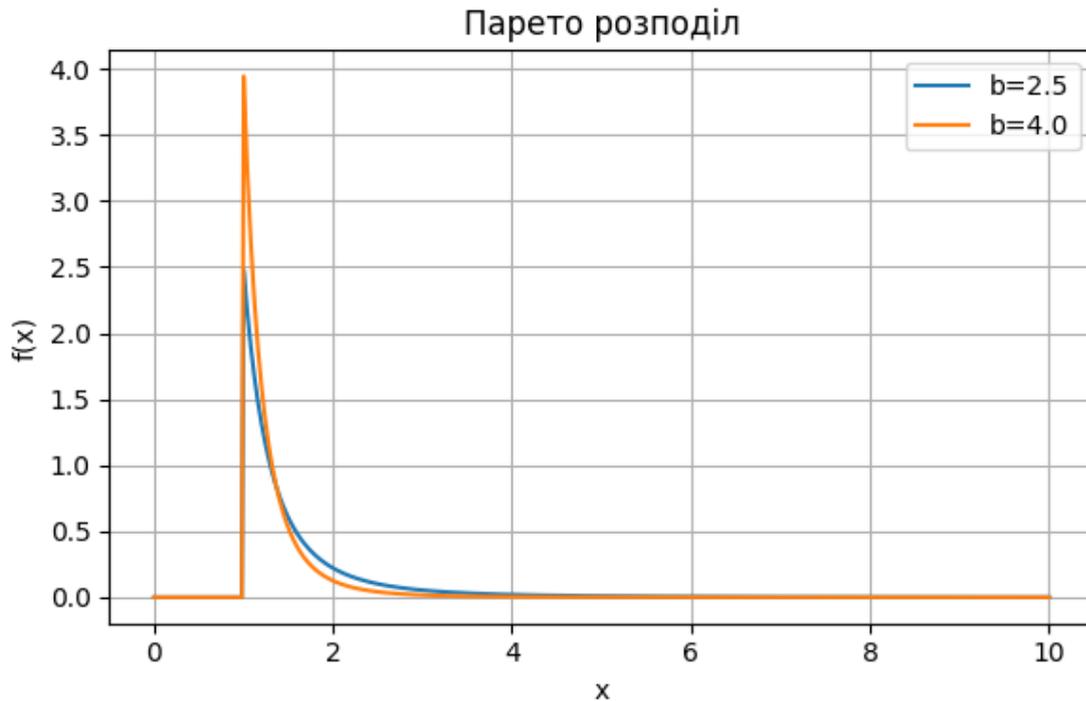


Рис. 1.8. Щільність розподілу Парето

На рис. 9. зображена реалізація випадкової величини з розподілом Парето при $b = 3$.

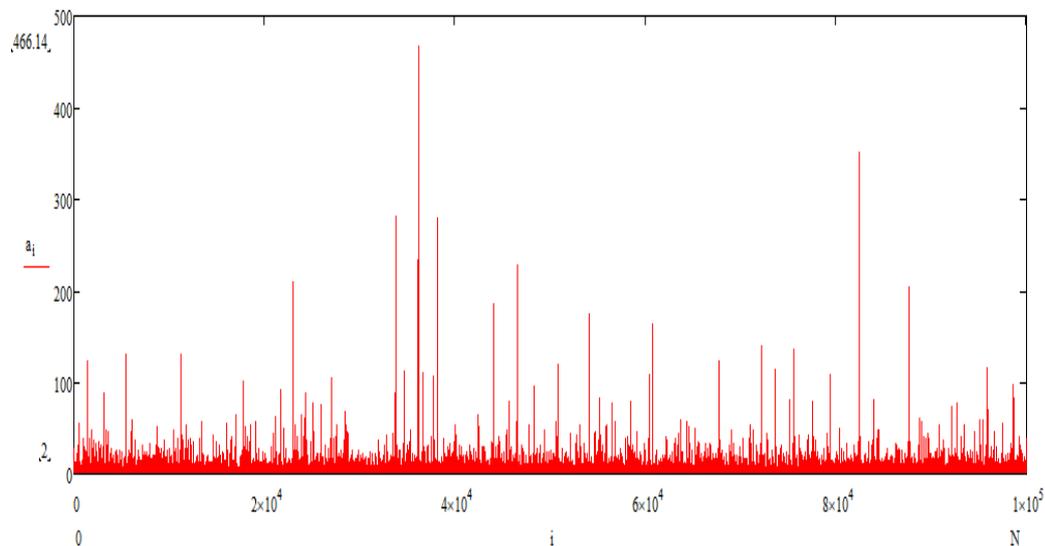


Рис. 1.9. Реалізація випадкової величини з розподілом Парето.

Розподіл Вейбулла. Розподіл Вейбулла має функція розподілу

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^c\right), \quad c > 0, \quad \lambda > 0.$$

Середнє значення $E\xi = \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)$.

Дисперсія $D\xi = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right) \right]$.

Формула моделювання для методу оберненої функції має зображення

$$\xi = \lambda[-\ln(1 - \alpha)]^{\frac{1}{c}}.$$

де α рівномірно розподілена на відріжку (0; 1).



Рис. 1.10. Щільність розподілу Вейбулла.

На рис. 11. зображена реалізація випадкової величини з розподілом Вейбулла при $c = 3, \lambda = 2$.

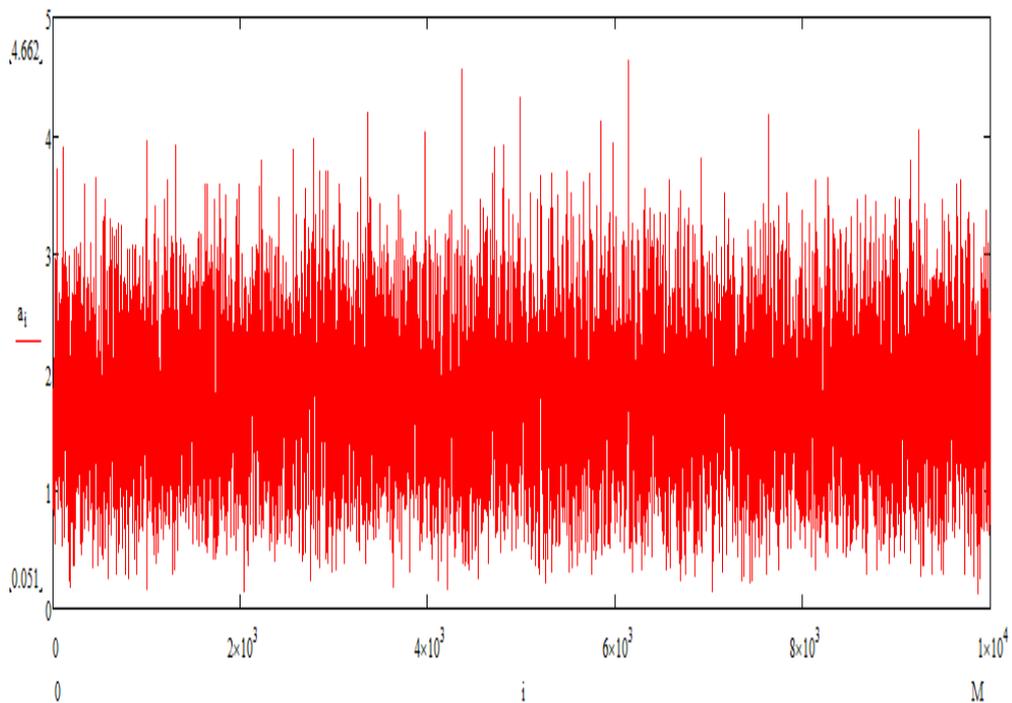


Рис. 1.11. Реалізація випадкової величини з розподілом Вейбулла.

Розподіл Коші. Розподіл Коші має функцію розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}, \gamma > 0, x_0 \in (-\infty; +\infty).$$

Середнє значення не існує.

Дисперсія $D\xi = +\infty$.

При $\gamma = 1$ і $x_0 = 0$ розподіл називається стандартним розподілом Коші.

Формула моделювання для методу оберненої функції має зображення

$$\xi = x_0 + \gamma \operatorname{tg}\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right], \text{ де } \alpha \text{ рівномірно розподілена на відріжку } (0; 1).$$

Параметр γ називається масштабом (scale) розподілу Коші.

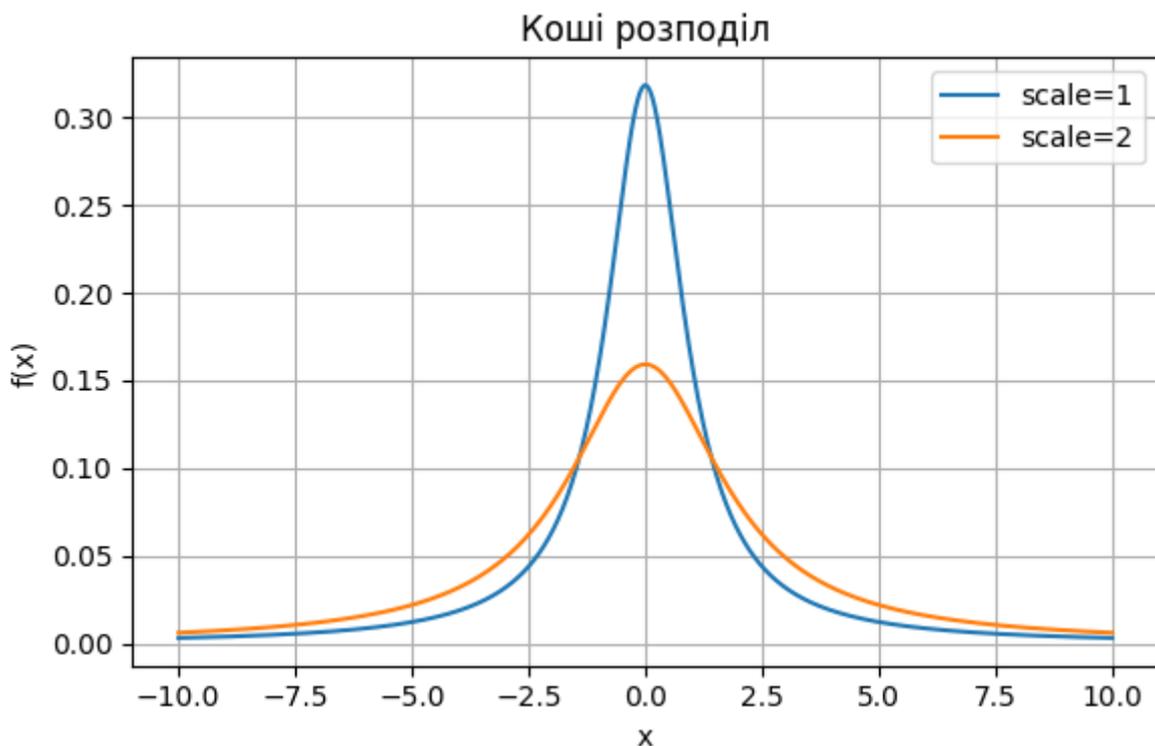


Рис. 1.12. Щільність розподілу Коші

На рис. 13. зображена реалізація випадкової величини з розподілом Коші при $\gamma = 1, x_0 = 0$.

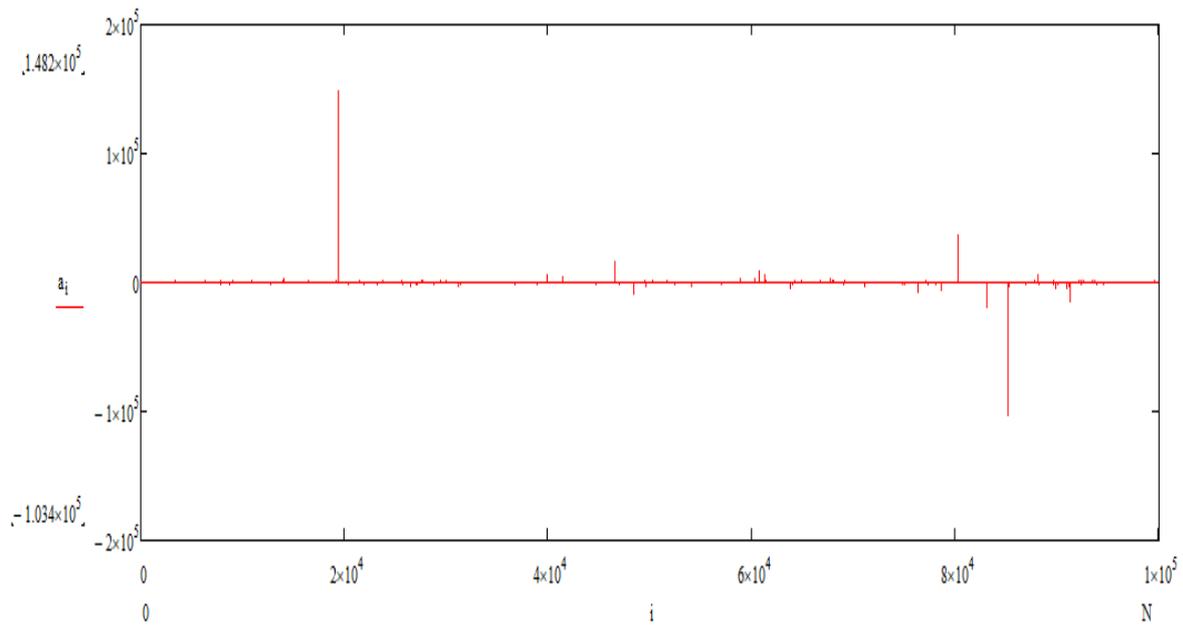


Рис. 1.13. Реалізація випадкової величини з розподілом Коші.

Розподіл Коші описує амплітудно - частотні характеристики лінійних коливальних систем в околі резонансних частот.

Якщо η_1, η_2 - незалежні випадкові величини з $N(0,1)$, випадкова величина $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ має стандартний розподіл Коші.

Розподіл Релея. Розподіл Релея має функцію розподілу

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \sigma > 0.$$

Середнє значення $E\xi = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Дисперсія $D\xi = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2$.

Формула моделювання для методу оберненої функції має зображення

$$\xi = \sqrt{2\sigma^2(-\ln(1-\alpha))}, \text{ де } \alpha \text{ рівномірно розподілена на відрізку } (0; 1).$$

Параметр σ виступає в якості масштабу.

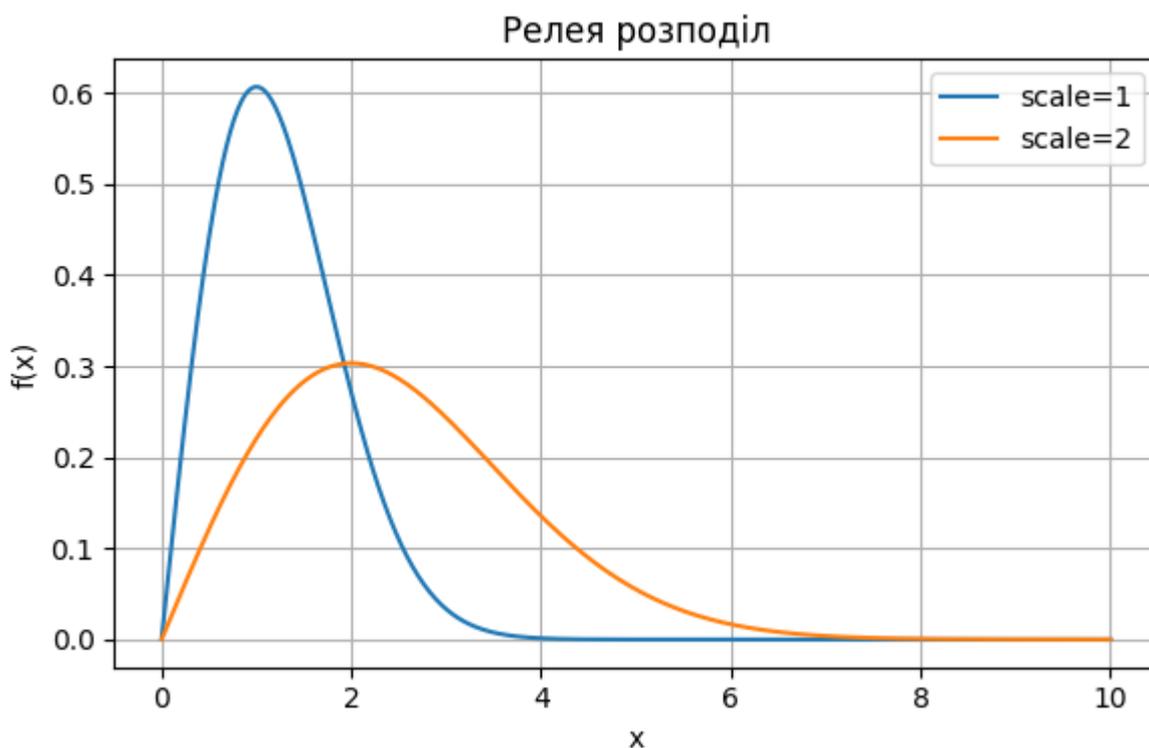


Рис. 1.14. Щільність розподілу Релея.

На рис. 15. зображена реалізація випадкової величини з розподілом Релея при $\sigma = 1$.

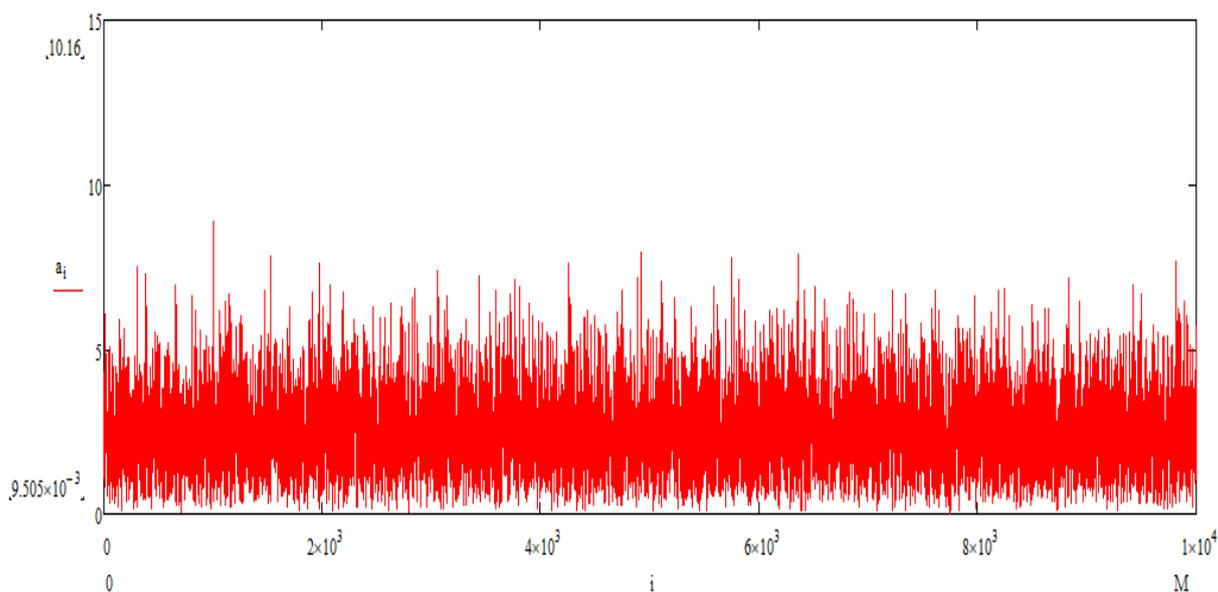


Рис. 1.15. Реалізація випадкової величини з розподілом Релея.

Якщо η_1, η_2 - незалежні випадкові величини з $N(0, \sigma^2)$, випадкова величина $\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$ має розподіл Релея.

Гауссівський (нормальний) розподіл. Щільність розподілу гауссівської випадкової величини ξ з математичним сподіванням μ і дисперсією σ^2 (позначають $N(\mu, \sigma^2)$)

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

При $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ щільність розподілу $N(0,1)$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

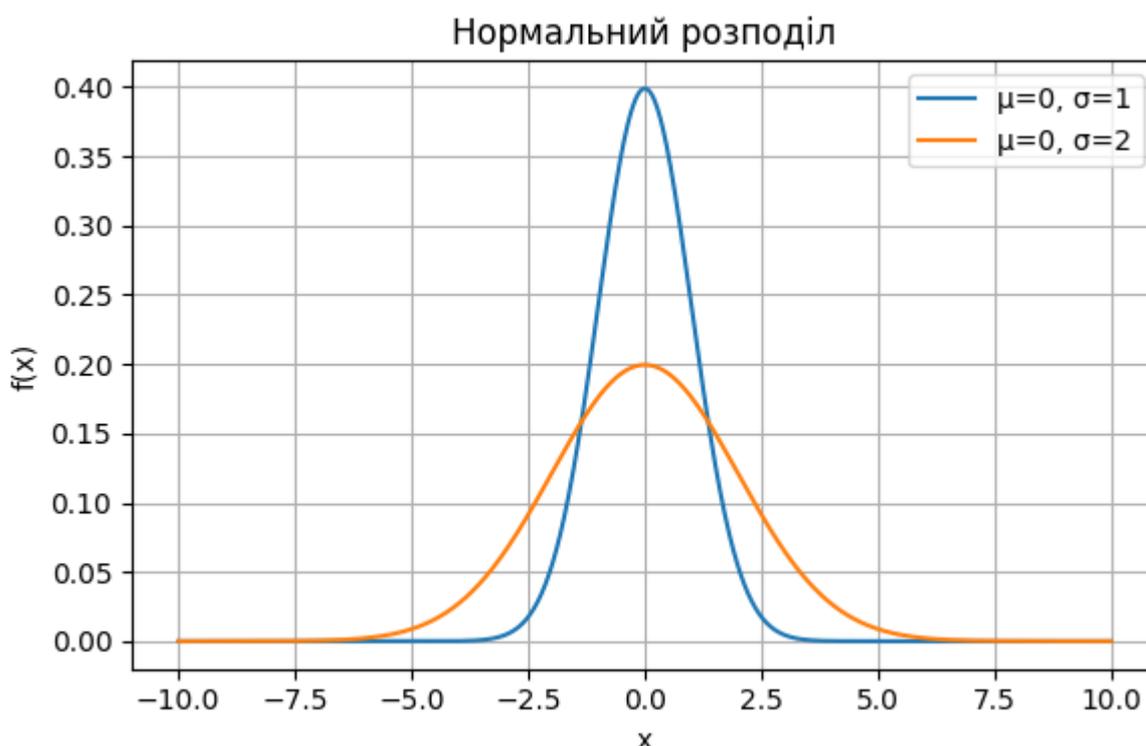


Рис. 1.16. Щільність нормального розподілу

Випадкові величини

$$\xi_1 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \sin(2\pi\alpha_2) \quad \text{та} \quad \xi_2 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \cos(2\pi\alpha_2),$$

де (α_1, α_2) - пара незалежних випадкових чисел, що рівномірно розподілені в $(0;1)$, є незалежними і мають закон розподілу $N(0,1)$.

Стандартну нормальну випадкову величину моделюють і за формулою

$$\xi = \xi^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right).$$

Згідно з центральною граничною теоремою, величина $\xi^{(n)}$ асимптотично нормальна, і $E\xi^{(n)} = 0$, $D\xi^{(n)} = 1$.

Формула зручна при $n=12$

$$\xi = \xi^{(12)} = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i - 6.$$

Вище наведена формула має недолік, оскільки, наприклад, $|\xi^{(12)}| \leq 6$ то кажуть, що співвідношення обрубє хвости стандартної нормальної випадкової величини.

Такі формули, як правило, використовуються, коли великі значення $|\xi|$ не грають суттєвої ролі.

Недоліком є також необхідність великої кількості рівномірно розподілених випадкових величин.

Стандартну нормальну випадкову величину можна моделювати за формулою

$$\eta_n = \xi_n - \frac{41}{12440n^2} (\xi_n^5 - 10\xi_n^3 + 15\xi_n)$$

де ξ_n моделюється за вище наведеною формулою.

Доведено, що випадкова величина η_n є асимптотично нормальною величиною з більш високим порядком збіжності ніж в центральній граничній теоремі, а формула дає хороше наближення ужи при $n = 2$.

Безперечно, якість генераторів випадкових чисел впливає на якість результатів моделювання. Неправильно побудований генератор випадкових чисел спричиняє низку помилок, що призводить не тільки до значної похибки у результатах моделювання, але й до алгоритму імітації, що не відповідає алгоритму функціонування реальної системи.

Отже, моделювання гауссівського розподілу можливе за основними алгоритмами:

1. $\xi_1 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \cos(2\pi\alpha_2)$
 $\xi_2 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \sin(2\pi\alpha_2)$

$$2. \quad \xi_n = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right)$$

$$3. \quad \eta_n = \xi_n - \frac{41}{12440n^2} (\xi_n^5 - 10\xi_n^3 + 15\xi_n)$$

де ξ_n моделюється за вказаною формулою.

Логнормальний розподіл. Випадкова величина має логнормальний розподіл якщо її логарифм має нормальний розподіл $N(\mu, \sigma^2)$.

Функція розподілу $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right)$, $\sigma > 0$.

Середнє значення $E\xi = \exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)$.

Дисперсія $D\xi = (\exp(\sigma^2) - 1) \exp(2\mu + \sigma^2)$.

Формула моделювання має зображення

$\xi = \exp \left(\mu + \sigma \left[\sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=0}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) \right] \right)$, де α_i рівномірно розподілена на відріжку $(0; 1)$.

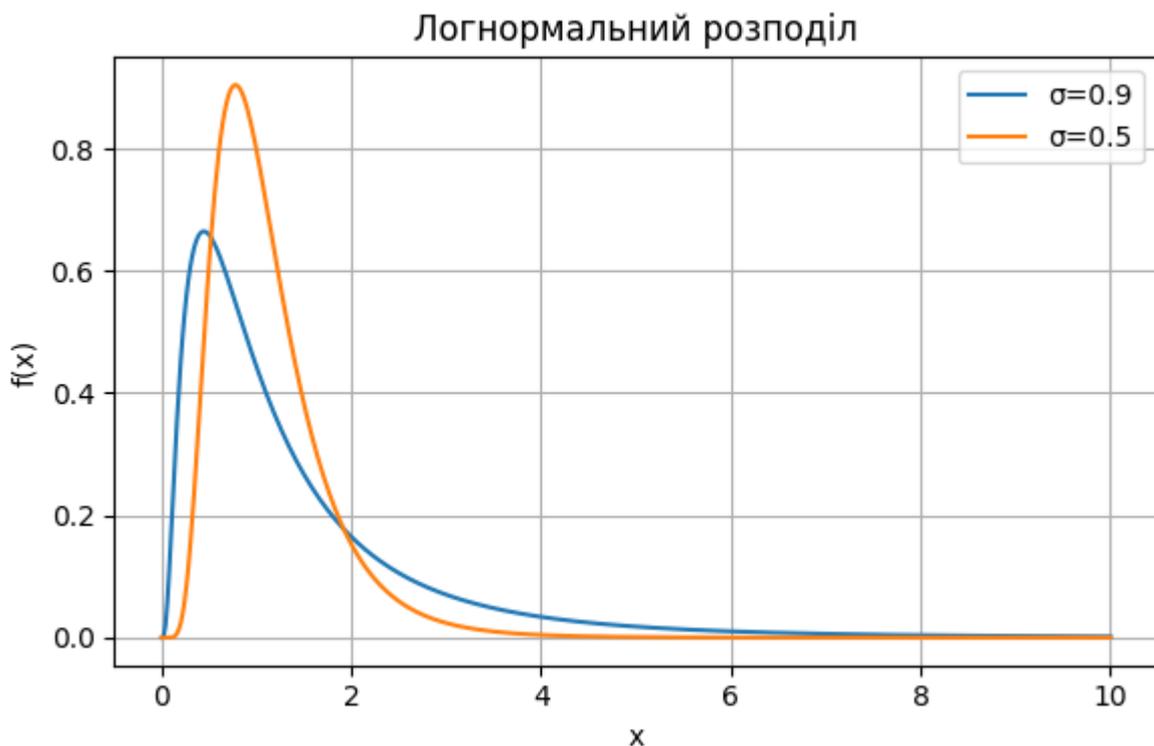


Рис. 1.17. Щільність логнормального розподілу

На рис. 18 зображена реалізація випадкової величини з логнормальним розподілом при $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $n = 12$.

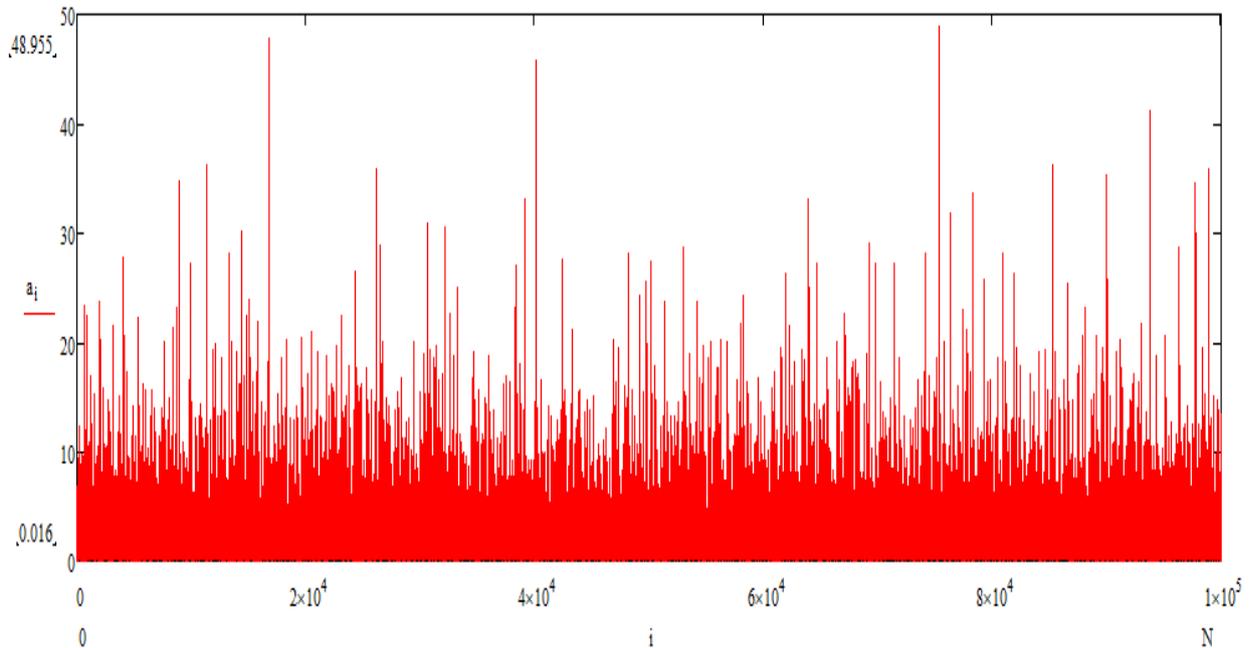


Рис. 1.18. Реалізація випадкової величини з логнормальним розподілом.

Розподіл Накагамі. Розподіл Накагамі (m – розподіл Накагамі) має щільність розподілу

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{w}\right)^m x^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{w}x^2\right) \quad m \geq \frac{1}{2}, w > 0.$$

$$\text{Середнє значення } E\xi = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \left(\frac{w}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Дисперсія } D\xi = w \left(1 - \frac{1}{m} \left(\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m)}\right)^2\right).$$

Формула моделювання для методу оберненої функції в явному виді не обчислюється. Формула для моделювання при цілому m має зображення

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2m} (\sum_{i=1}^m (\eta_i^2 + \zeta_i^2))},$$

де $\{\eta_i, \zeta_i\}_{i=1}^m$ послідовності незалежних нормально розподілених випадкових величин с $N(0; w)$.

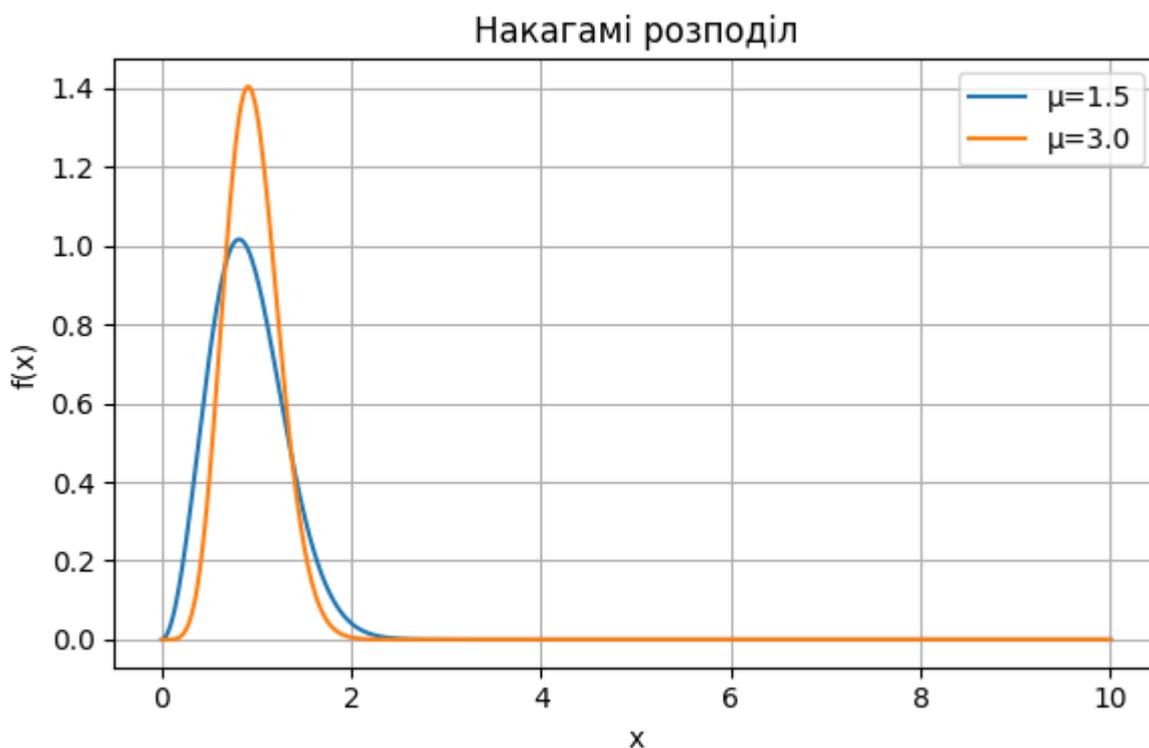


Рис. 1.19. Щільність розподілу Накагамі.

На рис. 20. зображена реалізація випадкової величини з розподілом Накагамі.

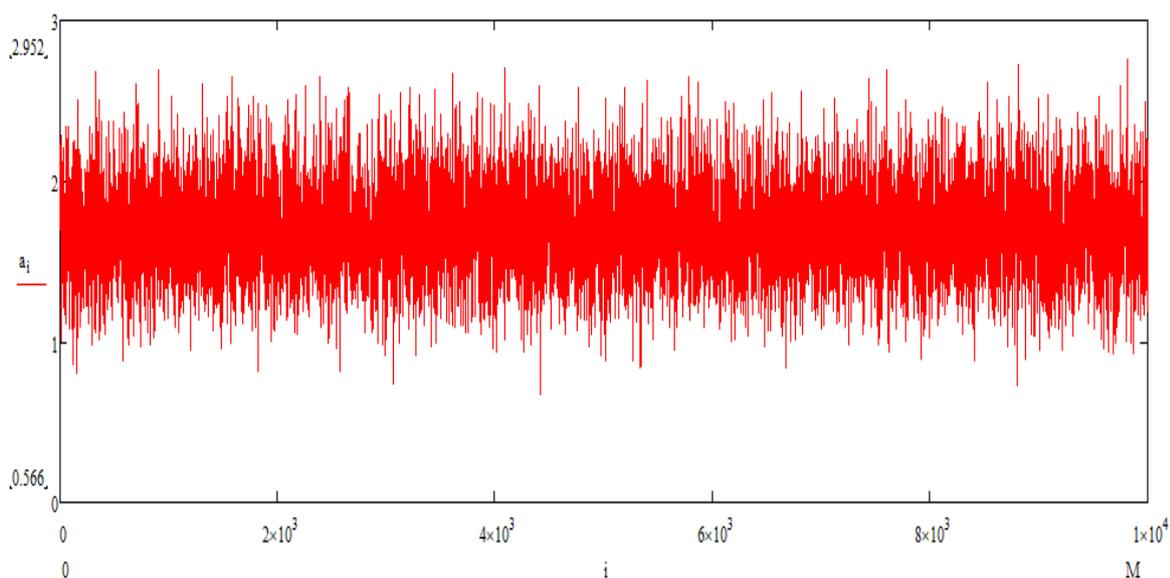


Рис. 1.20. Реалізація випадкової величини з розподілом Накагамі.

Параметри розподілу Накагамі обчислюється за формулами

$$m = \frac{E^2(\xi^2)}{D(\xi^2)}, \quad w = E(\xi^2).$$

Гамма розподіл. Гамма розподіл з параметрами α та β має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ - Гамма – функція.

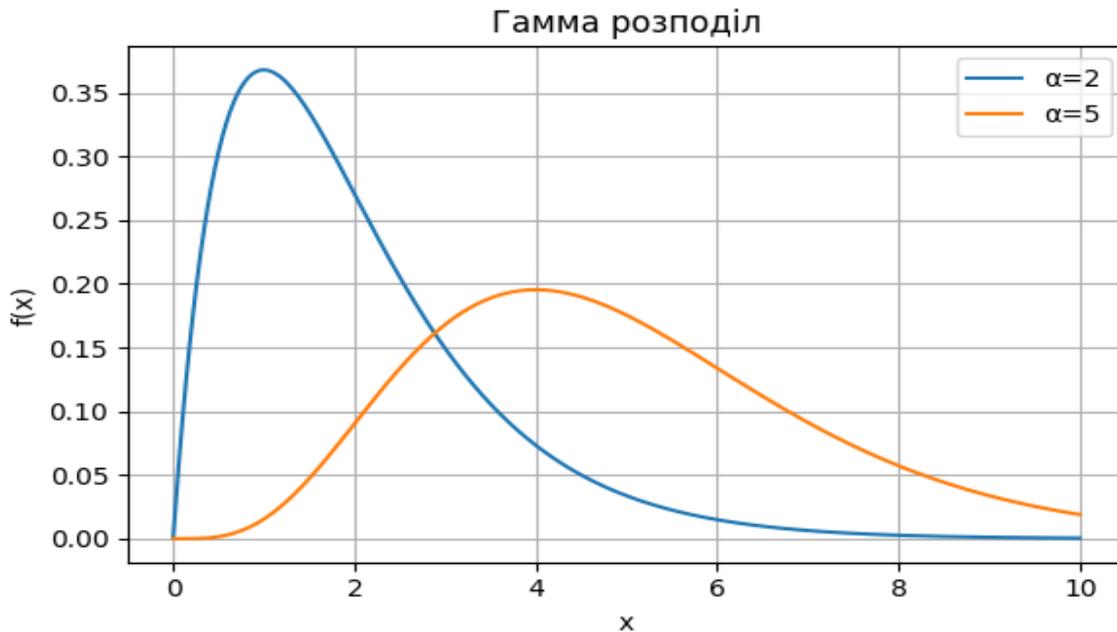


Рис. 1.21. Щільність гамма розподілу

Середнє значення $E\xi = \alpha\beta$.

Дисперсія $D\xi = \alpha\beta^2$.

Формула моделювання для методу оберненої функції в явному виді не обчислюється.

1.4. Генератори псевдовипадкових чисел

Можна створити числову послідовність, яка за своїми властивостями нагадує послідовність випадкових чисел. Такі послідовності називають псевдовипадковими.

Ідею їх використання вперше запропонував Джон фон Нейман у 1946 році. Його метод полягав у наступному: n -розрядне число зводили до квадрату, а з

результату вибирали середні n цифр. Проте цей метод був недосконалим — отримані послідовності швидко вироджувались у нуль або зациклювались на короткому періоді.

Згодом було розроблено багато інших алгоритмів генерації псевдовипадкових чисел. У більшості програмних генераторів використовуються рекурентні формули, які зазвичай створюють цілі числа, рівномірно розподілені на відрізку від 0 до деякого максимального значення M . Щоб отримати дійсні числа, рівномірно розподілені на інтервалі $[0,1)$, кожне згенероване число ділять на M .

Лінійна змішана форма:

$$x_i = \left(a_0 + \sum_{j=1}^i a_j x_{i-j} \right) \text{ mod } m$$

Ця формула має кілька часткових випадків:

Мультиплікативний конгруентний метод:

$$x_i = (a_1 x_{i-1}) \text{ mod } m$$

Змішаний конгруентний метод:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \text{ mod } m$$

Лінійний конгруентний метод. Основна обчислювальна формула:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \text{ mod } m$$

Цей алгоритм має період, що не перевищує m . Параметри a , m і початкове значення x_0 можуть бути довільними цілими числами, крім нуля. Параметр c також може дорівнювати нулю, але це зменшує період. Значення m зазвичай вибирають рівним максимальному значенню типу даних, щоб уникнути операції ділення — вона автоматично відбувається при переповненні.

Наприклад:

$$a=1664525$$

$$c=1013904223$$

Такий метод часто використовується в сучасних мовах програмування, однак він непридатний для задач статистики або криптографії через недостатню випадковість.

Лінійний конгруентний метод — один із найпростіших способів генерації псевдовипадкових чисел. Він не забезпечує криптографічну стійкість, але входить до стандартних бібліотек багатьох компіляторів. Запропонований Д. Г. Лемером у 1949 році.

Генератор «Mother-of-All». Запропонований Джорджем Марсалією, професором Університету Флориди. Його формула має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = 2111111111x_{n-4} + 1429x_{n-3} + 1776x_{n-2} + 5115x_{n-1} + C \\ x_n = \frac{S}{2^{32}} \\ C = \left[\frac{S}{2^{32}} \right] \end{array} \right.$$

Цей алгоритм є узагальненням попередніх та позбавлений головного недоліку — короткого періоду. Його період становить 2^{250} .

Згенеровані числа належать інтервалу $[0, 1)$. Початкові значення можна обирати довільно. Алгоритм застосовується в прикладних науках, хоча поступається в швидкості.

Вихор Мерсенна. Запропонований Макуто Матсумото і Такеджі Нішимурою у 1997 році. Основна ідея полягає в застосуванні послідовності бітових операцій до початкової ітерації. В результаті утворюється нова послідовність, перший елемент якої вважається псевдовипадковим числом.

Цей алгоритм має надзвичайно великий період: $2^{19937}-1$ (понад 43×10^{6000}). Він дуже швидкий завдяки відсутності множення, але не забезпечує достатнього рівня випадковості, тому його використання обмежене.

1.5. Перевірка гіпотези про закон розподілу

У процесі аналізу та дослідження складних стохастичних систем виникає необхідність використання методів статистичного моделювання. Це обумовлено тим, що:

1. Аналітичні методи виявляються непридатними через надмірну складність математичної моделі системи, що досліджується.
2. Аналітичні розв'язки, навіть за умови їх наявності, не забезпечують результатів, які б задовольняли дослідницькі цілі, зокрема з точки зору точності, узагальненості або врахування реальних стохастичних впливів.
3. Статистичне (імітаційне) моделювання дозволяє ефективно відтворювати поведінку системи за допомогою випадкових величин і процесів, а також формалізувати та уніфікувати процедури аналізу великого класу задач.

У комп'ютерній реалізації статистичного моделювання ключову роль відіграє генерація випадкових величин, що моделюють ймовірнісну природу досліджуваних явищ. Відповідно, дослідник повинен володіти методологією побудови генераторів випадкових величин із заданими законами розподілу.

Розглянемо стандартний ймовірнісний простір (Ω, B, P) де:

Ω — множина елементарних подій,

B — σ -алгебра підмножин Ω ,

P — ймовірнісна міра.

Нехай $\zeta: \Omega \rightarrow R$ — випадкова величина, задана на цьому просторі. Основною характеристикою випадкової величини є її закон розподілу, який може бути представлений у вигляді або функції розподілу $F(x) = P(\zeta \leq x)$, або щільності розподілу $f(x)$, якщо $F(x)$ є абсолютно неперервною.

Знання закону розподілу дозволяє обчислювати ймовірність потрапляння значення випадкової величини в заданий інтервал; оцінювати поведінку системи в середньому (через математичне сподівання, дисперсію тощо); будувати моделі, що відтворюють поведінку випадкових процесів; формувати прогностні припущення.

Методика перевірки гіпотези щодо розподілу. Перевірка гіпотез про закон розподілу є предметом математичної статистики [7]. Процедура перевірки гіпотези про відповідність емпіричних даних певному закону розподілу включає низку послідовних етапів:

1. Генерація вибірки значень випадкової величини (або збирання спостережуваних даних).
2. Побудова гістограми частот для візуального представлення розподілу.
3. Формулювання гіпотези щодо форми закону розподілу (наприклад, нормальний, експоненціальний, рівномірний, тощо).
4. Оцінювання параметрів розподілу на основі вибірки.
5. Перевірка гіпотези з використанням критеріїв згоди, зокрема критерію Пірсона (χ^2).

1. Формування вибірки. Під час комп'ютерного експерименту (або емпіричних спостережень) отримується множина значень випадкової величини:

$$\{x_i\}_{i=1}^N, \quad x_i \in R$$

де N — загальна кількість елементів реалізації.

2. Побудова гістограми. Для візуального аналізу емпіричного розподілу визначається розмах значень:

$$R = \max_{1 \leq i \leq N} x_i - \min_{1 \leq i \leq N} x_i.$$

Розподіл розбивається на k рівних інтервалів довжиною:

$$dx = \frac{R}{k}$$

Кількість інтервалів залежить від обсягу вибірки; зазвичай рекомендується: $k \in [11, 21]$ (якщо $N > 1000$).

Після цього для кожного інтервалу i підраховується кількість значень, що в нього потрапляють, — n_i , та відповідна відносна частота:

$$v_i = \frac{n_i}{N}.$$

Гістограма будується у вигляді послідовності прямокутників із шириною dx та висотою v_i .

3. Формулювання гіпотези. На основі вигляду гістограми (та інших емпіричних ознак, таких як симетрія, скошеність, наявність модальних значень) висувається гіпотеза про тип розподілу:

$$H_0: \zeta \sim F(x; \theta)$$

де $F(x; \theta)$ — теоретичний закон розподілу з параметрами $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$.

4. Оцінювання параметрів. Оцінки основних статистичних характеристик розподілу здійснюються за вибіркою:

Математичне сподівання:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Дисперсія:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2.$$

Оцінені параметри використовуються при перевірці гіпотези.

5. Перевірка гіпотези за критерієм χ^2 . Критерій Пірсона (χ^2) базується на порівнянні емпіричних та теоретичних частот потрапляння значень у відповідні інтервали:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = n \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - p_i)^2}{p_i},$$

де:

n_i — кількість спостережень у i -му інтервалі,

p_i — теоретична ймовірність потрапляння значення у цей інтервал за $F(x; \hat{\theta})$,

$n = N$ — кількість елементів у вибірці.

Розраховане значення критерію χ^2 порівнюється з критичним значенням χ_{kr}^2 , яке береться з таблиці при заданому рівні значущості α та ступенях свободи:

$$df=k-1-r$$

де r — кількість оцінених параметрів (наприклад, для нормального розподілу $r=2$, оскільки оцінюються μ і σ).

Якщо: $\chi^2 < \chi_{kr}^2$, то гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості α .

Інакше гіпотезу відхиляють, і необхідно або переглянути її форму, або скоригувати параметри.

Довірча ймовірність і повторюваність результату. Прийняття гіпотези з довірчою ймовірністю $(1-\alpha)$ означає, що:

- з імовірністю $(1-\alpha)$ обраний закон справді відображає властивості генеральної сукупності;
- з імовірністю α вибірка могла випадково виглядати узгодженою із законом, що не відповідає дійсності.

Крім того, довірча ймовірність дає оцінку ймовірності того, що при повторному експерименті гіпотеза знову буде підтверджена.

Основною ідеєю критерію χ^2 є вимірювання розбіжності між спостережуваною та очікуваною за теоретичним законом розподілу кількістю влучень в i -ий інтервал (рис. 22).

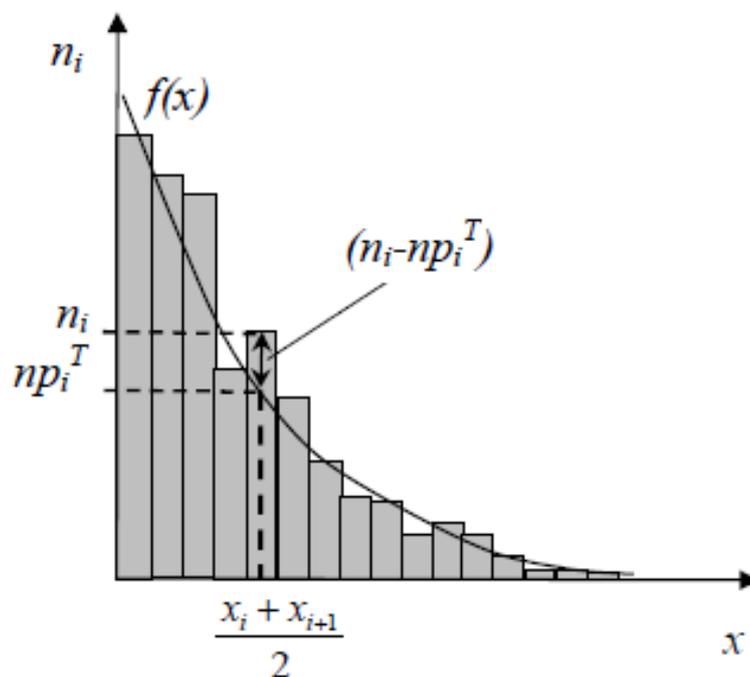


Рис. 1.22. До пояснення змісту χ^2 -критерію [12].

Обмеження критерію χ^2

Застосування критерію χ^2 можливе лише за таких умов:

- Загальна кількість спостережень бажано щоб перевищувала 100.
- У кожному інтервалі повинно бути не менше ніж 3 спостереження.

Якщо умова не виконується, інтервали слід об'єднувати (наприклад, два або більше сусідніх), доки ця умова не буде задоволена.

P-value у статистиці для перевірки гіпотез. P-value (р-значення) – це одна з основних концепцій у статистиці, яка використовується для перевірки статистичних гіпотез. Вона показує ймовірність отримання результатів, рівних або екстремальніших за спостережувані, за умови, що нульова гіпотеза (H_0) є істинною.

1. Нульова гіпотеза (H_0) – базове припущення, яке ми тестуємо. Зазвичай воно означає відсутність ефекту або відмінностей (наприклад, "середні значення двох груп рівні").

2. Альтернативна гіпотеза (H_1) – протилежне припущення, яке стверджує, що ефект або відмінності існують.

3. Рівень значущості (α) – заздалегідь вибрана ймовірність помилково відхилити H_0 . Найчастіше використовують 0.05 (5%) або 0.01 (1%).

4. P-value – ймовірність отримати такі або ще екстремальніші результати, якщо H_0 правильна.

Інтерпретація P-value. Якщо $p \leq \alpha$, то відхиляємо H_0 на користь H_1 (є статистично значущий ефект).

Якщо $p > \alpha$, то немає достатніх підстав відхилити H_0 (немає статистично значущого ефекту).

Помилки у прийнятті рішень:

1. Помилка першого роду (α -риски) – Відхиляємо H_0 , коли вона правильна (фальшиве відкриття).

2. Помилка другого роду (β -риски) – Не відхиляємо H_0 , коли вона хибна (пропускаємо справжній ефект).

Тобто, P-value не показує силу ефекту (лише ймовірність). P-value не є доказом істинності гіпотези – це лише статистичний критерій.

Чим менше p-value, тим більше доказів проти H_0 , але важливо враховувати контекст і розмір вибірки.

Приклад перевірки гіпотези про рівність законів розподілу (порівняння двох груп за невідомим розподілом). Припустимо, у нас є дві вибірки:

Група А – результати тестів студентів, які навчалися за традиційною методикою.

Група В – результати студентів, які навчалися за новою методикою.

Потрібно перевірити, чи однаково розподілені оцінки в обох групах, тобто чи походять вони з одного закону розподілу.

Формулювання гіпотез:

Нульова гіпотеза (H_0): Закони розподілу обох вибірок однакові.

Альтернативна гіпотеза (H_1): Закони розподілу відрізняються.

Методи перевірки. Оскільки закон розподілу невідомий, можна використати непараметричний критерій Колмогорова-Смірнова або критерій Манна-Уїтні.

Розрахунок у Python. Давай виконаємо перевірку за допомогою критерію Колмогорова-Смірнова:

```
ks_statistic, p_value = stats.ks_2samp(group_A, group_B)
```

```
group_A = np.random.normal(loc=70, scale=10, size=1000)
```

```
# Нормальний розподіл
```

```
group_B = np.random.normal(loc=72, scale=12, size=1000)
```

```
# Нормальний розподіл, трохи інші параметри
```

Розбір результатів

1. Статистика тесту KS — показує максимальну відмінність між емпіричними функціями розподілу двох вибірок.

2. P-value — якщо воно менше 0.05 (або іншого обраного рівня значущості), ми відхиляємо H_0 і робимо висновок, що розподіли відрізняються.

Статистика тесту:

KS: 0.211

p-value: 0.0005146991164774901

Відхиляємо H_0 : закони розподілу відрізняються

Критерій Пірсона (хі-квадрат) в Python

H_0 : Вибірка із деякого класу розподілів

H_1 : H_0 не вірна.

`scipy.stats.chisquare(f_obs, f_exp=None, ddof=0)`

f_obs - масив елементів вибірки, що попали в кожний інтервал

f_exp - очікуване число елементів (за замовчуванням – рівномірний розподіл)

$ddof$ - поправка на число степенів свободи.

Статистика асимптотично буде мати необхідний розподіл із степенями свободи ($k-1-ddof$), де k - число інтервалів.

Нехай `f_exp=[16, 16, 16, 16, 20, 4]`

`f_abs=[16, 18, 16, 14, 12, 12]`

`p1,p2 = sps.chisquare(f_abs, f_exp)`

`p1= 19.7`

`p2= p-value: 0.0014224993317060591`

Відхиляємо H_0 : закони розподілу відрізняються

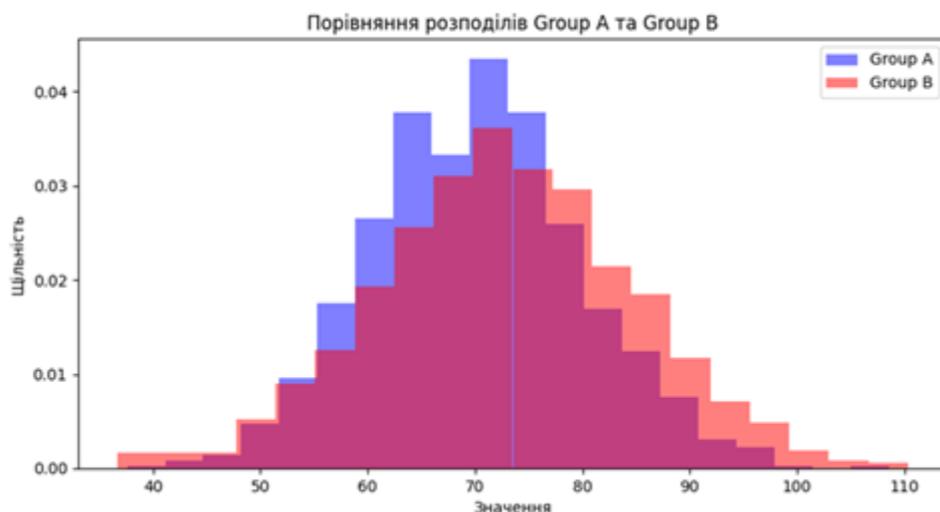


Рис. 1.23. Гістограми розподілів

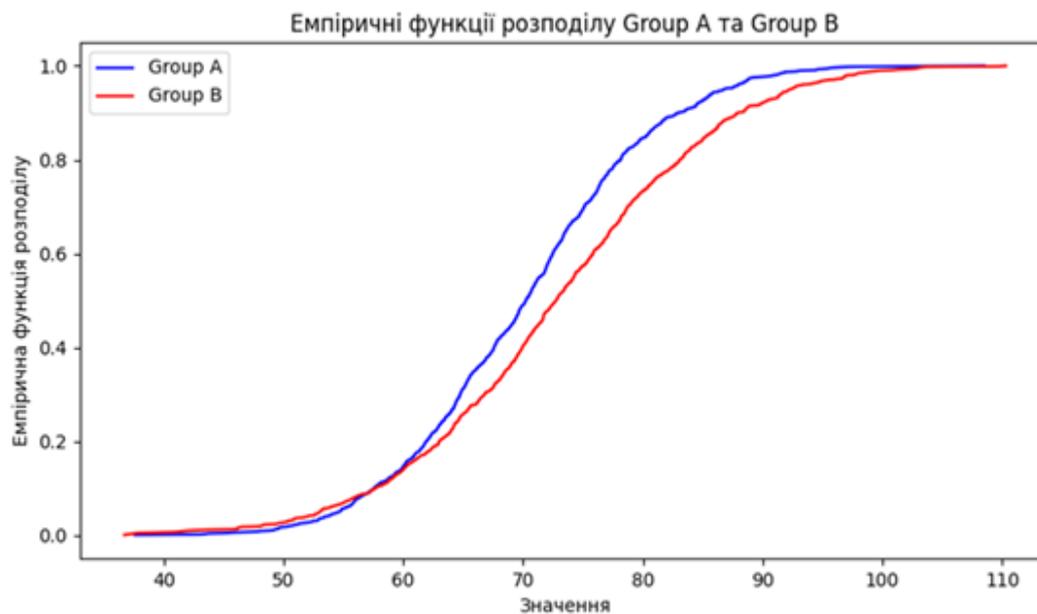


Рис. 1.24. Емпіричні функції розподілів

Результати всіх тестів:

Статистика тесту KS: 0.135

p-value (KS): 2.321597219050034e-08

Статистика тесту Манна-Уїтні: 428914.0

p-value (Манна-Уїтні): 3.694133028582032e-08

Статистика тесту χ^2 -квадрат: 136.85482441024232

p-value (χ^2 -квадрат): 6.303694896083896e-15

Відхиляємо H_0 (KS): закони розподілу відрізняються

Відхиляємо H_0 (Манна-Уїтні): розподіли мають значущу відмінність

Відхиляємо H_0 (χ^2 -квадрат): розподіли значущо відрізняються

Перевірки гіпотези про закон розподілу для випадкової величини, згенерованої за нормальним законом розподілу. Нехай маємо вибірку обсягом $N=200$ випадкових чисел, отриманих генератором, що моделює нормальний розподіл з математичним сподіванням $\mu=0$ та стандартним відхиленням $\sigma=1$.

Метою є перевірка гіпотези: $H_0: \zeta \sim N(\mu, \sigma)$ на рівні значущості $\alpha = 0,05$.

Крок 1: Формування вибірки. Нехай частина вибірки виглядає так (перші 10 значень для прикладу):

$\{-0,56, 0,34, 1,27, -0,11, -0,98, 0,67, -1,32, 0,03, 0,89, -0,74, \dots\}$

Крок 2: Побудова гістограми. Знаходимо:

мінімальне значення: $min = -2,89$

максимальне значення: $max = 3,12$

розмах: $R = max - min = 6,01$

Обираємо $k = 12$:

$$dx = \frac{R}{k} \approx \frac{6,01}{12} \approx 0,5$$

Інтервали мають вигляд:

$[-3.0, -2.5), [-2.5, -2.0), \dots, [2.5, 3.0), [3.0, 3.5)$ $[-3.0, -2.5), [-2.5, -2.0), \dots, [2.5, 3.0), [3.0, 3.5)$

Після підрахунку отримуємо розподіл по інтервалах:

Інтервал	n_i	$v_i = n_i/200$
$[-3.0, -2.5)$	3	0.015
$[-2.5, -2.0)$	8	0.040
$[-2.0, -1.5)$	12	0.060
$[-1.5, -1.0)$	24	0.120
$[-1.0, -0.5)$	27	0.135
$[-0.5, 0.0)$	33	0.165
$[0.0, 0.5)$	28	0.140
$[0.5, 1.0)$	24	0.120
$[1.0, 1.5)$	18	0.090
$[1.5, 2.0)$	12	0.060
$[2.0, 2.5)$	8	0.040
$[2.5, 3.0)$	3	0.015

Інтервал	n_i	$v_i=n_i/200$
Разом	200	1.000

Крок 3: Формулювання гіпотези. Підозрюємо, що дані мають нормальний розподіл. Висуваємо: $H_0: \zeta \sim N(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$.

Крок 4: Оцінювання параметрів. На основі всієї вибірки обчислюємо:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} x_i \approx 0,04$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (x_i - \hat{\mu})^2 \approx 0,98.$$

Крок 5: Розрахунок теоретичних ймовірностей та перевірка за критерієм χ^2 / Для кожного інтервалу обчислюємо:

Теоретичну ймовірність потрапляння значення у інтервал p_i за щільністю нормального розподілу з параметрами $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ (використовуючи таблиці або інтегрування)

Очікувану кількість: $np_i=200p_i$

Приклад для інтервалу $[-1.5,-1.0)$:

$$p_i = \Phi\left(\frac{-1.0 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{-1.5 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \approx \Phi(-1.06) - \Phi(-1.53)$$

$$\approx 0.1446 - 0.0630 = 0.0816$$

$$np_i = 200 \cdot 0.0816 \approx 16.32$$

Далі обчислюємо для кожного інтервалу компонент критерію χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{12} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Після підстановки та обчислень отримуємо: $\chi^2 \approx 9.78$

Кількість ступенів свободи: $df=k-1-r=12-1-2=9$.

Для рівня значущості $\alpha=0.05$ критичне значення: $\chi_{rk}^2(9,0.05) \approx 16.92$.

Оскільки: $\chi^2=9.78 < \chi_{rk}^2(9,0.05)=16.92$, то гіпотеза H_0 не відхиляється. Із довірчою ймовірністю 0.95 можна стверджувати, що згенерована вибірка відповідає нормальному закону розподілу.

2. МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

2.1. Основні характеристики випадкових векторів

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - випадкові величини, задані на одному і тому ж ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$. Теоретичні основи випадкових векторів викладені в [11].

Випадковим вектором, або багатовимірною випадковою величиною, називається функція $\bar{\xi} = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$, яка відображає Ω в R_n .

Функцію $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\}$ будемо називати функцією розподілу випадкового вектора $\bar{\xi}$, або функцією сумісного розподілу випадкових величин ξ_1, \dots, ξ_n .

Властивості функцій сумісного розподілу випадкових величин ξ_1, \dots, ξ_n :

$$1) 0 \leq F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) \leq 1;$$

2) $P\{a_1 \leq \xi_1 < b_1, \dots, a_n \leq \xi_n < b_n\} = \sum_{c_i \in (a_i, b_i)} (-1)^k F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(c_1, \dots, c_n) \geq 0$, де k - число букв a_i , які зустрічаються серед c_1, \dots, c_n ;

$$3) \lim_{x_k \rightarrow -\infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = 0, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x_k \rightarrow \infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\ & = F_{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Нехай ξ_1, \dots, ξ_n - дискретні випадкові величини, які приймають свої значення на множинах E_1, \dots, E_n відповідно.

Функція $P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\}$ називається законом сумісного розподілу дискретних випадкових величин ξ_1, \dots, ξ_n .

Закон сумісного розподілу дискретних випадкових величин ξ_1, \dots, ξ_n має наступні властивості:

$$1) \sum_{x_1 \in E_1} \dots \sum_{x_n \in E_n} P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = 1;$$

$$2) \sum_{x_k \in E_k} P_{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = P_{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n);$$

$$3) F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \sum_{i_1 < x_1} \dots \sum_{i_n < x_n} P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n).$$

Випадкові величини ξ_1, \dots, ξ_n мають абсолютно неперервну функцію сумісного розподілу, якщо існує невід'ємна функція $f_{\bar{\xi}}(\bar{x}), \bar{x} \in R_n$ така, що для всіх $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R_n$

$$F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\bar{\xi}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

При цьому $f_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ називається щільністю розподілу випадкового вектора $\bar{\xi}$.

Якщо функція розподілу $F_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ абсолютно неперервна, то має місце рівність:

$$f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

Випадкові величини ξ_1, \dots, ξ_n називаються незалежними, якщо $F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k)$ для всіх $(x_1, \dots, x_n) \in R_n$.

Дискретні випадкові величини ξ_1, \dots, ξ_n незалежні тоді і тільки тоді, коли для всіх $x_k \in E_k, k = \overline{1, n}$ має місце рівність: $P_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n P_{\xi_k}(x_k)$.

Математичним сподіванням випадкового вектора будемо називати вектор $M\bar{\xi} = (M\xi_1, \dots, M\xi_n)$.

Коваріаційною матрицею випадкового вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ будемо називати матрицю $\Gamma = M(\xi - M\xi)(\xi - M\xi)'$.

Стандартним нормальним (гауссівським) випадковим вектором будемо називати вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, компоненти якого незалежні і кожна розподілена $N_{0;1}$.

Характеристичною функцією випадкового вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ будемо називати функцію $\phi(t) = Me^{i(t, \xi)}$.

Характеристична функція стандартного нормального вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - це функція $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}(t, t)}$.

2.2. Методи моделювання випадкових векторів

При моделюванні випадкових векторів важливу роль відіграє, якими є компоненти вектора.

Так, якщо заданий вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ з функцією розподілу $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$, то у випадку, коли компоненти цього вектора ξ_1, \dots, ξ_n незалежні дискретні випадкові величини, ми кожен компоненту моделюємо окремо на основі співвідношення $P\{\sum_{i=0}^{n-1} p_i \leq \alpha < \sum_{i=0}^n p_i\} = P\{\xi = x_n\}$,

α - має рівномірний розподіл в інтервалі $(0, 1)$, і яке визначає стандартний метод моделювання дискретної величини, або, у разі потреби, за нестандартними методами, які, як відомо, зменшують трудомісткість алгоритму.

Якщо ξ_1, \dots, ξ_n незалежні неперервні випадкові величини, то ми моделюємо кожну компоненту окремо або на основі стандартного методу, що базується на співвідношенні $F_{\xi_i}^{-1}(\alpha) = x_i, i = 0, 1, \dots$, або з використанням нестандартних методів.

На рис. 1 зображено результати моделювання двовимірного вектора з рівномірним розподілом.

Підкидання двох (трьох) кубиків одночасно – вектор з дискретним розподілом.



Рис. 2.1. Випадкові точки в прямокутнику

У випадку, коли компоненти вектора ξ_1, \dots, ξ_n - залежні випадкові величини, то вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ моделюється наступним чином:

1) розігрується значення ξ_1 на основі функції розподілу $F_{\xi_1}(x_1)$;

2) розігрується значення ξ_2 на основі функції розподілу $F_{\xi_2}(x_2/x_1)$,

яка для дискретного випадку має вигляд: $F_{\xi_2}(x_2/x_1) = P\{\xi_2 < x_2/\xi_1 = x_1\}$,

а для неперервного - $F_{\xi_2}(x_2/x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P\{\xi_2 < x_2/\xi_1 \in (x_1 - \Delta x/2; x_1 + \Delta x/2)\}$;

і т.д.

n) розігрується значення ξ_n на основі функції розподілу $F_{\xi_n}(x_n/x_1, \dots, x_{n-1})$, яка для дискретного випадку має вигляд:

$$F_{\xi_n}(x_n/x_1, \dots, x_{n-1}) = P\{\xi_n < x_n/\xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\},$$

а для неперервного –

$$F_{\xi_n}(x_n/x_1, \dots, x_{n-1}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P\{\xi_n < x_n/\xi_1 \in (x_1 - \Delta x/2; x_1 + \Delta x/2), \dots, \xi_{n-1} \in (x_{n-1} - \Delta x/2; x_{n-1} + \Delta x/2)\}.$$

Розглянемо детальніше випадки, коли всі компоненти вектора є дискретними або неперервними випадковими величинами, або деякі компоненти вектора є дискретними, а інші неперервними, або компоненти вектора є функціями від випадкових величин.

1. Дискретний випадок. Розглянемо випадковий вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, де ξ_1, \dots, ξ_n - дискретні величини, в загальному випадку залежні.

При моделюванні даного вектора використовується формула множення для випадкових подій A_1, \dots, A_n :

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \dots \times P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

При моделюванні вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ вона набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
P\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\} &= \\
&= P\{\xi_1 = x_1\} \times P\{\xi_2 = x_2 / \xi_1 = x_1\} \times \\
&\times P\{\xi_3 = x_3 / (\xi_1 = x_1) \cap (\xi_2 = x_2)\} \times \dots \\
&\times P\left\{\xi_n = x_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} (\xi_i = x_i)\right\}
\end{aligned}$$

Останнє співвідношення задає алгоритм моделювання.

Спочатку розігруємо ξ_1 .

Якщо, в результаті розіграшу ξ_1 набуло значення x_1 , то після цього розігруємо ξ_2 за умови, що $\xi_1 = x_1$.

Якщо в результаті розіграшу ξ_2 набуло значення x_2 , то розігруємо ξ_3 за умови, що $\xi_1 = x_1$ і $\xi_2 = x_2$, і т.д.

Приклад 1. Нехай $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, де випадкові величини ξ_1, ξ_2 мають сумісний розподіл

Таблиця 1. Сумісний розподіл ξ_1, ξ_2

ξ_1	ξ_2	-1	0	1
-2		0.1	0.05	0.15
2		0.3	0.2	0.2

Для розіграшу ξ_1 випишемо його розподіл:

$$P\{\xi_1 = -1\} = 0.4; P\{\xi_1 = 0\} = 0.25; P\{\xi_1 = 1\} = 0.35.$$

А для розіграшу ξ_2 умовний розподіл: $P\{\xi_2 = -2/\xi_1 = x_1\}$;

$$P\{\xi_2 = 2/\xi_1 = x_1\}.$$

Беремо з датчика $\alpha_1 \in [0,1]$ і розігруємо значення ξ_1 , після цього підставляємо його в умовний розподіл,

беремо $\alpha_2 \in [0,1]$ і розігруємо значення ξ_2 .

Наприклад, якщо $\alpha_1 = 0,738$, то $x_1 = 1$,

і умовний закон розподілу набуває вигляду:

$$P\{\xi_2 = -2/\xi_1 = 1\} = 3/7; P\{\xi_2 = 2/\xi_1 = 1\} = 4/7.$$

Якщо $\alpha_2 = 0,159$, то $x_2 = -2$.

Тобто, в результаті маємо $(\xi_1, \xi_2) = (1; -2)$.

2. Неперервний випадок. Моделювання n – вимірної випадкової точки з незалежними координатами.

Якщо координати n – вимірної випадкової величини $Q = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ незалежні, то функція розподілу

$$F_Q(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n),$$

де $F_i(x_i)$ - функція розподілу величини ξ_i .

Очевидно, що в цьому випадку можна моделювати кожен величину ξ_i незалежно:

$$F_i(\xi_i) = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - незалежні випадкові величини, що рівномірно розподілені в інтервалі $(0,1)$.

Дійсно, оскільки α_i незалежні, то і ξ_i - незалежні.

Тому їх сумісна функція розподілу дорівнює добутку

$$P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\} = \prod_{i=1}^n P\{\xi_i < x_i\} = \prod_{i=1}^n F_i(x_i) = F_Q(x_1, \dots, x_n).$$

Приклад. Випадкова точка Q з декартовими координатами (ξ_1, \dots, ξ_n) рівномірно розподілена в n – вимірному паралелепіпеді $\Pi = \{a_i < x_i < b_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ (рис.2. для $n=2$).

Щільність ймовірностей точки Q постійна в Π :

$$p_Q(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c, & (x_1, \dots, x_n) \in \Pi \\ 0, & (x_1, \dots, x_n) \notin \Pi \end{cases}$$

де $1/c = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ - об'єм Π (n – вимірний об'єм).

Проінтегруємо p_Q по всім змінним, крім x_i , легко отримати, що щільність

ξ_i дорівнює:

$$p_i(x_i) = \begin{cases} 1/(b_i - a_i), & x_i \in (a_i, b_i) \\ 0, & x_i \notin (a_i, b_i) \end{cases}$$

Звідси випливає, що кожна з координат ξ_i рівномірно розподілена на проміжку $a_i < x_i < b_i$, і ці координати незалежні.

Запишемо рівняння

$$F_i(\xi_i) \equiv (\xi_i - a_i)/(b_i - a_i) = \alpha_i,$$

Звідки випливають явні формули для підрахунку координат:

$$\xi_i = a_i + \alpha_i(b_i - a_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

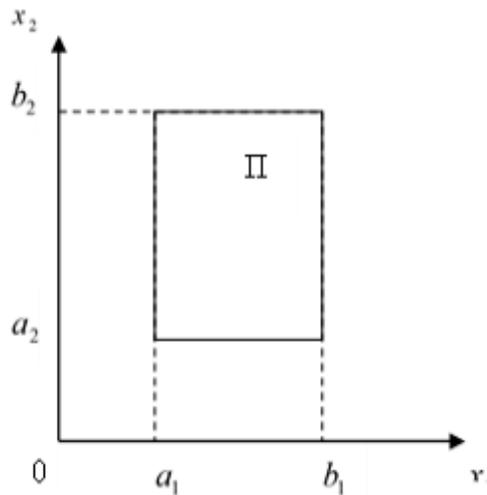


Рис. 2.2. Двохвимірний паралелепіпед

Моделювання n – вимірної неперервної випадкової точки з довільними координатами.

В загальному випадку, коли ξ_1, \dots, ξ_n залежні, їх сумісну щільність можна представити у вигляді добутку умовних щільностей ймовірностей цих величин:

$$p_Q(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2/x_1)p_3(x_3/x_1, x_2) \dots p_n(x_n/x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Всі умовні щільності ймовірності виражаються через сумісну щільність $p_Q(x_1, \dots, x_n)$.

Наведемо вирази умовних щільностей в загальному виді; всі інтеграли беруться від $-\infty$ до $+\infty$:

$$p_1(x_1) = \int \dots \int p_Q dx_2 \dots dx_n,$$

$$p_2(x_2/x_1) = \int \dots \int p_Q dx_3 \dots dx_n [p_1(x_1)]^{-1}$$

і т.д.

$$p_{n-1}(x_{n-1}/x_1, \dots, x_{n-2}) = \int p_Q dx_n [p_1(x_1) \dots p_{n-2}(x_{n-2}/x_1, \dots, x_{n-3})]^{-1}$$

$$p_n(x_n/x_1, \dots, x_{n-1}) = p_Q [p_1(x_1) \dots p_{n-1}(x_{n-1}/x_1, \dots, x_{n-2})]^{-1}$$

Введемо умовні функції розподілу $F_i(x_i/x_1, \dots, x_{i-1}) = \int_{-\infty}^{x_i} p_i(x/x_1, \dots, x_{i-1}) dx$.

Має місце така теорема.

Теорема. Нехай $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на $(0,1)$.

Сукупність випадкових величин ξ_1, \dots, ξ_n , отриманих при послідовному розв'язанні системи рівнянь

$$\begin{cases} F_1(\xi_1) = \alpha_1, \\ F_2(\xi_2/\xi_1) = \alpha_2, \\ \dots \\ F_n(\xi_n/\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \alpha_n \end{cases}$$

мають сумісну щільність ймовірностей $p_Q(x_1, \dots, x_n)$, де $F_1(x_1)$ - функція розподілу ξ_1 , а $F_2(x_2/x_1), \dots, F_n(x_n/x_1, \dots, x_{n-1})$ - умовні функції розподілу ξ_2, \dots, ξ_n .

Зображення щільності $p_Q(x_1, \dots, x_n)$ у формі добутку умовних щільностей координат ξ_1, \dots, ξ_n можливо $n!$ способами.

Так, при $n = 2$

$$p_Q(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2/x_1) = p_2(x_2)p_1(x_1/x_2).$$

Різним добуткам відповідають різні порядки розіграшу величин ξ_1, \dots, ξ_n і взагалі, різні рівняння.

Приклад, який наведений нижче показує, що іноді вдалий вибір порядку дозволяє спростити ці рівняння.

Якщо ξ_1, \dots, ξ_n незалежні, то всі їх умовні розподіли дорівнюють $p_Q(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \dots p_n(x_n)$ і порядок розіграшу величин ролі не відіграє.

Приклад. Розглянемо випадкову точку (ξ_1, ξ_2) , яка може приймати значення в трикутнику $x+y < 1, \quad x > 0, \quad y > 0$ (рис.3) з щільністю $p(x,y) = 6x$.

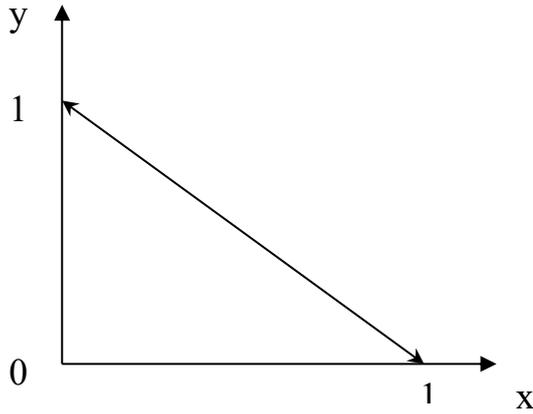


Рис. 2.3. Область значень, яке може приймати випадкова точка

А) Виберемо в якості першої величини ξ_1 . Тоді

$$p_{\xi_1}(x) = \int_0^{1-x} p(x, y) dy = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1;$$

$$p_{\xi_2}(y/x) = p(x, y)/p_{\xi_1}(x) = (1-x)^{-1}, \quad 0 < y < 1-x.$$

Відповідні цим щільностям функції розподілу:

$$F_{\xi_1}(x) = \int_0^x p_{\xi_1}(u) du = 3x^2 - 2x^3, \quad 0 < x < 1;$$

$$F_{\xi_2}(y/x) = \int_0^y p_{\xi_2}(v/x) dv = y(1-x)^{-1}, \quad 0 < y < 1-x.$$

З формул (3) отримуємо рівняння для послідовного обчислення ξ_1 і ξ_2

$$3\xi_1^2 - 2\xi_1^3 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_2(1 - \xi_1).$$

Б) Виберемо тепер в якості першої величини ξ_2 . Тоді

$$p_{\xi_2}(y) = \int_0^{1-y} p(x, y) dx = 3(1-y)^2, \quad 0 < y < 1;$$

$$p_{\xi_1}(x/y) = p(x, y)/p_{\xi_2}(y) = 2x(1-y)^{-2}, \quad 0 < x < 1-y.$$

Відповідні функції розподілу:

$$F_{\xi_2}(y) = \int_0^y p_{\xi_2}(v) dv = 1 - (1-y)^3, \quad 0 < y < 1;$$

$$F_{\xi_1}(x/y) = \int_0^x p_{\xi_1}(u/y) du = x^2(1-y)^{-2}, \quad 0 < x < 1-y.$$

З формули, використовуючи $1-\alpha_1$ замість α_1 , отримаємо рівняння для послідовного обчислення ξ_2 і ξ_1

$$(1 - \xi_2)^3 = \alpha_1, \quad \xi_1^2 = \alpha_2(1 - \xi_2)^2.$$

Порівняємо тепер ці два алгоритми для підрахунку ξ_1 і ξ_2 : в першому з них для знаходження ξ_1 необхідно розв'язувати кубічне рівняння,

$$3\xi_1^2 - 2\xi_1^3 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_2(1 - \xi_1).$$

в той час як в другому можна використати явні формули

$$(1 - \xi_2)^3 = \alpha_1, \quad \xi_1^2 = \alpha_2(1 - \xi_2)^2,$$

або

$$\xi_2 = 1 - \sqrt[3]{\alpha_1}, \quad \xi_1 = \sqrt{\alpha_2} \sqrt[3]{\alpha_1}.$$

Використання заміни змінних. Правило перетворення щільності при перетворенні координат.

Нехай $y_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ - взаємно однозначне диференційоване відображення області B в просторі x_1, \dots, x_n на область B' в просторі y_1, \dots, y_n .

Якщо щільність випадкової точки $Q = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ в B дорівнює $p_Q(x_1, \dots, x_n)$, то щільність випадкової точки $Q' = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ в B' , де $\eta_i = g_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$, дорівнює

$$p_{Q'}(y_1, \dots, y_n) = p_Q(x_1, \dots, x_n) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|;$$

в правій частині x_i повинні бути виражені через y_i .

Приклад. Випадкова точка Q рівномірно розподілена в кулі.

Позначимо через ξ, η, ζ декартові координати точки Q . Їх сумісна щільність розподілу в кулі постійна:

$$p_Q(x, y, z) = [(4/3)\pi R^3]^{-1}.$$

Однак щільності розподілу кожної з координат достатньо громіздкі.

Тому перейдемо до сферичних координат (рис.4):

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

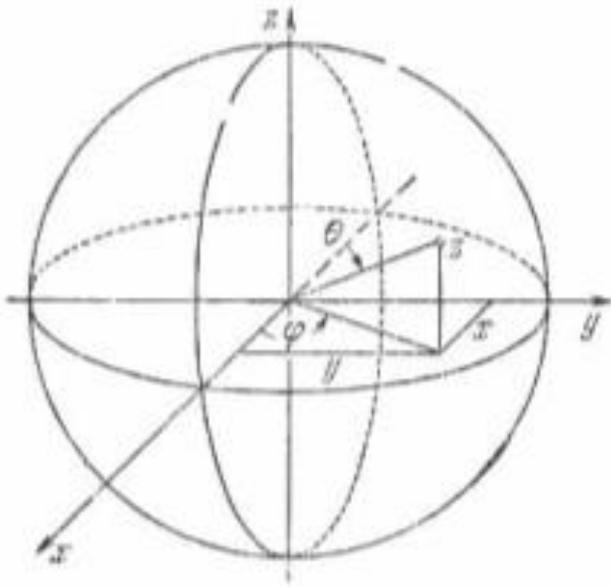


Рис. 2.4. Сферичні координати точки Q

В нових координатах куля перетворюється в паралелепіпед

$$\xi_2 = \phi(\alpha_i), 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Оскільки, якобіан перетворення

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta,$$

то в нових координатах щільність $p_Q(r, \theta, \phi) = [(4/3)\pi R^3]^{-1} r^2 \sin \theta$.

Легко бачити, що ця щільність представляє собою добуток трьох щільностей $p_Q(r, \theta, \phi) = (3r^2 R^{-3})(2^{-1} \sin \theta)(2\pi)^{-1}$ і з цього випливає, що сферичні координати r_Q, θ_Q, ϕ_Q точки Q незалежні.

Рівняння для їх знаходження можна записати так:

$$\int_0^{r_Q} \frac{3r^2 dr}{R^3} = \alpha_1, \quad \int_0^{\theta_Q} \frac{\sin \theta d\theta}{2} = 1 - \alpha_2, \quad \int_0^{\phi_Q} \frac{d\phi}{2\pi} = \alpha_3.$$

Звідси отримуємо широко відомі формули

$$r_Q = R \sqrt[3]{\alpha_1},$$

$$\cos \theta_Q = 2\alpha_2 - 1,$$

$$\phi_Q = 2\pi\alpha_3.$$

За цими значеннями неважко обчислити і декартові координати точки Q:

$$\xi = r_Q \sin \theta_Q \cos \phi_Q,$$

$$\eta = r_Q \sin \theta_Q \sin \phi_Q,$$

$$\zeta = r_Q \cos \theta_Q.$$

Приклад. Випадкова точка $Q = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ підкоряється n-вимірному нормальному (гауссівському) розподілу з математичними сподіваннями

$$M\xi_i = a_i \text{ і другими моментами } B = (b_{ij}).$$

Визначник матриці $B = (b_{ij})$ додатний: $\Delta_B > 0$.

Щільність такої випадкової точки визначається формулою:

$$p_Q(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{\Delta_C}{(2\pi)^n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j) \right\},$$

де $C = (c_{ij})$ - матриця обернена по відношенню до B, а Δ_C - її визначник.

Як відомо, лінійним перетворенням координат можна привести додатньо визначену квадратичну форму, яка стоїть в показнику, до суми квадратів.

При цьому зручно використовувати векторні позначення:

якщо $u = (u_1, \dots, u_n)$ і $v = (v_1, \dots, v_n)$ - вектори, то їх скалярний добуток $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$;

якщо $C = (c_{ij})$ - квадратна матриця ($1 \leq i, j \leq n$), то $F_{\xi_2}(\xi_2) = 1 - \alpha_1$ - це вектор з компонентами $\omega_i = \sum_{\alpha=1}^n c_{i\alpha} u_\alpha$;

квадратична форма виражається через скалярний добуток

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j) = (C(x - a), x - a).$$

Виберемо нові координати y_1, \dots, y_n і нехай ξ_1 .

Тоді $(C(x - a), x - a) = (CTy, Ty) = (T'CTy, y)$, де T' - транспонована матриця T.

Останній вираз перетвориться в (y, y) , якщо $p_1(x)$ - одинична матриця.

Тепер можна записати щільність точки Q в нових координатах

$$p_Q(y_1, \dots, y_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y,y)} = \prod_{i=1}^n \left[(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} \right]$$

Звідси бачимо, що нові координати точки Q незалежні і нормальнорозподілені з параметрами (0;1).

Таким чином, для того щоб обчислити значення (ξ_1, \dots, ξ_n) , треба знайти n незалежних значень $a < x < b$ нормальної величини з параметрами (0;1), і тоді $\xi = T\zeta + a$.

При практичній реалізації цього метода єдине складне місце – підрахунок матриці T.

Приклад. Випадкова величина ξ_1 нормально розподілена з параметрами (0;1): $p_{\xi_1}(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}, 0 < x < \infty$.

Виберемо незалежну від ξ_1 випадкову величину ξ_2 , також нормально розподілену з параметрами (0;1), і розглянемо на площині x,y випадкову точку Q з декартовими координатами ξ_1 і ξ_2 . Очевидно,

$$p_Q(x, y) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y) = (2\pi)^{-1} e^{-r^2/2}, \quad 0 \leq r < \infty.$$

За формулами

$$2\pi \int_{r_1}^{\rho} r c(r) dr = \alpha_1, \quad \theta (2\pi)^{-1} = \alpha_2$$

де вдало замість α_1 взяти $1-\alpha_1$, отримаємо рівняння:

$$\int_0^{\rho} r e^{-r^2/2} dr = 1 - \alpha_1, \quad \theta = 2\pi\alpha_2$$

так, що $\rho = \sqrt{-2 \ln \alpha_1}$.

Отже,

$$\xi_1 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos(2\pi\alpha_2), \quad \xi_2 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin(2\pi\alpha_2).$$

Наведені формули дозволяють по двом випадковим числам α_1, α_2 підрахувати зразу два незалежних значення випадкової величини ξ_1 .

Якщо необхідне лише одне таке значення, то можна обмежитись однією з цих двох формул.

2.3. Моделювання гауссівського випадкового вектора.

Якщо гауссівський вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ має незалежні компоненти, то кожен можна моделювати за наведеними вище формулами.

Багатовимірний нормальний розподіл однозначно визначається вектором математичних сподівань $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ і кореляційною матрицею

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mm} \end{pmatrix}$$

де $R_{ij} = E((\eta_i - \mu_i)(\eta_j - \mu_j))$

Алгоритм. Використовуючи, наприклад, формули

$$\xi_1 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \cos(2\pi\alpha_2) \text{ та}$$

$$\xi_2 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \sin(2\pi\alpha_2),$$

моделюємо вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, що складається з незалежних стандартних нормальних величин.

Якщо гауссівський вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ має залежні компоненти, то використовуємо перетворення.

Покладемо $\eta = A\xi + \mu$, де A - нижня трикутна матриця і $A = R^T R$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mm} \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти матриці A визначаються за допомогою рекурентної процедури.

Оскільки $\eta_1 = a_{11}\xi_1 + \mu_1$, то $a_{11} = \sqrt{R_{11}} = \sqrt{D\eta_1}$.

Далі маємо $\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \mu_2$

і $Ea_{11}\xi_1(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) = R_{12}$; $E(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)^2 = R_{22}$

Тобто,

$$a_{21} = \frac{R_{12}}{a_{11}} = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}}}; \quad a_{22} = \sqrt{R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}}.$$

Загальна рекурентна формула має вид

$$a_{ij} = \frac{R_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}a_{jk}}{\sqrt{R_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}}.$$

При цьому $\sum_{k=1}^0 a_{ik}a_{jk} = 0$, $1 \leq j \leq i \leq m$.

3. ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

3.1. Обчислювальний експеримент

Наведемо приклади використання статистичного моделювання в задачах обчислювального експерименту.

Приклад 1. Провести натурний експеримент для заданого N :

А) підкинути N раз монету, підрахувати кількість Орлів і Решок. Перевірити закон розподілу.

Б) підкинути N раз кубик. Побудувати гістограму розподілу. Перевірити закон розподілу.

В) підкинути N раз два кубики. Побудувати гістограму розподілу. Перевірити закон розподілу.

Г) Провести відповідний обчислювальний експеримент (завдання А-В) для заданого N .

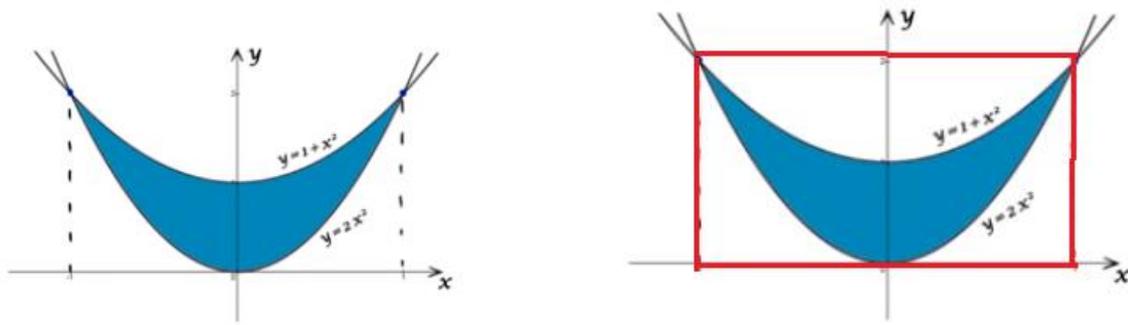
Приклад 2. Елементарні комп'ютерні ігри.

1. Відгадай число. Задумано число в межах від A до B . Визначити задумане число, бажано за найменшу кількість кроків.

2. Відгадай слово. Ця гра вибирає випадкове слово зі списку `word_list`, показує його користувачеві в перемішаному вигляді, а потім просить користувача вгадати слово. У користувача є три спроби вгадати слово.

3. Гра "Камінь, ножиці, папір". Треба обирати один з варіантів можливих комбінацій, а комп'ютер вибирає випадково. Переможець визначається згідно правил. Гра продовжується, поки не введете "вийти".

Приклад 3. Обчислення площі. Фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 1.а), вписуємо в прямокутник (рис.1,б).



а)

б)

Рис. 3.1. Фігура для прикладу

Алгоритм знаходження площі

1. Координати по осі X: (-1, 0) та (1, 0), довжина 2.
2. Координати по осі Y; (-1, 2) та (1, 2), довжина 2.
3. Моделюємо координати випадкових величин (рис. 2):

для X – рівномірно розподілені в інтервалі (-1, 1),

по Y – рівномірно розподілені в (0, 2). Кількість точок – N.

4. Знаходимо кількість точок, що попадають в задану фігуру m .

$$m=345$$

5. Площа фігури знаходиться за формулою

$$S = \frac{m}{N} S_{qu} = \frac{345}{1000} * 4 = 1.380.$$

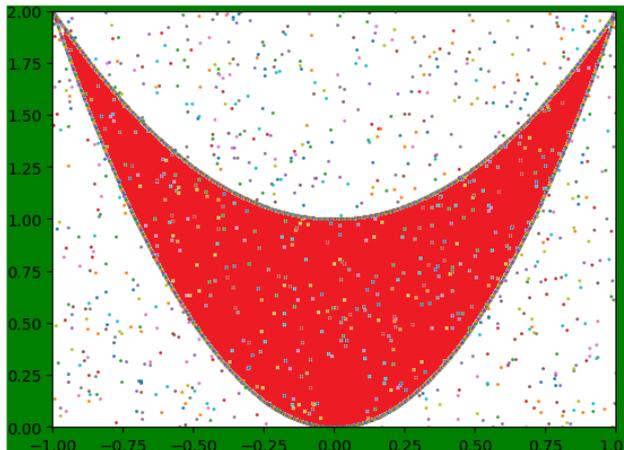


Рис. 3.2. Випадкові точки в прямокутнику

Аналогічно можна обчислити площі більш складних фігур (рис. 3-5).

$$\begin{cases} -x \leq y \leq x \\ 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \end{cases}$$

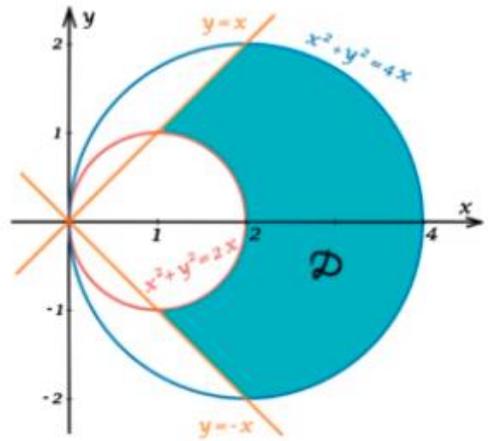


Рис. 3.3. Фігура, що обмежена лініями

$$x^2 + (y - \sqrt{|x|})^2 = 1$$

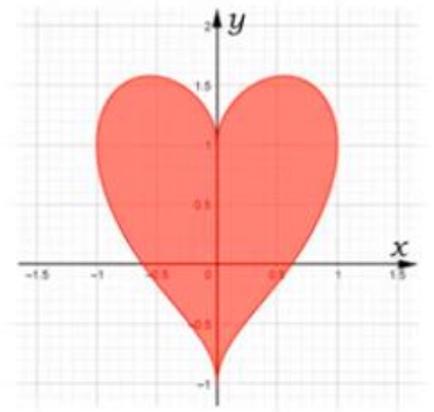


Рис. 3.4. Сердечко

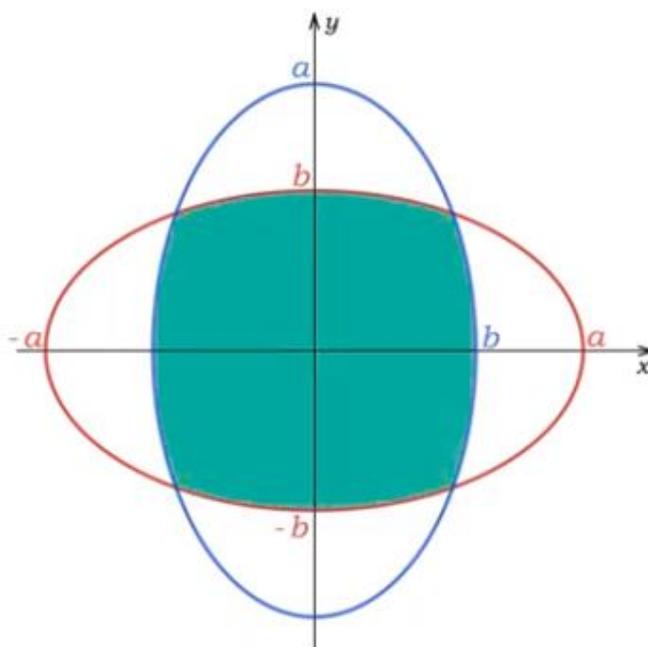


Рис. 3.5. Перетин еліпсів.

Аналогічно можна розв'язувати задачі на обчислення об'єму. Наприклад, об'єм перетину двох циліндрів. Фігуру потрібно помістити в паралелепіпед. Змодельовати необхідну кількість точок, що належать паралелепіпеду. Підрахувати кількість точок, що попадають у задану фігуру. Відношення кількості точок, що належать фігурі, до кількості точок N і буде відношенням об'ємів фігури і паралелепіпеду (рис. 3.6).

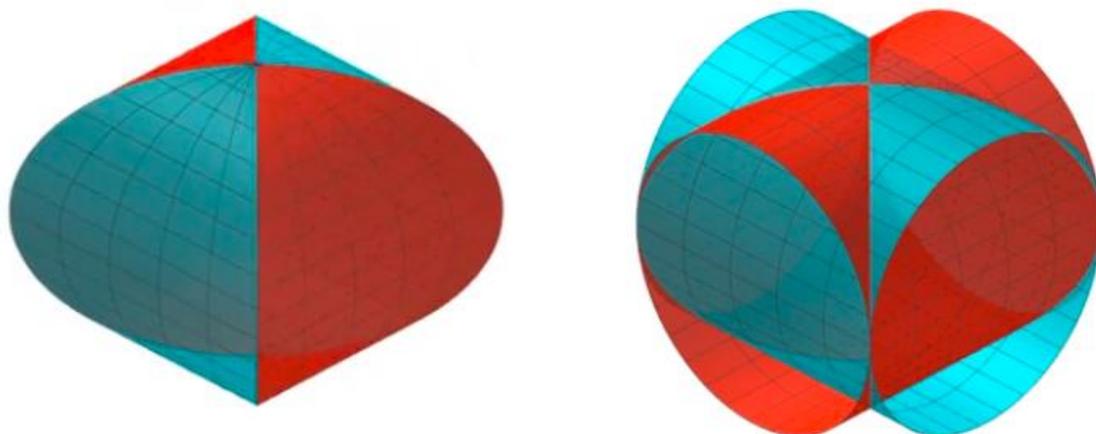


Рис. 3.6. Перетин двох циліндрів.

3.2. Інтегрування методом статистичного моделювання

Метод чисельного інтегрування Монте–Карло – це найбільш відоме застосування статичного моделювання для розв’язання прикладних математичних задач.

Розглянемо інтеграл

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Обчислюємо значення функції у випадкових точках

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i);$$

$$x_i = a + \gamma_i (b - a).$$

Тут γ_i – випадкове число, що рівномірно розподілене $[0, 1]$.

Похибка обчислення $\sim 1/\sqrt{N}$,

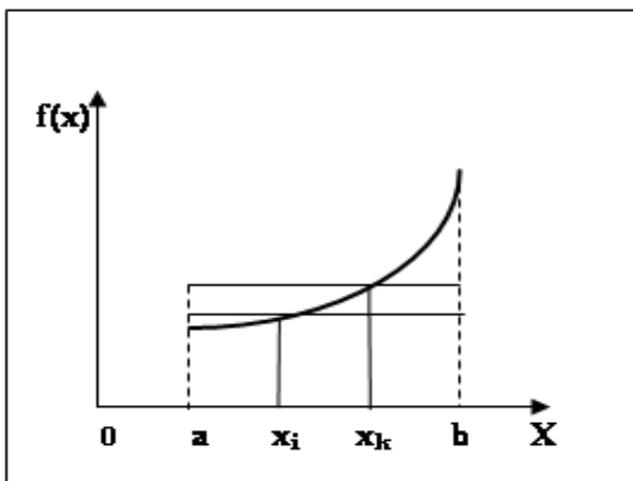


Рис. 3.7. Геометричний зміст інтеграла.

Якщо з послідовністю випадкових чисел $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N\} \in X$ з законом розподілу ймовірностей $f_X(x)$ провести функціональне перетворення

$$y_i = \varphi(x_i),$$

то математичне сподівання отриманої послідовності випадкових чисел $\{y_i, i = 1, 2, \dots, N\} \in Y$ буде

$$m_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x) dx,$$

і при обсязі вибірки більше декількох тисяч чисел з достатньо високою точністю може бути оцінено за формулою

$$\bar{m}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i.$$

Введемо так звану функцію індикатора області

$$1[a, b, x] = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases}$$

Якщо тепер обрати функцію

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{f_X(x)},$$

то кінцевий вираз буде мати вигляд

$$I = m_Y = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{f_X(x_i)} 1[a, b, x_i].$$

Похибка методу Монте–Карло визначається похибкою генерації псевдовипадкової послідовності чисел, отриманих за допомогою ЕОМ, а також розміром вибірки. Оцінка цієї похибки може бути подана у вигляді співвідношення:

$$\Delta = \frac{1}{2\sqrt{N(1-P)}},$$

де P — гарантована ймовірність того, що похибка потрапляє в інтервал $[-\Delta; +\Delta]$.

Кількість випробувань N не залежить від кратності інтегралу, що зумовлює ефективність методу Монте–Карло при обчисленні кратних інтегралів. У таких задачах застосування традиційних методів чисельного інтегрування є малоефективним через значне зростання обчислювальної складності.

Розглянемо послідовність дій при обчисленні кратних інтегралів. Для реалізації цієї процедури необхідно мати m генераторів випадкових чисел, де m відповідає кратності інтегрування.

Геометрично, обчислення m -кратного інтегралу

$$I = \iint_{(S)} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

де $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — неперервна функція в обмеженій замкненій області S , зводиться до знаходження $(m+1)$ -вимірного об'єму прямого циліндра в просторі $0x_1, x_2, \dots, x_m y$, побудованого на основі області S та обмеженого зверху поверхнею $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Для того щоб область інтегрування повністю знаходилась у межах одиничного m -вимірного куба σ , здійснюється заміна змінних:

$$x_i = a_i + (b_i - a_i)\xi_i,$$

де $\xi_i \in [0, 1]$ — нові змінні,

a_i, b_i — відповідно нижня і верхня межі змінної x_i .

У результаті перетворення маємо:

$$I = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_m - b_m) I_\xi,$$

де

$$I_\xi = \iint_{(\sigma)} \dots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m$$

Використовуючи m генераторів рівномірно розподілених випадкових чисел у межах від 0 до 1, можна обчислити середнє значення функції, що описується багатовимірним індикатором області інтегрування:

$$I_\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}) 1_{[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}]}$$

де індикаторна функція $1_{[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}]}$ = 1, якщо точка належить області S , і 0 — в іншому випадку.

Оцінка похибки при обчисленні m -кратного інтегралу методом Монте-Карло проводиться за аналогією до випадку однократного інтегрування.

4. ЛАНЦЮГИ МАРКОВА. МОДЕЛЮВАННЯ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА.

4.1. Означення марковського випадкового процесу.

Марковські випадкові процеси утворюють окремий клас серед інших випадкових процесів. Вони мають важливе значення завдяки добре розробленому математичному апарату, який дозволяє ефективно розв'язувати широкий спектр прикладних задач [2].

Марковські процеси дозволяють досить точно моделювати функціонування та розвиток реальних фізичних, економічних, екологічних, соціологічних систем.

Для ілюстрації основ марковських процесів часто використовують приклади економічної чи іншої системи A , яка в кожний дискретний момент часу $t = t_i$ може знаходитися в одному з станів, що не перетинаються, $\omega_i = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$, і може переходити з одного стану ω_i до іншого ω_j у моменти часу $t = t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$

Означення. Випадковий процес $X(t)$, де $t \in [0; T]$, називають марковським, якщо для послідовності моментів часу $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ умовна функція розподілу для моменту t_k процесу $X(t_k)$ залежить лише від функції розподілу в попередній момент t_{k-1} , тобто від $X(t_{k-1})$, і не залежить від значень $X(t_i)$, де $t_i = t_1, t_2, \dots, t_{k-2}$.

Таким чином, для марковського процесу виконується така рівність імовірностей:

$$\begin{aligned} P(X(t_k) < x_k / X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{k-1}) = x_{k-1}) = \\ = P(X(t_k) < x_k / X(t_{k-1}) = x_{k-1}). \end{aligned}$$

Отже, у марковських процесах майбутній стан у момент t_{k+1} залежить від поточного стану в t_k , а через нього — і від стану в попередній момент t_{k-1} . Цей принцип демонструється на рисунку 1.

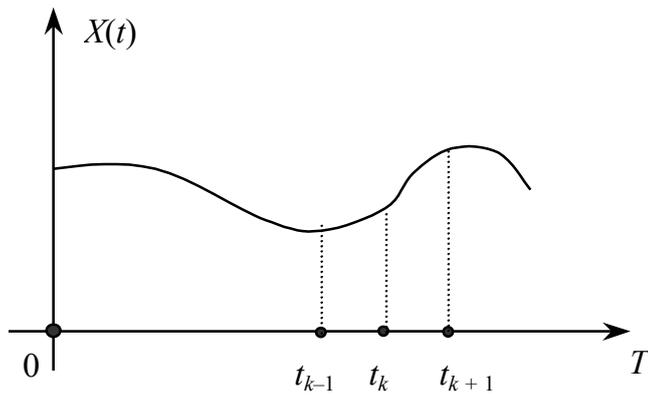


Рис. 4.1. Приклад реалізації марковського процесу

Як приклад, розвиток енергетичних систем у 2025 році (майбутнє) зумовлений їхнім станом у 2024 році (теперішнє), який, у свою чергу, залежав від стану у 2023 році (минуле). Таким чином, у марковських процесах майбутнє визначається минулим лише через теперішній стан.

Ланцюги Маркова. Припустимо, що система A переходить із одного стану в інший лише у визначені моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, які називаються кроками процесу. Такі процеси належать до марковських процесів з дискретними станами та дискретним часом.

Множину можливих станів, у яких може бути система, називають простором станів та позначають Ω .

Конкретні стани позначають як $\omega_i \in \Omega$, а перехід із стану ω_i до ω_j позначають $\omega_i \rightarrow \omega_j$. Простір Ω може бути як обмеженим, так і необмеженим; далі розглядаються випадки з обмеженим числом станів.

Класифікація станів ланцюга Маркова.

1. **Ергодичні стани.** Нехай простір станів Ω має підмножину $A \subset \Omega$, з доповненням $\bar{A} = \Omega \setminus A$. Якщо з будь-якого стану $\omega_i \in A$ можна потрапити до будь-якого іншого стану $\omega_j \in A$, і при цьому з жодного стану A неможливо перейти до жодного зі станів \bar{A} , тоді A називається ергодичною множиною, а її елементи — ергодичними станами. Потрапивши в A , процес назавжди залишиться в ній. Це ілюструє рисунок 2.

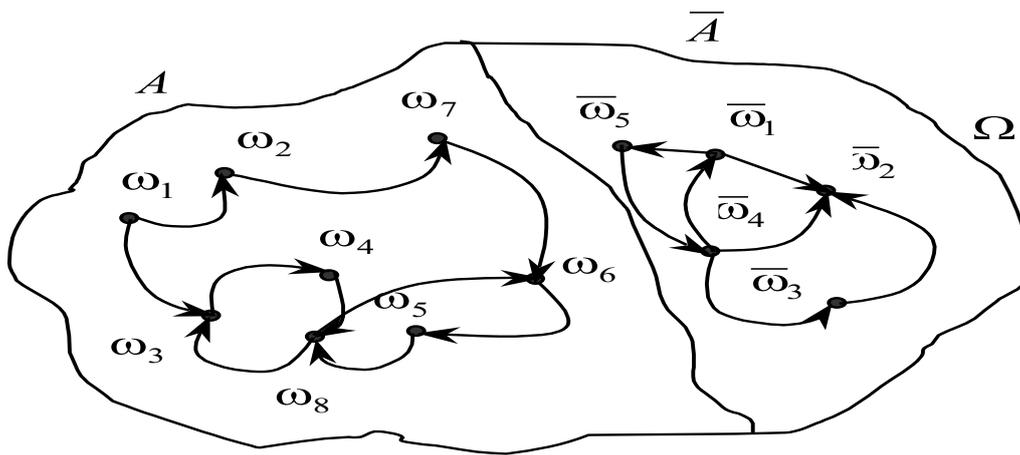


Рис. 4.2. Ергодичні стани

Як видно з рисунка, стани $\omega_1, \dots, \omega_8$ утворюють ергодичну множину A , а стани $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_5$ — іншу множину \bar{A} . Перехід між ними неможливий.

2. **Нестійкі стани.** Нехай $A \subset \Omega$, $\bar{A} = \Omega \setminus A$. Якщо кожен стан з A доступний із будь-якого іншого в A , але хоча б один з них має ймовірність переходу до деякого $\omega_j \in \bar{A}$, тоді A — нестійка множина. Її елементи називаються нестійкими станами.

Схема зображена на рисунку 3.

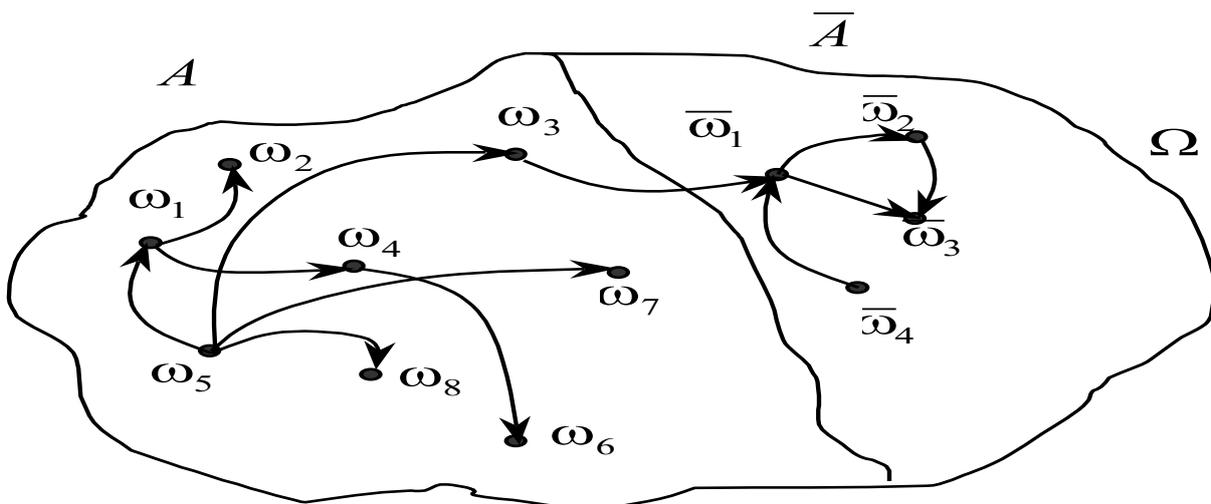


Рис. 4.3. Нестійкі стани

Як видно, зі стану $\omega_3 \in A$ процес може перейти до $\bar{\omega}_i \in \bar{A}$.

3. **Поглинаючі стани.** Якщо ергодична множина складається з одного стану, його називають поглинаючим — процес, потрапивши в нього, залишиться там назавжди.

У загальному випадку марковський процес може мати декілька ергодичних множин без наявності нестійких станів. Марковський процес з дискретним часом і станами також називають ланцюгом Маркова — майбутнє визначається минулим лише через теперішнє.

Матриці ймовірностей переходу. Однорідні ланцюги Маркова. Перехід із ω_i до ω_j у момент часу t має ймовірність $p_{ij}(t)$, яка зображується у вигляді матриці ймовірностей переходу:

$$\pi = \|p_{ij}(t)\| = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) & \dots & p_{1N}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) & \dots & p_{2N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1}(t) & p_{N2}(t) & p_{N3}(t) & \dots & p_{NN}(t) \end{pmatrix},$$

де

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(t) = 1, i = 1, 2, \dots, N.$$

Ймовірності переходу на k -му кроці позначаються $p_{ij}(k)$. Значення $p_{ii}(k)$ — ймовірність залишитися в стані ω_i після k кроків.

Матриця переходів на k -му кроці:

$$\pi = \|p_{ij}(k)\| = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & p_{13}(k) & \dots & p_{1N}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & p_{23}(k) & \dots & p_{2N}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1}(k) & p_{N2}(k) & p_{N3}(k) & \dots & p_{NN}(k) \end{pmatrix}$$

де

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(k) = 1, i = 1, 2, \dots, N.$$

Матриці з такими властивостями є стохастичними. Ланцюг називають однорідним, якщо $p_{ij}(k) = p_{ij} = \text{const}$.

Матриця ймовірностей переходів для однорідних ланцюгів Маркова має вигляд

$$\pi = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

Матрицю називають матрицею однокрокового переходу системи.

Ймовірності переходів системи за багато кроків. Ймовірності переходу системи зі стану ω_i до стану ω_j за n кроків називають n -кроковою ймовірністю переходу за n -кроків, і позначають $p_{ij}^{(n)}$, а матрицю називають матрицею ймовірностей переходів n -кроків.

Розглянемо матрицю переходу за один крок

$$\pi = \begin{matrix} & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_k & \dots & \omega_N \\ \omega_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} & \dots & p_{1N} \\ \omega_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k & p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} & \dots & p_{kN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_N & p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{Nk} & \dots & p_{NN} \end{matrix}.$$

Обчислимо елементи матриці $\pi^{(n)}$, а саме, ймовірності переходу системи за n -кроків.

При $n = 1$ маємо рівність

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

Знайдемо $p_{ij}^{(2)}$, а саме, ймовірності переходу системи за два кроки, $n = 2$.

Для переходу $\omega_i \rightarrow \omega_j$ існує N різних можливих варіантів переходу системи $\omega_i \rightarrow \omega_j$ за два кроки, це переходи: $\omega_i \rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega_j$, $\omega_i \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_j, \dots$,

$\omega_i \rightarrow \omega_k \rightarrow \omega_j, \dots, \omega_i \rightarrow \omega_N \rightarrow \omega_j$. Імовірності цих варіантів переходу системи обчислюються за формулами: $p_{i1}p_{1j}, p_{i2}p_{2j}, \dots, p_{ik}p_{kj}, \dots, p_{iN}p_{Nj}$.

Отже, імовірність переходу $\omega_i \rightarrow \omega_j$ за два кроки дорівнює сумі добутків цих імовірностей:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{m=1}^N p_{im} p_{mj}.$$

Ці елементи матриці $\pi^{(2)}$ якраз і знаходяться в i -му рядку та j -му стовпці.

Аналогічно доводиться, що на $k = (n + 1)$ -му кроці виконується

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{m=1}^N p_{im} p_{mj}^{(n)}.$$

Тобто, $\pi^{n+1} = \pi \pi^n$.

Початковий стан, із якого система починає перехідний процес, може безпосередньо задаватись, або визначатись за деяким правилом.

У загальному випадку для системи задається вектор початкового стану, позначимо так:

$$\vec{a}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

де a_i — імовірність того, що система в початковий момент перебуває у стані ω_i .

Для вектора виконується

$$\sum_{i=1}^N a_i = 1.$$

Отже, $\vec{a}_1 = \vec{a}_0 \pi^1$.

$$\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_n \pi^1 = \vec{a}_0 \pi^n.$$

4.2. Моделювання марковських ланцюгів

Для моделювання однорідних ланцюгів Маркова використовується матриця перехідних ймовірностей

$$\pi = \|\|p_{ij}\|\| = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

і розподіл вектора початкового стану $\vec{a}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_N)$.

Моделювання ланцюга Маркова відбувається за алгоритмом:

1. Моделюємо початковий стан – k .
2. Перехід із стану k в наступний регламентує k -й рядок матриці, моделюємо наступний стан - стан k_1 .
3. Якщо необхідно моделювати наступний стан, то переходимо на 2.

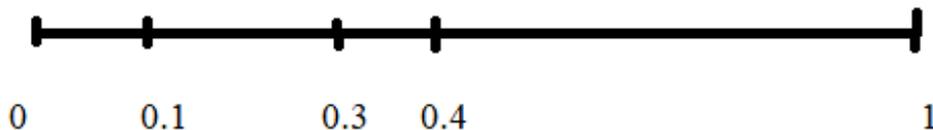
Нехай задано матрицю

$$\pi = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,18 & 0,45 & 0,25 \\ 0,04 & 0,26 & 0,55 & 0,15 \\ 0,2 & 0,35 & 0,05 & 0,4 \\ 0,43 & 0,17 & 0,28 & 0,12 \end{pmatrix}$$

і розподіл вектора початкового стану $\vec{a}_0 = (0,1; 0,2; 0,1; 0,6)$.

Моделювання ланцюга Маркова:

1. Моделюємо початковий стан k , нехай $\alpha = 0,4863$

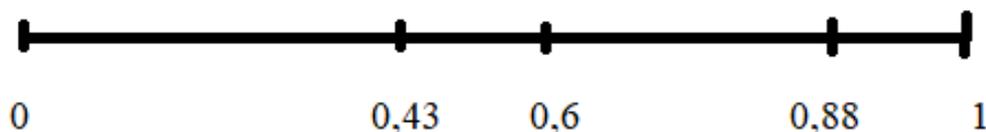


$k=4$.

$$\pi = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,18 & 0,45 & 0,25 \\ 0,04 & 0,26 & 0,55 & 0,15 \\ 0,2 & 0,35 & 0,05 & 0,4 \\ 0,43 & 0,17 & 0,28 & 0,12 \end{pmatrix}$$

2. Перехід із стану $k=4$ в наступний регламентує k -й рядок матриці, $\pi_k = (0,43; 0,17; 0,28; 0,12)$.

3. моделюємо наступний стан, стан k , нехай $\alpha = 0,8756$



$k=3$

4. Якщо необхідно моделювати наступний стан, то переходимо на 2.

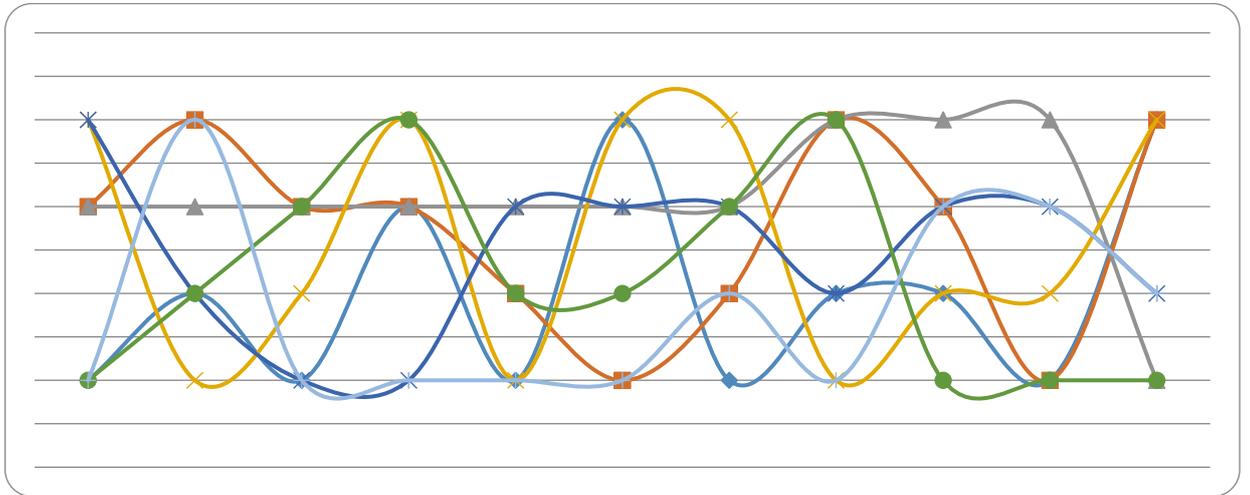


Рис. 4.4. Реалізації ланцюга Маркова

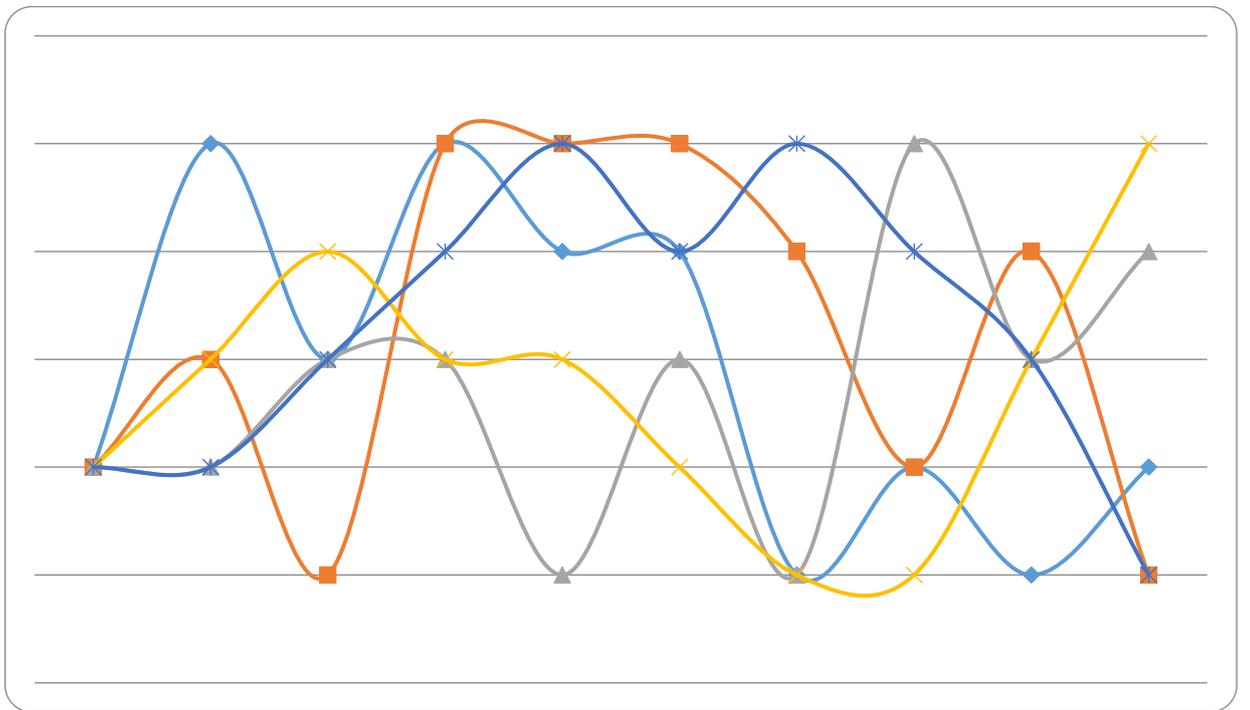


Рис. 4.5. Реалізації ланцюга Маркова

5. МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

5.1 Алгоритми статистичного моделювання випадкових процесів, що зображуються у вигляді рядів

При статистичному моделюванні випадкових процесів відтворюють реалізації випадкових процесів. Необхідно, щоб ці реалізації мали необхідні властивості. Реалізації випадкового процесу залежать від часу. Під час моделювання час можна задавати дискретно із заданим кроком. У цьому разі приходимо до задачі моделювання випадкових послідовностей з відомими властивостями.

Якщо час неперервний, то модель процесу можна розрахувати в будь-якій точці часового інтервалу. У практичних задачах часовий інтервал дискретизують, але за потреби період дискретизації можна як зменшувати так і збільшувати. І побудова моделей з неперервним часом дає можливість оцінювати близькість моделі та процесу в нормах різних функціональних просторів. Оцінки близькості в різних метриках дають змогу будувати моделі із заданими точністю і надійністю. У цьому разі статистичні моделі дають змогу глибше вивчати властивості випадкових процесів.

Будемо вивчати субгауссівські та строго субгауссівські моделі випадкових процесів. Такий підхід визначено тим фактом, що під час побудови реалізацій випадкових процесів із застосуванням обчислювальних засобів використовуються генератори псевдовипадкових величин. Теоретично, ці величини мають гауссівський розподіл, а насправді - це субгауссівські або суворо субгауссівські випадкові величини.

В теорії статистичного моделювання важливе місце займає дослідження швидкості збіжності статистичних моделей випадкових процесів. Для оцінювання швидкості збіжності статистичних моделей використовуються результати дослідження аналітичних властивостей випадкових процесів та полів, зокрема, гауссових, субгауссових та строго субгауссових випадкових процесів.

Використаємо оцінки швидкості збіжності строго субгауссових моделей для випадкових процесів, що мають зображення у вигляді стохастичних рядів. Алгоритми оцінювання опираються на дослідження швидкості збіжності субгауссових випадкових рядів в різних функціональних просторах, а саме, в просторах $L_p(T)$, $p \geq 1$, в просторах Орліча та в просторі неперервних функцій. В роботах [3-6] одержано результати для випадкових процесів, що зображуються у вигляді рядів в різних функціональних просторах.

Нехай випадковий процес $\xi(t)$ визначено на $t \in [0, T]$.

Для процесу $\xi(t)$ бажано мати зображення

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k(t), \quad t \in [0, T],$$

де $\{\phi_k(t)\}$, $k = 1, 2, \dots$ деякі базисні функції, вони детерміновані,

$\{V_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ - випадкові величини.

Для такого представлення в лінійному функціональному просторі необхідно мати повну систему базисних функцій $\{\phi_k(t)\}$, $k = 1, 2, \dots$

Умова ортогональності дійсних базисних функцій має вигляд

$$\int_0^E \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \delta_{ij},$$

де δ_{ij} - символ Кронекера.

Будемо вважати, що $E\xi(t) = m(t) = 0$.

Позначимо $\xi_1^n(t) = \sum_{k=1}^n V_k \phi_k(t)$, $t \in [0, T]$

Означення. Ряд $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k(t)$ збігається в середньому квадратичному в $L_2([0, T])$, якщо

$$M \int_0^T (\xi(t) - \xi_1^n(t))^2 dt = M \|\xi(t) - \xi_1^n(t)\|_{L_2([0, T])}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема. Для того, щоб ряд $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k(t)$ збігався в середньому квадратичному в $L_2([0, T])$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$E \|\xi_m^n(t)\|_{L_2([0, T])}^2 = \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n E V_i V_j \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt \rightarrow 0$$

при $m, n \rightarrow \infty$,

або щоб збігався ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E V_i V_j \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt < \infty$.

Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ має зображення у вигляді ряду

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t),$$

який збігається у середньому квадратичному.

Моделлю процесу X називатимемо скінченну суму $X_M = \{X_M(t), t \in T\}$, де

$$X_M(t) = \sum_{k=1}^M \xi_k f_k(t). \quad (1)$$

Нехай сам випадковий процес X та всі його моделі X_M , $M = 1, 2, \dots$ належать деякому банаховому функціональному простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$.

Нехай задано такі два числа α та δ ($0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$).

Будемо говорити, що модель X_M наближає процес X з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо для цієї моделі має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \leq \alpha. \quad (2)$$

Отже, для побудови моделі потрібно знайти такі M , для яких при заданих δ та α виконується нерівність (2).

Нехай отримано нерівність

$$P\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \leq W_M(\delta),$$

де $W_M(\delta)$, $\delta > 0$ - відома функція, що монотонно спадає по M та δ . Якщо M таке число, що $W_M(\delta) \leq \alpha$, то для моделей X_K , де $K \geq M$ виконується нерівність (2).

Тобто, для побудови моделі X_M , що наближає X з надійністю $(1 - \alpha)$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, досить знайти M , бажано найменше, для якого виконується нерівність $W_M(\delta) \leq \alpha$.

Якщо в моделі (1) ξ_k , $k = 1, \dots, M$ - некорельовані строго субгауссові випадкові величини для яких $E\xi_k = 0$ та $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$, $k = 1, 2, \dots, M$, то моделювання ξ_k , $k = 1, \dots, M$ зводиться до побудови M незалежних строго субгауссівських величин з $E\eta_k = 0$ та $E\eta_k^2 = 1$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Тоді $E\xi_k = 0$ та $\xi_k = \sigma_k \eta_k$, $k = 1, 2, \dots, M$ буде необхідною послідовністю. Для моделювання строго субгауссівських випадкових величин можна використовувати наближені методи для гауссівських випадкових величин.

Якщо ξ_k , $k = 1, \dots, M$ - залежні строго субгауссівські випадкові величини з відомою кореляційною матрицею

$$Z = \{\sigma_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, M\}, \quad E\xi_k = 0, k = 1, 2, \dots, M,$$

то маючи множину незалежних строго субгауссівських випадкових величин η_k , $k = 1, \dots, M$ з $E\eta_k = 0$ та $E\eta_k^2 = 1$, $k = 1, 2, \dots, M$ необхідну послідовність можна отримати перетворенням

$$\vec{\xi} = C\vec{\eta},$$

де $\vec{\xi}^T = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}$, $\vec{\eta}^T = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M\}$, $C = \{c_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, M\}$ - дійсна матриця така, що $CC^T = Z$. Матрицю C можна будувати різними методами.

Якщо базисні функції $\phi_k(t)$, $t \in [0, T]$ є власними функціями кореляційного оператора $R(t, s)$, $t, s \in [0, T]$, то вони задовольняють інтегральному рівнянню

$$\int_0^T R(t, s)\phi_k(s) ds = \lambda_k \phi_k(t),$$

λ_k - власні значення кореляційної функції.

Для випадкових величин має місце $EV_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$

$$EV_k^2 = \int_0^T \lambda_k \phi_k^2(t) dt = \lambda_k$$

Теорема. Випадковий процес $\xi(t)$ можна зобразити у вигляді ряду $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k(t)$. При цьому ряд збігається в середньому квадратичному, $\{V_k\}$ - некорельовані випадкові величини, та

$$EV_k = 0, \quad EV_k^2 = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зображення $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k(t)$ називають зображенням Карунена-Лосва випадкового процесу, кореляційна функція має вигляд

$$K(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(t) \phi_k(s).$$

Теорема. Випадковий процес X_M буде моделлю Карунен – Лоєва (К.Л. – моделлю), що наближає випадковий процес X з надійністю $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ та точністю $\delta > 0$ в $L_2(T)$,

$$P \left\{ \left(\int_0^b (X(t) - X_M(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} > \delta \right\} \leq \alpha,$$

якщо M задовольняє нерівності: $\delta^2 > \hat{J}_{(M+1)1}$ та

$$\left(\frac{\delta^2 - \hat{J}_{(M+1)1}}{\hat{J}_{(M+1)2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \frac{\delta^2 - \hat{J}_{(M+1)1}}{2\hat{J}_{(M+1)2}} \right\} \leq \alpha, \quad (3)$$

де

$$\hat{J}_{(M+1)1} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-2}, \quad \hat{J}_{(M+1)2} = \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В просторі неперервних функцій мають місце оцінки.

Теорема. Випадковий процес $X_M \in$ К.Л.-моделлю, що наближає процес X з надійністю $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ та точністю $\delta > 0$ в $C(T)$, якщо для деякого $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ M задовольняє умови:

$$\frac{\delta}{QG_{M+1}} > 2, \quad \text{де } G_M = \left(\sum_{s=M+1}^{\infty} \sigma_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

та

$$2b \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{QG_{M+1}} \right)^2 + 1 + \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{QG_{M+1}} \right)^{\frac{4\beta+1}{2\beta+1}} \left(\bar{F}_\beta + \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\delta}{QG_{M+1}} \right)^{\frac{4\beta}{2\beta+1}} \left(\bar{F}_\beta q_\beta \left(\frac{\delta}{QG_{M+1}} \right) + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\delta}{QG_{M+1}} \right)^{\frac{1-2\beta}{1+2\beta}} \right) \right\} \leq \alpha, \quad (4)$$

де

$$\bar{F}_\beta = \sum_{k=M+1}^{\infty} \left| \ln \left(\omega_B^{(-1)} \left(\frac{1 - (1 - 2Q^2 G_{M+1}^2 \delta^{-2})^{\frac{1}{2}}}{\lambda_k \sqrt{b}} \right) \right) \right|^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_k^2}{G_k^{2(1-\beta)}},$$

$$q_{\beta}(x) = \begin{cases} 1, & \beta \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right], \\ x^{\frac{1-6\beta}{2(2\beta+1)}}, & \beta \in \left(0, \frac{1}{6}\right). \end{cases}$$

В роботах [3-6] отримані оцінки точності та надійності моделювання, що аналогічні оцінкам (3)-(4) для строго субгауссових випадкових процесів, що базуються на розкладі цих процесів у ряд Фур'є.

Нехай неперервний в середньому квадратичному випадковий процес $\xi(t)$ визначено на $t \in [0, T]$.

Кореляційна функція процесу $K(t, s) = E\xi(t)\xi(s)$ є неперервною, тому вона може бути зображена у вигляді ряду Фур'є, що збігається в $L_2([0, T] \times [0, T])$

$$K(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \cos\left(\frac{\pi mt}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi ns}{T}\right),$$

де $a_{nm} = \frac{4b_{nm}}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(t, s) \cos\left(\frac{\pi mt}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi ns}{T}\right) dt ds,$

$$b_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & m = n = 0 \\ \frac{1}{2}, & (m > 0, n = 0) \vee (m = 0, n > 0) \\ 1, & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Оскільки $K(t, s)$ невід'ємно визначена функція, то $a_{mm} \geq 0$ для всіх m , а тому випадковий процес $\xi(t)$ можна зобразити і вигляді ряду, що збігається в середньому квадратичному

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right),$$

де $\{V_k\}$ такі випадкові величини, що $MV_k = 0$, $MV_m V_n = a_{mn}$.

Таке зображення називають зображенням Фур'є.

Аналогічні оцінки отримані в роботах [3-6] і для розкладів випадкових процесів з дискретним спектром.

Нехай стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$, що визначено на $t \in R$, є неперервним в середньому квадратичному. Кореляційна функція процесу

$$K(t + \tau, t) = M\xi(t + \tau)\xi(t) = K(\tau).$$

тоже неперервна.

Означення. Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ є випадковим процесом з дискретним спектром, якщо його кореляційну функцію $K(\tau)$ можна зобразити у вигляді

$$K(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos(\lambda_k \tau),$$

де $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty$, а $\{\lambda_k\}$ такі числа, що $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$ та $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема. Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з дискретним спектром можна зобразити у вигляді ряду

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos(\lambda_k t) + W_k \sin(\lambda_k t)).$$

Ряд збігається в середньому квадратичному, $MV_k = MW_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$, $MV_k W_l = 0$, $k, l = 0, 1, \dots$, $MV_k V_l = \delta_k^l b_k^2$, $MW_k W_l = \delta_k^l b_k^2$, де δ_k^l - символ Кронекера.

Нехай $\xi(t)$ неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес, що визначено на $t \in R$. Нехай на інтервалі $[0, 2T]$ його кореляційну функцію $K(\tau)$ можна зобразити у вигляді ряду Фур'є за косинусами

$$K(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^2 \cos\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right),$$

так, що невідємними є коефіцієнти

$$g_k^2 = \frac{\gamma_k}{T} \int_0^{2T} K(\tau) \cos\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right) d\tau$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 1, & k \geq 1 \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

Теорема. Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ можна зобразити у вигляді ряду

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(V_k \cos\left(\frac{\pi k t}{2T}\right) + W_k \sin\left(\frac{\pi k t}{2T}\right) \right),$$

де $\{V_k\}$ та $\{W_k\}$ незалежні випадкові величини такі, що $MV_k = MW_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$, $MV_k^2 = MW_k^2 = g_k^2$, де δ_k^l - символ Кронекера.

Ряд збігається в середньому квадратичному.

5.2. Статистичне моделювання вінерівського випадкового процесу.

Нехай (Ω, B, P) - стандартний ймовірнісний простір.

Будемо розглядати Вінерівський процес на відрізку $T = [0,1]$ і використовувати представлення за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту

$$\xi_1(t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i,$$

де $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини, $\lambda_i = i\pi$ - власні числа кореляційного оператора

Має місце розклад у ряд Фур'є на $t \in [0,1]$

$$\xi_2(t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\eta_{1i} \frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i} \frac{1 - \cos(2\pi i t)}{2\pi i} \right),$$

де $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини.

Модель Вінерівського процесу будується у першому випадку

$$W1(M, t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i,$$

у другому випадку

$$W2(M, t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \left(\eta_{1i} \frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i} \frac{1 - \cos(2\pi i t)}{2\pi i} \right).$$

Кількість доданків M визначається в залежності від заданої точності та надійності моделювання в деякому функціональному просторі.

При побудові реалізацій вінерівських процесів використовуються гауссівські випадкові величини.

Моделювання гауссівського розподілу проводиться за алгоритмами:

1. $\xi_1 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \cos(2\pi\alpha_2)$

$$\xi_2 = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1)} \sin(2\pi\alpha_2)$$

$$2. \quad \xi_n = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right)$$

$$3. \quad \eta_n = \xi_n - \frac{41}{12440n^2} (\xi_n^5 - 10\xi_n^3 + 15\xi_n)$$

де ξ_n моделюється за алгоритмом 2.

Алгоритм моделювання вінерівського процесу. Для моделювання реалізацій вінерівського процесу використаємо алгоритм:

1. Задаємо початкове значення σ_0 та значення точності моделювання $\delta > 0$ і надійності моделювання $0 < \alpha < 1$.
2. Моделюємо початкові значення S_0 .
3. Для заданих точності $\delta > 0$ і надійності $0 < \alpha < 1$ знаходимо кількість доданків M у зображенні

$$W1(M, t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i$$

або у зображенні

$$W2(M, t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \left(\eta_{1i} \frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i} \frac{1 - \cos(2\pi i t)}{2\pi i} \right).$$

Порядок значення M у просторі $L_2([0,1])$ рівний $M = 3000$.

4. Моделюємо послідовності випадкових величин $\{\eta_i\}_{i=0}^M$ з нормальним розподілом $N(0,1)$.
5. Перевіряємо гіпотезу про закон розподілу.
6. Для заданого кроку Δt моделюємо реалізація вінерівського випадкового процесу за відповідною формулою. Можна використовувати обидва зображення вінерівського випадкового процесу
7. Крок 4 повторюємо необхідне число разів.

На рис. 1. – 6 зображені реалізації вінерівського процесу на інтервалі $T=[0,1]$. Реалізації отримані за формулою

$$W1(M, t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i$$

для точності $\delta = 0.1$ і надійності $\alpha = 0.05$, $M=10000$.

5.3. Моделювання узагальненого вінерівського процесу

Узагальнений вінерівський процес $W_\alpha(t)$ можна представити у вигляді

$$W_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n,$$

де

$$c_n = \frac{\sqrt{2c}}{x_n^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_n)}, \quad d_n = \frac{\sqrt{2c}}{y_n^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_n)},$$

$\{X_n, Y_n\}$ - центровані незалежні гауссові випадкові величини з $EX_n^2 = EY_n^2 = 1$,

$\{x_n\}$ - дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$,

$\{y_n\}$ - дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$.

Позначимо наближені значення c_n, d_n, x_n, y_n відповідно $\tilde{c}_n, \tilde{d}_n, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n$.

Нехай

$$|c_n - \tilde{c}_n| \leq h_n^c, \quad |d_n - \tilde{d}_n| \leq h_n^d, \quad |x_n - \tilde{x}_n| \leq h_n^x, \quad |y_n - \tilde{y}_n| \leq h_n^y,$$

де $h_n^c, h_n^d, h_n^x, h_n^y$ - задана точність.

Тоді модель процесу $W_\alpha(t)$ має вигляд

$$\tilde{S}_\alpha(t, M) = \sum_{n=1}^M \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) X_n + \sum_{n=1}^M \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) Y_n,$$

Похибка моделювання $\Delta(t)$ рівна $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)$.

Теорема. Модель $\tilde{S}_\alpha(t, M)$ наближає процес $W_\alpha(t)$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю $1 - \varepsilon > 0, \varepsilon \in (0, 1)$ в просторі $L_2([0, T])$, якщо виконуються нерівності $B_M \leq \delta^2$ та

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B_M}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_M}\right\} \leq \varepsilon,$$

де

$$B_M = T \sum_{k=M+1}^{\infty} (c_k^2 + 4d_k^2) + T \sum_{k=1}^M \left((Tc_k h_k^x + h_k^c)^2 + (Td_k h_k^y + 2h_k^d)^2 \right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Адамчук В.В. та ін. Планування проектів вирощування культур на основі статистичного імітаційного моделювання. – Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2014. -224с.
2. Кемені Дж., Снелл Дж. Скінчені ланцюги Маркова. 1970. -272с.
3. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Моделювання випадкових процесів. - Київ. Видавничий центр 'Київський університет',1999. - 223с.
4. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. Моделювання випадкових процесів та полів. Монографія. - Київ. ВПЦ Задруга, 2007. - 230с.
5. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці: монографія. – Київ, ТОВ СІК ГРУПІ Україна, 2016. -216с.
6. Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О., Тегза А.М. Моделювання гауссівських випадкових процесів та процесів Кокса. – Ужгород: Карпати, 2012. – 194 с.
7. Медведєв М.Г., Пащенко І.О. Теорія ймовірностей та математична статистика. Підручник. – К.: Вид-во «Ліра-К», 2008. -536 с.
8. Пашко А.О. Інтелектуальний аналіз фінансових даних. Навчальний посібник. – Київ:2024. -113 с.
9. Томашевський В.М. Імітаційне моделювання систем і процесів. – К.: ІСДО, 1994. – 124 с.
10. Томашевський В.Н., Жданова О.Г., Жолдаков О.О. Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. - К.: "Корнійчук", 2001. — 268 с.
11. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Навчальний посібник. - К.: Либідь, 1990. -168с.
12. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. - М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.
13. Ясинський В.К., Ясинська Л.І., Ясинський С.В. Детерміновані та

стохастичні моделі фінансової математики. – Чернівці: Прут, 2003. -512 с.

14. Explaining the Gibbs Sampler. G. Casella, E.I. George. The American Statistician, V 46, N3, 1992, pp 167-174

15. Handbook of Simulation. Principles, Methodology, Advances, Applications, and Practice, J. Banks (editor), Wiley, NY. 1998.

16. G.S. Fishman. Monte Carlo. Concepts, algorithms and applications, Springer-Verlag, New York-Berlin-Amsterdam. 1999.

17. J.E. Gentle. Random Number Generation and Monte Carlo Methods (Statistics and Computing), 2nd ed., Springer. 2003.

18. Kozachenko Yu.V., Pogorilyak O.O., Rozora I.V., Tegza A.M. Simulation of Stochastic Processes with given Accuracy and Reliability. – Elsevier. 2016.-392p.

19. Kozachenko Yu.V. Accuracy of Simulation of the Gaussian random processes with continuous spectrum / Yu.V. Kozachenko, A. A. Pashko // Computer Modelling and New Technologies. — 2014. – Vol.18, №3. — P. 7–12.

20. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. W. K. Hastings, Biometrika, 57,1, 1970, p. 97.

21. Pashko A.A. Simulations of standart Brownian motion / A.A. Pashko // Computer modelling and new Technologies. - 2014. Vol. 18, №10. - P. 516 – 521.

22. R.Y.Rubinstein, D.P. Kroese. Simulation and the Monte Carlo Method, 2nd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience. 2008.

23. Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. S. Chib, E. Greenberg, The American Statistician, Vol. 49, No. 4. ,1995, pp. 327-335.