Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет

Андрій Олійник, Анатолій Петравчук

Дискретна математика

Навчальний посібник

для студентів механіко-математичного факультету

Київ–2024

Олійник А.С., Петравчук А.П. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – К., 2024.–177 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В.Гавриленко
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.С.Нікітченко

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 8 від 20 грудня 2023 року)

Ухвалено науково-методичною радою Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 03-24 від 21 березня 2024 року)

Зміст

Вступ

Навчальний посібник містить базовий матеріал з дискретної математики. Цей великий розділ математики тісно пов'язаний практично з усіма математичними дисциплінами і є одним із основних для комп'ютерних наук. Мета посібника — познайомити читача з основними поняттями із основних розділів дискретної математики (на жаль, зміст цієї науки не є чітко окресленим, до дискретної математики формально можна віднести все те, що не є неперервним). Автори зупинилися на таких базових розділах як: комбінаторика, елементи теорії множин і теорії відношень, елементи математичної логіки, теорія графів і елементи теорії матроїдів. Автори намагалися викласти матеріал якомога доступніше, з великою кількістю прикладів і розв'язаних задач. Є багато серйозних підручників і монографій присвячених певним розділам дискретної математики, але не багато студентів можуть пожертвувати своїм часом, якого, як правило, не вистачає, для детального вивчення матеріалу із таких книг. Матеріал посібника максимально наближений до лекційного стилю, це має певні переваги (студентам зручніше готуватися до практичних занять, посібник не є дуже об'ємним), але є і певні недоліки, пов'язані з необхідністю нехтувати деякими доведеннями, недостатньою глибиною викладу окремих фактів (в цих випадках вказано додаткову літературу, яка допоможе зацікавленим читачам поглибити свої знання).

Розділ 1, який називається "Комбінаторика I", присвячений вступу в комбінаторику і містить основні правила комбінаторики, основні типи вибірок, біноміальну і поліноміальну формули, формулу включення-вилучення, числа Стірлінга. Наступний розділ присвячений перестановкам і підстановкам, зокрема пов'язаним з ними алгоритмічним питанням генерування підстановок та підмножин. Розділ 3 містить елементи математичної логіки і теорії множин, які повинні бути в будь-якому навчальному посібнику з дискретної математики. Цей розділ містить означення основних логічних зв'язок, базовий матеріал про нормальні форми булевих функцій і булеві многочлени, також поняття про повні системи логічних зв'язок. Викладено основні поняття про відношення і дії з ними, основні поняття із теорії множин. Розділ 4,"Теорія графів I", містить базовий матеріал із теорії графів, зокрема пов'язаний з їх числовими характеристиками, а також відомості про ойлерові графи і гамільтонові графи та дерева.

Друга частина посібника містить матеріал з так званої "Дискретної математики II", яка є поглибленням і розширенням першої його частини, яку можна назвати "Дискретна математика I". В Розділі 5, який називається "Комбінаторика II" розглядаються формальні степеневі ряди і генератриси, їх застосування, ряди Діріхле і формула обертання Мьобіуса. Частина розділу присвячена рекурентним послідовностям, числам Каталана і числам та многочленам Бернуллі. Останній, розділ 6, присвячений планарним графам, розфарбовуванням графів та елементам теорії матроїдів.

Посібник призначений для студентів молодших курсів класичних і технічних університетів, які навчаються за математичними і комп'ютерними спеціальностями, також може бути корисним студентам інших спеціальностей, які цікавляться і використовують дискретну математику.

Розділ 1

Комбінаторика I

1.1 Множини та дії над ними

Поняття множини є первісним і його не можна визначити через інші поняття. Наведемо означення, яке належить знаменитому німецькому математику Г.Кантору, який створив теорію множин.

Означення 1.1. *Множина — це зібрання визначених і розрізнюваних між собою об'єктів, яке мислиться як єдине ціле.*

Множина складається із елементів і повністю ними визначається. Для множини A використовуємо такі позначення:

- $a \in A$ — елемент a належить множині A;
- $a \notin A$ — елемент a не належить множині A.

Множину будемо записувати, вказавши у фігурних дужках всі її елементи, наприклад

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

або сформулювавши властивості, які визначають приналежність елементів до цієї множини:

$$A = \{a \mid a \in \mathbb{Z}, a > 0, a \leq 5\}.$$

Множина A є *підмножиною* множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо кожен елемент із A належить множині B. Множини A і B рівні (позначається $A = B$), тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Символом $\varnothing$ позначається пуста множина, тобто множина, яка не містить елементів. При цьому $\varnothing \subseteq A$ для довільної множини A.

Коротко нагадаємо основні операції над множинами і їх властивості.

1) Перетин: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$ (Рис. 1.1).

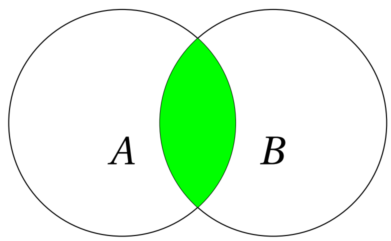


Рис. 1.1: Перетин множин

2) Об'єднання: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$ (Рис. 1.2).

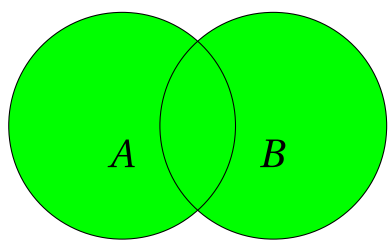


Рис. 1.2: Об'єднання множин

3) Різниця: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$ (Рис. 1.3).

4) Симетрична різниця: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (Рис. 1.4).

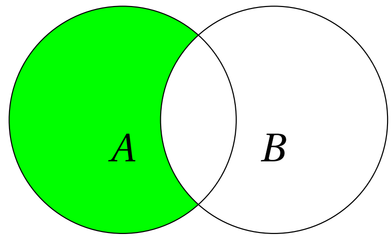


Рис. 1.3: Різниця множин

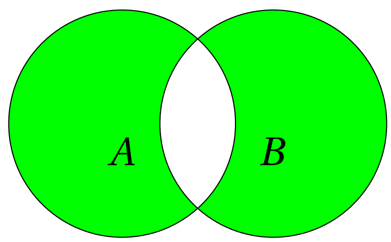


Рис. 1.4: Симетрична різниця множин

5) Декартів добуток $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ — множина всіх впорядкованих пар. Зокрема, $A \times A$ — декартів квадрат множини A. Наприклад, декартова площина $\mathbb{R}^2$ — це декартів квадрат прямої $\mathbb{R}$.

Операції перетину та об'єднання переносяться на випадок довільної сім'ї множин. Нехай I — довільна непуста множина індексів, $\{M_i, i \in I\}$ — сім'я множин, індексованих елементами із I. Так само, як і для двох множин, можна визначити перетин

$$N = \bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid x \in M_i, i \in I\}$$

і об'єднання

$$K = \bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{існує } i \in I \text{ такий, що } x \in M_i\}$$

множин M_i.

Декартів добуток сім'ї множин, занумерованих елементами множини індексів I визначається наступним чином:

$$\prod_{i \in I} M_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i \mid f(i) \in M_i, i \in I\}.$$

Якщо X і Y — непусті множини, то множина всіх відображень $f : X \to Y$ із X в Y позначається символом Y^X, пояснення для цього позначення буде трохи нижче.

Кількість елементів скінченної множини X позначається $|X|$.

Наведемо основні властивості операцій над множинами.

1) $A \cap A = A, A \cup A = A$ — ідемпотентність відносно операцій об'єднання і перетину;

2) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$ — комутативність операцій перетину і об'єднання;

3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — асоціативність операцій перетину і об'єднання;

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$ — дистрибутивність операцій перетину та об'єднання одна відносно іншої.

Нехай U — довільна непуста множина, яку називатимемо універсумом. Для довільної підмножини $B \subseteq U$ підмножина $\overline{B} = U \setminus B$ називається *доповненням* до B в U.

Теорема 1.1 (закони двоїстості де Моргана)**.** *Нехай $A_1, \ldots, A_n$ – підмножини із множини U. Тоді:*

1) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, *тобто доповнення до перетину є об'єднанням доповнень;*

2) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, *тобто доповнення до об'єднанння є перетином доповнень.*

Доведення. Доведемо тільки 1). Нехай $x \in \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}$. Тоді $x \in U$, але $x \notin \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тому існує індекс i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, такий, що $x \notin A_{i_0}$. Тоді $x \in \overline{A_{i_0}}$ і тому $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Нехай тепер $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. В цьому випадку для деякого i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, виконується $x \in U$, $x \notin A_{i_0}$. Тоді $x \notin \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тому $x \in \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}$. □

Нагадаємо також *принцип математичної індукції*: якщо підмножина E множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел містить елемент m і разом з кожним $x \in E$ множині E належить $x+1$, то E містить всі натуральні числа $\geqslant m$.

1.2 Основні правила комбінаторики

Правило відповідності. *Дві множини мають рівну кількість елементів тоді й лише тоді, коли між ними існує бієкція.*

Правило додавання. *Якщо дві множини не перетинаються, то кількість елементів у їх об'єднанні рівна сумі кількостей елементів у цих множинах.*

Правило множення. *Кількість елементів у декартовому добутку двох множин дорівнює добутку кількостей елементів у цих множинах.*

Правила додавання та множення допускають природні узагальнення на випадок довільного числа множин.

В комбінаторних задачах правило множення зручніше використовувати у такому формулюванні:

Теорема 1.2. *Потрібно знайти кількість об'єктів, кожен з яких отримується в результаті послідовного виконання n дій. Нехай перша дія виконується k_1 способами, друга дія після виконання першої — k_2 способами, остання дія після виконання усіх попередніх — k_n способами. Тоді загальна кількість побудованих об'єктів дорівнює $k_1 k_2 \ldots k_n$.*

Доведення. Доведемо для $n = 2$, коли виконуються дві дії, перша — k_1 способами, друга — k_2 способами. Занумеруємо послідовність дій впорядкованими парами чисел (i, j), де i — номер способу виконати першу дію, j — номер способу виконати другу дію. Всі способи отримати об'єкти за допомогою двох дій описуються таблицею:

(1,1)	(1,2)	...	$(1, k_2)$
...	...	...	...
$(k_1, 1)$	$(k_1, 2)$	...	(k_1, k_2)

Ця таблиця містить $k_1 k_2$ елементів.

Індукцією за кількістю дій тепер можна довести твердження теореми в загальному випадку. □

Приклад 1.3. На вершину гори веде 6 доріг.

1) Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися вниз? Відповідь: $6 \cdot 6 = 36$.

2) Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися вниз, якщо підйом і спуск здійснюються різними шляхами? Відповідь: $6 \cdot 5 = 30$.

Теорема 1.4. *Нехай X і Y — скінченні множини, $|X| = n, |Y| = m$. Тоді число всіх відображень із X в Y дорівнює m^n тобто $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.*

Доведення. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Відображення f можна задати за допомогою таблиці:

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_{i_1}	y_{i_2}	...	y_{i_n}

Значення y_{i_1} можна вибрати m способами із Y, значення y_{i_2} знову m способами і т.д. За правилом множення число можливих способів вибрати всі значення функції, тобто задати функцію, дорівнює $\underbrace{m \times \cdots \times m}_{n} = m^n$. □

Ця теорема пояснює введене вище позначення для сукупності усіх функцій з однієї множини в іншу.

Означення 1.2. *Нехай X — непуста множина, $A \subseteq X$. Функція $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$, задана правилом:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A, \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

називається індикаторною функцією (або характеристичною функцією) підмножини $A \subseteq X$.

Очевидно, що існує бієктивна відповідність між підмножинами $A \subseteq X$ і функціями $\varphi : X \longrightarrow \{0, 1\}$, яка співставляє підмножині її індикаторну функцію: $A \longleftrightarrow \chi_A(x)$.

Теорема 1.5. *Число всіх підмножин множини X потужності $|X| = n$ дорівнює 2^n.*

Доведення. Як відзначено вище, число всіх підмножин із X дорівнює числу всіх характеристичних функцій $\chi : X \longrightarrow \{0, 1\}$.

За теоремою 1.4 число таких функцій рівне $|\{0, 1\}^X| = 2^{|X|} = 2^n$, що й треба було довести. □

Часто через 2^X позначають множину всіх підмножин множини X. Ця множина називається *булеаном* множини X і позначається також через $\beta(X)$ або $P(X)$.

1.3 Біноміальні коефіцієнти та їх властивості

Означення 1.3. *Нехай $x \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$. Біноміальним коефіцієнтом називається функція вигляду:*

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!},$$

де $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

Це многочлен степеня k від змінної x. Покладемо для зручності $\binom{x}{0} = 1$.

Приклад 1.6.

$$\binom{x}{1} = \frac{x}{1!} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!}.$$

Найчастіше ми будемо розглядати біноміальні коефіцієнти з $x = n \in \mathbb{N}$, тобто

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

В цьому випадку також використовується позначення C_n^k.

Задача. Чому дорівнює $\binom{x}{k}$ якщо $x \in \mathbb{N}, x < k$?

Теорема 1.7. *Для довільного натурального k і довільного x виконується рівність:*

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}.$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. Перевіримо твердження при $k = 1$: $\binom{x+1}{1} = x + 1 = \binom{x}{1} + \binom{x}{0}$. Нехай $k > 1$. Тоді

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} + \frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} + \frac{x(x-1)\cdots(x-k+2)k}{k!} =$$

$$= \frac{x(x-1)\cdots(x-k+2)(x-k+1+k)}{k!} =$$

$$= \frac{(x+1)x(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!} = \binom{x+1}{k}.$$

□

Таким чином, має місце рівність для $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \text{ або } C_{n+1}^{k} = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Теорема 1.8 (біноміальна формула)**.** *Для довільного натурального n і довільних чисел x, y має місце рівність:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Доведення. Індукція за n. Якщо $n = 1$, то рівність правильна.

Нехай рівність виконується для n. Доведемо, що вона тоді виконується і для $n+1$. Маємо:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} =$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1})x^{n+1-k}y^k + y^{k+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.$$

Тому за принципом математичної індукції твердження теореми виконується для всіх n. □

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Якщо $n, k \in \mathbb{N}$, то біноміальний коефіцієнт $\binom{n}{k} = C_n^k$ належить $\mathbb{N}$.

   Доведення. Справді, коефіцієнти при $x^k y^{n-k}$ в біноміальній формулі є натуральними числами. □

2. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ — сума всіх біноміальних коефіцієнтів у біноміальній формулі дорівнює 2^n.

Доведення. Покладемо в біноміальній формулі $x = 1, y = 1$. Тоді

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

□

3. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Доведення. Покладемо в тій же формулі $x = -1, y = 1$. Тоді отримаємо $0 = (-1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$. □

Наслідок 1.9. *В біноміальній формулі сума всіх біноміальних коефіцієнтів з парними номерами дорівнює сумі коефіцієнтів з непарними номерами і дорівнює* 2^{n-1}.

4. Симетричність біноміальних коефіцієнтів

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доведення.

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Домножимо чисельник і знаменник на $(n-k)!$. Отримаємо рівність

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)} = \binom{n}{n-k}.$$

□

5. Композиція Вандермонда.

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}.$$

Доведення. Запишемо очевидну рівність

$$(x+1)^{n+m} = (x+1)^n (x+1)^m.$$

Коефіцієнт при x^k в лівій частині цієї рівності дорівнює $\binom{n+m}{k}$, а в правій частині

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}.$$

Звідси випливає потрібна рівність. □

Приклад 1.10. Знайдемо кількість раціональних членів у розкладі $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$. За біноміальною формулою члени розкладу мають вигляд $\binom{n}{k}(\sqrt{2})(\sqrt[4]{})^{100-k}$, $k = 0, 1, \ldots, 100$. Щоб такий член був раціональним виразом необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності $k = 2s$, $100-k = 4t$, де $s, t = 0, 1, \ldots$. Звідси отримаємо $100 - 2s = 4t$, або $s = 50 - 2t$, де $t = 0, 1, \ldots, 25$. Тому всіх раціональних членів буде 26.

Нехай $f(x)$ — довільна функція, яка визначена для всіх натуральних значень x. Позначимо $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Для довільного натурального x має місце рівність:

$$f(x) = f(0)+(f(1)-f(0))+(f(2)-f(1))+..+(f(x)-f(x-1)),$$

тобто $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \Delta f(k)$ (аналог формули Тейлора).

Приклад 1.11. Нехай $f(x) = x^n$. Тоді отримаємо

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k.$$

6. При натуральному $k \geqslant 1$ і натуральному n має місце рівність:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i}{k-1}.$$

Доведення. За доведеним вище маємо:

$$\Delta \binom{x}{k} = \binom{x+1}{k} - \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1},$$

де $x \in \mathbb{N}$. До функції $\binom{x}{k}$ застосуємо аналог формули Тейлора:

$$\binom{x}{k} = \binom{0}{k} + \sum_{i=0}^{x-1} \Delta \binom{i}{k} = 0 + \sum_{i=0}^{x-1} \binom{i}{k-1} = \sum_{i=1}^{x-1} \binom{i}{k-1},$$

бо $\binom{0}{n} = \binom{0}{n-1} = 0$.

Покладемо в останній формулі $x = n$. Отримаємо потрібне співвідношення. □

1.4 Розміщення і комбінації

Нехай задано скінченну множину $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, яку будемо називати генеральною сукупністю.

Із елементів A можна утворювати вибірки $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\}$, де $a_{i_s} \in A$, $s = 1, \ldots, r$. Вибірки бувають впорядковані і невпорядковані, вибірки з повтореннями і без повторень. Число елементів вибірки називається її об'ємом. Вибірку об'єму r називають r-вибіркою.

Означення 1.4. *Розміщенням із n елементів по m називається впорядкована вибірка об'єму m із n-елементної генеральної сукупності.*

Число розміщень із n по m позначають через A_n^m або через $(n)_m$.

Приклад 1.12. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множина із трьох елементів. Запишемо всі розміщення із 3 по 2:

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Їх буде $A_3^2 = 6$.

Теорема 1.13. $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$

Доведення. Перший елемент розміщення із n елементів по m можна вибрати одним із n-способів, другий — одним із $n-1$ способів, ..., m-й елемент — одним із $(n-m+1)$ способів. За правилом множення маємо $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$. □

Позначимо через $\overline{A_n^m}$ кількість всіх розміщень із n елементів по m з повтореннями. В такому розміщенні перший елемент можна вибрати одним із n способів, другий також одним із n способів, ..., m-й елемент одним із n способів. Тому за правилом множення $\overline{A_n^m} = n^m$.

Означення 1.5. *Розміщення із n елементів по n називається перестановкою множини $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Наслідок 1.14. *Кількість перестановок на множині із n елементів дорівнює $P_n = A_n^n = n!$.*

Означення 1.6. *Сполученням або комбінацією із n елементів по m називають невпорядковану вибірку об'єму m із n-елементної генеральної сукупності (це просто m-елементна підмножина із $A = \{a_1, ..., a_n\}$).*

Теорема 1.15. *Кількість всіх комбінацій із n елементів по m дорівнює $\binom{n}{m} = C_n^m$.*

Доведення. Візьмемо довільну комбінацію $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ із A. Кількість всіх впорядкованих наборів із елементів $\{y_1, \ldots, y_m\}$ буде $m!$. Тому кожній комбінації із n по m відповідає $m!$ розміщень з n по m. Нехай S — кількість всіх комбінацій із n по m. Тоді $S \cdot m! = A_n^m$. Тоді

$$S = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

Тому $S = \binom{n}{m} = C_n^m$. □

Приклад 1.16. Знайдемо кількість різних пар підмножин, які не перетинаються, в множині M із n елементів. Виберемо фіксовану підмножину S із M, яка містить k елементів. Тоді $M \setminus S$ містить $n - k$ елементів і із неї можна вибрати 2^{n-k} підмножин, які утворюють впорядковані пари (S, H), де $H \subseteq M \setminus S$ і $S \cap H = \varnothing$. Таких пар при фіксованій підмножині S буде 2^{n-k}. Підмножин із M, які містять k елементів буде $\binom{n}{k}$ і тому число пар (N_1, N_2), де перша підмножина має k елементів і $N_1 \cap N_2 = \varnothing$, буде $\binom{n}{k}2^{n-k}$. Тоді загальна кількість таких пар буде $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^{n-k}$.

Нехай $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — скінченна множина. Комбінація з повтореннями — це невпорядкована вибірка $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}\}$ із A об'єму m з повтореннями. Закодуємо вибірку B за допомогою нулів і одиниць: спочатку запишемо таку кількість одиниць, скільки разів входить в вибірку елемент a_1 (одиниці не пишемо, якщо $a \notin B$), потім 0, потім таку кількість одиниць, скільки разів входить елемент a_2, потім 0 і т.д.. Після одиниць, які відповідають a_n, нуль вже не пишемо.

Приклад 1.17. Нехай $A = \{a, b, c\}$ — множина із трьох елементів. Тоді вибірці $aaabc$ відповідає послідовність 1110101, вибірці $aacc$ — послідовність 110011.

Зауважимо, що в кодуючій послідовності для вибірки об'єму m буде точно m одиниць і $n-1$ нулів, які розділяють одиниці, тобто кодуюча послідовність має $m+n-1$ нулів і одиниць. Знайдемо кількість таких послідовностей. Для побудови послідовностей із m одиниць і $n-1$ нулів потрібно визначити m позицій для одиниць із $m+n-1$ можливих позицій. Тому кількість таких послідовностей дорівнює $C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{n-1}$.

Позначимо число комбінацій із n по m з повтореннями через $\overline{C_n^m}$. Тоді число таких комбінацій дорівнює $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{n-1}$.

Приклад 1.18. Знайдемо число цілих невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$. Існує бієкція між множиною таких розв'язків і множиною комбінацій з повтореннями із n по m. Запишемо x_1 одиниць, потім 0, потім x_2 одиниць, потім 0, і, нарешті, в кінці просто x_n одиниць. Тоді число таких невід'ємних розв'язків дорівнює C_{n+m-1}^{m}

1.5 Формула включення-вилучення

Теорема 1.19. *Нехай $M_1, \ldots, M_n$ — довільні скінченні множини. Тоді*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} |M_{i_1} \cap M_{i_2}| +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3}| + \ldots +$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant n}|\bigcap_{i=1}^{m}M_{i_s}|+\ldots+(-1)^{n-1}|\bigcap_{i=1}^{n}M_i|.$$

Доведення. **1-й спосіб.** Індукція по n. При $n=2$ потрібно довести, що $|M\cup N|=|M|+|N|-|M\cap N|$. Нехай

$M\cap N=\{c_1,\ldots,c_r\},\ M\setminus N=\{a_1,\ldots,a_s\},\ N\setminus M=\{b_1,\ldots,b_t\}.$

Тоді, очевидно,

$$M\cup N=\{c_1,\ldots,c_r,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t\}$$

і тому

$|M\cup N|=r+s+t=(s+r)+(t+r)-r=|M|+|N|-|M\cap N|.$

Нехай рівність із теореми 1.19 виконується для n, доведемо її для $n+1$. Розглянемо множини $M_1,\ldots,M_n,M_{n+1}$. Позначимо $M=\bigcup\limits_{i=1}^{n}M_i$, $N=M_{n+1}$. Тоді $|\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}M_i|=|M|+|N|-|M\cap N|$. Для $|M|=|\bigcup\limits_{i=1}^{n}M_i|$ і для $|M\cap N|=|\bigcup\limits_{i=1}^{n}(M_i\cap M_{n+1})|$ за індуктивним принципом виконується формула із теореми 1.19 і тоді використовуючи її можна довести (на жаль, досить-таки громіздко) твердження у випадку $n+1$.

2-й спосіб (комбінаторне доведення). Розглянемо множину $M=\bigcup\limits_{i=1}^{n}M_i$ Візьмемо довільний елемент $a\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}M_i$. Припустимо, що елемент a належить точно r множинам із $M_1,\ldots,M_n$.

В правій частині формули із теореми цей елемент враховується: r раз в сумі $\sum\limits_{i=1}^{n}|M_i|$, потім C_r^2 рази в сумі $\sum\limits_{i_1<i_2}|M_{i_1}\cap M_{i_2}|$, потім C_r^3 раз в сумі $\sum\limits_{i_1<i_2<i_3}|M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap M_{i_3}|$ і т.д. Тому в правій частині елемент a враховується $C_r^1-C_r^2+C_r^3-\ldots(-1)^{r+1}C_r^r=1-(C_r^0-C_r^1+C_r^2-+\ldots(-1)^rC_r^r)=1-(1-1)^r=1$ раз. □

Приклад 1.20. Знайдемо кількість чисел із множини $M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, які не діляться на жодне з чисел 2, 3, 5. Нехай A_2 — підмножина із M, яка складається із всіх чисел, що не діляться на 2, A_3 — із всіх чисел із M, які не діляться на 3 і A_5 — із чисел, що не діляться на 5. Тоді $|A_2| = [100/2] = 50$, $|A_3| = [100/3] = 33$, $|A_5| = [100/5] = 20$. Тому за формулою включення-вилучення отримаємо

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - (|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| +$$

$$+ |A_3 \cap A_5|) + ||A_2 \cap A_3 \cap A_5|.$$

Але $|A_2 \cap A_3| = [100/(2 \cdot 3)] = 16$, $|A_2 \cap A_5| = [100/(2 \cdot 5)] = 10$, $|A_3 \cap A_5| = [100/(3 \cdot 5)] = 6$ і $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = [100/(2 \cdot 3 \cdot 5)] = 3$. Тому

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 50 + 33 + 20 - (16 + 10 + 6) + 3 = 74.$$

Кількість чисел, які не належать множині $A_2 \cap A_3 \cap A_5$, тобто таких, які не діляться на жодне з чисел 2, 3, 5 дорівнює $100 - 74 = 26$.

Якщо множини $M_1, \ldots, M_n$ попарно не перетинаються, то їх об'єднання позначається $\coprod_{i=1}^{n} M_i$ і називається *незв'язним* (або *диз'юнктним*) об'єднанням. Тоді з формули включення-вилучення відразу випливає правило додавання, тобто має місце така формула розбиття:

$$|\coprod_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|.$$

Теорема 1.21 (формула шарів)**.** *Нехай M, N — скінченні множини. Якщо задано відображення $f : M \to N$, то*

$$|M| = \sum_{y \in N} |f^{-1}(y)|.$$

Доведення. Справді, M є об'єднанням підмножин $f^{-1}(y)$, $y \in N$, причому всі прообрази попарно не перетинаються. Далі все випливає із формули розбиття. □

Теорема 1.22. $|\prod_{i=1}^{n} M_i| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$. *Зокрема,* $|M \times N| = |M| \times |N|$.

Доведення. Індукція по n. Якщо $n = 1$, то $\prod_{i=1}^{n} M_i = M_1$ і все виконується.

Нехай формула правильна для n множників. Розглянемо проекцію $p : \prod_{i=1}^{n+1} M_i$ на M_{n+1}, задану правилом

$$P(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}.$$

Тоді для кожного $y \in M_{n+1}$ маємо $|p^{-1}(y)| = |\prod_{i=1}^{n} M_i|$ і тому за індуктивним припущенням $|p^{-1}(y)| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$. За формулою шарів

$$|\prod_{i=1}^{n+1} M_i| = \sum_{y \in M_{n+1}} \prod_{i=1}^{n} |M_i| = |M_{n+1}| \prod_{i=1}^{n} |M_i| = \prod_{i=1}^{n+1} |M_i|.$$

□

1.6 Поліноміальна формула

Задача. Нехай $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — скінченна множина. Скільки існує розбиттів множини X на 2 підмножини A_1, A_2 таких, що

$$X = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing.$$

Розв'язання. Очевидно, підмножину A_1 можна вибрати $C_n^{k_1}$ способами, де $k_1 = |A_1|$, тоді автоматично $A_2 = X \setminus A_1$. Всього розбиттів буде $C_n^{k_1} = \dfrac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!}$, де $k_2 = |A_2|$.

Теорема 1.23. *Нехай $k_1, \ldots, k_m$ — цілі невід'ємні числа, причому $k_1 + \ldots + k_m = n$. Число розбиттів множини A з $|A| = n$ в об'єднання*

$$A = B_1 \cup \ldots \cup B_m, B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j$$

з $|B_i| = k_i$ дорівнює

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2 \cdots k_m!}.$$

Доведення. Підмножину B_1 можна вибрати $\binom{n}{k_1}$ способами, далі з $n - k_1$ елементів, що залишилися, підмножину B_2 можна вибрати $\binom{n-k_1}{k_2}$ способами і т.д. За правилом множення число способів дорівнює:

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdots C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \times \cdots \times$$

$$\times \frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

□

Числа $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ називаються поліноміальними коефіцієнтами і позначаються ще символом $\binom{n}{k_1, \ldots, k_m}$.

Приклад 1.24. Скількома способами можна розселити 8 студентів в трьох кімнатах: одномісній, тримісній, чотиримісній. Відповідь: $C_8(1, 3, 4) = \dfrac{8!}{1!3!4!}$.

Теорема 1.25 (поліноміальна формула)**.** *Для довільного натурального n має місце рівність*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_i \geqslant 0, k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}.$$

Доведення. Перемножимо $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$ послідовно n раз. Тоді одержимо m^n доданків вигляду $d_1 d_2 \cdots d_n$, де кожен множник дорівнює або x_1, або x_2, ... , або x_m. Позначимо для зручності через $B(k_1, \ldots, k_m)$ множину тих доданків, де x_1 зустрічається k_1 раз, x_2 — k_2 рази,..., x_m — k_m разів. Число таких доданків дорівнює $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ — це число розбиттів множини $\{1, \ldots, n\}$ в об'єднання m підмножин потужностей $k_1, \ldots, k_m$ відповідно і таких, що $k_1 + \ldots + k_m = n$. Звідси випливає поліноміальна формула. □

1.7 Сюр'єкції та числа Стірлінга

Нехай N, M — дві множини, $|N| = n, |M| = m$ і $n \geqslant m$. Знайдемо число сюр'єктивних відображень $f : N \longrightarrow M$. Позначимо $N = \{x_1, \ldots, x_n\}, M = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

Теорема 1.26. *Число сюр'єктивних відображень $f : N \longrightarrow M$ дорівнює: $D(n, m) = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n$.*

Доведення. Знайдемо число несюр'єктивних відображень $f : N \longrightarrow M$. Нехай A_i — множина тих відображень $f : N \longrightarrow M$ для яких $y_i \notin f(N), i = 1, \ldots, m$. Тоді число несюр'єктивних відображень дорівнює $|\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i|$. Зауважимо далі, що виконується рівність $|A_i| = (m-1)^n$, бо A_i — множина всіх відображень $f : N \longrightarrow M \setminus \{y_i\}$. Далі, очевидно,

$$|A_i \cap A_j| = (m-2)^n, \ldots, |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}| = (m-k)^n.$$

Використовуючи формулу включень-вилучень, отримаємо: $|\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i| = C_m^1(m-1)^n - C_m^2(m-2)^n + \cdots + (-1)^{m-1}C_m^m(m-k)^n$ Але тоді число сюр'єктивних відображень дорівнює

$$m^n - |\bigcup_{i=1}^{m} A_i| = m^n - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_m^k(m-k)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k-1}C_m^k(m-k)^n.$$

□

Приклад 1.27. n різних куль потрібно розмістити по m, $m \leqslant n$ різних ящиках так, щоб жоден ящик не залишився пустим. Скількома способами це можна зробити?

Відповідь: $D(n,m) = \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k(m-k)^n$.

Числа Стірлінга 2-го роду

Означення 1.7. *Нехай $N = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множина, яка містить n елементів і нехай $m \leqslant n$. Кількість розбиттів множини N на m непорожніх підмножин позначається $S(n,m)$ і називається числом Стірлінга 2-го роду.*

Приклад 1.28. $N = \{x_1, x_2, x_3\}$, $m = 2$. Тоді $S(3,2) = 3$.

Теорема 1.29.

$$S(n,m) = \frac{1}{m!}D(n,m) =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k(m-k)^n.$$

Доведення. Нехай ми маємо довільне розбиття множини $N = \{x_1, \ldots, x_n\}$ на m непорожніх підмножин $B_1, \ldots, B_m$. Тоді цьому розбиттю відповідають $m!$ сюр'єктивних відображень із N в множину $M = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Справді, визначимо f так, щоб

$$f(B_1) = y_1, \ldots, f(B_m) = y_m.$$

Візьмемо довільну перестановку σ на M і розглянемо сюр'єктивне відображення $\sigma(f) : N \longrightarrow M$ за правилом $\sigma(f)(B_i) = y_{\sigma(i)}$. Тому $D(n, m) = m! \cdot S(n, m)$ і таким чином

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} D(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n.$$

□

Можна довести, що має місце рекурентне співвідношення $S(n+1, m) = S(n, m-1) + mS(n, m)$.

Числа Стірлінга 2-го роду мають багато цікавих властивостей. Одна з них така. Розглянемо простір $\mathbb{R}_n[x]$ всіх многочленів степеня $\leqslant n$. Легко бачити, що $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n + 1$ і многочлени

$$(x)_0 = 1, (x)_1 = \binom{x}{1} \cdot 1!, (x)_2 = \binom{x}{2} \cdot 2!, \ldots, (x)_n = \binom{x}{n} \cdot n!$$

утворюють базис в $\mathbb{R}_n[x]$. Тому многочлен x^n може бути записаний через базис $(x)_0, (x)_1, \ldots, (x)_n$. Має місце

Теорема 1.30. $x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n, k)(x)_k$.

Тому $S(m, k)$ — коефіцієнти в розкладі одного базисного елемента x^n із базису $\{1, x, \ldots, x^n\}$ через базис $(x)_0, (x)_1, \ldots, (x)_n$.

Приклад 1.31. Покажемо, що для чисел Стірлінга 2-го роду $S(n, k)$ виконуються рівності:

(а) $S(n, n) = 1$; (б) $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$; (в) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

(а) Справді, $S(n, n)$ — число розбиттів множини X на одноелементні підмножини, а таке розбиття тільки одне.

(б) Кожне розбиття множини X на $n-1$ непусту підмножину має вигляд: $n-2$ одноелементні підмножини і 1 двоелементна підмножина. Двоелементну підмножину можна вибрати $\binom{n}{2}$ способами, тоді одноелементні підмножини визначаються однозначно. Тому $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$. (в) Щоб отримати розбиття множини X на 2 підмножини потрібно вибрати яку небудь підмножину A_1 і покласти $A_2 = X \setminus A_1$. Підмножину A_1 можна вибрати 2^n способами (бо кількість підмножин множини X дорівнює 2^n), тоді A_2 визначається однозначно. Але розбиття $(A_1, X \setminus A_1)$ і $(X \setminus A_1, X \setminus (X \setminus A_1))$ одне і те ж. Тому розбиттів буде в 2 рази менше, тобто 2^{n-1}. Крім того, потрібно відкинути пару $(\varnothing, X \setminus \varnothing)$, тоді буде $2^{n-1} - 1$ розбиттів, тобто $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Числа Стірлінга 1-го роду

Візьмемо в $\mathbb{R}_n[x]$ базис $\{1, x, ..., x^n\}$ і запишемо многочлен $(x)_n$ через цей базис $(x)_n = \sum\limits_{k=0}^{n} s(n, k)x^k$ з деякими коефіцієнтами $s(n, k)$.

Означення 1.8. *Числа $s(n, k)$ називаються числами Стірлінга 1-го роду (вони можуть бути від'ємними).*

Теорема 1.32. *Має місце рівність:*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k)S(k, m) = \delta_n^m = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

Доведіть теореми 1.30 і 1.32 Який алгебраїчний зміст теореми 1.32?

Задачі. 1) Нехай $f : M \to M'$ — відображення множини M в множину M'. Довести, що для довільних підмножин $N_i \subseteq M$, $i \in I$ виконується рівність

$$f(\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I} f(N_i).$$

2) Скільки існує шестицифрових чисел, які не містять нуля в десятковому записі і діляться на 9?

3) Нехай натуральне число n розкладається в добуток простих множників $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, де p_i — попарно різні прості числа і $\alpha_i \geqslant 1$. Довести, що число всіх дільників числа n дорівнює $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

4) Знайти кількість тих відображень φ множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себе, які мають хоча б одну нерухому точку. Вказівка: Відображення φ не має нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $\varphi(i) \neq i$ для всіх $i = 1, 2 \ldots n$.

5) Для фіксованого n вказати найбільше із чисел $\binom{n}{k} = C_n^k$.

6) Довести, що при $n > 1$ виконується рівність

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} n\binom{n}{n} = 0.$$

7) Вказати натуральні n, для яких всі біноміальні коефіцієнти $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ є непарними числами.

8) Скількома способами 4 чорні кулі, 5 білих куль і 7 синіх куль можна розкласти у 6 різних пакетів?

9) Скількома способами можна розподілити n однакових подарунків для m дітей?

Розділ 2

Перестановки, підстановки та підмножини

2.1 Перестановки та їх парність

Зафіксуємо натуральне число n. Будемо розглядати множину $M = \{1, \ldots, n\}$ перших n натуральних чисел.

Нагадаємо, що перестановка елементів множини M — це впорядкований набір

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

у якому всі елементи $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ належать множині M і є попарно різними, тобто в цьому наборі зустрічається кожен елемент з M, причому рівно один раз.

Раніше було доведено

Твердження 2.1. *Кількість всіх перестановок елементів множини* $\{1, \ldots, n\}$ *дорівнює* $n!$.

Означення 2.1. *Для перестановки*

$$\tau = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

пару елементів (α_i, α_j) *назвемо інверсією, якщо* $\alpha_i > \alpha_j$*, але* $i < j$.

Кількість всіх інверсій перестановки τ будемо позначати $\mathrm{inv}(\tau)$.

Означення 2.2. *Перестановку τ будемо називати парною чи непарною в залежності від того, парним чи непарним є число* $\mathrm{inv}(\tau)$.

Наприклад, перестановка

$$(4, 2, 3, 1, 5)$$

має всього 5 інверсій: $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Тому вона є непарною.

Лема 2.1. *Перестановки елементів множини M, які відрізняються рівно двома позиціями, мають різну парність.*

Доведення. Розглянемо перестановки

$$\tau_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$$

і

$$\tau_2 = (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n),$$

які відрізняються лише i-тою та j-тою позиціями для деяких i, j, $1 \leq i < j \leq n$.

Позначимо $r = j - i - 1$, тобто між α_i та α_j в цих перестановках розташовано рівно r чисел. Нехай у перестановці τ_1 число α_i утворює з цими r числами k інверсій, елемент α_j — l інверсій, а m — кількість інверсій, які утворює пара (α_i, α_j). Тобто $m = 1$, якщо $\alpha_i > \alpha_j$ і $m = 0$, якщо $\alpha_i < \alpha_j$.

Тоді у перестановці τ_2 число α_i утворює з цими r числами $r - k$ інверсій, елемент α_j — $r - l$ інверсій, а $1 - m$ — це кількість інверсій, які утворює пара (α_j, α_i). Всі інші пари елементів (α, β) будуть інверсіями одночасно для обох перестановок τ_1, τ_2. Нехай таких інверсій s.

Маємо $\mathrm{inv}(\tau_1) - \mathrm{inv}(\tau_2) = k + l + m + s - (r - k + r - l + 1 - m + s) = 2k + 2l + 2m - 2r - 1$ — число непарне. Отже, числа інверсій у перестановках τ_1 і τ_2 мають різну парність, тобто самі ці перестановки мають різну парність. □

Знайдемо тепер кількість парних і непарних перестановок елементів множини M.

Твердження 2.2. *Кількість парних перестановок елементів множини M дорівнює кількості непарних і дорівнює $\frac{n!}{2}$.*

Доведення. Поставимо у відповідність довільній перестановці
$$\tau = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$
перестановку
$$\bar{\tau} = (\alpha_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$
За лемою перестановки τ і $\bar{\tau}$ мають різну парність. При цьому $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2$ тоді й лише тоді, коли $\tau_1 = \tau_2$, і $\bar{\bar{\tau}} = \tau$.

Отже, відповідність $\tau \mapsto \bar{\tau}$ є бієкцією між множинами всіх парних та непарних перестановок елементів M. За правилом відповідності кількість парних перестановок елементів множини M дорівнює кількості непарних. Оскільки всіх перестановок $n!$, а кожна перестановка або парна, або непарна, то кількість перестановок кожного типу рівна $\frac{n!}{2}$. □

2.2 Підстановки, розклад в добуток циклів

Нехай Ω — деяка множина.

Означення 2.3. *Підстановкою на множині Ω будемо називати довільну бієкцію з цієї множини в себе.*

Позначимо множину всіх підстановок на множині Ω символом $S(\Omega)$. Якщо множина Ω є множиною $M = \{1, \ldots, n\}$, то замість позначення $S(\Omega)$ будемо використовувати позначення S_n. Далі розглянемо найпростіші властивості множини S_n.

Кожну підстановку $\pi \in S_n$ можна задати за допомогою таблиці вигляду

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1 = \pi(1), \alpha_2 = \pi(2), \dots, \alpha_n = \pi(n)$.

При цьому різні таблиці задаватимуть різні підстановки на множині M.

Нижній рядок такої таблиці, тобто набір $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, є перестановкою елементів множини M. Звідси одержуємо, що множина S_n всіх підстановок множини M знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною всіх перестановок елементів множини M.

Означення 2.4. *Підстановку*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

будемо називати парною чи непарною в залежності від того, парною чи непарною є відповідна їй перестановка $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Множину всіх парних підстановок множини M позначимо символом A_n.

Враховуючи властивості перестановок, відразу маємо

Твердження 2.3.
1. *Кількість всіх підстановок множини M дорівнює $n!$.*
2. *Кількість всіх парних підстановок множини M дорівнює кількості всіх непарних і дорівнює $\frac{n!}{2}$.*

Визначимо на множині S_n дію множення. А саме, для довільних двох підстановок $\pi, \sigma \in S_n$ їх добутком $\pi \cdot \sigma$ назвемо суперпозицію $\sigma(\pi)$. Таким чином, у добутку $\pi \cdot \sigma$ спочатку діє відображення π, а потім σ.

Оскільки суперпозиція бієкцій знову є бієкцією, то добуток $\pi \cdot \sigma$ є підстановкою з S_n. Має місце

Теорема 2.2. *1. Дія множення підстановок є асоціативною, тобто для довільних $\pi, \sigma, \tau \in S_n$ має місце рівність*

$$(\pi \cdot \sigma) \cdot \tau = \pi \cdot (\sigma \cdot \tau).$$

2. Існує підстановка $e \in S_n$ така, що для довільної підстановки π виконується рівність

$$\pi \cdot e = e \cdot \pi = \pi.$$

3. Для кожної підстановки π існує підстановка σ така, що

$$\pi \cdot \sigma = \sigma \cdot \pi = e.$$

Визначимо тепер підстановки найпростішого вигляду і покажемо, що з них за допомогою множення можна отримати довільну підстановку.

Означення 2.5. *Назвемо підстановку $\pi \in S_n$ циклом довжини k, якщо існують k елементів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in M$ такі, що*

$$\pi(\alpha_1) = \alpha_2, \pi(\alpha_2) = \alpha_3, \ldots, \pi(\alpha_{k-1}) = \alpha_k, \pi(\alpha_k) = \alpha_1,$$

і $\pi(\alpha) = \alpha$ для всіх інших $\alpha \in M$.

В цьому випадку підстановку π позначають $(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$. При цьому існує k способів позначити підстановку π, кожен з яких визначається першим елементом циклу, який буде записано в дужках.

З означення зрозуміло, що S_n містить цикли довжин від 1 до n, причому єдиним циклом довжини 1 є тотожна підстановка.

Означення 2.6. *Цикли $\pi_1, \ldots, \pi_m \in S_n$ назвемо незалежними, якщо кожен елемент множини M є нерухомим під дією всіх, окрім, можливо, одного із цих циклів.*

Теорема 2.3. *Кожну підстановку з S_n можна розкласти в добуток незалежних циклів.*

Доведення. Нехай $\pi \in S_n$. Виберемо довільний елемент $\alpha_1 \in M$. Якщо $\pi(\alpha_1) = \alpha_1$, то покладемо $\pi_1 = (\alpha_1)$. Інакше нехай $\alpha_2 = \pi(\alpha_1)$.

Якщо $\pi(\alpha_2) = \alpha_1$, то покладемо $\pi_1 = (\alpha_1\alpha_2)$. В іншому випадку нехай $\alpha_3 = \pi(\alpha_2)$.

Продовжуючи далі, виберемо такі $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in M$, що

$$\pi(\alpha_1) = \alpha_2, \pi(\alpha_2) = \alpha_3, \ldots, \pi(\alpha_{k-1}) = \alpha_k, \pi(\alpha_k) = \alpha_1.$$

Зауважимо, що таке k обов'язково знайдеться, бо множина M скінченна, а π є бієкцією на цій множині.

Покладемо $\pi_1 = (\alpha_1 \ldots \alpha_k)$. Якщо серед вибраних елементів є всі елементи множини M, то $\pi = \pi_1$.

Якщо ж ні, то виберемо якийсь інший елемент β_1. Аналогічно до побудови π_1 побудуємо цикл $\pi_2 = (\beta_1 \ldots \beta_l)$. При цьому, знову внаслідок бієктивності π, цикли π_1 і π_2 є незалежними. Якщо серед вибраних елементів є всі елементи множини M, то $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$.

Якщо ж ні, то продовжуючи так далі, внаслідок скінченності M, виберемо цикли $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ такі, що кожен елемент з M буде належати рівно одному з цих циклів (тобто вони є незалежними) і при цьому має місце рівність

$$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_m.$$

□

Означення 2.7. *Цикл довжини 2 називається транспозицією.*

Транспозиція (ij) міняє місцями елементи i та j, а всі інші залишає нерухомими. Має місце

Теорема 2.4. 1. *Кожну підстановку можна розкласти в добуток транспозицій.*

2. *Для довільних підстановки $\pi \in S_n$ і транспозиції $\sigma \in S_n$ підстановки π та $\sigma \cdot \pi$, а також π та $\pi \cdot \sigma$ мають різну парність.*

3. *Підстановка є парною тоді й лише тоді, коли у кожному її розкладі в добуток транспозицій кількість множників парна.*

4. *Добуток двох підстановок однакової парності є парною підстановкою, а різної парності — непарною.*

2.3 Алгоритми генерування перестановок

Для потреб повного перебору, сортування чи нумерації перестановок (або підстановок) на скінченній множині важливою є така

Задача. *Для заданого натурального n виписати всі перестановки на множині $M = \{1, \ldots, n\}$.*

- Як розв'язок цієї задачі буде розглядати ефективний алгоритм, який для вхідного аргументу n генерує лінійно впорядковану множину всіх перестановок на множині $\{1, \ldots, n\}$.

- Ефективність алгоритму повністю залежить від елементарного кроку, який полягає в утворенні наступної за вже виписаною перестановкою.

- В якості такого елементарного кроку будемо розглядати перестановку сусідніх елементів.

Для зручності коротко будемо записувати перестановку

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

на множині $\{1, \ldots, n\}$ у вигляді

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n.$$

Зауважимо, що коли в перестановці $a_1 \ldots a_n$ на множині $\{1, \ldots, n\}$ вилучити число n, то отримаємо перестановку на множині $\{1, \ldots, n-1\}$. Наприклад,

$$15423 \mapsto 1423.$$

При цьому кожну перестановку на множині $\{1, \ldots, n-1\}$ можна таким способом отримати рівно з n перестановок на множині $\{1, \ldots, n\}$. Як приклад, маємо

$$51423 \mapsto 1423,$$

$$15423 \mapsto 1423,$$
$$14523 \mapsto 1423,$$
$$14253 \mapsto 1423,$$
$$14235 \mapsto 1423.$$

На основі цих спостережень розглянемо рекурсивний алгоритм Штейнгауза-Джонсона-Троттера генерування перестановок.

Вхід: n — натуральне число.

1. Якщо $n = 1$, то виписуємо єдину перестановку: 1.

2. Якщо $n > 1$, то

   а) викликаємо алгоритм генерування усіх перестановок для $n - 1$;

   б) виписуємо кожну з них послідовно n разів;

   в) вставляємо в кожну виписану перестановку число n всіма можливими способами, спочатку справа наліво, потім зліва направо і т.д.

Тоді індукцією за n доводяться такі твердження:

- рекурсивний алгоритм Штейнгауза-Джонсона-Троттера є коректним, тобто в результаті його роботи отримуємо список із усіх $n!$ перестановок на множині $\{1, \ldots, n\}$;
- першою в списку буде перестановка $123 \ldots n$, а останньою $213 \ldots n$;
- кожні дві сусідні перестановки (а також перша й остання) отримуються одна з одної за допомогою перестановки сусідніх елементів.

Наведіть повні доведення цих тверджень.

Приклад 2.5. Розглянемо результат роботи рекурсивного алгоритму Штейнгауза-Джонсона-Троттера для значень $n = 1, 2, 3, 4$. Нехай $n = 1$. В результаті роботи алгоритму отримуємо

$$1.$$

Нехай $n = 2$. Отримуємо

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & \color{red}{2} \\ \color{red}{2} & 1. \end{array}$$

При $n = 3$ будемо мати

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \color{red}{3} \\ 1 & \color{red}{3} & 2 \\ \color{red}{3} & 1 & 2 \\ \color{red}{3} & 2 & 1 \\ 2 & \color{red}{3} & 1 \\ 2 & 1 & \color{red}{3}. \end{array}$$

Нарешті при $n = 4$ алгоритм видасть такий результат

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & & 1 & 2 & 3 & 4 & & 3 & 2 & 1 & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 3 & & 1 & 2 & 4 & 3 & & 3 & 2 & 1 & & 3 & 4 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 3 & & 1 & 4 & 2 & 3 & & 3 & 2 & 1 & & 3 & 2 & 4 & 1 \\
1 & 2 & 3 & & 4 & 1 & 2 & 3 & & 3 & 2 & 1 & & 3 & 2 & 1 & 4 \\
1 & 3 & 2 & & 4 & 1 & 3 & 2 & & 2 & 3 & 1 & & 2 & 3 & 1 & 4 \\
1 & 3 & 2 & & 1 & 4 & 3 & 2 & & 2 & 3 & 1 & & 2 & 3 & 4 & 1 \\
1 & 3 & 2 & & 1 & 3 & 4 & 2 & & 2 & 3 & 1 & & 2 & 4 & 3 & 1 \\
1 & 3 & 2 & & 1 & 3 & 2 & 4 & & 2 & 3 & 1 & & 4 & 2 & 3 & 1 \\
3 & 1 & 2 & & 3 & 1 & 2 & 4 & & 2 & 1 & 3 & & 4 & 2 & 1 & 3 \\
3 & 1 & 2 & & 3 & 1 & 4 & 2 & & 2 & 1 & 3 & & 2 & 4 & 1 & 3 \\
3 & 1 & 2 & & 3 & 4 & 1 & 2 & & 2 & 1 & 3 & & 2 & 1 & 4 & 3 \\
3 & 1 & 2 & & 4 & 3 & 1 & 2 & & 2 & 1 & 3 & & 2 & 1 & 3 & 4.
\end{array}
$$

Очевидним недоліком наведеного алгоритму є потреба рекурсивних викликів під час його роботи. Опишемо нерекурсивний варіант алгоритму Штейнгауза-Джонсона-Троттера. Для цього введемо ряд допоміжних понять, зокрема поняття орієнтованої перестановки.

- Для кожного числа $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виберемо його лівий чи правий напрямок, і будемо використовувати відповідні позначення: $\overleftarrow{k}$, $\overrightarrow{k}$.
- Перестановку назвемо орієнтованою, якщо кожне число в ній має напрямок.
- Число k в орієнтованій перестановці назвемо рухомим, якщо сусіднє з ним число у напрямку числа k є меншим за k.
- Число 1 ніколи не є рухомим, а число n не буде рухомим, лише коли воно перше і має лівий напрямок, або останнє і має правий напрямок.

Наприклад, в орієнтованій перестановці

$$\overleftarrow{5}\ \ \overrightarrow{4}\ \ \overleftarrow{3}\ \ \overleftarrow{6}\ \ \overrightarrow{1}\ \ \overleftarrow{2}$$

рухомими є числа 4, 6, 2, і тільки вони.

Нерекурсивний алгоритм Штейнгауза-Джонсона-Троттера генерування перестановок має такий вигляд. Зауважимо, що в процесі його роботи отримуємо орієнтовані перестановки.

Вхід: n — натуральне число.

1. Виписуємо орієнтовану перестановку

$$\overleftarrow{1}\ \ \overleftarrow{2}\ \ \overleftarrow{3}\ \ \ldots\ \ \overleftarrow{n}$$

2. Поки в останній виписаній перестановці є рухомі числа, щоб отримати наступну перестановку, виконуємо такі дії:

   а) знаходимо в ній найбільше рухоме число m;

   б) міняємо число m місцями з сусіднім числом, відповідно до орієнтації m;

   в) міняємо орієнтацію у всіх чисел p таких, що $p > m$;

   г) виписуємо отриману орієнтовану перестановку.

В якості приклада при $n = 4$ отримаємо таку послідовність перестановок

$$\begin{array}{cccccccccc}
\overleftarrow{1} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{3} & \overleftarrow{4} & \quad & \quad & \overrightarrow{4} & \overrightarrow{3} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{4} & \overleftarrow{3} & & & \overrightarrow{3} & \overrightarrow{4} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1} & \overleftarrow{4} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{3} & & & \overrightarrow{3} & \overleftarrow{2} & \overrightarrow{4} & \overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{4} & \overleftarrow{1} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{3} & & & \overrightarrow{3} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{1} & \overrightarrow{4} \\
\overrightarrow{4} & \overleftarrow{1} & \overleftarrow{3} & \overleftarrow{2} & & & \overleftarrow{2} & \overrightarrow{3} & \overleftarrow{1} & \overleftarrow{4} \\
\overleftarrow{1} & \overrightarrow{4} & \overleftarrow{3} & \overleftarrow{2} & & & \overleftarrow{2} & \overrightarrow{3} & \overleftarrow{4} & \overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1} & \overleftarrow{3} & \overrightarrow{4} & \overleftarrow{2} & & & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{4} & \overrightarrow{3} & \overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1} & \overleftarrow{3} & \overleftarrow{2} & \overrightarrow{4} & & & \overleftarrow{4} & \overleftarrow{2} & \overrightarrow{3} & \overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{3} & \overleftarrow{1} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{4} & & & \overrightarrow{4} & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{1} & \overrightarrow{3} \\
\overleftarrow{3} & \overleftarrow{1} & \overleftarrow{4} & \overleftarrow{2} & & & \overleftarrow{2} & \overrightarrow{4} & \overleftarrow{1} & \overrightarrow{3} \\
\overleftarrow{3} & \overleftarrow{4} & \overleftarrow{1} & \overleftarrow{2} & & & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{1} & \overrightarrow{4} & \overrightarrow{3} \\
\overleftarrow{4} & \overleftarrow{3} & \overleftarrow{1} & \overleftarrow{2} & & & \overleftarrow{2} & \overleftarrow{1} & \overrightarrow{3} & \overrightarrow{4}\,.
\end{array}$$

Поясніть кожен крок роботи алгоритму, включаючи останній, зокрема переконайтеся в коректності зупинки його роботи.

В загальному випадку має місце

Теорема 2.6. *В результаті роботи як рекурсивного, так і нерекурсивного алгоритмів Штейнгауза-Джонсона-Троттера отримуємо один і той же список усіх перестановок на множині* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення. Індукція за n.

База індукції. Для $n = 1$ твердження правильне.

Індуктивний крок. Перші n перестановок, отриманих за допомогою нерекурсивного алгоритму, будуть такими ж, як і за допомогою рекурсивного, оскільки на кожному кроці відбувається перестановка найбільшого мобільного числа n з сусіднім зліва від нього числом. На наступному кроці найбільше мобільне число $n - 1$ переставляється з сусіднім зліва числом, а орієнтація n змінюється. Далі знову n послідовно переставляється з сусідніми справа числами і т.д., що й призводить до такого самого результату, як при роботі рекурсивного алгоритму. Для завершення доведення залишається застосувати припущення індукції. □

В якості застосування наведених алгоритмів опишіть алгоритм, який для кожної перестановки на множині $\{1, 2, \dots, n\}$ знаходить її номер в списку перестановок, утвореному за допомогою алгоритму Штейнгауза-Джонсона-Троттера.

Також опишіть алгоритм, який для кожного натурального числа k, $1 \le k \le n!$ знаходить k-ту перестановку на множині $\{1, 2, \dots, n\}$ в списку перестановок, утвореному за допомогою алгоритму Штейнгауза-Джонсона-Троттера.

2.4 Генерування перестановок за допомогою інверсій

Розглянемо перестановку

$$\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \dots \;\; \alpha_n$$

на множині $\{1, 2, \dots, n\}$. Нехай a_i — це кількість інверсій вигляду (α, i), $1 \le i \le n$ у цій перестановці.

Означення 2.8. *Послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n$ називається послідовністю інверсій перестановки*

$$\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \dots \;\; \alpha_n.$$

Наприклад, для перестановки $5 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 6 \;\; 3$ послідовність інверсій має вигляд 2, 2, 3, 1, 0, 0.

Твердження 2.4. *Нехай послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n$ є послідовністю інверсій деякої перестановки. Тоді мають місце нерівності*

$$0 \le a_1 \le n-1, 0 \le a_2 \le n-2, \dots, 0 \le a_{n-1} \le 1, a_n = 0.$$

Доведення. Справді, для кожного i, $1 \le i \le n$, у множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ є рівно $n - i$ чисел, більших за i. Тому інверсій вигляду (α, i) може бути не більше за $n - i$. □

Зауважимо, що з правила множення відразу випливає, що різних послідовностей інверсій може бути не більше $n!$. Насправді їх рівно $n!$, тобто відповідність, яка кожній перестановці ставить у відповідність її послідовність інверсій, є взаємно однозначною.

Теорема 2.7. *Нехай цілочисельна послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n$ задовольняє нерівності*

$$0 \le a_1 \le n - 1, 0 \le a_2 \le n - 2, \ldots, 0 \le a_{n-1} \le 1, a_n = 0.$$

Тоді існує єдина перестановка на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$, послідовністю інверсій якої вона є.

Ця теорема дозволяє розглядати послідовність інверсій, як ще один спосіб задати перестановку (чи підстановку).

Для доведення теореми розглянемо два алгоритми, кожен з яких дозволяє однозначно побудувати перестановку, послідовністю інверсій якої є послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1. Записуємо число n.

2. Для кожного i від $n - 1$ до 1: до вже записаних $n - i$ чисел дописуємо число i так, щоб перед ним було рівно a_i вже записаних чисел.

Наприклад, для послідовності інверсій 5, 3, 4, 0, 2, 1, 1, 0 отримуємо

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 8 \\
 & & & & & & 8 & 7 \\
 & & & & & 8 & 6 & 7 \\
 & & & & 8 & 6 & 5 & 7 \\
 & & & 4 & 8 & 6 & 5 & 7 \\
 & & 4 & 8 & 6 & 5 & 3 & 7 \\
 & 4 & 8 & 6 & 2 & 5 & 3 & 7 \\
4 & 8 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 7.
\end{array}$$

Наведений алгоритм є коректним, тобто в результаті його роботи отримуємо перестановку на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$. Перетворення, яке за перестановкою будує її послідовність інверсій, є оберненим до перетворення, яке за послідовністю інверсій за допомогою цього алгоритму будує перестановку. Доведіть ці твердження.

Недоліком роботи цього алгоритму є те, що кінцева позиція кожного числа з множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ визначається лише після завершення роботи алгоритму.

1. Створюємо порожній одновимірний масив довжини n.

2. Для кожного i від 1 до n: записуємо число i в таку позицію масиву, щоб зліва від неї залишалось рівно a_i незаповнених позицій.

Наприклад, для послідовності інверсій 5, 3, 4, 0, 2, 1, 1, 0 отримуємо

$$\begin{array}{cccccccc}
\square & \square & \square & \square & \square & 1 & \square & \square \\
\square & \square & \square & 2 & \square & 1 & \square & \square \\
\square & \square & \square & 2 & \square & 1 & 3 & \square \\
4 & \square & \square & 2 & \square & 1 & 3 & \square \\
4 & \square & \square & 2 & 5 & 1 & 3 & \square \\
4 & \square & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & \square \\
4 & \square & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 7 \\
4 & 8 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 7.
\end{array}$$

Покажіть, що

- алгоритм є коректним, тобто в результаті його роботи отримуємо перестановку на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$;
- перетворення, яке за перестановкою будує її послідовність інверсій, є оберненим до перетворення, яке за послідовністю інверсій за допомогою алгоритму будує перестановку;
- результати роботи обох алгоритмів побудови перестановки за послідовністю інверсій збігаються.

Зауважимо, що під час роботи другого алгоритму кінцева позиція кожного числа з множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ визначається відразу, як тільки це число обробляться алгоритмом.

Нехай задано перестановку

$$\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \ldots \ \ \alpha_n$$

на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$, послідовність інверсій якої має вигляд $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді задану перестановку можна перетворити в

$$1 \ \ 2 \ \ \ldots \ \ n \ ,$$

використовуючи такий алгоритм.

1. Для кожного i від 1 до n: число i послідовно міняємо місцями з a_i сусідніми зліва числами.

Доведіть коректність цього алгоритму.

Приклад 2.8. Розглянемо перестановку

$$4 \ \ 8 \ \ 6 \ \ 2 \ \ 5 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 7$$

на множині $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Її послідовність інверсій має вигляд 5, 3, 4, 0, 2, 1, 1, 0. Тоді робота алгоритму буде такою:

- переставляємо 1 і отримуємо $1\ 4\ 8\ 6\ 2\ 5\ 3\ 7$;
- переставляємо 2 і отримуємо $1\ 2\ 4\ 8\ 6\ 5\ 3\ 7$;
- переставляємо 3 і маємо $1\ 2\ 3\ 4\ 8\ 6\ 5\ 7$;
- переставляємо 4 і отримуємо $1\ 2\ 3\ 4\ 8\ 6\ 5\ 7$;
- переставляємо 5 і маємо $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 8\ 6\ 7$;
- переставляємо 6: $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7$;
- переставляємо 7: $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$.

Отримуємо перестановку

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8.$$

2.5 Алгоритми генерування підмножин

Окрім перебору всіх можливих перестановок елементів деякої скінченної множини часто також виникає потреба перебрати усі її підмножини. Виникає така

Задача *Нехай S — це непорожня скінченна множина. Потрібно описати алгоритм, котрий генерує усі підмножини множини S.*

- Припустимо, що $|S| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді множина S містить 2^n підмножин.
- Розв'язком задачі є ефективний алгоритм, який генерує лінійно впорядковану множину всіх 2^n підмножин множини S.
- Ефективність алгоритму повністю залежить від елементарного кроку, який полягає в утворенні наступної за вже виписаною підмножиною.

Визначимо правило кодування підмножин множини S за допомогою бінарних рядків. Для цього зафіксуємо нумерацію елементів множини S за допомогою цілих чисел від $n-1$ до 0, тобто

$$S = \{x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0\}.$$

Кожній підмножині $A \subset S$ поставимо у відповідність бінарний рядок $w(A)$ довжини n

$$a_{n-1} \ldots a_1 a_0$$

за таким правилом:

$$a_i = \begin{cases} 1 & x_i \in A \\ 0 & x_i \notin A \end{cases}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Легко бачити, що має місце

Твердження 2.5. *Відповідність $A \mapsto w(A)$ є взаємно однозначною.*

Отже, задачу генерації всіх підмножин n-елементної множини можна розглядати, як задачу генерації всіх бінарних рядків довжини n.

Приклад 2.9. Нехай $n = 3$, тобто $S = \{x_2, x_1, x_0\}$. Тоді маємо таку відповідність між підмножинами S та бінарними рядками довжини 3:

$$\begin{array}{rcl}
\varnothing & \mapsto & 000 \\
\{x_0\} & \mapsto & 001 \\
\{x_1\} & \mapsto & 010 \\
\{x_1, x_0\} & \mapsto & 011 \\
\{x_2\} & \mapsto & 100 \\
\{x_2, x_0\} & \mapsto & 101 \\
\{x_2, x_1\} & \mapsto & 110 \\
\{x_2, x_1, x_0\} & \mapsto & 111
\end{array}$$

Тепер перейдемо до наступного етапу задання підмножин. А саме, кожен бінарний рядок довжини n будемо розглядати, як двійковий запис деякого цілого числа. При цьому бінарному рядку $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ відповідає число

$$a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0.$$

Цим самим доводиться

Твердження 2.6. *Множини бінарних рядків довжини n та цілих чисел від 0 до $2^n - 1$ знаходяться у взаємно однозначній відповідності.*

Корисно пригадати алгоритм знаходження бінарного рядка, який відповідає заданому цілому числу. А саме, в залежності від того, парне чи непарне задане число k, останнім символом такого рядка буде 0 чи 1 відповідно. Саме число після цього потрібно замінити остачею від ділення на 2 і за тим самим правилом визначати наступний бінарний символ. Продовжуючи далі, в результаті отримаємо бінарний розклад числа k.

Як наслідок, отримуємо кодування підмножин заданої n-елементної множини за допомогою цілих чисел від 0 до $2^n - 1$, тобто кожній підмножині відповідає єдине ціле число з вказаного проміжку.

Приклад 2.10. Як приклад, нехай $n = 7$,

$$S = \{x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}.$$

З'ясуємо, якій підмножині множини S відповідає число 29.

Зауважимо, що $29 < 127 = 2^7 - 1$, і тому цьому числу справді відповідає єдина підмножина множини S. Щоб її знайти, спочатку знаходимо бінарний розклад числа 29:

$$29 = 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Отже, числу 29 відповідає бінарний рядок

$$a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = 0011101,$$

і, відповідно, така підмножина множини S: $A = \{x_4, x_3, x_2, x_0\}$.

На основі розглянутого кодування можемо описати такий алгоритм переліку усіх підмножин заданої n-елементної множини $S = \{x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0\}$.

1. Для кожного цілого числа k від 0 до $2^n - 1$ знаходимо його двійковий розклад $a_{n-1} \ldots a_1a_0$ і за цим розкладом виписуємо підмножину A, в яку включаємо елемент x_i в тому й лише тому випадку, коли $a_i = 1$, $0 \leq i \leq n - 1$.

Зауважимо, що елементарний крок алгоритму, тобто перехід до наступної підмножини, в цьому випадку є просто переходом до наступного за зростанням цілого числа. Отримати таке число можна, виконавши додавання одиниці до заданого цілого числа, записаного в бінарному вигляді: щоб додати одиницю, потрібно замінити крайній справа нуль на одиницю, а всі наступні за ним одиниці на нулі.

Приклад 2.11. Нехай $n = 7$, $S = \{x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$. Знайдемо підмножину B, яка буде наступною за підмножиною $A = \{x_6, x_4, x_2, x_1, x_0\}$.

Для цього спочатку знаходимо бінарний рядок, який відповідає підмножині A:

$$a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = 1010111.$$

Тепер додаємо одиницю:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & & & & & & & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

і виписуємо шукану підмножину

$$B = \{x_6, x_4, x_3\}.$$

Сформулюємо тепер алгоритм переліку усіх підмножин заданої n-елементної множини, який потребує лише роботи з бінарними рядками, тобто перераховує бінарні кодування усіх підмножин в порядку зростання їх номерів.

1. У якості початкового бінарного рядка $a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ виписуємо нульовий бінарний рядок довжини n: $\underbrace{0 \ldots 00}_{n}$.

2. Поки рядок $a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ не є одиничним:

   а) знаходимо найменший номер j такий, що $a_j = 0$;

   б) покладаємо $a_j = 1$, $a_{j-1} = \ldots = a_0 = 0$.

Опишіть алгоритм переліку всіх підмножин скінченної множини в порядку спадання їх номерів.

Зауважимо, що в описаному алгоритмі перехід до наступної множини може потребувати заміни n бінарних символів. Розглянемо далі такий спосіб кодування, в якому кожен такий перехід потребує заміни рівно одного бінарного символа.

2.6 Коди Грея

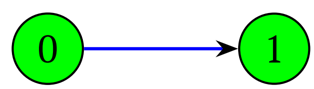
Означення 2.9. *Кодом Грея порядку n називається такий лінійний порядок на множині всіх бінарних рядків довжини n, в якому довільні два сусідні рядки відрізняються рівно однією позицією.*

Код Грея називається циклічним, якщо перший та останній бінарні рядки цього коду також відрізняються рівно однією позицією.

Зауважимо, що існування кодів Грея потрібно доводити.

Один з природних способів це зробити є рекурсивним, з використанням геометричної інтерпретації бінарних слів як координат вершин гіперкуба. Тоді координати суміжних вершини куба якраз і відрізнятимуться рівно однією позицією. Залишиться вказати такий обхід усіх вершин, при якому будуть відвідані всі вершини рівно по одному разу.

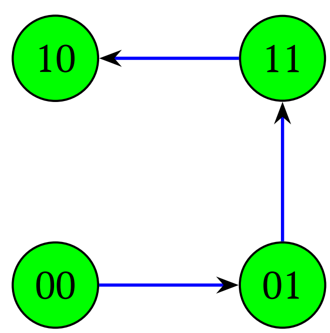
Нехай $n = 1$. Занумеруємо вершини одиничного відрізка у напрямку, вказаному стрілкою:



Отримуємо циклічний код Грея степеня 1:

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

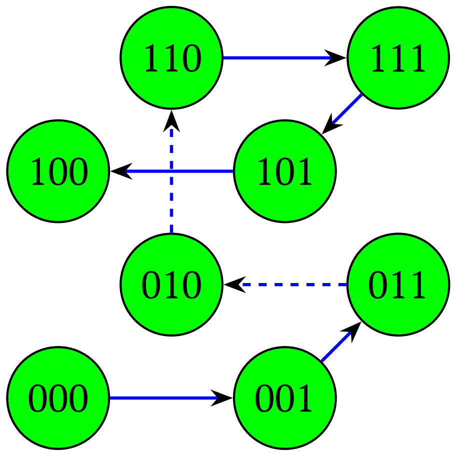
Нехай $n = 2$. Занумеруємо вершини одиничного квадрата у напрямку, вказаному стрілками:



Отримуємо циклічний код Грея степеня 2:

$$\begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 11 \\ 10 \end{matrix}$$

Нехай $n = 3$. Занумеруємо вершини одиничного куба у напрямку, вказаному стрілками:



Отримуємо циклічний код Грея степеня 3:

000
001
011
010
110
111
101
100

Описані коди Грея є прикладами загального методу побудови циклічних кодів Грея, які називаються рефлективними. В загальному випадку рефлективний код Грея n-того степеня будується за допомогою такого рекурсивного алгоритму.

1. При $n = 1$ рефлективний код Грея має вигляд 0, 1.

2. При $n > 1$:

   а) виписуємо рефлективний код Грея $(n-1)$-го степеня і до кожного бінарного слова дописуємо зліва 0;

   б) виписуємо рефлективний код Грея $(n-1)$-го степеня у зворотному порядку і до кожного бінарного слова дописуємо зліва 1.

Індукцією за n перевіряється, що таким чином отримуємо циклічний код Грея n-того степеня. Справді, для доведення досить зауважити, що бінарні слова з номерами 2^{n-1} та $2^{n-1}+1$, а також з номерами 1 та 2^n ($00\dots$ та $10\dots0$), відрізняються лише першим символом. Умова з означення коду Грея для перших та останніх 2^{n-1} бінарних слів виконується за припущенням індукції.

Нерекурсивний алгоритм побудови рефлективного коду Грея n-того степеня має такий вигляд.

1. Виписуємо бінарне слово $a_{n-1}\dots a_1a_0 = 00\dots0$.

2. Поки $a_{n-1}\dots a_1a_0 \neq 10\dots0$:

   а) обчислюємо суму $\sigma = a_{n-1}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0$ (додавання відбувається за модулем 2, тобто значення σ буде рівним 0 або 1);

   б) якщо $\sigma = 0$, то міняємо значення a_0 (0 на 1 чи 1 на 0 відповідно);

   в) якщо $\sigma = 1$, то знаходимо найменший індекс j такий, що $a_j = 1$, і міняємо значення a_{j+1} (0 на 1 чи 1 на 0 відповідно).

Зауважимо, що в останньому випадку внаслідок нерівності $a_{n-1}\dots a_1a_0 \neq 10\dots0$ маємо нерівність $j \leq n-2$ і тому символ a_{j+1} визначений коректно.

Теорема 2.12. *Вказаний нерекурсивний алгоритм генерує рефлективний код Грея n-того степеня і коректно завершує роботу.*

Доведення. Індукція за n.

При $n = 1$ спочатку генерується слово $a_0 = 0$. Тоді значення σ буде рівним 0, а наступним згенерованим словом буде 1. Це означає, що буде згенеровано рефлективний код Грея 1-го степеня, і алгоритм завершить роботу.

Нехай $n > 1$. Припустимо, що для $n-1$ твердження теореми доведено. Розглянемо роботу алгоритму для n. За припущенням індукції, перші 2^{n-1} бінарних слова, які генерує алгоритм, будуть словами коду Грея степеня $n-1$, до кожного з яких дописано зліва символ 0. Справді, в процесі роботи алгоритму, під час виконання перших 2^{n-1} кроків, початковий символ 0 залишиться незмінним. На кроках 2^{n-1} та $2^{n-1}+1$ тоді буде отримано слова $010\dots0$ (значення σ буде рівним 1, а $j = n-2$) та $110\dots0$ відповідно. Ці слова збігається зі словами рефлективного коду Грея з відповідними номерами.

Розглянемо два послідовні слова з другої половини рефлективного коду Грея n-того степеня:

$$1a_{n-2}\dots a_1a_0 \text{ та } 1b_{n-2}\dots b_1b_0.$$

В рефлективному коді Грея $(n-1)$-того степеня слово

$$a_{n-2}\dots a_1a_0 \text{ є наступним після слова } b_{n-2}\dots b_1b_0.$$

Ці слова відрізняються рівно однією позицією. Тому суми за модулем 2

$$a_{n-2}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0 \text{ та } b_{n-2}\oplus\dots\oplus b_1\oplus b_0$$

є різними. Також різними є суми

$$a_{n-2}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0 \text{ та } 1\oplus a_{n-2}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0,$$

і суми

$$b_{n-2}\oplus\dots\oplus b_1\oplus b_0 \text{ та } 1\oplus b_{n-2}\oplus\dots\oplus b_1\oplus b_0.$$

Припустимо спочатку, що $b_{n-2}\oplus\dots\oplus b_1\oplus b_0 = 0$. Тоді $a_{n-2}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0 = 1$ і $1\oplus a_{n-2}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0 = 0$. Звідси, використавши припущення індукції, отримуємо, що слово $a_{n-2}\dots a_1a_0$ отримано з $b_{n-2}\dots b_1b_0$ заміною символа b_0. Тому і слово $1b_{n-2}\dots b_1b_0$

отримується з $1a_{n-2}\dots a_1a_0$ заміною символа a_0, що й передбачено роботою алгоритму.

Нехай тепер $b_{n-2}\oplus\cdots\oplus b_1\oplus b_0 = 1$. Тоді $a_{n-2}\oplus\cdots\oplus a_1\oplus a_0 = 0$ і $1\oplus a_{n-2}\oplus\cdots\oplus a_1\oplus a_0 = 1$. Але це означає, що слова в кожній парі

$$1a_{n-2}\dots a_1a_0,\, 1b_{n-2}\dots b_1b_0$$

та

$$b_{n-2}\dots b_1b_0,\, a_{n-2}\dots a_1a_0$$

отримано одне з одного застосуванням одного й того ж правила заміни символа. За припущенням індукції це означає, що зі слова $1a_{n-2}\dots a_1a_0$ отримуємо слово $1b_{n-2}\dots b_1b_0$, застосувавши відповідний крок алгоритму. Теорему доведено. □

Приклад 2.13. Розглянемо рефлективний код Грея 8-го степеня і знайдемо бінарні слова, які йдуть в ньому за словами 10100110, 00011111, 01010100. Скористаємось нерекурсивним алгоритмом генерування рефлективного коду Грея.

Маємо $\sigma = 1\oplus0\oplus1\oplus0\oplus0\oplus1\oplus1\oplus0 = 0$, тому для першого слова наступним буде 10100111.

Оскільки $\sigma = 0\oplus0\oplus0\oplus1\oplus1\oplus1\oplus1\oplus1 = 1$ і $j = 0$, то для другого слова наступним буде 00011101.

Так само $\sigma = 0\oplus1\oplus0\oplus1\oplus0\oplus1\oplus0\oplus0 = 1$ і $j = 2$, тому для третього слова наступним буде 01011100.

Задачі. 1) Яку найбільшу кількість інверсій можуть мати підстановки на множині $\{1, 2, \dots, n\}$?

2) Скільки існує підстановок на множині $\{1, 2, \dots, n\}$, які мають рівно одну інверсію?

3) Для перестановки 3, 5, 2, 1, 6, 4 вкажіть попередню і наступну перестановки на множині $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ у списку, утвореному за допомогою алгоритму Штейнгауза-Джонсона-Троттера.

4) Знайдіть перестановку на множині $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, послідовність інверсій якої має вигляд 2, 5, 5, 0, 2, 1, 1, 0.

5) Нехай $S = \{x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$. Визначте бінарне слово довжини 8, яке ставиться у відповідність підмножині $A = \{x_6, x_3, x_0\}$.

6) Нехай $S = \{x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$. Вкажіть підмножину із S, яка має номер $k = 140$ (нумерація починається з нуля) у списку підмножин множини S, якщо використовується впорядкування підмножин, що відповідає зростанню відповідних двійкових заисів цілих чисел.

7) Наведіть приклад циклічного нерефлективного коду Грея на множині бінарних слів довжини 3.

8) Для бінарного слова 111000111 вкажіть бінарне слово, наступне за ним відносно рефлективного коду Грея на словах довжини 9.

Розділ 3

Елементи математичної логіки і теорії множин

3.1 Логічні висловлювання, булеві функції та логічні сполучники

Означення 3.1. *Логічним висловлюванням називається довільне твердження, яке може бути істинним або хибним.*

Позначимо через $\mathbb{B} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ множину булевих значень, де $\mathbb{1}$ — істина, $\mathbb{0}$ — хибність. Логічне або булеве значення висловлювання A позначимо:

$\mathrm{v}al(A) = \mathbb{1},$ якщо A — істинне;

$\mathrm{v}al(A) = \mathbb{0},$ якщо A — хибне.

Логічні висловлювання вивчаються в математичній логіці. Наведемо кілька прикладів логічних висловлювань.

1) $A =$ “$2 \cdot 2 = 5$”.

2) $B =$ “Київ — столиця України”.

3) $C =$ “Кожна неперервна функція диференційовна”.

Очевидно, $\mathrm{val}(A) = \mathbb{0},\ \mathrm{val}(B) = \mathbb{1},\ \mathrm{val}(C) = \mathbb{0}.$

Означення 3.2. *n-місним логічним сполучником називається операція Φ, яка з логічних висловлювань $A_1, \ldots, A_n$ утворює нове висловлювання $B = \Phi(A_1, \ldots, A_n)$, причому $val(B)$ повністю визначається логічними значеннями $val(A_1), \ldots, val(A_n)$. Легко бачити, що n-місний логічний сполучник Φ визначає функцію*

$$\Phi : \underbrace{\mathbb{B} \times \mathbb{B} \times \ldots \times \mathbb{B}}_{n} \longrightarrow \mathbb{B}.$$

Такі функції називаються *булевими*. Вкажемо тепер найважливіші логічні сполучники. Нехай A, B — деякі висловлювання.

(1) **Заперечення** $\rceil A$, висловлювання $\rceil A$ читається як "не A".

Відповідна булева функція є унарною, тобто функцією від одного булевого аргументу, нижче таблиця істинності цієї функції:

A	$\rceil A$
0	1
1	0

.

Приклад 3.1. Нехай A= "кожна диференційовна функція неперервна". Тоді заперечення $\rceil A$= "не кожна диференційовна функція неперервна".

(2) **Кон'юнкція** $A \wedge B$ — двомісний (бінарний) сполучник. Висловлювання $A \wedge B$ читається як "A і B".

Таблиця істинності для кон'юнкції:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

З цієї таблиці ми бачимо, що висловлювання $A \wedge B$ істинне тоді і тільки тоді, коли A істинне і B істинне.

Приклад 3.2. Нехай A="$2 \cdot 2 = 4$" і B="Париж — столиця Англії". Тоді $A \wedge B$="$2 \cdot 2 = 4$ і Париж — столиця Англії".

(3) **Диз'юнкція** $A \vee B$ — двомісний сполучник. Висловлювання $A \vee B$ читається як "A або B". Його таблиця істинності має вигляд:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Легко бачити, що диз'юнкція двох висловлювань істинна, якщо хоча б одне з висловлювань істинне.

(4) **Імплікація** $A \to B$ (або $A \Rightarrow B$). Висловлювання $A \to B$ читається так: "якщо A, то B", або "з A випливає B" або "B є логічним наслідком A". В імплікації $A \to B$ висловлювання A — це *антецедент* (умова), а B — *консеквент* (наслідок). Таблиця істинності для імплікації:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Бачимо, що імплікація хибна тоді і тільки тоді, коли із істини випливає хибність.

(5) **Еквіваленція** $A \leftrightarrow B$. Висловлювання $A \leftrightarrow B$ читається як "A тоді і тільки тоді, коли B" або "A еквівалентне B". Таблиця істинності для еквіваленції:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

(6) **Логічне додавання** (розділяюче "або") $A \oplus B$. Висловлювання $A \oplus B$ передається словами "або A, або B" (але не одночасно). Його таблиця істинності така:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Із логічних висловлювань $A_1, \ldots, A_n$, застосовуючи логічні зв'язки, можна отримувати інші логічні висловлювання. Приклади таких логічних висловлювань:

$$(A_1 \to A_2) \vee (\rceil A_3),\ ((\rceil A_2 \vee A_2)) \to A_1.$$

Порядок логічних операцій визначається дужками, але вважається стандартним такий порядок дій:

1) Першим застосовується заперечення $\rceil$.

2) Потім йдуть кон'юнкція $\wedge$ і диз'юнкція $\vee$.

3) Потім застосовується логічне додавання $\oplus$.

4) Останніми застосовують імплікацію і еквіваленцію.

Якщо задано логічні значення висловлювань $A, B, C, \ldots$, то можна знайти логічне значення логічної формули, яка містить $A, B, C, \ldots$. Наприклад, для формули $F = (A \to B) \vee (\rceil B \wedge C)$ таблиця істинності має вигляд

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	1	1	0	1	1	1

Висловлювання, які не можна записати за допомогою логічних сполучників із інших висловлювань, називаються елементарними, або атомами. Наприклад:

A= “$2 \cdot 2 = 4$” – атом;

B= “Лондон — столиця Франції” — атом.

Висловлювання “якщо невірно, що $2 \cdot 2 = 4$, то Лондон — столиця Франції”, тобто $\rceil A \to B$, очевидно, не є атомом.

Нехай $F = F(A_1, \ldots, A_n)$ — висловлювання, яке отримане із висловлювань $A_1, \ldots, A_n$ за допомогою логічних сполучників 1) – 6). Надаючи A_i значення 0 або 1 із множини $\mathbb{B} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, отримаємо значення $F \in \mathbb{B}$. Тоді функція $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ від змінних $A_1, \ldots, A_n$ називається булевою функцією, асоційованою з формулою $F = F(A_1, \ldots, A_n)$.

В загальному випадку *булевою функцією* називається довільна функція $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Як приклад можна розглянути формулу $F = (A_1 \vee A_2) \to \rceil A_1$, яка задає відображення $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$. Таблиця істинності для цієї формули має вигляд:

A_1	A_2	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Із цієї таблиці можна знайти будь-які значення функції $F(A_1, A_2)$ в залежності від булевих значень аргументів A_1, A_2.

Зауваження 3.1. Різні формули

$$F = F(A_1, \ldots, A_n),\ G = G(A_1, \ldots, A_n)$$

можуть визначати одну і ту ж булеву функцію. Наприклад, різні формули $F = A_1 \to A_2$, $G = \rceil A_2 \to \rceil A_1$ мають однакові таблиці істинності і тому визначають одну і ту ж булеву функцію.

Означення 3.3. *Формули $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ і $G = G(x_1, \ldots, x_n)$ логіки висловлювань називаються рівносильними, якщо вони визначають одну і ту ж булеву функцію, позначення для рівносильних формул: $F \equiv G$.*

Означення 3.4.

1. *Формула $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ логіки висловлювань називається тотожно істинною, або тавтологією, якщо $val(F) = \mathbb{1}$ для всіх значень $x_1, \ldots, x_n$, позначення $F \equiv \mathbb{1}$.*

2. *Формула $G = G(x_1, \ldots, x_n)$ називається тотожно хибною, якщо $val(G) = \mathbb{0}$ для всіх значень $x_1, \ldots, x_n$, позначення $G \equiv \mathbb{0}$.*

Використовуючи таблиці істинності для логічних сполучників, легко перевірити, що має місце наступне твердження:

Теорема 3.3. *Для довільних формул F_1, F_2, F_3, F логіки висловлювань мають місце рівносильності:*

1) $F_1 \vee F_2 \equiv F_2 \vee F_1;\ F_1 \wedge F_2 \equiv F_2 \wedge F_1$ — *комутативність;*

2) $(F_1 \vee F_2) \vee F_3 \equiv F_1 \vee (F_2 \vee F_3);\ (F_1 \wedge F_2) \wedge F_3 \equiv F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)$ – *асоціативність;*

3) $(F_1 \wedge F_2) \vee F_3 \equiv (F_1 \vee F_3) \wedge (F_2 \vee F_3);\ (F_1 \vee F_2) \wedge F_3 \equiv (F_1 \wedge F_3) \vee (F_2 \wedge F_3)$ – *дистрибутивність;*

4) *Закони де Моргана*

   $\rceil(F_1 \vee F_2) \equiv \rceil F_1 \wedge \rceil F_2;\ \ \rceil(F_1 \wedge F_2) \equiv \rceil F_1 \vee \rceil F_2;$

5) *Закони ідемпотентності*

   $F \vee F \equiv F$; $F \wedge F \equiv F$;

6) *Закони поглинання*

   $F_1 \wedge (F_1 \vee F_2) \equiv F_1$;

   $F_1 \vee (F_1 \wedge F_2) \equiv F_1$;

7) *Закон зняття подвійного заперечення*

   $\rceil(\rceil F) \equiv F$;

8) *Закон виключення третьої можливості*

   $F \vee \rceil F \equiv \mathbb{1}$;

9) *Закон суперечності*

   $F \wedge (\rceil F) \equiv \mathbb{0}$;

10) *Закон поглинання константами*

    $F \vee 0 \equiv F$, $F \wedge 0 \equiv \mathbb{0}$;

    $F \vee \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}$, $F \wedge \mathbb{1} \equiv F$;

Зауваження 3.2. Окрім основних логічних сполучників, є ще й інші. Вкажемо два із них, які зустрічаються в алгебрі логіки. Це стрілка Пірса, яка може бути записана через диз'юнкцію і заперечення. Вона визначається формулою $x \uparrow y \equiv \rceil(x \vee y)$ і ще називається антидиз'юнкцією з очевидних причин. Інша логічна операція – це штрих Шеффера, який визначається формулою $x|y \equiv \rceil(x \wedge y)$ і також називається антикон'юнкцією.

3.2 Нормальні форми булевих функцій

В попередньому розділі згадувалося, що кожна формула логіки висловлювань $F(A_1, \ldots, A_n)$, яка містить n аргументів, визначає деяку булеву функцію $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, де $\mathbb{B} = \{\mathbb{1}, \mathbb{0}\}$.

Виявляється, що і навпаки, кожна булева функція такого вигляду може бути задана деякою логічною формулою. При цьому можна вказати такі формули дуже простого вигляду, які зручні в застосуваннях. Нехай $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функція, $x_1, \ldots, x_n$ — булеві змінні, які можуть приймати значення $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$.

Означення 3.5. *Впорядкований набір $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ логічних значень $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$ називається булевим вектором. Очевидно, $\alpha \in \mathbb{B}^n$.*

Якщо $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функція, то зіставлення $x_1 \to \alpha_1, \ldots, x_n \to \alpha_n$ називається інтерпретацією змінних. Тоді, надаючи булевим змінним деякі логічні значення, ми отримаємо, що $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{B}$.

Областю істинності формули $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ називається множина $\{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid F(\alpha) = \mathbb{1}\}$. Область істинності будемо позначати через $I(F)$.

Аналогічно визначимо область хибності:

$$O(F) = \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid F(\alpha) = \mathbb{0}\}.$$

Інакше кажучи, для булевої функції $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ маємо

$$I(F) = F^{-1}(\mathbb{1}),\ O(F) = F^{-1}(\mathbb{0}).$$

Очевидно, що мають місце рівності

$$O(F) \cup I(F) = \mathbb{B}^n,\ O(F) \cap I(F) = \varnothing.$$

Для булевої величини $\alpha \in \mathbb{B}$ і булевої змінної x покладемо: $x^\alpha = x$, якщо $\alpha = \mathbb{1}$ і $x^\alpha = \rceil x$, якщо $\alpha = \mathbb{0}$.

Означення 3.6. *Елементарною кон'юнкцією над списком змінних $x_1, \ldots, x_n$ називається формула вигляду*

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$$

для деякого булевого вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$*, а елементарною диз'юнкцією над цим списком називається формула*

$$x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n},$$

для деякого вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{B}^n$*.*

Приклад 3.4. Над списком змінних $\{x_1, x_2, x_3\}$ розглянемо елементарні кон'юнкції $x_1 \wedge \rceil x_2 \wedge x_3$ і $\rceil x_1 \wedge x_2 \wedge \rceil x_3$. Тоді перша кон'юнкція побудована за булевим вектором $(\mathbb{1}, \mathbb{0}, \mathbb{1})$, а друга — за вектором $(\mathbb{0}, \mathbb{1}, \mathbb{0})$.

Означення 3.7. *Формула, що є диз'юнкцією попарно різних елементарних кон'юнкцій, називається диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ), а формула, що є кон'юнкцією попарно різних елементарних диз'юнкцій — кон'юнктивною нормальною формою (КНФ).*

Означення 3.8. *ДНФ (КНФ) називається досконалою, якщо всі її елементарні кон'юнкції (диз'юнкції) побудовані над одним і тим же списком змінних. Коротко будемо позначати: ДДНФ — досконала диз'юнктивна нормальна форма, ДКНФ — досконала кон'юнктивна нормальна форма.*

Приклад 3.5. 1) $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\rceil x_1 \wedge x_2)$ — ДНФ (тут елементарні кон'юнкції побудовані над різними списками змінних).

2) $(x_1 \wedge x_2 \wedge \rceil x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \rceil x_3)$ — ДДНФ.

3) $(\rceil x_1 \vee x_2 \vee \rceil x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ – ДКНФ.

Лема 3.6. *(1) Елементарна кон'юнкція* $K = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$ *приймає значення* $\mathbb{0}$ *на всіх булевих векторах* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{B}^n$*, крім одного, який має вигляд* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*. На цьому векторі елементарна кон'юнкція приймає значення* $\mathbb{1}$*. Навпаки, для кожного булевого вектора* $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{B}^n$ *існує* *єдина елементарна кон'юнкція* K_1 *така,* $K_1((\beta_1, \ldots, \beta_n)) = \mathbb{1}$ *і* $K_1 = \mathbb{0}$ *на інших векторах. Це елементарна кон'юнкція* $x_1^{\beta_1} \wedge x_2^{\beta_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\beta_n}$.

(2) *Елементарна диз'юнкція* $D = x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}$ *приймає значення* $\mathbb{1}$ *на всіх булевих векторах із* $\mathbb{B}^n$*, крім одного, який має вигляд* $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$*, де* $\overline{\alpha}_i = \rceil \alpha_i$*. На цьому векторі елементарна диз'юнкція приймає значення* $\mathbb{0}$*. Навпаки, для кожного булевого вектора* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *існує єдина елементарна диз'юнкція, що приймає значення* $\mathbb{0}$ *на* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *і* $\mathbb{1}$ *на всіх інших. Це елементарна диз'юнкція*

$$x_1^{\overline{\beta}_1} \vee x_2^{\overline{\beta}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\beta}_n}.$$

Доведення. (1) Елементарна кон'юнкція $K = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$ приймає значення $\mathbb{1}$ тоді і тільки тоді, коли $x_1^{\alpha_1} = \mathbb{1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} = \mathbb{1}$. Останнє означає, що $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$. Далі все очевидно. (2) Доводиться аналогічно. □

Теорема 3.7. *1) Кожну, не тотожно рівну нулю, булеву функцію можна задати деякою ДДНФ.*

2) Кожну, не тотожно рівну одиниці, булеву фунцію, можна задати деякою ДКНФ.

3) ДДНФ і ДКНФ визначається булевою функцією однозначно, з точністю до перестановки елементарних кон'юнкцій чи диз'юнкцій.

Доведення. (1) Візьмемо довільну булеву функцію $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv \mathbb{0}$. Тоді $I(F) \neq \varnothing$. Для кожного вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I(F)$ розглянемо елементарну кон'юнкцію

$$K_\alpha = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}.$$

Тоді $K_\alpha(\alpha) = \mathbb{1}$ і $K_\alpha(\beta) = \mathbb{0}$ для довільного вектора $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Розглянемо диз'юнкцію

$$\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in I(F)} (x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}) = G(x_1, \ldots, x_n).$$

Тоді формула $G(x_1, \ldots x_n)$ приймає значення $\mathbb{1}$ на векторах із $I(f)$. Якщо ж $\beta \notin I(f)$, то всі $K_\alpha(\beta) = \mathbb{0}$ і тому $G(\beta) = \mathbb{0}$. Це означає, що $f \equiv G$.

(2) Візьмемо довільну булеву функцію $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv \mathbb{1}$. Тоді $O(F) \neq \varnothing$. Для кожного вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in O(F)$ розглянемо елементарну диз'юнкцію

$$D_\alpha = x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee x_2^{\overline{\alpha}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha}_n}.$$

Тоді $D_\alpha(\overline{\alpha}) = \mathbb{0}$ і $D_\alpha(\overline{\beta}) = \mathbb{1}$ для $\forall\overline{\beta} \neq \overline{\alpha}$. Розглянемо кон'юнкцію

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in O(F)} (x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee x_2^{\overline{\alpha}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha}_n}) = G(x_1, \ldots, x_n).$$

Тоді формула $G(x_1, \ldots, x_n)$ приймає значення $\mathbb{0}$ на $O(F)$. Якщо ж $\overline{\beta} \notin O(F)$, то всі $D_\alpha(\overline{\beta}) = \mathbb{1}$ і тому G приймає на $\overline{\beta}$ значення $\mathbb{1}$. Звідси випливає, що $G \equiv f$. □

Алгоритм побудови ДДНФ:

1) перевірити, що виконується умова $F(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv \mathbb{0}$;

2) знайти область істинності $I(F)$ булевої функції $F(x_1, \ldots, x_n)$

$$I(F) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{B}^n \mid F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbb{1}\};$$

3) для кожного булевого вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ із $I(F)$ записати елементарну кон'юнкцію над списком всіх змінних $x_1, \ldots, x_n$ вигляду

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n},$$

де $x_i^{\alpha_i} = x_i$ якщо $\alpha_i = \mathbb{1}$ і $x_i^{\alpha_i} = \rceil x_i$ якщо $\alpha_i = \mathbb{0}$;

4) записати ДДНФ як диз'юнкцію всіх таких елементарних кон'юнкцій по всіх $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I(F)$.

Приклад 3.8. Запишемо ДДНФ для булевої функції, заданої формулою логіки висловлювань вигляду:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \wedge (\rceil x_3 \leftrightarrow \rceil x_1).$$

1) Перевіримо, що виконується умова $F(x_1, x_2, x_3) \not\equiv \mathbb{0}$. Легко бачити, що $F(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{1}$ при $x_1 = x_2 = x_3 = \mathbb{1}$.

2) Знайдемо область істинності булевої функції $F(x_1, x_2, x_3)$. Дя цього запишемо таблицю істинності для булевої функції $F(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \to x_2$	$\rceil x_3 \leftrightarrow \rceil x_1$	F
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Із цієї таблиці ми бачимо, що

$$I(F) = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

3) Для кожного булевого вектора із $I(F)$ запишемо елементарну кон'юнкцію над списком змінних.

Для вектора $(0, 0, 0)$ елементарна кон'юнкція буде

$$x_1^0 \wedge x_2^0 \wedge x_3^0 = \rceil x_1 \wedge \rceil x_2 \wedge \rceil x_3,$$

для вектора $(0, 1, 0)$ —

$$x_1^0 \wedge x_2^1 \wedge x_3^0 = \rceil x_1 \wedge x_2 \wedge \rceil x_3,$$

для вектора $(1, 1, 1)$ відповідно

$$x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge x_3^1 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Тому ДДНФ має вигляд

$$(\rceil x_1 \wedge \rceil x_2 \wedge \rceil x_3) \vee (\rceil x_1 \wedge x_2 \wedge \rceil x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Алгоритм побудови ДКНФ:

1) перевірити, що виконується умова $F(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv \mathbb{1}$;

2) знайти область хибності $O(F)$ булевої функції $F(x_1, \ldots, x_n)$

$$I(F) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{B}^n \mid F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbb{1}\};$$

3) для кожного булевого вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ із $I(F)$ записати елементарну диз'юнкцію над списком всіх змінних $x_1, \ldots, x_n$ вигляду

$$D_\alpha = x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee x_2^{\overline{\alpha}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha}_n},$$

де $\overline{\alpha}_i = \rceil \alpha_i$, $x_i^{\alpha_i} = x_i$ якщо $\alpha_i = \mathbb{1}$ і $x_i^{\alpha_i} = \rceil x_i$ якщо $\alpha_i = \mathbb{0}$;

4) записати ДКНФ як кон'юнкцію всіх таких елементарних диз'юнкцій по всіх $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I(F)$.

Приклад 3.9. Запишемо ДКНФ для булевої функції, заданої формулою логіки висловлювань із попереднього прикладу, тобто

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \wedge (\rceil x_3 \leftrightarrow \rceil x_1).$$

1) Перевіримо, що виконується умова $F(x_1, x_2, x_3) \not\equiv \mathbb{1}$. Легко бачити із таблиці істинності, що $F(x_1, x_2, x_3)$ не є тавтологією.

2) Знайдемо область хибності булевої функції $F(x_1, x_2, x_3)$. Для цього скористаємося таблицею істинності для булевої функції $F(x_1, x_2, x_3)$ із попереднього прикладу:

$$O(F) = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)(1, 1, 0)\}.$$

3) Для кожного булевого вектора із $O(F)$ запишемо елементарну диз'юнкцію над списком змінних.

Для вектора $(0, 0, 1)$ елементарна диз'юнкція буде

$$x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = x_1 \vee x_2 \vee \rceil x_3,$$

для вектора $(0, 1, 1)$ – $x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^0 = x_1 \vee \rceil x_2 \vee \rceil x_3$, для вектора $(1, 0, 0)$ відповідно $x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = \rceil x_1 \vee x_2 \vee x_3$. Для вектора $(1, 0, 1)$ аналогічно запишемо елементарну диз'юнкцію $x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = \rceil x_1 \vee x_2 \vee \rceil x_3$,і нарешті для вектора $(1, 1, 0)$ елементарна диз'юнкція має вигляд $x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = \rceil x_1 \vee \rceil x_2 \vee x_3$. Тому ДКНФ має вигляд

$$(x_1 \vee x_2 \vee \rceil x_3) \wedge (x_1 \vee \rceil x_2 \vee \rceil x_3) \wedge (\rceil x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge$$

$$\wedge (\rceil x_1 \vee x_2 \vee \rceil x_3) \wedge (\rceil x_1 \vee \rceil x_2 \vee x_3).$$

Означення 3.9. *Набір булевих функцій називається повним, якщо через функції з цього набору за допомогою суперпозицій можна виразити всі булеві функції.*

Із теореми 3.7 відразу випливає такий

Наслідок 3.10. *Набори булевих функцій* $\{\rceil, \wedge\}$, $\{\rceil, \vee\}$ *є повними.*

Доведення. За теоремою 3.7 набір булевих функцій $\{\rceil, \wedge, \vee\}$ є повним. Але легко перевірити, що

$$A \vee B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B) \quad \text{і} \quad A \wedge B \equiv \rceil(\rceil A \vee \rceil B).$$

□

Можна довести, що серед бінарних логічних сполучників стрілка Пірса і штрих Шеффера утворюють повні системи.

Булеві многочлени

Розглянемо набір логічних операцій $\mathbb{0}, \mathbb{1}, \wedge, \oplus$. Якщо вважати, що $\wedge$ і $\oplus$ — це множення і додавання за модулем 2, тобто операції множення і відповідно додавання в двоелементному полі $\mathbb{F}_2$, то можна розглядати многочлени із кільця многочленів над цим полем $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$.

Означення 3.10. *Булевим многочленом називається функція вигляду*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} c_{i_1,\ldots,i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

де всі невідомі входять в першому степені (це так званий мультилінійний многочлен).

Теорема 3.11. *Для кожної булевої функції f існує єдиний булевий многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$, який еквівалентний функції f.*

Доведення. Знайдемо комбінаторним методом кількість булевих многочленів. Зауважимо, що кількість булевих одночленів $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ дорівнює кількості підмножин множини $\{x_1, \ldots, x_n\}$, тобто 2^n. Щоб задати булів многочлен, потрібно в відповідній сумі перед кожним одночленом поставити відповідний коефіцієнт 0 або 1. Тому всіх булевих многочленів буде всього 2^{2^n}. Зауважимо, що загальна кількість булевих функцій $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ також дорівнює 2^{2^n}.

Кожному булевому многочлену відповідає деяка булева функція. Достатньо довести, що це ін'єктивна відповідність. Нехай це не так і різним булевим многочленам $F(x_1, \ldots, x_n)$ і $G(x_1, \ldots, x_n)$ відповідає одна й та ж булева функція. Тоді різниці

$$F(x_1, \ldots, x_n) - G(x_1, \ldots, x_n)$$

відповідає тотожно нульова булева функція. Це значить, що існує ненульовий булевий многочлен $H(x_1, \ldots, x_n)$ такий, що відповідна булева функція тотожно нульова. Це неможливо, бо різним многочленам $F \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$, де змінні входять в степені 0, або 1 відповідають різні функції (щоб це показати, достатньо скористатися методом математичної індукції за кількістю змінних). □

Приклад 3.12. Побудуємо булевий многочлен, який визначає булеву функцію, задану формулою із прикладу 3.9, тобто

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2) \wedge (\rceil x_3 \leftrightarrow \rceil x_1).$$

Нам потрібна буде таблиця істинності цієї функції, яку ми знайшли раніше. Запишемо булевий многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ з невизначеними коефіцієнтами у вигляді

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_4 x_1 x_2 \oplus$$

$$\oplus a_5 x_1 x_3 \oplus a_6 x_2 x_3 \oplus a_7 x_1 x_2 x_3,$$

де $a_i \in \mathbb{B} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. По черзі підставляємо в цей многочлен значення x_1, x_2, x_3 із таблиці істинності і знаходимо значення функції. Якщо $x_1 = x_2 = x_3 = \mathbb{0}$, то за таблицею істинності повинно бути $f(\mathbb{0}, \mathbb{0}, \mathbb{0}) = \mathbb{1}$ і тому $a_0 = \mathbb{1}$. Аналогічно при значеннях $x_1 = \mathbb{0}, x_2 = \mathbb{0}, x_3 = \mathbb{1}$ отримаємо, що $\mathbb{1} \oplus a_3 x_3 = \mathbb{0}$ і тому $a_3 = \mathbb{1}$. Продовжуючи ці міркування ми отримаємо всі коефіцієнти многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$.

Теорема Поста

Введемо порядок на множині $\mathbb{B} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, вважаючи, що $\mathbb{0} < \mathbb{1}$. Для довільного булевого вектора $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{B}$ позначимо $\rceil a = (\rceil a_1, \dots, \rceil a_n)$.

Означення 3.11. *Кажуть, що булева функція $f(x_1, \dots, x_n)$*

1) *зберігає нуль, якщо $f(\mathbb{0}, \dots, \mathbb{0}) = \mathbb{0}$;*

2) *зберігає* $\mathbb{1}$, *якщо* $f(\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}) = \mathbb{1}$;

3) *монотонна, якщо з нерівності* $a_i \leqslant b_i$ *для кожного* $i = 1, \dots, n$ *випливає, що* $f(a_1, \dots, a_n) \leqslant f(b_1, \dots, b_n)$;

4) *самодвоїста, якщо* $f(\rceil a) = \rceil f(a)$;

5) *лінійна, якщо вона еквівалентна лінійному булевому многочлену, тобто виразу вигляду*

   $c_0 \oplus c_1 \wedge x_1 \oplus c_2 \wedge x_2 \oplus \dots \oplus c_n \wedge x_n$, $c_i \in \mathbb{B}$.

Нехай

- $\mathcal{F}_0$ — множина всіх булевих функцій, що зберігають нуль,
- $\mathcal{F}_1$ — множина всіх булевих функцій, що зберігають одиницю,
- $\mathcal{F}_2$ — множина всіх монотонних булевих функцій,
- $\mathcal{F}_3$ — множина всіх самодвоїстих булевих функцій,
- $\mathcal{F}_4$ — множина всіх лінійних булевих функцій.

Теорема 3.13 (Поста). *Набір* M *булевих функцій є повним тоді і тільки тоді, коли* $M \not\subseteq \mathcal{F}_k$ *для кожного* $0 \leqslant k \leqslant 4$, *тобто, коли він містить*

а) *хоча б одну функцію, що не зберігає* $\mathbb{0}$.

б) *хоча б одну функцію, що не зберігає* $\mathbb{1}$.

в) *хоча б одну немонотонну функцію.*

г) *хоча б одну несамодвоїсту функцію.*

д) *хоча б одну нелінійну функцію.*

3.3 Відношення та дії над ними

Відношення

Означення 3.12. *Нехай M — довільна непуста множина. Тоді n-місним (або n-арним) відношенням на множині M називається довільна підмножина $R \subseteq M^n$. Якщо впорядкований набір $(a_1, \dots, a_n) \in R$, то кажуть, що елементи $a_1, \dots, a_n$ знаходяться у відношенні R.*

При $n = 2$ відношення називається бінарним, це підмножина $R \subseteq M^2$. При $n = 3$ отримаємо тернарне відношення, це підмножина із M^3. Бінарні відношення моделюють такі поняття із математики як "бути меншим ніж", "рівність", "подільність" в арифметиці, "конгруентність" і "колінеарність" в геометрії, "суміжність" в теорії графів, "ортогональність" в лінійній алгебрі. У повсякденному житті бінарні відношення дуже добре моделюють родинні стосунки між людьми, наприклад, "бути сином чи дочкою", "бути батьком чи матір'ю", "бути тещею чи зятем".

Приклад 3.14. Нехай $M = \mathbb{R}^3$ — тривимірний векторний простір над полем дійсних чисел і $R = \{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0\} \subset M$. Тоді R — тернарне відношення (відношення трьох векторів), яке, як відомо, є відношенням компланарності векторів в тривимірному просторі.

Якщо $R \subseteq M^2$ — бінарне відношення на множиніM, то часто пишуть aRb замість $(a, b) \in R$. Наведемо приклади бінарних відношень на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел: $m < n$ — відношення порядку, $m \mid n$ — відношення подільності, $m \equiv n \pmod{k}$ — конгруентність за модулем k.

Відношення на множині M арності n можна також задати функцією $\rho : M^n \to \mathbb{B} = \{0, 1\}$ за правилом:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \text{ тоді й лише тоді, коли } \rho(a_1, \dots, a_n) = \mathbb{1}.$$

Навпаки, кожній функції $\rho : M^n \to \mathbb{B}$ відповідає n-арне відношення $R = \rho^{-1}(\mathbb{1})$.

Надалі ми будемо розглядати переважно бінарні відношення. Для таких відношень можна розглянути операції добутку і обертання.

а) Добутком бінарних відношень $R \subseteq M^2$ і $S \subseteq M^2$ називається бінарне відношення $RS =$

$$= \{(a, b) \in M^2 | (a, c) \in R \text{ і } (c, b) \in S \text{ для деякого } c \in M\}.$$

б) Оберненим до відношення $R \subseteq M^2$ називається відношення $R^{-1} = \{(a, b) \in M^2 \mid (b, a) \in R\}$.

Діагональ Δ або Δ_M — це підмножина з M^2, яка складається із елементів вигляду (a, a), де $a \in M$. Очевидно, що два елементи a, b із множини M рівні тоді і тільки тоді, коли $(a, b) \in \Delta_M$. Це означає, що Δ — відношення рівності на множині M.

Найважливішим із усіх бінарних відношень є *відношення еквівалентності*, яким буквально пронизана вся математика.

Означення 3.13. *Бінарне відношенням $\sim$ на множині M називається відношенням еквівалентності, якщо воно має такі властивості:*

1) *(рефлексивність) $a \sim a$ для всіх $a \in M$;*

2) *(симетричність) якщо $a \sim b$, то $b \sim a$;*

3) *(транзитивність) якщо $a \sim b$ і $b \sim c$, то $a \sim c$.*

Приклад 3.15. 1) Відношення рівності $a = b$.

2) Відношення $a \equiv b \pmod{n}$, n — натуральне число.

3) Відношення $|A| = |B|$ для булеана $\beta(M)$.

4) Відношення колінеарності векторів на площині $\mathbb{R}^2$ або в просторі $\mathbb{R}^3$.

Означення 3.14. *Нехай* $\sim$ *— відношення еквівалентності на множині* M*. Класом еквівалентності елемента* $a \in M$ *називається підмножина* $M_a = [a] = \{x \in M \mid x \sim a\}$.

Теорема 3.16. *Класи еквівалентності мають властивості:*

1) $M = \bigcup_{a \in M} M_a$ *і* $a \in M_a$*;*

2) $b \in M_a$ *тоді і тільки тоді, коли коли* $M_a = M_b$*;*

3) Різні класи класи еквівалентності попарно не перетинаються.

Доведення. 1) Оскільки за означенням відношення еквівалентності $a \sim a$, то $a \in M_a$. Тому $M = \bigcup_{a \in M} M_a$.

2) Нехай $b \in M_a$. Тоді $b \sim a$. Якщо $c \in M_a$, то $c \sim a$, тому $c \sim b$ тобто $c \in M_b$, звідки випливає, що $M_a \subseteq M_b$. Аналогічно можна показати, що $M_b \subseteq M_a$ і тому $M_a = M_b$. Тоді $b \in M_b = M_a$.

3) Нехай M_a і M_b – різні класи еквівалентності. Візьмемо довільний елемент $x \in M_a \cap M_b$. Тоді $M_x = M_a$ і $M_x = M_b$ за доведеним вище і тому $M_a = M_b$, що суперечить нашому припущенню. Отримана суперечність показує, що $M_a \cap M_b = \varnothing$.

$\square$

Важливість відношень еквівалентності на множині M показує наступна теорема.

Теорема 3.17. *1) Кожне відношення еквівалентності* $\sim$ *на* M *визначає деяке розбиття* $M = \bigcup_{i \in I} M_i$*, де* M_i *— класи еквівалентності.*

2) *Кожне розбиття $M = \bigcup_{i\in I} M_i$ множини M визначає відношення еквівалентності $\sim$ на M за правилом: $a \sim b$ тоді і тільки тоді, коли існує індекс $i \in I$ такий, що $a \in M_i, b \in M_i$.*

Доведення. Перше твердження випливає із попередньої теореми. Для доведення другого зауважимо, що для визначеного в умові бінарного відношення виконуються всі пункти означення 3.13. □

Сукупність елементів множини M, взятих по одному з кожного класу еквівалентності, називають сукупністю представників класів еквівалентності.

Числа Белла

Означення 3.15. *Кількість всіх відношень еквівалентності на множині M з $|M| = m$ називається числом Белла B_m.*

Нагадаємо, що кількість розбиттів $S(m, n)$ множини M на n непорожніх підмножин називається числом Стірлінга другого роду

$$S(m, n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\binom{n}{k})(n-k)^m,$$

тут $S(m, n) = 0$ при $n > m$.

Тому $B_m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S(m, n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k(\binom{n}{k})(n-k)^m$.

Можна довести, що m-те число Белла B_m обчислюється за формулою $B_m = \frac{1}{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^m}{n!}$.

Відношення часткового порядку

Означення 3.16. *Бінарне відношення $\leqslant$ на множині M називається відношенням порядку або часткового порядку, якщо це відношення має властивості:*

1) *(рефлексивність)* $a \leqslant a$ *для будь-якого елемента* $a \in M$;

2) *(транзитивність) якщо* $a \leqslant b$ *і* $b \leqslant c$, *то* $a \leqslant c$;

3) *(антисиметричність) якщо* $a \leqslant b$ *і* $b \leqslant a$, *то* $a = b$.

Означення 3.17. *Кажуть, що частковий порядок є лінійним, якщо для будь-яких* $a, b \in M$ *виконується умова:* $a \leqslant b$ *або* $b \leqslant a$.

Зауваження 3.3. Якщо $\leqslant$ — порядок на множині M, то відповідний строгий порядок — це бінарне відношення $<$ на M, задане правилом: $a < b$ тоді і тільки тоді, коли $a \leqslant b$ і $a \neq b$.

Приклад 3.18.

1) Відношення $x \leqslant y$ на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ є лінійним порядком на $\mathbb{R}$. Відповідний строгий порядок це відношення строгої нерівності $a < b$.

2) Відношення $a \mid b$ на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел є порядком на $\mathbb{N}$. Цей порядок не є лінійним, бо, наприклад для чисел 3, 5 не виконується жодна із умов $3 \mid 5$, $5 \mid 3$.

3) Відношення $\subseteq$ є відношенням часткового порядку на множині всіх підмножин фіксованої множини M. Якщо $|M| \geqslant 3$, то цей порядок не є лінійним.

Нехай M — впорядкована множина і S — підмножина із M. Будь-який елемент $a \in M$ такий, що $a \geqslant x$ для всіх $x \in S$ будемо називати *верхньою гранню* підмножини S в множині M.

Елемент $a \in M$, для якого із умов $x \in M$ і $x \geqslant a$ випливає, що $x = a$ називається *максимальним елементом* множини M (зауважимо, що в множині M може бути декілька максимальних елементів, які не порівнювані між собою).

Наступне твердження відоме під назвою **лема Цорна** і широко використовуються в математиці.

Лема 3.19. *Нехай M — частково впорядкована множина. Якщо кожна лінійно впорядкована підмножина із M має верхню грань в M, то в M існує хоча б один максимальний елемент.*

Лема Цорна еквівалентна **аксіомі вибору**:
Нехай $\{M_i, i \in I\}$ — сім'я непустих множин. Тоді існує множина N, яка містить точно по одному елементу із кожної підмножини M_i для кожного $i \in I$.

Приклад 3.20. На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо бінарне відношення ρ, покладаючи $a\rho b$ тоді і тільки тоді, коли $a - b \in \mathbb{Q}$. Покажемо, що ρ є відношенням еквівалентності і вкажемо будову класів еквівалентності. Очевидно, що $a\rho a$ для всіх $a \in \mathbb{R}$, бо $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$. Також із умови $a\rho b$ випливає, що $b\rho a$, бо із включення $a - b \in \mathbb{Q}$ випливає, що $b - a \in \mathbb{Q}$. І, нарешті, якщо $a\rho a$ і $b\rho c$, то і $a\rho c$, бо із включень $a - b \in \mathbb{Q}$ і $c - b \in \mathbb{Q}$ випливає, що $a - c \in \mathbb{Q}$. Далі, для дійсного числа $a \in \mathbb{R}$ клас еквівалентності $[a]$ має вигляд $[a] = \{b \in \mathbb{R} \mid b - a \in \mathbb{Q}\}$ і тому $[a]$ складається із дісного числа a і всіх чисел вигляду $a + \frac{m}{n}$, де $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

3.4 Нескінченні множини, кардинальні числа

Порівняння множин

Дві скінченні множини A і B можна порівнювати за кількістю елементів двома способами.

1) Підрахувати кількості елементів m і n в множинах A і B і порівняти числа m, n. Якщо $m = n$, то кількість елементів у множинах одна і та ж.

2) Встановити бієкцію $\varphi : A \to B$. Якщо така бієкція існує, то кількість однакова.

Для нескінченних множин перший спосіб не підходить, а другий спосіб є, мабуть, єдиним прийнятним.

Означення 3.18. *Дві множини A і B називаються рівнопотужними, якщо існує бієкція $\varphi : A \to B$.*

Для рівнопотужних множин будемо використовувати запис $|A| = |B|$.

Приклад 3.21.

1) Нехай маємо дві множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Задамо бієкцію за правилом: $\varphi(a_i) = b_i$. Тоді $|A| = |B|$.

2) Нехай $A = \mathbb{N}$, $B = 2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Бієкцію $\varphi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ задамо за правилом: $\varphi(n) = 2n$. Це означає, що множини A і B рівнопотужні, тобто $|A| = |B|$. Зауважимо, що $B \subsetneq A$ і таке строге включення неможливе для скінченних рівнопотужних множин.

Покажемо, що відношення рівнопотужності є, в деякому сенсі, відношенням еквівалентності на класі всіх множин (зауважимо, що всі множини не утворюють нову множину, тобто не можна говорити про множину всіх множин).

Означення 3.19. *Будемо говорити, що потужність множини A не перевищує потужності множини B, якщо існує ін'єктивне відображення $\psi : A \to B$.*

В цьому випадку використовуватимемо запис $|A| \leqslant |B|$.

Приклад 3.22. $|\mathbb{Q}| \leqslant |\mathbb{R}|$, бо можна вибрати вкладення ψ множини $\mathbb{Q}$ в множину $\mathbb{R}$.

Має місце така

Теорема 3.23 (Кантора-Бернштейна)**.** *Нехай A і B — дві непусті множини. Якщо існують ін'єктивні відображення $\varphi_1 : A \to B$ і*

$\varphi_2 : B \to A$, то існує бієкція між A і B, тобто якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Доведення. З умови теореми випливає, що A рівнопотужна деякій підмножині B_1 множини B, а B рівнопотужна деякій підмножині A_1 множини A. Суперпозиція $\varphi = \varphi_2(\varphi_1)$ буде бієкцією між A та деякою підмножиною A_2 множини A, причому

$$A_2 \subset A_1 \subset A = A_0.$$

Для доведення теореми тепер досить показати, що $|A_0| = |A_1|$.

Маємо

$$A_2 = \varphi(A_0).$$

Позначимо

$$A_3 = \varphi(A_1), \quad A_{n+2} = \varphi(A_n), n \geq 0.$$

Отримаємо спадну послідовність підмножин

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \ldots A_n \supset \ldots.$$

При цьому

$$|A_0| = |A_2| = |A_4| = \ldots = |A_{2k}| = \ldots$$

і

$$|A_1| = |A_3| = |A_5| = \ldots |A_{2k+1}| = \ldots.$$

Покладемо

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{і} \quad C_n = A_n \setminus A_{n+1}, n \geq 0.$$

Тоді множини $C, C_0, C_1, C_2, \ldots$ попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює всій множині A_0. З бієктивності φ та означення множин $C_0, C_1, C_2, \ldots$ випливає, що

$$|C_0| = |C_2| = |C_4| = \ldots = |C_{2k}| = \ldots$$

і

$$|C_1| = |C_3| = |C_5| = \ldots = |C_{2k+1}| = \ldots .$$

Тепер визначимо відображення $f : A_0 \to A_1$ правилом

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{якщо } x \in C_{2k}(k \geq 0) \\ x, & \text{якщо } x \in C_{2k+1}(k \geq 0) \text{ або } x \in C, \end{cases}$$

яке й буде шуканою бієкцією. □

Зауважимо, що для будь-яких множин A, B, C маємо $|A| \leqslant |A|$. Далі, із умови $|A| = |B$ випливає, що $|B| = |A|$ (скористатися тим, що обернене відображення до бієкції є бієкцією). Легко бачити також, що із рівностей $|A| = |B|$ і $|B| = |C|$ випливає, що $|A| = |C|$ (бо композиція бієкцій є бієкцією). Тому клас всіх множин розбивається на класи (еквівалентних) рівнопотужних множин. Такі класи називаються *кардинальними числами*.

Приклад 3.24. Множина перших n натуральних чисел має потужність n, тобто $|\{1, \ldots, n\}| = n$ і n — скінченне кардинальне число. Далі, для множини натуральних чисел потужність $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (читається "алеф-нуль"), для множини дійсних чисел $|\mathbb{R}| = c$, де $c = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ (якщо прийняти наведену нижче континуум-гіпотезу).

Означення 3.20. *Будемо говорити, що потужність множини A менша за потужність $|B|$ і писати $|A| < |B|$, якщо $|A| \leqslant |B|$ і ці множини не є рівнопотужними.*

Теорема Кантора, наведена нижче, показує, що $\leqslant$ — відношення порядку на множині кардинальних чисел:

$$1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < c < \ldots$$

Континуум-гіпотеза. *Не існує потужності, проміжної між $\aleph_0$ і c.*

Ні доведення, ні спростування цього твердження не виводиться із аксіом теорії множин.

Зліченні множини

Означення 3.21. *Множина A називається зліченною, якщо існує бієкція цієї множини на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$.*

Вживатимемо позначення $A \leftrightarrow \mathbb{N}$.

Якщо A — зліченна множина, то для кожного елемента $a \in A$ існує число n_a — номер елемента a і, таким чином, ми можемо перерахувати всі елементи такої множини.

Теорема 3.25. *Будь-яка підмножина зліченної множини або скінченна, або зліченна.*

Доведення. Нехай A — зліченна підмножина і $B \subseteq A$. Всі елементи із множини A занумеруємо $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Серед елементів підмножини B виберемо елемент з найменшим номером n_1 і позначимо його через b_1. Далі, із $B \setminus \{b_1\}$ виберемо елемент з найменшим номером n_2 і позначимо його через b_2 і т.д. Отримаємо строго зростаючу послідовність номерів $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ елементів підмножини B. Якщо через скінченну кількість кроків ми виберемо всі елементи з B, то множина B скінченна. Якщо ж B нескінченна, то отримаємо бієкцію B на $\mathbb{N}$ за правилом $n_k \leftrightarrow k$. □

Твердження 3.1. *Об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченною множиною.*

Доведення. Нехай $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$. Можна вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Множину $C = A \cup B$ занумеруємо так: всі елементи із A занумеруємо від 1 до k, елементи з B занумеруємо послідовно числами и $k + 1, k + 2, \ldots$. □

Теорема 3.26. *Декартів добуток двох зліченних множин є зліченною множиною.*

Доведення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$.

Елементи із $A \times B$ запишемо у вигляді таблиці

(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	$\dots$	(a_1, b_n)	$\dots$
(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	$\dots$	(a_2, b_n)	$\dots$
(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	$\dots$	(a_3, b_n)	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	(a_n, b_3)	$\dots$	(a_n, b_n)	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Занумеруємо елементи цієї таблиці по побічних діагоналях (a_1, b_1), потім $(a_2, b_1), (a_1, b_2)$, потім наступна діагональ

$$(a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1)$$

і т.д. Таким чином, ми отримаємо нумерацію всіх елементів цієї нескінченної таблиці, що означає зліченність множини $A \times B$. □

Наслідок 3.27. *Об'єднання зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною.*

Доведення. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — зліченні множини. Можна вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \not\equiv j$. Елементи з A_1 занумеруємо у вигляді $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, \dots$, із A_2 занумеруємо аналогічно $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}, \dots$, елементи із A_n занумеруємо

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}, \dots.$$

Отримаємо таблицю $(a_i^{(j)})$, елементи якої занумеруємо вказаним вище діагональним методом Кантора. Тому

$$|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0,$$

тобто це об'єднання має зліченну потужність. □

Зауваження 3.4. Аналогічно можна довести, що об'єднання $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ зліченної кількості зліченних або скінченних множин є зліченною множиною.

Означення 3.22. *Нескінченна множина, яка не є рівнопотужною множині натуральних чисед* $\mathbb{N}$*, називається незліченною множиною.*

Теорема 3.28. *Нехай* $2^{\mathbb{N}} = \beta(\mathbb{N})$ *— множина всіх підмножин із* $\mathbb{N}$*. Тоді* $2^{\mathbb{N}}$ *—- незліченна множина, тобто* $|2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$*.*

Доведення. Існує ін'єктивне відображення $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ за правилом $n \to \{n\}$, де $\{n\}$ – одноелементна підмножина. Далі, кожній підмножині $B \subseteq \mathbb{N}$ відповідає характеристична функція. $\chi_B : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Тоді за означенням $\chi_B(n) = 1$, якщо $n \in B$, $\chi_B(n) = 0$, якщо $n \notin B$. Тому χ_B можна уявляти як послідовність із 0 і 1 вигляду $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$, де $\varepsilon_i = 1$, якщо $i \in B$, $\varepsilon_i = 0$, якщо $i \notin B$. Припустимо, що існує біекція між $\mathbb{N}$ і $2^{\mathbb{N}}$.

$1 \leftrightarrow \{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}, \ldots\}$
$2 \leftrightarrow \{b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \ldots, b_n^{(2)}, \ldots\}$
$\ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots,\ldots$
$n \leftrightarrow \{b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots, b_n^{(n)}, \ldots\}$
$\ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots,\ldots$

Візьмемо тепер послідовність $\{a_k\}$, де $a_k = b_k^{(k)} + 1(\mathrm{mod}2)$. Це знову послідовність із 0 і 1, яка відповідає деякій характеристичній функції χ_A, $A \subseteq \mathbb{N}$. Це послідовність $\{a_k\}$ має якийсь номер k^*. Тоді $a_1 = b_1^{(k^*)}, a_2 = b_2^{(k^*)}, \ldots, a_{k^*} = b_{k^*}^{(k^*)}, \ldots$. Але тоді $a_{k^*} = b_{k^*}^{(k^*)} = b_{k^*}^{(k^*)} + 1 \pmod 2$ за побудовою. Останнє неможливе і тому не існує біекції між $\mathbb{N}$ і $2^{\mathbb{N}}$. Це означає, що $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$. □

Метод, використаний у доведенні цієї теореми, називається діагональним методом Кантора. Він часто використовується в математиці. Зокрема, дозволяє довести таке узагальненням попередньої теореми.

Теорема 3.29 (Кантора). *Для довільної множини A має місце нерівність* $|A| < |2^A|$.

Доведення. Будуємо ін'єктивне відображення $A \to 2^A$ за правилом: $a \mapsto \{a\}$. Тому $|A| \leqslant |2^A|$. Методом від супротивного покажемо, що множини A і 2^A не є рівнопотужними. Припустимо, що існує бієкція $\varphi : A \to 2^A$, яка ставить у відповідність елементу $a \in A$ деяку підмножину $S_a \subseteq A$, тобто $\varphi(a) = S_a$. Назвемо елемент a "гарним", якщо $a \in \varphi(a) = S_a$ і "поганим", якщо $a \notin \varphi(a) = S_a$. Розглянемо підмножину $B \subseteq A$ всіх "поганих" елементів із A. Оскільки φ — бієкція, то існує елемент $b \in A$ такий, що $\varphi(b) = B$. З'ясуємо, "гарним", чи "поганим" є елемент b. Якщо b — "гарний", то $b \in \varphi(b) = B$ і тому за означенням b — "поганий" елемент. Якщо b — "поганий", то $b \notin \varphi(b) = B$ і тому b — "гарний". Отримана суперечність доводить теорему. □

Зауваження 3.5. Використовуючи цю теорему, легко показати, що всі множини не утворюють множину. Дійсно, нехай це не так і U — множина всіх множин. Тоді всі підмножини із U будуть елементами із U і тому $2^U \subseteq U$. Але тоді $|2^U| \leqslant |U|$, що суперечить твердженню останньої теореми.

Приклад 3.30. Покажемо, що будь-які два відкриті інтервали (a, b) і (c, d) на прямій $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Для цього побудуємо бієкцію між ними у явному вигляді. Побудуємо спочатку бієктивне відображення інтервалу $(0, 1)$ на інтервал (a, b) (ми вважаємо, що $a < b$). Для цього розглянемо лінійну функцію $y = kx+d$, де k і d, невідомі коефіцієнти, які ми підберемо так, щоб виконувалися рівності $y(0) = a, y(1) = b$. Підставляючи 0 замість x в вираз $y = kx + d$, а потім 1 замість x, отримаємо

$$y(0) = d = a, \; y(1) = k + d = b$$

і тому $d = a$, $k = b - a$. Тоді лінійна функція

$$y(x) = (b - a)x + a$$

дає бієктивне відображення інтервалу $(0, 1)$ на інтервал (a, b). Самостійно перевірити, що побудоване відображення ін'єктивне і сюр'єктивне.

Тепер вже легко довести, що (a, b) і (c, d) рівнопотужні. Дійсно, кожен з цих інтервалів рівнопотужний з інтервалом $(0, 1)$, а тому вони рівнопотужні між собою.

Задачі. 1) Довести, що система $\{ \mid \}$, яка складається лише із штриха Шеффера, є повною системою. Виразити $\rceil$ і $\vee$ через штрих Шеффера.

2) Побудувати булевий многочлен для булевої функції

$$F(x, y, z) = (\rceil z \equiv y) \to x \wedge (y \vee z).$$

3) Виразити $\vee$ через логічні сполучники $\wedge$ і $\oplus$.

4) Чи буде відношенням еквівалентності на множині всіх векторів на площині бінарне відношення перпендикулярності?

5) Чи завжди об'єднання двох відношень еквівалентності буде відношенням еквівалентності? Відповідь обґрунтувати (тобто, або довести, що це так, або побудувати контрприклад).

6) Для формулювання наступної задачі нам потрібне таке означення: частково впорядковані множини (M, ρ_1) і (N, ρ_2) називаються *ізоморфними*, якщо існує бієкція $\varphi : M \to N$ така, що із умови $a\rho_1 b$ в M випливає, що $\varphi(a)\rho_2\varphi(b)$ в N і, навпаки, із умови $c\rho_2 d$ в множині N випливає, що $\varphi^{-1}(c)\rho_1\varphi^{-1}d$ в множині M.

Побудуйте всі неізоморфні бінарні відношення на множині а) $M = \{a, b\}$, б) $M = \{a, b, c\}$.

7) Довести, що інтервали (a, b) і $(a, +\infty)$ рівнопотужні.

8) Нехай A — нескінченна множина. Довести, що A містить зліченну підмножину.

9) Нехай A — нескінченна множина і B — скінченна або злічення множина. Довести, що множини A і $A \cup B$ рівнопотужні.

10) Нехай S — довільна множина інтервалів на числовій прямій, які попарно не перетинаються. Довести, що множина S скінченна або злічення. Вказівка: в кожному інтервалі існує раціональна точка.

Розділ 4

Теорія графів І

4.1 Основні поняття теорії графів

Що таке граф

Розглянемо електричну схему (Рис. 4.1) і схему доріг (Рис. 4.2).

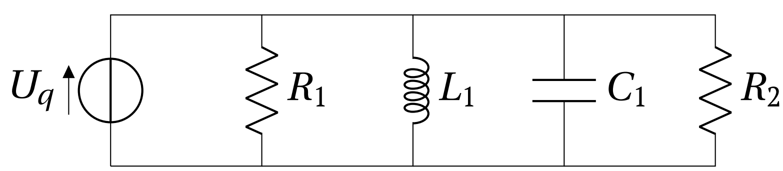


Рис. 4.1: Електрична схема

В цих схемах вказані лише вершини (елементи електричної схеми в першій і міста в другій), які з’єднані ребрами (провідниками чи дорогами відповідно). Це приклади графів. Якщо існують різні дороги, що з’єднують пару міст, або декілька провідників в електричній схемі, то будуть виникати графи з кратними ребрами (Рис. 4.3).

Якщо ще розглядаються дороги з одностороннім рухом, то у відповідних графах ребра буть орієнтовані і вказувати напрям від однієї вершини до іншої. Так отримуємо орієнтовані графи,

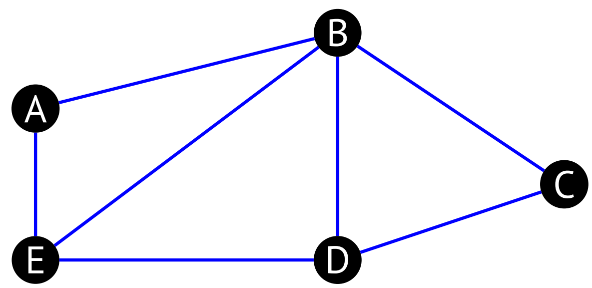


Рис. 4.2: Схема доріг

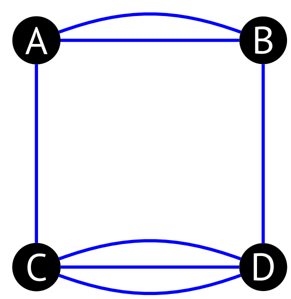


Рис. 4.3: Граф з кратними ребрами

або орграфи. Також можна розглядати ребра, які виходять із вершини графа і туди ж повертаються, тобто, петлі (Рис. 4.4).

Методи теорії графів широко застосовуться в різних розділах математики, в комп'ютерних науках, в технічних науках, в логістиці, в теорії зв'язку і т.д..

Означення графів

Означення 4.1. *Графом G називається пара* $(V(G), E(G))$*, де* $V(G)$ *– множина елементів, які називаються вершинами (vertex),* $E(G)$ *– скінченна сім'я невпорядкованих пар елементів із* $V(G)$ *(не обов'язково різних), елементи із* $E(G)$ *називаються ребрами (edge). Таким чином, в позначенні графа* $V(G)$ *— множина вершин графа G, а* $E(G)$ *— сім'я його ребер.*

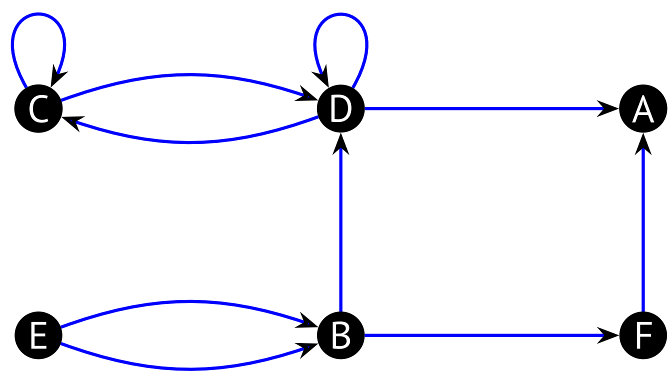


Рис. 4.4: Орієнтований граф з петлями

Приклад 4.1. Розглянемо граф на 4 вершинах, $V(G) = \{u, v, w, z\}$ і нехай сім'я ребер має вигляд (в сімї, на противагу множині, ми допускаємо повторення елементів)

$$E(G) = \{(v, v), (v, v), (v, v), (u, v), (v, w), (v, w),$$

$$(v, w), (u, w), (u, w), (w, z)\}$$

Ребро (u, v) з'єднує вершини u і v. Петля (v, v) з'єднує вершини v і v, тобто вершину v з собою.

Приклад 4.2. Розглянемо граф G, для якого $V(G) = \{\text{Д, Ш, М, Ч}\}$ — множина футбольних команд (Рис. 4.5). Будемо вважати, що

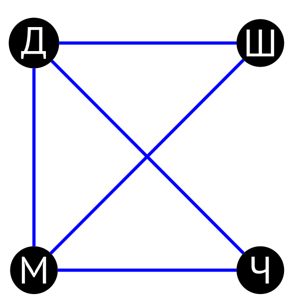


Рис. 4.5: Граф футбольного змагання

дві вершини з'єднані ребром, якщо між відповідними командами відбувся матч. Якщо немає повторних матчів, то граф G простий.

Означення 4.2. *Орграфом* Γ *називається пара* $(V(\Gamma), E(\Gamma))$*, де* $V(\Gamma)$ *— непуста скінченна множина елементів, які називаються вершинами,* $E(\Gamma)$ *— сім'я впорядкованих пар елементів з* $V(\Gamma)$*, які називаються дугами, або орієнтованими ребрами,* (v, w) *— дуга із* v *в* w*. Дуги* (v, w) *і* (w, v) *різні.*

Приклад 4.3. Для орграфа, зображеного на Рис. 4.6 множина

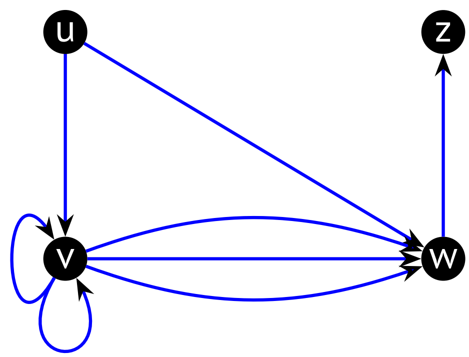


Рис. 4.6: Орграф

вершин $V(G) = \{u, v, w, z\}$, сім'я ребер

$$E(G) = \{(v, v), (v, v), (u, v), (v, w), (v, w), (v, w), (u, w), (w, z)\}.$$

Як правило, ми будемо розглядати неорієнтовані графи (інколи з кратними ребрами і, можливо, з петлями).

Означення 4.3. *Нехай* G *— граф з множиною вершин* $V(G)$ *і множиною ребер* $E(G)$.

Дві вершини графа називаються суміжними, якщо існує ребро, яке їх з'єднує, при цьому вершини u*,* v *називаються інцидентними ребру* (u, v).

Степінь (або валентність) вершини v графа G — це кількість ребер, інцидентних v. Степінь вершини v позначається $\rho(v)$ або $\deg v$*. При обчисленні степеня вершини петля враховується* 2 *рази. Вершина степеня* 0 *називається ізольованою, вершина степеня* 1 *називається висячою або кінцевою вершиною.*

Два різних ребра графа G називаються суміжними, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину.

Приклад 4.4. Для графа, зображеного на Рис. 4.7 $\rho(v_1) = \rho(v_2) = 2$, $\rho(v_3) = 3$, вершина v_4 висяча, а вершина v_5 — ізольована.

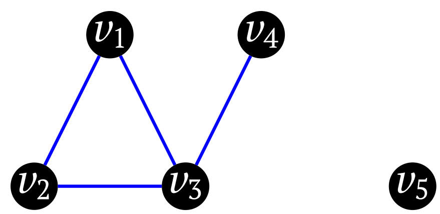


Рис. 4.7: Граф з ізольованою вершиною

Лема 4.5 (про рукопотискання)**.** *Для графа $G = (V(G), E(G))$ сума степенів всіх вершин є парним числом, яке дорівнює подвоєному числу ребер (петля дає внесок* 2*).*

Доведення. Підрахуємо кількість ребер, інцидентних різним вершинам і візьмемо суму по всім вершинам

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v.$$

Оскільки кожне ребро інцидентне точно двом вершинам, то воно враховується 2 рази. Оскільки степінь кожної вершини є сумою кількості інцидентних їй ребер та подвоєної кількості петель, то лема доведена. □

Ця лема була відома ще Ойлеру і має наступну інтерпретацію. Нехай є група людей, яких ми вважаємо вершинами деякого графа. Дві вершини суміжні, якщо ці люди потискали один одному руки. Можливо є пари, які сьогодні віталися декілька разів, тоді будуть кратні ребра, якщо віталися самі з собою, то будуть петлі.

Наслідок 4.6. *В будь-якому графі число вершин непарного степеня повинно бути парним.*

Означення 4.4. *Два графи*

$$G_1 = (V(G_1), E(G_1)),\ G_2 = (V(G_2), E(G_2))$$

називаються ізоморфними, якщо існує бієкція на множині вершин $\varphi\colon V(G_1) \to V(G_2)$, яка зберігає число ребер, що з'єднують відповідні вершини, тобто число ребер, що з'єднують $u, v \in G_1$ дорівнює числу ребер, що з'єднують $\varphi(u)$, $\varphi(v) \in G_2$.

Приклад 4.7. Графи, зображені на Рис. 4.8 ізоморфні, ізоморфізм φ визначається правилом $\varphi(u_i) = v_i$, $1 \le i \le 6$.

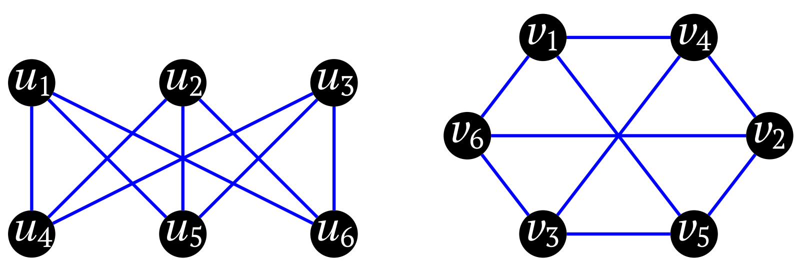


Рис. 4.8: Ізоморфні графи

Означення 4.5. *Підграфом H графа G називається граф, всі вершини якого належать множині $V(G)$, а всі ребра — множині $E(G)$.*

Означення 4.6. *Нехай G — граф, на множиною вершин V якого задано нумерацію, тобто $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Матрицею суміжності графа G називається матриця $A = (a_{ij})$ розміру $n \times n$ в якій*

a_{ij} *дорівнює числу ребер в* G*, які з'єднують* v_i *і* v_j*. Це симетрична матриця з невід'ємних цілих чисел, яка повністю описує граф.*

Приклад 4.8. Граф, зображений на Рис. 4.9, має матрицю сумі-

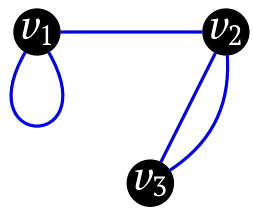


Рис. 4.9: Граф і його матриця суміжності

жності

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення 4.7. *Нехай* G *— простий граф з множиною вершин* $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *і множиною ребер* $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$*. Матрицею інцидентності називається матриця* $A = (a_{ij})$ *розміру* $m \times n$*, де* $a_{ij} = 1$*, якщо ребро* e_i *інцидентне вершині* v_j *і* $a_{ij} = 0$ *в іншому випадку.*

Приклад 4.9. Розглянемо граф, зображений на Рис. 4.10. Тоді

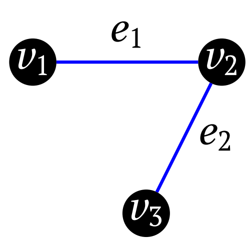


Рис. 4.10: Граф і його матриця інцидентності

його матриця інцидентності буде мати вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклади графів

а) *Цілком незв'язним графом* N_n на n вершинах називається граф, для кого множина ребер пуста, тобто $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \varnothing$

б) *Повним графом* на n вершинах називається простий граф K_n, у якого будь-які дві різні вершини суміжні, тобто з'єднані ребром.

Задача. Довести, що повний граф K_n має $n(n-1)/2$ ребер.

Очевидно, що цілком незв'язний граф G є підграфом повного графа з тією ж множиною вершин і, взагалі, будь-якого графа, число вершин якого не менше $|V(G)|$.

в) *Регулярний граф*. Граф, у якого всі вершини мають одну і ту ж степінь називаються регулярними.Якщо $\deg v_i = r$, то G - регулярний степеня r. Граф, зображений на Рис. 4.11, називається графом Петерсона, цей граф регулярний сте-

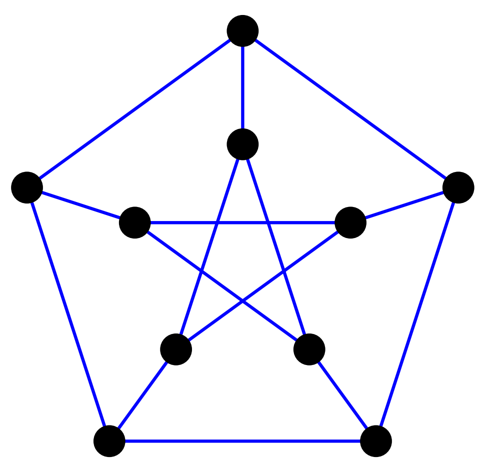


Рис. 4.11: Граф Петерсена

пеня 3.

г) *Платонові графи* — це графи, які утворені вершинами і ребрами платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра, додекаедра, ікосаедра.

Тетраедру відповідає повний граф K_4 на 4 вершинах (Рис. 4.12).

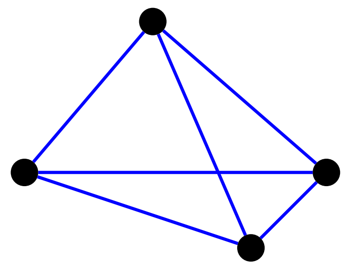


Рис. 4.12: Граф, що відповідає тетраедру

Кубу відповідає граф, зображений на Рис. 4.13.

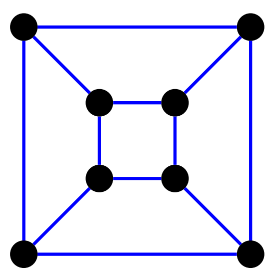


Рис. 4.13: Граф, що відповідає кубу

д) *Дводольні графи*. Нехай $G = (V, E)$ і нехай $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ — розбиття множини вершин на дві непорожні підмножини. Якщо кожне ребро із G з'єднує яку-небудь вершину із V_1 з деякою вершиною в V_2, то граф G називається дводольним. Дводольний граф G з долями V_1 і V_2 називається повним, якщо кожна вершина із V_1 з'єднана з кожною вершиною із V_2.

Приклад 4.10. Покажемо, що в будь-якому простому графі G, який має не менше ніж 2 вершини знайдуться 2 вершини однакового степеня. Дійсно, нехай $|V(G)| = n$. Припустимо, що всі степені вершин різні, цих степенів буде n, по кількості вершин. Впорядкуємо вершини за зростанням їх степенів і нехай $k_1 < k_2 \ldots < k_n$ – степені вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$, відповідно. Оскільки, очевидно, $k_n \leqslant n-1$, то $k_1 = 0, k_2 = 1, \ldots, k_n = n-1$. Це означає, що вершина v_n має степінь $n-1$, а вершина v_1 має степінь 0. Але це неможливо, бо вершина v_n з'єднана ребром з кожною іншою вершиною, зокрема з v_1.

Побудова графів

Нехай дано графи

$$G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$$

такі, що $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Означення 4.8. *Об'єднанням $G_1 \cup G_2$ називається граф G з множиною вершин $V = V_1 \cup V_2$ і множиною ребер $E = E_1 \cup E_2$.*

Приклад 4.11. На Рис. 4.14 зображено об'єднання графів з множинами вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ і $\{5, 6\}$.

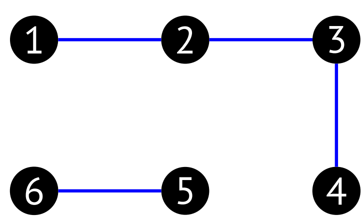


Рис. 4.14: Об'єднання графів

Означення 4.9. *З'єднанням (або конкатенацією) графів G_1 і G_2 називається граф $G = G_1 + G_2$, де $V = V_1 \cup V_2$,*

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3,$$

де E_3 — це множина всіх ребер, що з'єднують вершини із V_1 з вершинами із V_2.

Приклад 4.12. $G_1 = N_2$, $G_2 = N_3$. Тоді конкатенація $G_1 + G_2$, очевидно, буде повним дводольним графом $K_{2,3}$, з долями V_1 і V_2, де $|V_1| = 2$, $|V_2| = 3$ (Рис. 4.15).

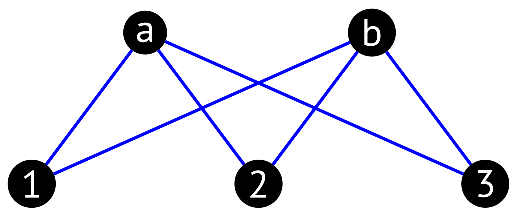


Рис. 4.15: З'єднання графів

І, взагалі, повний дводольний граф $K_{m,n}$ є з'єднанням двох цілком незв'язних графів N_m і N_n.

Доповнення до простого графа. Нехай G – простий граф з множиною вершин $V = V(G)$.

Означення 4.10. *Доповненням $\overline{G}$ до графа G називається простий граф з множиною вершин V, в якому дві вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони несуміжні в G.*

Приклад 4.13. Очевидно, доповненням до повного графа K_n буде цілком незв'язний граф N_n і, навпаки, доповненням до N_n буде повний граф K_n.

Маршрути, ланцюги, цикли

Нехай $G = (V, E)$ — довільний простий граф.

Означення 4.11. *Маршрутом в графі G називається скінченна послідовність ребер вигляду $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$, де $v_i \in V$. Маршрут позначається часто як*

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m,$$

де v_0 — початкова вершина, v_m — кінцева вершина маршруту. Тоді кажуть про маршрут із v_0 в v_m. Для зручності розглядається також тривіальний маршрут $v_0 \to v_0$, в якому немає ребер.

Довжиною маршруту називається число ребер в ньому, довжина тривіального маршруту, звичайно, покладається рівною 0.

Означення 4.12. *Маршрут називається ланцюгом, якщо всі його ребра різні.*

Ланцюг називається простим, якщо всі вершини $v_0, v_1, \ldots, v_m$ різні, крім можливо v_0 і v_m.

Ланцюг або простий ланцюг називається замкненим, якщо $v_0 = v_m$.

Означення 4.13. *Циклом називається замкнений простий ланцюг, який містить хоча б одне ребро (вважаємо, що петля також утворює цикл).*

Приклад 4.14. В графі, зображеному на Рис. 4.16 вкажемо при-

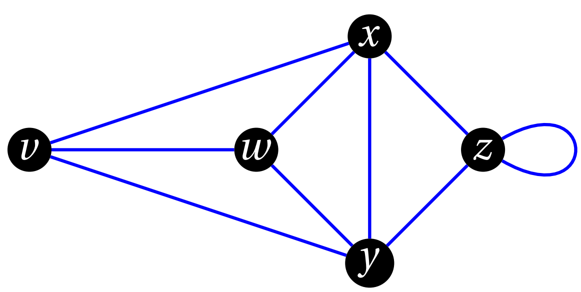


Рис. 4.16: Ланцюги в графі

клади ланцюга, простого ланцюга, замкненого ланцюга і циклу.

$v \to w \to x \to y \to z \to z \to x$ — ланцюг

$v \to w \to x \to y \to z$ — простий ланцюг

$v \to w \to x \to y \to z \to x \to v$ — замкнений ланцюг

$v \to w \to x \to y \to v$ – цикл.

Означення 4.14. *Граф* $G = (V, E)$ *називається зв'язним, якщо для будь-який двох його вершин* u *і* v *існує простий ланцюг, який з'єднує вершини* u *і* v.

Визначимо бінарне відношення $\sim$ на V за правилом: $v_1 \sim v_2$ тоді і тільки тоді, коли існує простий ланцюг $v_1 \to \ldots \to v_2$.

Задача. Довести, що $\sim$ — відношення еквівалентності на V.

Розглянемо який-небудь клас еквівалентності $[v]$ разом з ребрами, які з'єднують вершини із цього класу. Це буде деякий підграф із графа G, який називається компонентою зв'язності графа G. Оскільки класи еквівалентності $G_1, \ldots, G_k$ попарно не перетинаються, то граф G є об'єднанням $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ своїх компонент зв'язності.

Наприклад, на Рис. 4.17 зображено граф, який є об'єднання трьох своїх компонент зв'язності.

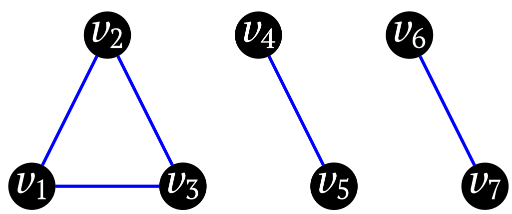


Рис. 4.17: Об'єднання компонент зв'язності графа

Означення 4.15. *Граф* G *називається незв'язним, якщо число його компонент звязності більше* 1.

Теорема 4.15. *Нехай* G *– простий граф з* n *вершинами і* k *компонентами. Тоді число* m *його ребер задовольняє нерівності*

$$n - k \leqslant m \leqslant (-n - k)(n - k + 1)/2$$

(без доведення).

Приклад 4.16. Покажемо, що в графі G, який має точно дві вершини непарного степеня, існує ланцюг, який їх з'єднує. Дійсно, нехай степені вершин u і v непарні і нехай, навпаки, u і

v не з'єднані жодним ланцюгом. Тоді вершина v не належить компоненті звязності V_1, яка містить вершину u. Всі вершини із V_1 мають парний степінь, крім вершини u, що суперечить наслідку із леми про рукопотискання. Отримана суперечність показує, що u і v з'єднані деяким ланцюгом.

4.2 Ойлерові графи

Означення 4.16. *Зв'язний граф G називається ойлеровим, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожне його ребро. Такий ланцюг називається ойлеровим.*

Граф називається напівойлеровим, якщо існує (не обов'язково замкнений) такий ланцюг.

Задача. Знайти необхідну і достатню умову, щоб заданий граф був ойлеровим.

Лема 4.17. *Якщо степінь кожної вершини графа G не менше 2, то граф G містить хоча б один цикл.*

Доведення. Якщо в G є петлі, або кратні ребра, то все очевидно. Тому вважаємо, що G – простий граф. Візьмемо довільну вершину v із G і побудуємо індуктивно маршрут $v \to v_1 \to v_2 \to \dots$ за правилом: вершину v_1 вибираємо суміжною з v, далі, якщо v_i вже вибрана, то v_{i+1} вибираємо суміжною з v_i і відмінною від v_{i-1}. Оскільки G має скінченне число вершин, то через деяке число кроків ми прийдемо до вершини, яка вже була вибрана раніше. Нехай v_k – перша із таких вершин. Тоді частина маршруту між двома входженнями v_k і є потрібним циклом. $\square$

Теорема 4.18. *Зв'язний граф G є ойлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна вершина в G має парний степінь.*

Доведення. Необхідність. Нехай P — ойлерів ланцюг в G. Тоді при проходженні P через довільну вершину $v \in V(G,E)$ степінь вершини збільшується на 2. Оскільки кожне ребро зустрічається в P точно 1 раз, то кожна вершина v має парну степінь.

Достатність. Нехай степінь кожної вершини графа G парний. Покажемо, що G — ойлерів граф. Індукція по числу ребер. Оскільки G зв'язний, то немає ізольованих вершин і тому $\deg v \geqslant 2$. За лемою 4.17 граф G деякий містить цикл C.

Якщо C проходить через кожне ребро графа G, то доведення завершене. Нехай це не так. Викинемо із G всі ребра, які належать циклу C. Отримаємо новий (можливо, незв'язний) граф H. Число ребер в H менше, а кожна вершина має парну степінь. За індуктивним припущенням в кожній компоненті зв'язності графа H існує ойлерів ланцюг. Далі, граф G був зв'язний, тому кожна компонента із H має хоча б одну спільну вершину з циклом C. Будуємо ойлерів ланцюг в G наступним чином: йдемо по ребрах циклу C доти, поки не зустрінемо неізольовану вершину H. Далі йдемо по ойлеровому ланцюгу в тій компоненті H, яка містить цю вершину, далі знову йдемо по ребрах циклу C, доки не зустрінемо вершину, яка лежить в іншій компоненті графа H і т.д. Процес закінчиться, коли ми прийдемо в початкову вершину із C (Рис. 4.18). $\square$

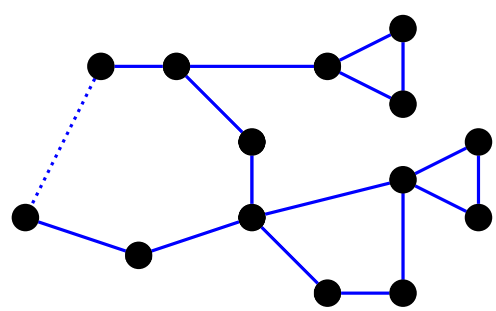


Рис. 4.18: Побудова ойлерового циклу

Наслідок 4.19. *Зв'язний граф є напівойлеровим тоді і тільки тоді, коли в ньому не більше двох вершин мають непарні степені.*

Доведення. Необхідність. Зрозуміло, що вершинами непарного степеня напівойлерового графа може бути лише початок і кінець напівойлерового ланцюга. Тому їх $\leqslant 2$.

Достатність. Приєднаємо до G додаткову вершину v і з'єднаємо v з двома вершинами непарного степеня. Тоді степінь кожної вершини нового графа є парним числом і за попередньою теоремою існує ойлерів цикл. Викинувши v і два ребра отримаємо напівойлерів ланцюг. □

4.3 Гамільтонові графи

Означення 4.17. *Простий цикл, що містить всі вершини графа називається гамільтоновим. Граф, що має гамільтоновий цикл називається гамільтоновим. Граф, який містить простий ланцюг, який проходить через всі вершини, називається напівгамільтоновим.*

Приклад 4.20. Вершини тетраедра і його ребра утворюють гамільтонів граф (Рис. 4.12).

Вершини куба і його ребра дають ще один приклад гамільтонового графа (Рис. 4.13).

На Рис. 4.19 наведено приклад напівгамільтонового, але не гамільтонового графа, а на Рис. 4.20 — приклад графа, що не є напівгамільтоновим і, відповідно, не є гамільтоновим.

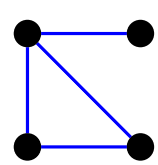


Рис. 4.19: Напівгамільтонів граф

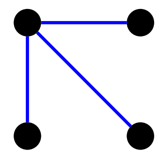


Рис. 4.20: Не гамільтонів граф

Назва гамільтонів граф виникла у зв'язку з тим, що знаменитий математик Вільям Гамільтон у 1859р. випустив у продажу іграшку — додекаедр з дерева. Кожна вершина була позначена назвою великого міста і потрібно без повторень пройти через всі міста.

На відміну від ойлерових графів невідомо, чи існує критерій гамільтоновості графа (це одна з основних задач теорії графів). Є лише деякі достатні умови.

Теорема 4.21 (Оре, 1960)**.** *Якщо в простому графі на n вершинах ($n \geqslant 3$) для довільним пари несуміжних вершин u, v виконується нерівність $\rho(n) + \rho(v) \geqslant n$, то граф є гамільтоновим.*

Доведення. Нехай G — простий граф з n вершинами, для якого виконується нерівність $\rho(n) + \rho(v) \geqslant n$. До графа G додамо k нових вершин і з'єднаємо кожну з них з кожною вершиною графа G, тобто розглянемо конкатенацію $G + N_k$. Якщо $k = n$, то отриманий граф $G + N_n$ завжди гамільтоновий, бо в цьому графі для побудови гамільтонового циклу достатньо брати по черзі вершини графа G і N_n. Нехай k – найменше число нових вершин, коли граф $G' = G + N_k$ є гамільтоновим. Покажемо, що $k = 0$. Від супротивного, припустимо, що $k > 0$ і отримаємо суперечність. Розглянемо гамільтонів цикл

$$u \to q \to v \to \ldots \to u$$

в графі G', де q — деяка нова вершина (Рис. 4.21).

За побудовою кожна "нова" вершина суміжна лише зі "старими" вершинами, тому u, v — вершини графа G. Зауважимо,

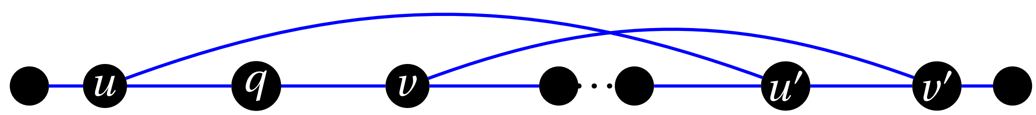


Рис. 4.21: Побудова гамільтонового циклу

що u, v не можуть бути суміжними інакше ми можемо видалити вершину q разом з інцидентними їй ребрами і замінивши ребра (u, q) і (q, v) ребром (u, v) отримаємо гамільтонів цикл в графі з числом вершин менше ніж в G'. Доведемо тепер, що довільна вершина v', суміжна з v не може слідувати в гамільтоновому циклі за вершиною u', яка суміжна з u. Дійсно, замкннений ланцюг

$$u \to q \to v \to \ldots \to u' \to v' \to \ldots \to u$$

можна перетворити наступним чином:

$$u \to u' \to v \to v' \to \ldots \to u$$

і обійтись без вершини q, що суперечить мінімальності числа k. Для довільної вершини x графа G' позначимо через $\rho'(x)$ і $\overline{\rho}'(x)$ відповідно степінь і число вершин, несуміжних з x. Оскільки в гамільтоновому циклі за кожною вершиною, суміжною з u слідує вершина, яка не суміжна з v, то $\overline{\rho}'(v) \geqslant \rho'(u)$. Далі, для кожної вершини графа G при переході до графа G' її степінь збільшується на k. Запишемо нерівності

$$n + k = \rho'(v) + \overline{\rho}'(v) \geqslant \rho'(v) + \rho'(u) =$$

$$= \rho(v) + k + \rho(u) + k \geqslant n + 2k.$$

Звідси випливає, що $n+k \geqslant n+2k$, що суперечить припущенню про те, що $k > 0$. Отримана суперечність показує, що $k = 0$ і тому граф G гамільтоновий. □

Наслідок 4.22 (Г.Дірак, 1952)**.** *Якщо в простому графі на n вершинах степінь кожної вершини $\geqslant n/2$, то граф є гамільтоновим.*

4.4 Дерева

Означення 4.18. *Граф без циклів називається ациклічним або лісом. Зв'язний граф без циклів називається деревом.*

Приклад 4.23. Граф, зображений на Рис. 4.22, є лісом, проте не є деревом. На Рис. 4.23 зображено дерево.

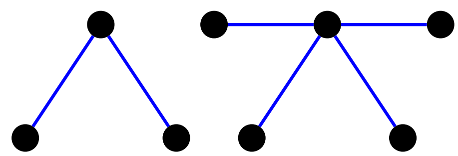


Рис. 4.22: Граф, що є лісом

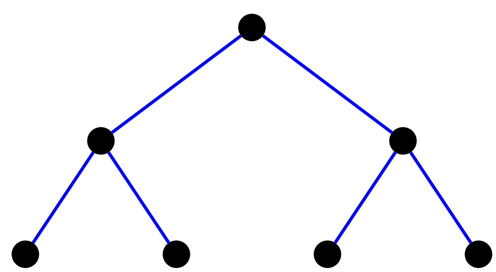


Рис. 4.23: Дерево

Приклад 4.24. Генеалогічне дерево.

Означення 4.19. *Ребро графа називається мостом, якщо після його видалення кількість компонентів зв'язності збільшується.*

Приклад 4.25. В графі, зображеному на Рис. 4.24, ребро e_1 є мостом, а ребро e_2 ні.

Лема 4.26. *Будь-яке ребро лісу є мостом.*

Доведення. Дійсно, нехай це не так і видалення ребра (v_1, v_2) не збільшує кількість компонент зв'язності. Тоді v_1, v_2 лежать

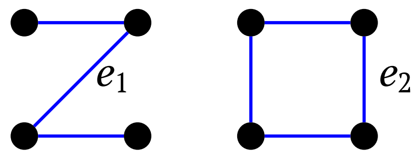


Рис. 4.24: Мости в графах

в одній компоненті зв'язності в новому графі і тому існує ще інший ланцюг $v_1 \to \ldots \to v_2$, крім ланцюга $v_1 \to v_2$. Тоді цей ланцюг, до якого дописаний ланцюг $(v_2 \to v_1)$ дають цикл, що неможливо. □

Теорема 4.27. *Нехай T – простий граф з n вершинами. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) *T є деревом;*
2) *T не містить циклів і має $n - 1$ ребро;*
3) *T зв'язний і має $n - 1$ ребро;*
4) *T зв'язний і кожне ребро є мостом;*
5) *Для будь-яких двох вершин графа T існує єдиний простий ланцюг, що з'єднує ці вершини;*
6) *T не містить циклів і крім того, додавання довільного одного ребра приводить до появи рівних одного циклу.*

Доведення. Схема доведення: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). За означенням граф T не містить циклів, нам потрібно довести, що T має $n - 1$ ребро. Індукція по кількості m ребер графа T. Якщо $m = 0$, то, оскільки T зв'язний, то він має одну вершину і $m = n - 1 = 0$. Нехай твердження справедливе для дерев, у яких кількість ребер $< m$. Викинемо із T яке-небудь одне ребро. За попередньою лемою отриманий граф T' вже незв'язний $T' = T_1 \cup T_2$, де дерева T_1, T_2 мають

менше ніж m ребер. Нехай T_1 має n_1 вершин і T_2 має n_2 вершин, $n = n_1 + n_2$. За індуктивним припущенням граф T_1 має $n_1 - 1$ ребро і T_2 має $n_2 - 1$ ребро. Тоді в графі $T' = T_1 \cup T_2$ буде $n_1 + n_2 - 2$ ребер. Але тоді в графі T буде $= n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$ ребер, коли ми повернемо одне викинуте ребро.

2) $\Rightarrow$ 3). Нам дано, що граф T не містить циклів і має $n - 1$ ребро, і нам потрібно лише довести, що T є зв'язним графом. Нехай $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$ – розклад T на компоненти зв'язності. Оскільки T_i не містять циклів, то всі T_i є деревами. За доведеним в п. 1) $\Rightarrow$ 2) маємо, що кількість ребер T_i з n_i вершинами дорівнює $n_i - 1$, $i \geqslant 1$. Тоді загальна кількість ребер

$$n - 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i - 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k.$$

З іншого боку, кількість ребер в графі T дорівнює $n - 1$. Із рівності $n - k = n - 1$ отримаємо, що $k = 1$, тобто число компонент звязності дорівнює 1 і T – зв'язний граф.

3) $\Rightarrow$ 4). Нам дано, що граф звязний і має $n - 1$ ребро. Припустимо від супротивного, що існує ребро, яке не є мостом. Після викидання цього ребра в T буде $n - 2$ ребра і він залишиться зв'язним. Скористаємося нерівностями для кількості ребер m для графа на n вершинах з k компонентами звязності із теореми 4.15

$$n - k \leqslant m \leqslant (n - k)(n - k + 1)/2.$$

Тоді отримаємо

$$n - k \leqslant n - 2 \leqslant (n - k)(n - k + 1)/2.$$

З цієї нерівності випливає, що $n - 1 \leqslant n - 2$, що неможливо. Отримана суперечність доводить цю імплікацію.

4) $\Rightarrow$ 5). Нам дано, що T зв'язний і кожне його ребро є мостом. Покажемо, що будь-які дві вершини звязані точно

одним ланцюгом. Оскільки T – зв'язний, то для будь-яких двох вершин існує простий ланцюг, що з'єднує ці вершини. Якщо існують два таких ланцюги, то будь-яке ребро, яке входить в один ланцюг і не входить в інщий, очевидно не є мостом, що суперечить припущенню. Тому існує точно один ланцюг.

5) $\Rightarrow$ 6). Дано, що будь-які дві вершини графа з'єднані точно одним ланцюгом. Очевидно, що T не містить циклів, бо цикл дає 2 вершини, які з'єднані 2-ма ланцюгами. Оскільки довільні 2 вершини з'єднані простим ланцюгом то додавання ребра, інцидентного цим вершинам, призведе до появи циклу. Декілька циклів можуть з'явитися лише при умові, що вказані вершини з'єднані декількома простими ланцюгами, що неможливо за умовою.

6) $\Rightarrow$ 1). Потрібно лише довести зв'язність графа T. Припустимо, що граф незв'язний. Тоді додавання нового ребра, яке з'єднує вершини із різних компонент не призводить до появи циклу, що суперечить припущенню. Отримана суперечність показує, що граф зв'язний □

Наслідок 4.28. *Кількість ребер лісу на n вершинах з k компонентами зв'язності дорівнює $n - k$.*

Приклад 4.29. Покажемо, що кожне дерево має хоча б дві висячі вершини. Дійсно, нехай G — дерево на n вершинах. Якщо $n = 2$, то все очевидно. Нехай $n \geqslant 3$. Індукція по числу вершин дерева. Нехай від супротивного G має точно одну висячу вершину v. Видалимо вершину v із графа G разом з інцидентним їй ребром. Отримаємо звязний граф G_1, у якого $n - 1$ вершина і $n - 2$ ребра (бо у графа G було $n - 1$ ребро). Тому G_1 – дерево і за індуктивним припущення має хоча дві висячі вершини v_1 і v_2. Приєднання ребра і вершини v може одну із цих висячих вершин перетворити в невисячу вершину, але залишиться ще одна висяча вершина, яка разом з вершиною v дає дві висячі вершини.

Означення 4.20. *Нехай G — простий скінченний граф. Кістяковим деревом (spanning tree) графа G називається такий підграф T, що T містить усі вершини графа G і є деревом.*

Наприклад, для графа, зображеного на Рис. 4.19, граф, зображений на Рис. 4.20 буде кістяковим деревом.

Теорема 4.30. *Нехай G — зв'язний простий скінченний граф. Тоді G містить кістякове дерево.*

Доведення. Якщо граф G є ациклічним, то він сам є кістяковим деревом.

Припустимо, що G містить принаймні один цикл. Тоді, вилучивши довільне ребро цього циклу, отримаємо зв'язний підграф з тією ж множиною вершин, а кількість ребер якого буде меншою, ніж у початкового графа G. Продовжуючи так далі, за скінченне число кроків отримаємо кістякове дерево. □

Задачі.

1) Фермер купив курку. Після того, вона знесла 2 яйця, її з'їли. Із яєць вивелися курчата. Півнів з'їдали одразу, а курочок після того як вони знесли 2 яйця і т.д. В деякий момент вивелися одні півні і процес закінчився. Скільки курочок було з'їдено, якщо з'їли 97 півнів.

2) Довести, що дерево має точно 2 висячі вершини тоді і тільки тоді, коли воно є простим ланцюгом.

3) Довести, що в будь-якому графі, який має не менше двох вершин знайдуться дві вершини однакового степеня.

4) Довести, що кожне дерево є дводольним графом. Які дерева є повними дводольними графами?

5) Довести, що в непустому дводольному графі долі містять однакове число вершин.

6) Довести, що в групі із 6 людей завжди знайдуться три людини, які попарно знайомі між собою, або три людини, які попарно незнайомі між собою.

Розділ 5

Комбінаторика II

5.1 Степеневі ряди. Генератриси

Степеневі ряди

Нехай ми маємо нескінченну числову послідовність

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

де $a_i \in \mathbb{R}$ або $a_i \in \mathbb{C}$. Запишемо за цією послідовністю вираз (формальну суму) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Такі суми (вирази) називаються числовими рядами і позначаються $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Означення 5.1. *Нехай $S_n = a_1 + \dots + a_n$ – часткова сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$. Якщо існує скінченна границя $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, а число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називається його сумою. Якщо ж така границя не існує або дорівнює ∞, то ряд називається розбіжним.*

Приклад 5.1. Нехай $1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ – нескінченна геометрична прогресія. Припустимо, що $|q|<1$. Покажемо, що тоді ряд збіжний і знайдемо його суму. Маємо

$$S_n = 1+\ldots+q^{n-1},\ qS_n = q+q^2+\ldots+q^n.$$

Звідси $S_n - qS_n = 1 - q^n$ і тому $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Але тоді ряд збіжний і

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Зокрема,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots = S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Якщо $q=1$, то маємо $1+1+\ldots+1+\ldots = S_n = n$ і тому $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Ряд розбіжний.

Задача.

Чи буде збіжним ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1} = 1-1+1-1+\ldots$?

Означення 5.2. *Степеневим рядом називається ряд вигляду*

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_k t^k,$$

де $a_i \in \mathbb{R}$ або $a_i \in \mathbb{C}$. Якщо ми покладемо $t = t_0 \in \mathbb{R}$ (або $\in \mathbb{C}$), отримаємо числовий ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k (t_0)^k$. Множина всіх таких t_0, для яких останній числовий ряд є збіжним, називається областю збіжності степеневого ряду.

Зауваження 5.1. Область збіжності степеневого ряду $\neq 0$(чому?). В загальному випадку область збіжності степеневого ряду є інтервал $(-R, R)$ з можливим включенням крайніх точок.

В подальшому ми не будемо звертати увагу на збіжність степеневих рядів, а будемо працювати з ними як з алгебраїчними або комбінаторним об'єктами.

Означення 5.3. *(1) Сумою двох степеневих рядів*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \ g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

називається степеневий ряд вигляду $f + g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k$.

(2) Добутком цих рядів називається степеневий ряд вигляду $fg = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, *де*

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0.$$

Це означає, що ряди перемножаються як "довгі" многочлени, ми збираємо коефіцієнти при однакових степенях t. Зауважимо також, що $f(t) = g(t) \Leftrightarrow a_i = b_i$ для всіх $i = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$.

Твердження 5.1. *Множина всіх степеневих рядів з дійсними або комплексними коефіцієнтами (позначається* $\mathbb{R}[[t]]$ *або* $\mathbb{C}[[t]]$*) утворює кільце відносно операцій додавання і множення. Нульовий елемент цього кільця – це ряд з нульовими коефіцієнтами, одиничний елемент, це ряд* $1 + 0t + 0t^2 + \ldots + 0t^n + \ldots$ *Зауважимо, що кожен многочлен є степеневим рядом і тому* $\mathbb{R}[t] \subset \mathbb{R}[[t]]$.

Теорема 5.2. *Ряд* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *є оборотнім в кільці* $\mathbb{R}[[t]]$ *(тобто* $\exists$ *ряд* $g(t) : f(t)g(t) = 1$*) тоді і тільки тоді, коли* $a_0 \neq 0$.

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай для ряду $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ існує обернений ряд

$$g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Тоді для добутку fg маємо

$$1 = f(t)g(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots +,$$

де $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots$ З рівності рядів

$$1 + 0t + 0t^2 + \cdots + = c_0 + c_1 t + \cdots +$$

отримаємо $c_0 = a_0 b_0 = 1$. Тому $a_0 \neq 0$.

$\Leftarrow$ Нехай тепер $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ і $a_0 \neq 0$. Побудуємо ряд $f^{-1} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$ такий, що $ff^{-1} = 1$. З рівності $ff^{-1} = 1$ отримаємо $a_0 b_0 = 1$ і тому $b_0 = a_0^{-1}$. Далі $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$, як коефіцієнт при t в ряді $1 = 1 + 0t + 0t^2 + \cdots \ldots$ Звідси отримаємо $b_1 = -a_0^{-1}(-a_1 b_0)$. Далі $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$ і тому $b_2 = a_0^{-1}(-a_1 b_1 - a_2 b_0)$ і аналогічно з рівності $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0$ отримаємо, що

$$b_n = a_0^{-1}(-a_1 b_{n-1} - a_2 b_{n-2} - \ldots - a_n b_0).$$

Тому існує степеневий ряд $f^{-1} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$, який є оберненим до ряду $f(t)$. При цьому ми навіть вказали спосіб, як послідовно знаходити коефіцієнти оберненого ряду. $\square$

Приклад 5.3. Покажемо, що оберненим до ряду $(1-t)^n$ (це насправді многочлен) є наступний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} t^k,$$

тобто

$$\frac{1}{(1-t)^n} = 1 + \binom{n}{1}t + \binom{n+1}{2}t^2 + \cdots + \binom{n+k-1}{k}t^k + \cdots .$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції. При $n = 1$ це випливає з попереднього прикладу. Нехай ця формула виконується для n, доведемо її для $n + 1$. Тоді

$$\frac{1}{(1-t)^{n+1}} = \frac{1}{(1-t)^n}\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} t^k \sum_{l=0}^{\infty} t^l.$$

Перемножимо ці ряди і зберемо коефіцієнти при відповідних степенях t. Коефіцієнт при t^k дорівнює:

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k.$$

Згорнемо цю суму, використовуючи рівність $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Отримаємо:

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_n^0 + C_n^1 = C_{n+1}^1.$$

Далі $C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^2$ і т.д. Тому коефіцієнт при t^k дорівнює C_{n+k}^k Таким чином $\dfrac{1}{(1-t)^{n+1}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^k t^k$ Це доводить нашу рівність.

Приклад 5.4. Біноміальний ряд Ньютона.

Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$. Тоді має місце формула

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}t^k = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3+\ldots$$

Цей ряд буде досліджуватися в курсі математичного аналізу.

Приклад 5.5. Використовуючи біноміальний ряд легко вказати наближені формули для знаходження квадратних і кубічних коренів із натуральних чисел (із дійсних також). Знайдемо наближено, наприклад, $\sqrt{10}$ використовуючи цю формулу. Запишемо 10 у вигляді суми найближчого квадрата і деякого натурального числа, тобто $10 = 9 + 1$. Тоді

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = 3\sqrt{1+1/9} = 3(1 + (1/2)(1/9) + \ldots + \approx$$

$$\approx 3(1 + 1/18) \approx 3(1.0555) \approx 3.1666.$$

Обчислення за допомогою інженерного калькулятора дає приблизне значення 3.1623. Зауважимо, що біноміальний ряд абсолютно збіжний при при $|t| < 1$, можна також оцінити і похибку при наближених обчисленнях.

Генератриси (твірні функції)

Нехай ми маємо послідовність $\{a_n\} = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$.

Означення 5.4. *Генератрисою (або твірною функцією) послідовності $\{a_n\}$ називається степеневий ряд (або його сума) вигляду:* $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Приклад 5.6. Генератриса стаціонарної послідовності $a, a, a, \ldots a, \ldots$ дорівнює

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a t^n = a \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Знайдемо компактний запис для ряду $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Маємо $S(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots$. Домножимо обидві частини цієї рівності на t. Отримаємо

$$tS(t) = t + t^2 + t^3 + \cdots t^n + t^{n+1} + \cdots .$$

Віднімаючи почленно від першої рівності другу рівність отримаємо $S(t) - tS(t) = 1$. Тому $S(t) = 1/(1-t)$. Звідси випливає, що $A(t) = a/(1-t)$.

Приклад 5.7. Генератрисою послідовності $C_\alpha^0, C_\alpha^1, ..., C_\alpha^n, ...$ є функція

$$A(t) = (1+t)^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + ... + \binom{\alpha}{n}t^n + ...$$

Генератриси були відкриті Й. Бернуллі і Дж. Стірлінгом.

> Генератриса частково нагадує мішок. Замість того, щоб нести окремо багато предметів, що може бути важко, ми збираємо їх разом і тоді нам потрібно нести лише один предмет - мішок. (Дж. Пойя)

Твердження 5.2. *Нехай генератриса послідовності $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ дорівнює $A(t)$. Тоді*

1) Генератриса зсунутої на k позицій послідовності

$$\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{k}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

дорівнює $t^k A(t)$;

2) Генератриса послідовності $\{c_n = na_n\}$, тобто, послідовності

$$0a_0, 1a_1, 2a_2, \ldots, na_n, \ldots$$

дорівнює $C(t) = tA'(t)$;

Доведення. □

1) Запишемо генератрису зсунутої послідовності

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k}.$$

Зробимо заміну $r = n - k$. Тоді

$$C(t) = \sum r = 0^{\infty} a_r t^{k+r} = t^k \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r = t^k A(t).$$

2) Продиференціюємо обидві частини рівності $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ по t почленно

$$A'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} =$$

$$= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + n a_n t^{n-1} + \cdots = (1/t)C(t).$$

Означення 5.5. *Композицією (або згорткою) послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ називається послідовність $\{c_n\}$, де*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Позначення для згортки послідовностей $\{c_n\} = \{a_n\} \star \{b_n\}$.

Теорема 5.8. *Нехай генератриси послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дорівнюють $A(t)$ і $B(t)$ відповідно, а послідовність $\{c_n\}$ є згорткою послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$. Тоді генератриса послідовності $\{c_n\}$ дорівнює $C(t) = A(t)B(t)$, тобто генератриса згортки дорівнює добутку генератрис.*

Доведення. Знайдемо коефіцієнт при t^n в добутку рядів, які відповідають послідовностям $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, тобто в

$$A(t)B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^n \sum_{s=0}^{\infty} b_s t^s.$$

Цей коефіцієнт, очевидно, дорівнює $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Тому добуток $A(t)B(t)$ є генератрисою згортки $\{a_n\} \star \{b_n\}$. □

Формули обертання

Розглянемо спочатку деякі приклади.

Приклад 5.9. Нехай ми маємо послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ і стаціонарну послідовність $\{1\}_{n=0}^{\infty}$. Тоді $\{a_n\}*\{1\}$ – послідовність $\{c_n\}$, де $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ – це послідовність часткових сум ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$. Тому, якщо генератриса для $\{a_n\}$ дорівнює $A(t)$, то за вказаною вище теоремою генератриса для послідовності часткових сум $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n$ дорівнює $S(t) = A(t)\dfrac{1}{1-t} = \dfrac{A(t)}{1-t}$ (раніше було відзначено, що генератриса послідовності $\{1\}_{n=0}^{\infty}$ дорівнює $1/(1-t)$).

Приклад 5.10. Знайдемо послідовність $\{a_n\}$ таку, що $a_0 = 1$ і $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1$ для всіх натуральних $n \geqslant 1$. Це означає, що $\{a_n\} * \{a_n\} = \{1\}$. Якщо генератриса для $\{a_n\}$ дорівнює $A(t)$, то тоді $A(t) * A(t) = \dfrac{1}{1-t}$, тобто $A(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$. Запишемо формальний степеневий ряд для $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ за біноміальною формулою при $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

де

$$a_n = (-1)^n C_{-\frac{1}{2}}^{n} = \frac{(-1)^n(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}.$$

В інших позначеннях $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!}$.

Твердження 5.3. *1) Нехай $\{c_n\}$ – така послідовність, що $c_0 \neq 0$. Тоді існує єдина послідовність $\{c'_n\}$ така, що*

$$\sum_{k=0}^{n} c'_k c_{n-k} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \neq 0; \\ 1, & \text{якщо } n = 0. \end{cases}$$

(Послідовність $\{c'_n\}$ називається двоїстою до $\{c_n\}$).

2) Далі, якщо послідовності $\{A_n\}$ і $\{B_n\}$ пов'язані співвідношенням $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k A_{n-k}$ для всіх n, то $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c'_k B_{n-k}$ для всіх n.

Доведення. 1. Оскільки $c_0 \neq 0$, то генератриса $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ має обернений в $\mathbb{R}[[t]]$, позначимо цей обернений ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c'_k t^k$. Очевидно, $\{c'_n\}$ двоїста послідовність до $\{c_n\}$.

2. З умови випливає, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n.$$

Домножимо обидві частини цієї рівності на ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} c'_k t^s$. Отримаємо

$$(\sum_{s=0}^{\infty} c'_k t^s)(\sum_{k=0}^{\infty} B_k t^s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n.$$

Звідси випливає, що $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c'_k B_{n-k}$ для всіх n.

□

Приклад 5.11. Розглянемо послідовність $\{c_n\} = \{C_m^0, C_m^1, \dots, {}^n_m, \dots\}$ Знайдемо для неї двоїсту послідовність. Генератриса для $\{c_n\}$ це буде

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_m^k t^k = (1+t)^m.$$

Тоді $C(t)^{-1} = (1+t)^{-m}$. Але $(1+t)^{-m} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{-m}^k t^k$. Тому, зауваживши, що

$$C_{-m}^n = \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-n+1)}{n!} = (-1)^n C_{m+n-1}^n$$

отримаємо, що двоїста послідовність має наступний вигляд $\{c'_n\} = (-1)^n C_{m+n-1}^n$.

Теорема 5.12. *Нехай задано дві послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ і нехай для всіх натуральних n виконується $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_m^k a_{n-k}$. Тоді*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{m+k-1}^k b_{n-k}.$$

Доведення. Із попереднього прикладу ми бачимо, що $\{b_n\} = \{C_m^n\} * \{a_n\}$ Оскільки двоїстою послідовністю до $\{C_m^n\}$ є послідовність $\{(-1)^n C_{m+n-1}^n\}$, то

$$\{a_n\} = \{(-1)^n C_{m+n-1}^n\} * \{b_n\}.$$

□

Означення 5.6. *Нехай $\{a_n\} = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ – довільна послідовність. Експоненційною генератрисою цієї послідовності називається ряд $\widetilde{A}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} t^n$.*

Приклад 5.13. Нехай $\{a_n\} = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ – стаціонарна послідовність. Тоді

$$\widetilde{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n = e^t$$

(звідси назва "експоненційна генератриса").

Означення 5.7. *Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ – дві послідовності. Біноміальною згорткою або композицією цих послідовностей називається послідовність $\{c_n\} = \{a_n\} \circledast \{b_n\}$, де $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_{n-k}$.*

Теорема 5.14. *Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ – послідовності з експоненційними генератрисами $\widetilde{A}(t)$ і $\widetilde{B}(t)$ відповідно. Тоді експоненційна генератриса біноміальної згортки $\{a_n\} \circledast \{b_n\}$ дорівнює добутку $\widetilde{A}(t)\widetilde{B}(t)$ експоненційних генератрис послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ відповідно.*

Доведення. Знайдемо $\widetilde{A}(t)\widetilde{B}(t)$ як добуток рядів

$$\widetilde{A}(t)\widetilde{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \Big) t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b_{n-k} \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b_{n-k} \Big).$$

Позначивши $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b_{n-k}$ отримаємо, що

$$\widetilde{A}(t) \cdot \widetilde{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$$

– експоненційна генератриса біноміальної згортки. □

Наслідок 5.15. *Якщо* $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k A_k$ *для всіх* n*, то виконується рівність* $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k B_k$.

Доведення. Нагадаємо, що експоненційна генератриса для сталої послідовності $\{1\}$ дорівнює e^t, а для знакозмінної послідовності $\{(-1)^n\}$ дорівнює e^{-t}. Рівність $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k A_k$ означає, що $\{B_n\} = \{1\} \circledast \{A_n\}$. Тому $\widetilde{B}(t) = e^t \widetilde{A}(t)$. Звідси отримаємо рівність $\widetilde{A}(t) = e^{-t}\widetilde{B}(t)$. Тому $\{A_n\} = \{(-1)^n\} \circledast \{B_n\}$. □

Приклад 5.16. Знайдемо експоненційну генератрису послідовності натуральних чисел $\{n\}_{n=0}^{\infty}$. За означенням маємо

$$\widetilde{N}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} t^n = 0 + t + t^2 + \frac{t^3}{2!} + \frac{t^4}{3!} + \cdots + .$$

Тому $N(t) = t(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots +) = te^t$.

5.2 Рекурентні послідовності

Означення 5.8. *Послідовність* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *називається рекурентною, якщо задано перші* k *членів* $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$*, а наступні члени визначаються через* k *попередніх членів і через номер члена послідовності за правилом:* $a_{n+k} = R(n, a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n)$, $n \geqslant 0$*, де* R *– деяка відома функція.*

Надалі ми будемо розглядати лінійні рекурентні співвідношення k-го порядку, де R – деяка лінійна функція від y_{n+k-1}, $y_{n+k-2}, \ldots, y_n$, яка явно не залежить від n. Тоді таке рекурентне співвідношення може бути записане у вигляді

$$y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + c_2 y_{n+k-2} + \cdots + c_k y_n = 0. \qquad (5.1)$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – задані константи. Число k називається **порядком** лінійного рекурентного співідношення. Ми обмежуємося лише однорідними лінійними рекурентними співвідношеннями, для яких права частина 5.1 нульова, але ця частина може бути деякою функцією від n в загальному випадку.

Розв'язок цього лінійного рекурентного співідношення – це послідовність $\{a_n\}$ така, що підстановка a_n замість y_n в 5.1 дає рівність для будь-якого $n \geqslant 0$. Якщо $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ –два розв'язки 5.1, то, як неважко переконатися, $\{a_n + b_n\}$ і $\{da_n\}$ також розв'язки 5.1. Тому множина всіх розв'язків лінійного рекурентного співвідношення утворює векторний простір V над полем дійсних чисел. Очевидно, V – підпростір векторного простору $\mathbb{R}^\infty$ всіх нескінченних послідовностей.

Приклад 5.17. Покажемо, що розмірність V не перевищує числа k. Припустимо від супротивного, що в просторі V існує $k+1$ лінійно незалежних розв'язків 5.1. Нехай це послідовності $\{a_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, \ldots k+1$. Оскільки вектори $\{a_n^{(i)}\}_{n=0}^{k}$, $i = 1, \ldots k+1$ довжини k лінійно залежні, то існують числа $\mu_1, \ldots, \mu_{k+1}$ не всі рівні нулі і такі, що

$$\mu_1\{a_n^{(1)}\}_{n=0}^{k} + \cdots + \mu_{k+1}\{a_n^{(k+1)}\}_{n=0}^{k} = \{0\}.$$

Але тоді лінійна комбінація розв'язків 5.1 з коефіцієнтами μ_1, $\ldots, \mu_{k+1}$ є ненульовою послідовністю і містить нулі на перших k позиціях. Але це неможливо, бо тоді будь-який член цієї послідовності нульовий з огляду на 5.1. Отримана суперечність показує, що V – підпростір розмірності $\leqslant k$ (насправді, $\dim V = k$, але ми цього не будемо доводити).

За рекурентним співвідношенням 5.1 запишемо формулу загального члена послідовності $\{y_n\}$ в залежності від номера n. Для розв'язання цієї задачі розглянемо генератрису цієї послідовності $Y(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n t^n$. Для вивчення цієї генератриси нам потрібне наступне поняття.

Означення 5.9. *Характеристичним многочленом лінійного рекурентного співідношення 5.1 називається многочлен степеня n вигляду*

$$f(t) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k.$$

Нагадаємо, що зворотнім до многочлена $f(t) = t^k + c_1t^{k-1} + c_2t^{k-2} + \cdots + c_k$ називається многочлен $g(t) = 1 + c_1t + c_2t + ... + c_kt^k$. Зауважимо, що тоді при $t \neq 0$ виконується рівність $g(t) = t^k f(\frac{1}{t})$.

Теорема 5.18. *Генератриса послідовності $\{y_n\}$, яка задовольняє лінійне рекурентне спiввiдношення 5.1 є деякою раціональною функцією від t.*

Доведення. Для зворотнього многочлена $g(t)$ позначимо вільний член 1 через c_0 і розглянемо добуток

$$Y(t)g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i t^i \sum_{j=0}^{k} c_j t^j.$$

Для зручності запишемо 5.1 у вигляді $\sum\limits_{j=0}^{k} c_j y_{n+k-j} = 0$ і позначимо $n + k = m$. Отримаємо:

$$\sum_{j=0}^{k} c_j y_{m-j} = 0 \text{ при } m \geqslant k.$$

Тоді виконуються рівності

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i t^i \sum_{j=0}^{k} c_j t^j = \sum_{m=0}^{k-1} (\sum_{j=0}^{m} c_j y_{m-j}) t^m + \sum_{m=k}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} c_j y_{m-j}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} (\sum_{j=0}^{m} c_j y_{m-j}) = \sum_{m=0}^{k-1} d_m t^m.$$

Тут d_m визначаються за коефіцієнтами c_i і за $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$.

Ми довели, що $Y(t)g(t) = Q(t)$, де $Q(t)$ - многочлен степеня $\leqslant k-1$. Звідси випливає, що $Y(t) = \dfrac{Q(t)}{g(t)}$ – правильний раціональний дріб.

$\square$

Щоб знайти генератрису $Y(t)$ у явному вигляді ми розкладаємо $\dfrac{Q(t)}{g(t)}$ в суму елементарних дробів над $\mathbb{C}$ вигляду $\dfrac{a_{ij}}{(t-\lambda_i)^j}$ (ми вважаємо, що коефіцієнти многочленів $Q(t)$ і $g(t)$ – комплексні числа). Далі, кожен найпростіший дріб $\dfrac{a_{ij}}{(t-\lambda_i)^j}$ записуємо як суму ряду, користуючись біноміальним рядом для $(1-t)^{-j}$. Сума отриманих рядів дає нам запис раціональної функції $\dfrac{Q(t)}{g(t)}$ в загальному випадку у вигляді ряду з комплексними коефіцієнтами. Виділяючи дійсну і уявну частину цього ряду ми отримаємо два ряди з дійсними коефцієнтами, які вже дозволять нам знайти компактну формулу для членів послідовностей, які задовольняють рекурентне співідношення 5.1.

Для знаходження послідовностей $\{y_n\}$, які задовольняють лінійне рекурентне співідношення 5.1 вигляду

$$y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + c_2 y_{n+k-2} + \dots + c_k y_n = 0$$

записуємо характеристичний многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \dots + c_k.$$

Наступне твердження показує, що кожному кореню цього многочлена вже відповідає хоча б один розв'язок співдношення 5.1.

Твердження 5.4. *Нехай λ – корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$ послідовності 5.1. Тоді для довільної константи d послідовність $\{d\lambda^n\}$ задовольняє рекурентне співвідношення 5.1.*

Доведення. Підставимо $d\lambda^n$ в 5.1. Отримаємо

$$d\lambda^{n+k} + c_1 d\lambda^{n+k-1} + c_2 d\lambda^{n+k-2} + \ldots + c_k d\lambda^n =$$
$$= d\lambda^n(\lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + \ldots + c_k) = 0.$$

□

Якщо корені характеристичного многочлена однократні, то попереднє твердження дає можливість записати загальний розв'язок 5.1.

Теорема 5.19. *Нехай характеристичний многочлен*

$$f(\lambda) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + \ldots + c_k$$

має лише однократні корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Тоді загальний розв'язок рекурентного співвідношення 5.1 має вигляд

$$(C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n),$$

де $C_1, \ldots, C_k$ – довільні константи.

Доведення. За доведеним вище $\{c_i\lambda_i^n\}, i = 1, \ldots, k$ задовольняє співвідношення 5.1. Із лінійності рекурентного співвідношення випливає, що послідовність $(C_1\lambda_1^n + \cdots + C_k\lambda_k^n)$ також задовольняє 5.1.

В векторному просторі R^∞ всіх послідовностей $a_0, a_1, \ldots$ геометричні прогресії $\{\lambda_1^n\}, \ldots, \{\lambda_k^n\}$ лінійно незалежні (довести самостійно). Але за доведеним вище простір розв'язків рекурентного співвдношення розмірність не більше ніж k . Тому довільний розв'язок 5.1 має вигляд $C_1\{\lambda_1^n\} + \cdots + C_k\{\lambda_k^n\}$. □

Приклад 5.20. Знайдемо загальний член a_n послідовності $\{a_n\}$ за рекурентним співвідношенням другого порядку

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0, a_0 = 10, a_1 = 16.$

Запишемо характеристичний многочлен $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ цього співідношення. Корені многочлена: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Тоді за теоремою 5.19 загальний член послідовності має вигляд: $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1 + C_2 3^n$. Щоб знайти значення констант C_1 і C_2 скористаємося початковими умовами при $n = 0$ і $n = 1$. Тоді при $n = 0$ маємо $a_0 = C_1 + C_2 = 10$; при $n = 1$ відповідно

$$a_1 = C_1 + 3C_2 = 16;\ 2C_2 = 6, c_2 = 3, C_1 = 7.$$

Відповідь: $a_n = 7 + 3^{n+1}$.

Приклад 5.21. Покажемо, що для кожного натурального $n \geqslant 1$ число $((3+\sqrt{17})/2)^n + ((3-\sqrt{17})/2)^n$є цілим і непарним. Дійсно, числа $\lambda_1 = (3+\sqrt{17})/2$ і $\lambda_2 = (3-\sqrt{17})/2$ задовольняють квадратне рівняння $z^2 - 3z - 2 = 0$, бо $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$ і $\lambda_1\lambda_2 = -2$. За цим рівнянням запишемо лінійне рекурентне співвідношення $a_{n+2} - 3a_{n+1} - 2a_n = 0$. Загальний розв'язок цього співвідношення $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ і в нашому випадку $C_1 = 1, C_2 = 1$. Тоді $a_0 = C_1\lambda_1^0 + C_2\lambda_2^0 = C_1 + C_2 = 2$ і при $n = 1$ отримаємо $a_1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 3$. Тоді $a_2 = 3a_1 + 2a_0 = 13$. Тому число $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ завжди ціле і непарне, бо $2a_n$ – парне, $3a_{n+1}$ непарне.

Зауваження 5.2. Якщо характеристичний многочлен

$$f(t) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k$$

лінійного рекурентного співвідношення

$$y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + c_2 y_{n+k-2} + \cdots + c_k y_n = 0$$

має кратні корені, то ситуація трохи ускладнюється: нехай, наприклад, λ_1 є коренем кратності s характеристичного многочлена. Тоді цьому кореню відповідають s лінійно незалежних розв'язків рекурентного співвідношення вигляду: $\{{\lambda_1}^n\}$, $\{n{\lambda_1}^n\}, \ldots, \{n^{s-1}{\lambda_1}^n\}$.

Приклад 5.22. Знайдемо розв'язок лінійного рекурентного співвідношення другого порядку

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0,\ a_0 = 0, a_1 = 2.$$

Для цього запишемо характеристичне рівняння цього співвідношення $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Це рівняння має один корінь $\lambda = 3$ кратності 2. З урахуванням попереднього зауваження загальний розв'язок рекурентного співвідношення буде мати вигляд $a_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$, де C_1, C_2 – довільні константи. За умовою при $n = 0$ маємо рівність $0 = a_0 = C_1 3^0 + C_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = C_1$, тобто $C_1 = 0$. При $n = 1$ маємо $2 = a_1 = C_1 3^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 3C_2$. Звідси отримаємо $C_2 = 2/3$. Таким чином, розв'язок рекурентного співвідношення має вигляд $a_n = (2/3) n 3^n = 2n 3^{n-1}$.

Приклад 5.23. Знайдемо загальний розв'язок лінійного рекурентного співвідношення $a_{n+2} + a_n = 0$. Характеристичний многочлен цього співвідношення $\lambda^2 + 1$ має два корені $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Тому загальний розв'язок має вигляд $C_1 i^n + C_2(-i)^n$. Знайдемо дійсний розв'язок. Для цього зауважимо, що

$$i = \exp(i\pi/2), -i = \exp(-i\pi/2)$$

і тому

$$i^n = \exp(i\pi n/2), (-i)^n = \exp(-i\pi n/2).$$

Але $\exp(i\pi n/2) = \cos(\pi n/2) + i \sin(\pi n/2)$ і

$$\exp(-i\pi n/2) = \cos(\pi n/2) - i \sin(\pi n/2).$$

Звідси випливає, що послідовності

$$\alpha_n = \cos(\pi n/2) + i \sin(\pi n/2),\ \beta_n = \cos(\pi n/2) - i \sin(\pi n/2)$$

є розв'язками нашого рекурентного співвідношення. Зауважимо, що

$$\cos(\pi n/2) = \frac{(\alpha_n + \beta_n)}{2},\ \sin(\pi n/2) = \frac{(\alpha_n - \beta_n)}{2i}.$$

Але тоді, як відзначалося раніше. послідовності $\{\cos(\pi n/2)\}$, $\{\sin(\pi n/2)\}$ також є розв'язками цього співвідношення. Тому загальний розв'язок у дійсному випадку можна записати у вигляді $y_n = C_1 \cos(\pi n/2) + C_2 \sin(\pi n/2)$.

Числа Фібоначчі

Задача Фібоначчі. "Пару кроликів помістили в місці, обгородженому з усіх сторін стіною, щоб дізнатися, скільки пар кроликів народиться при цьому впродовж року. Природа кроликів така, що через місяць пара кроликів народжує на світ іншу пару, а народжують кролики після другого місяця від свого народження."

На другому місяці – все ще одна пара.

На третьому місяці – дві пари.

На четвертому місяці – три пари.

На п'ятому місяці – п'ять пар

Нехай F_i – число пар на i-тому місяці. Тоді

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Тому рекурентне спiвiдношення, яка визначає числа Фібоначчі F_n має вигляд

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, \ a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Запишемо характеристичний многочлен цього співвідношення

$$f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Корені цього многочлена наступні:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} : \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Тому загальний член послідовності має вигляд

$$a_n = C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Знайдемо C_1 і C_2. З початкових умов маємо

$$a_0 = C_1 + C_2 = 0, a_1 = C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = 1.$$

Тому, як неважко переконатися,

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тому n-те число Фібоначчі має вигляд

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big).$$

Приклад 5.24. Покажемо, що для чисел Фібоначчі виконується рівність $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$. Дійсно, із умови $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ випливає, що $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Тому маємо послідовність рівностей $F_1 = F_3 - F_2$, $F_2 = F_4 - F_3, \ldots, F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Додаючи почленно всі ці рівності, отримаємо $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$.

Приклад 5.25. Нехай в ряді Фібоначі вибрано 8 чисел підряд. Покажемо, що їх сума не є числом Фібоначчі. Дійсно, за попереднім прикладом маємо $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ і тому $\sum_{k=1}^{n+8} F_k = F_{n+10} - 1$. Тому $\sum_{k=n}^{n+8} F_k = F_{n+10} - F_{n+2}$. Покажемо, що число $F_{k+8} - F_k$ не може бути числом Фібоначчі. Очевидно, це число менше ніж F_{k+8}. Покажемо, що воно більше ніж F_{k+7}. Маємо рівності

$$F_{k+8} - F_k - F_{k+7} = F_{k+7} + F_{k+6} - F_k - F_{k+7} = F_{k+6} - F_k > 0.$$

5.3 Ряди Діріхле, формула обертання Мьобіуса

Нехай ми маємо послідовність $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$, члени якої занумеровані натуральними числами.

Означення 5.10. *Рядом Діріхле (або L-рядом) послідовності $\{a_n\}$ називається вираз*

$$L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

де s – символ ($s \in \mathbb{R}$ або $s \in \mathbb{C}$).

Нехай ми маємо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, запишемо їх L-ряди

$$L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},\ L_b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

Тоді сумою цих рядів називається ряд Діріхле вигляду

$$L_a(s) + L_b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n^s}.$$

Добуток рядів Діріхле визначається за правилом:

$$L_a(s) \cdot L_b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

де $c_n = \sum\limits_{d/n} a_d b_{n/d}$. Пояснення цього правила наступне: перемножимо ці ряди і зведемо подібні члени з однаковими степенями в знаменниках:

$$\left(\frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_4}{4^s} + \dots\right)\left(\frac{b_1}{1^s} + \frac{b_2}{2^s} + \frac{b_3}{3^s} + \frac{b_4}{4^s} + \dots\right) =$$

$$= \frac{a_1b_1}{1^s} + \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{2^s} + \frac{a_1b_3 + a_3b_1}{3^s} + \frac{a_1b_4 + a_2b_2 + a_4b_1}{4^s} + \ldots$$

Означення 5.11. *Послідовність $\{c_n\}$ називається мультиплікативною згорткою (або мультиплікативною копмозицією) послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ і позначається через $\{c_n\} = \{a_n\} \circ \{b_n\}$, де $c_n = \sum\limits_{d/n} a_d b_{n/d}$. Наприклад,*

$$c_6 = a_1b_6 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_6b_1.$$

Твердження 5.5. *(Без доведення.) Відносно операцій додавання і множення ряди Діріхле утворюють комутативне кільце. Ряд $L_a(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ має обернений тоді і тільки тоді, коли $a_1 \neq 0$. В цьому кільці нейтральний елемент відносно множення – це ряд*

$$\frac{1}{1^s} + \frac{0}{2^s} + \frac{0}{3^s} + \frac{0}{4^s} + \ldots = 1.$$

Нехай $\{a_n\} = \{1\}$ – стала послідовність.Ряд Діріхле цієї послідовності має спеціальну назву:

Означення 5.12. *Ряд $L_a(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ називається дзета-функцією Рімана і позначається $\zeta(s)$.*

Знайдемо обернену функцію до $\zeta(s)$ в кільці рядів Діріхле, тобто функцію $1/\zeta(s)$. Для цього нам потрібна знаменита функція Мьобіуса.

Означення 5.13. *Функцією Мьобіуса $\mu(n)$ називається функція натурального аргументу $\mu = \mu(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$, яка визначена наступним чином:*

$\mu(1) = 1$*;*

$\mu(n) = (-1)^k$*, якщо* $n = p_1p_2 \cdots p_k$*, де* $p_i \neq p_j$ *при* $i \neq j$ *– попарно різні прості числа;*

$\mu(n) = 0$*, якщо* n *ділиться на квадрат простого числа.*

Приклад 5.26. $\mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \mu(15) = 1.$

Теорема 5.27. *Оберненим до дзета-функції $\zeta(s)$ є ряд Діріхле* $M(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$.

Доведення. Знайдемо добуток

$$M(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

де $c_n = \sum\limits_{d/n} \mu(d) \cdot 1$. Покажемо, що $\sum\limits_{d/n} \mu(d) = 0$ при $n > 1$.

Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, тоді довільний дільник d числа n має вигляд $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \beta_i \leqslant \alpha_i, i = 1, \ldots, k$. Якщо $\beta_i \geqslant 2$, то $\mu(d) = 0$. Тому достатньо брати d вигляду $d = p_{i_1} \ldots p_{i_r}$, де p_{i_k} – попарно різні прості числа. Таких дільників числа n буде C_n^r і тому

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_n^r = 0.$$

□

Наслідок 5.28. ***Формула обертання Мьобіуса***

Нехай $f(n), g(n)$ – дві функції натурального аргументу. Якщо $g(n) = \sum\limits_{d/n} f(d)$ для кожного n, то $f(n) = \sum\limits_{d/n} g(d)\mu(n/d)$ для кожного n.

Доведення. Запишемо

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, L_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

Тоді $L_g(s) = L_f(s)\zeta(s) \Leftrightarrow g(n) = \sum\limits_{d/n} f(d)$. Звідси отримаємо

$$L_f(s) = L_g(s)M(s) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d/n} g(d)\mu(n/d).$$

□

Останні формули можна переписати у вигляді $g(n) = \sum\limits_{d/n} f(n/d)$ і $f(n) = \sum\limits_{d/n} \mu(d)g(n/d)$.

Означення 5.14. *Функція $f(n)$ натурального аргументу n називається мультиплікативною, якщо для довільних взаємно простих натуральних чисел m, n виконується рівність $f(mn) = f(m)f(n)$.*

Приклад 5.29. Зауважимо, що функція Мьобіуса $\mu(n)$ мультиплікативна. Щоб це довести, достатньо скористатися означенням функції $\mu(n)$ і для різних випадків безпосередньо перевірити, що $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$, якщо $(m, n) = 1$.

Приклад 5.30. Нехай $f(n)$, $g(n)$ – мультиплікативні функції натурального аргументу. Покажемо, що їх мультиплікативна згортка $h(n) = f(n) \circ g(n)$ також є мультиплікативною функцією. Дійсно, нехай m, n – натуральні взаємно прості числа. Тоді за умовою $f(mn) = f(m)f(n)$ і $g(mn) = g(m)g(n)$. Покажемо, що $h(mn) = h(m)h(n)$. Маємо за означенням $h(mn) = \sum\limits_{d|mn} f(d)g(mn/d)$. Зауважимо, що кожен дільник числа mn записується у вигляді $d = d_1d_2$, де $d_1|m$ і $d_2|n$. Тоді

$$h(mn) = \sum_{d_1d_2|mn} f(d_1d_2)g(mn/(d_1d_2)) =$$

$$= \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1)f(d_2)g(m/d_1)g(n/d_2).$$

З іншого боку,

$$h(m) = \sum_{d_1|m} f(d_1)g(m/d_1), \ h(n) = \sum_{d_2|n} f(d_2)g(n/d_2).$$

Тоді

$$h(m)h(n) = \big(\sum_{d_1|m} f(d_1)g(m/d_1)\big)\big(\sum_{d_2|n} f(d_2)g(n/d_2)\big) =$$

$$= \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1)f(d_2)g(m/d_1)g(n/d_2) = h(mn).$$

Означення 5.15. *Функцією Ойлера називається функція $\varphi(n)$ натурального аргументу n, значення якої $\varphi(n)$ – це кількість натуральних чисел $a < n$ і взаємно простих з n.*

Покладається $\varphi(1) = 1$. Очевидно, що для простого числа p значення функції Ойлера $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.

Використовуючи формулу обертання Мьобіуса можна довести, що $\{\varphi(n)\} = \{\mu(n)\} \circ \{n\}$, тобто

$$\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\frac{n}{d} = \sum_{d/n} d\mu(\frac{n}{d}).$$

Тому $\varphi(n)$ – мультиплікативна функція, як мультиплікативна згортка двох мультиплікативних функцій.

Наслідок 5.31. *Формула Ойлера. Для $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ має місце рівність*

$$\varphi(n) = \prod_{i=0}^{k} (p^{\alpha_i} - p^{\alpha_{i-1}}) = n \prod_{i=0}^{k} \big(1 - \frac{1}{p_i}\big).$$

5.4 Числа Каталана. Числа та многочлени Бернуллі.

Числа Каталана

В комбінаториці числа Каталана зустрічаються в різних задачах, пов'язаних з підрахунками числа об'єктів, заданих рекурсивно. Ці числа названі іменем бельгійського математика Eugene Charles Catalan(1814-1894).

n - те число Каталана C_n можна задати у вигляді

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}C_{2n} = \frac{2n!}{(n+1)!n!}$$

для $n \geqslant 0$.

Інший вираз для чисел Каталана

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, n \geqslant 1.$$

Цей вираз показує, що числа Каталана є натуральними.

Рекурентне співвідношення для чисел Каталана

$$C_0 = 1, C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

для $n \geqslant 1$.

Це співвідношення можна отримати із геометричної інтерпретації чисел Каталана. Розглянемо множину $2n$-вимірних векторів $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$ з координатами ± 1. Таких векторів буде всього 2^{2n}. Серед них C_{2n}^n векторів з $\sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon_i = 0$, бо такі вектори містять n компонент $+1$ і n компонент -1.

Означення 5.16. *$2n$-вимірні вектори $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$ з координатами, які задовольняють вимоги*

$$\varepsilon_i = \pm 1,\ \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon_i = 0,\ \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, 2n-1$$

називаються векторами Каталана.

Теорема 5.32. *Число векторів Каталана вказаного вигляду дорівнює n-тому числу Каталана C_n (без доведення).*

Зауваження 5.3. C_n – число траєкторій Каталана, які відповідають векторам $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$: якщо $\varepsilon_i = 1$, то траєкторія вгору вправо, якщо $\varepsilon_i = -1$, то вниз вправо.

Приклад 5.33. Знайдемо число розстановок дужок при виконанні бінарної операції над n елементами. Нехай ми маємо елементи $x_1, \ldots, x_n$, які можна перемножати. Скільки існує способів розставити дужки? Позначимо число таких розстановок через Q_n. Розглянемо цю задачу для невеликих n.

$n = 2 : \{x_1, x_2\}, Q_2 = 1$, бо, очевидно, є лише один спосіб: $(x_1 x_2)$;

$n = 3 : \{x_1, x_2, x_3\}, Q_3 = 2$, бо існує два способи: $((x_1 x_2) x_3)$, $(x_1 (x_2 x_3))$;

$n = 4 : \{x_1, \ldots, x_4\}, Q_4 = 5$, безпосередньо перевіряється.

Тут зовнішня дужка об'єднує вирази, які містять k і $n-k$ елементів $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тому $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} Q_k Q_{n-k}$ – це рекурентне співвідношення для чисел Q_n. Оскільки $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$, то перепозначивши індекси, отримаємо:

$Q_n = C_{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$.

В книзі R. Stanley [15] є ряд вправ, які описують 66 різних інтерпретацій чисел Каталана.

Числа і многочлени Бернуллі

Означення 5.17. *Послідовність* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ *чисел Бернуллі – це послідовність, експоненційна генератриса якої дорівнює* $\frac{t}{e^t - 1}$, *тобто* $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$

Числа Бернуллі були відкриті у зв'язку з необхідністю короткого запису сум m-тих степенів натуральних чисел

$$S_n^{(m)} = 1^m + 2^m + \ldots + n^m.$$

Наведемо без доведення формулу, яка дозволяє знаходити суми $S_n^{(m)}$.

Формула Фаульхабера

$$S_n^{(m)} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k (n+1)^{m+1-k}.$$

Знайдемо B_0 і B_1 використовуючи формулу

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

Нехай $t \to 0$. Тоді

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1, \lim_{t\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = B_0.$$

Тому $B_0 = 1$. Маємо

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{t^{k-1}}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{t^{k-1}}{k!}.$$

Перейдемо до $\lim\limits_{t\to 0}$. Зліва отримаємо $-\frac{1}{2}$, справа B_1. Тому $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Означення 5.18. *Многочленом Бернуллі степеня n називається многочлен $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}$, $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$*

Теорема 5.34. *При $n \geqslant 2$ виконується рівність $B_n(1) = B_n$.*

Доведення. Візьмемо ряд

$$B(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t_n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k})\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k B_k x^{n-k}\frac{t^n}{n!} =$$

$$= [n-k=r] = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^{k-1}}{k!}(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}x^r t^r) = e^{tx}\frac{t}{e^t - 1}.$$

Тому отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t_n}{n!} = e^{tx}\frac{t}{e^t-1}.$$

Покладемо тут $x = 1$. Отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1)\frac{t_n}{n!} = \frac{e^t t}{e^t - 1} = \frac{(e^t-1)t + t}{e^t - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1} =$$

$$= t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1)\frac{t_n}{n!}.$$

Отримаємо рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t_n}{n!} = t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t_n}{n!}.$$

Звідси отримаємо при $n \geqslant 2$: $B_n(1) = B_n$. □

Наслідок 5.35. *При $n \geqslant 2$ має місце рекурентне співвідношення*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k.$$

Дійсно, це випливає з рівності $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}$, коли покласти $x = 1$.

Приклад 5.36. Покладемо в рекурентному співідношення для чисел Бернуллі $n = 3$. Тоді отримаємо

$$B_3 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3$$

і тому

$$3B_2 = -B_0 - 3B_1 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Звідси знаходимо $B_2 = \frac{1}{6}$.

Розглянемо тепер суму m-тих степенів перших n натуральних чисел

$$S_n^{(m)} = 1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m + n^m.$$

Без доведення вкажемо теорему, яка показуєвираз цієї суми через значення многочленів Бернуллі

Теорема 5.37. *Має місце рівність $S_n^{(m)} = \dfrac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}$.*

Задачі.

1) Знайти послідовність $\{a_n\}$ таку, що $a_0 = 1$, і $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ для всіх $n \geqslant 1$.

2) Знайти число розкладів натурального числа n в суму доданків, які перевищують 1.

3) Знайти експоненційну генератрису $\widetilde{A}(t)$ послідовності $\{a_n\}$ через експоненційну генератрису $\widetilde{B}(t)$ послідовності $\{b_n\}$, де $a_n = \alpha^n b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha \in \mathbb{R}$.

4) Довести, що для чисел Фібоначчі виконується рівність $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

5) Для кожного натурального n від 999 до 1010 обчисліть $\mu(n)$ і $\varphi(n)$.

6) Нехай $1(n)$ – стала функція натурального аргументу, $1(n) = 1$ для будь-якого натурального n і $id(n) = n$ для довільного натурального n. Довести, що для функції $\sigma(n)$ – суми всіх дільників числа n виконується рівність $\sigma(n) = 1(n) \circ id(n)$.

7) Нехай $d(n)$ – кількість дільників натурального числа n. Довести, що $d(n) = 1(n) \circ 1(n)$.

8) Для кожного натурального n вигляду $n = p^\alpha$, p – просте число, довести рівність $\varphi(n) = \mu(n) \circ id(n)$.

9) При яких значеннях $a, b \in \mathbb{R}$ функція натурального аргументу $f(n) = n^2 + an + b$ буде мультиплікативною?

Розділ 6

Теорія графів II

6.1 Укладання графів

Нагадаємо, що простим графом називається така пара $\Gamma = (V, E)$, у якій V — це множина вершин графа, а E — множина його ребер, причому кожне ребро e однозначно визначається двоелементною підмножиною $\{u, v\}$ вершин, які воно з'єднує. Граф Γ називається скінченним, якщо скінченними є його множини вершин та ребер. Будемо розглядати лише скінченні прості графи.

Означення 6.1. *Нехай S — деяка підмножина $\mathbb{R}^3$. Кажуть, що граф Γ укладається в S, якщо Γ ізоморфний такому графу, в якого*

- *множиною вершин є деяка підмножина точок з S;*
- *множиною ребер є множина неперервних ліній, що належать S, причому жодне ребро не містить самоперетинів і жодні два ребра не мають спільних точок окрім вершин графа.*

Іншими словами, вершини графа Γ можна ототожнити з деякими точками S, а його ребра можна "намалювати", використовуючи неперервні лінії без самоперетинів та перетинів у точках, відмінних від вершин, не виходячи за межі множини S.

Теорема 6.1. *Кожен скінченний простий граф укладається в* $\mathbb{R}^3$.

Доведення. Нехай $\Gamma = (V, E)$ — скінченний граф. Припустимо, що $|V| = n$ для деякого $n \geq 1$. Виберемо в $\mathbb{R}^3$ деяку пряму l і на ній зафіксуємо n точок $A_1, \ldots, A_n$, які відповідають вершинам заданого графа. Тепер для кожного ребра $e \in E$ виберемо площину S_e, яка містить пряму l, причому для різних ребер площини вибираються різні. Нехай кінцям ребра e відповідають точки A_i та A_j, $1 \leq i < j \leq n$. На відрізку, який з'єднує ці точки, як на діаметрі, в площині S_e побудуємо коло, і поставимо у відповідність ребру e його дугу, яка з'єднує точки A_i та A_j. Одержимо укладення графа Γ в $\mathbb{R}^3$. □

Зауважимо, що наведене доведення залишається правильним і для простих графів з континуальною множиною вершин.

Теорема 6.2. *Простий скінченний граф укладається на площині тоді й тільки тоді, коли він укладається на сфері.*

Доведення. Необхідність. Нехай скінченний граф $\Gamma = (V, E)$ укладається на площині P. Можемо вважати, що його вершинами та ребрами є точки та лінії на P. Тоді, внаслідок скінченності множин його вершин і ребер, знайдеться круг D на площині P, який містить усі вершини та ребра Γ. Розглянемо неперервне відображення, яке "розтягує" круг D на півсферу. Тоді під його дією отримаємо укладення Γ на сфері.

Достатність. Нехай скінченний граф $\Gamma = (V, E)$ укладається на сфері S. Можемо вважати, що його вершинами та ребрами є точки та лінії на S. Виберемо діаметрально протилежні точки сфери S, які не належать жодному ребру графа Γ і розглянемо площину P, яка дотикається до сфери S в одній з вибраних точок. Побудуємо стереографічну проекцію сфери S на площину P. Під її дією і отримуємо укладення Γ на площині. □

Наведемо також без доведення таку теорему.

Теорема 6.3. *Якщо простий скінченний граф укладається на площині, то існує таке укладення, при якому його ребрам відповідають відрізки прямої.*

6.2 Планарні та плоскі графи

Означення 6.2. *Граф називається планарним, якщо він укладається на площині.*

Означення 6.3. *Граф називається плоским, якщо його вершинами є точки площини, а ребрами — такі лінії на цій площині, які не перетинаються в точках, відмінних від вершин, і не мають самоперетинів.*

Таким чином, граф є планарним, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу. Зауважимо, що кожен плоский граф є планарним, проте існують планарні, але не плоскі графи (Рис. 6.1).

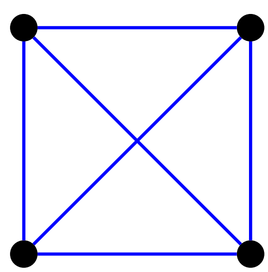


Рис. 6.1: Планарний не плоский граф

З властивостей укладень відразу випливає

Твердження 6.1. *Граф є планарним тоді й тільки тоді, коли він укладається на сфері.*

Питання про планарність графів природно виникають в багатьох практичних задачах. Серед найвідоміших слід згадати задачу прокладання транспортних сполучень, а також задачу конструювання мікроелектронних плат.

Зокрема, питання про планарність виникає у такій класичній задачі про будинки і колодязі. Нехай є три будинки і три колодязі. Чи можна прокласти доріжки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоб жодні дві доріжки не перетиналися? Легко зрозуміти, що відповідь залежить від того, чи буде планарним дводольний граф $K_{3,3}$ (Рис. 6.2).

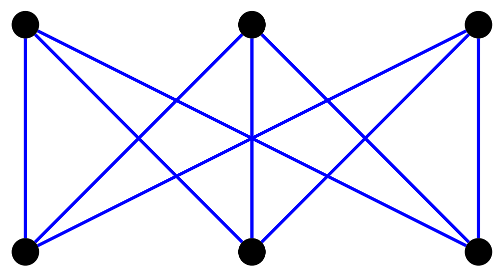


Рис. 6.2: Дводольний граф $K_{3,3}$

Безпосередньо з означення отримуємо

Твердження 6.2. *Підграф планарного графі є планарним.*

Твердження 6.3. *Граф є планарним тоді й лише тоді, коли планарними є усі його компоненти зв'язності.*

Доведення. Необхідність випливає з попереднього твердження.

Для доведення достатності зауважимо, що внаслідок скінченності графа скінченною є і множина його компонент зв'язності. Тепер розглянемо укладення кожної компоненти, які належать кругам, що попарно не перетинаються. Отримаємо потрібне укладення початкового графа. □

Таким чином, питання про планарність досить досліджувати лише для зв'язних графів.

Означення 6.4. *Нехай* Γ *— плоский граф. Гранню графа* Γ *називається максимальна за включенням підмножина площини, довільні* *дві точки якої можуть бути з'єднані такою неперервною лінією, що не містить самоперетинів і не має спільних точок з ребрами графа* Γ.

Грань називається зовнішньою, якщо вона необмежена, і внутрішньою, якщо обмежена. В зв'язного плоского графа лише одна грань є зовнішньою. Зауважимо, що з доведення теореми про рівносильність існування укладень графа на площині та на сфері випливає, що для довільної грані плоского графа існує таке його укладення на площині, при якому ця грань буде зовнішньою.

Ребра і вершини плоского графа Γ, які належать його грані, утворюють підграф графа Γ, який називається межею цієї грані. Кожне ребро графа Γ або належить межі двох граней, або лише однієї грані. При цьому перший випадок має місце, коли це ребро входить у якийсь цикл графа Γ, а другий — коли воно є мостом.

Означення 6.5. *Степенем грані* r *плоского графа* Γ *називається число* $\deg r = k_r + b_r$, *в якій* k_r *— кількість ребер графа* Γ, *котрі належать грані* r, *а* b_r *— кількість таких ребер графа* Γ, *які належать лише грані* r.

Означення 6.6. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— плоский граф. Плоскою картою називається трійка* (V, E, P), *в якій* P *— множина граней графа* Γ.

Твердження 6.4. *Нехай* (V, E, P) *— плоска карта. Тоді*

$$\sum_{r \in P} \deg r = 2|E|.$$

Доведення. Довільне ребро $e \in E$ належить або рівно двом граням, або рівно одній. За означенням степеня грані, у першому випадку воно буде враховуватися по одному разу при обчисленні степенів тих двох граней, яким воно належить. У другому випадку його буде враховано двічі при обчисленні степеня єдиної грані, якому належить це ребро. Таким чином, в сумі степенів граней кожне ребро буде враховано рівно двічі, звідки випливає потрібна рівність. □

Нехай d — степінь вершини v плоского графа Γ. Припустимо, що v належить рівно k граням. Доведіть, що $k \leq d$. Для довільних натуральних чисел d, k, які задовольняють нерівності $k \leq d$, наведіть приклад плоского графа Γ і його вершини v, яка належить рівно k граням.

Зауважимо, що для планарного графа можуть існувати ізоморфні йому плоскі графи з різними наборами степенів граней відповідних плоских карт. Наведіть відповідні приклади.

Доведемо тотожність, яка узагальнює добре відому тотожність Ойлера для опуклих многогранників.

Теорема 6.4 (Ойлера). *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— зв'язний плоский граф,* (V, E, P) *— відповідна плоска карта. Тоді*

$$|V| - |E| + |P| = 2.$$

Доведення. Розглянемо деяке кістякове дерево $T = (V, E_1)$ плоского графа (V, E). Тоді $E_1 \subset E$. При цьому $|E_1| = |V| - 1$. Відповідна плоска карта (V, E_1, P_1) містить рівно одну грань, тобто $|P_1| = 1$. Маємо

$$|V| - |E_1| + |P_1| = |V| - |V| + 1 + 1 = 2$$

і потрібна рівність виконується.

Припустимо, що $|E \setminus E_1| = k$. Покажемо індукцією за k, що додаючи по черзі ребра з $E \setminus E_1$, отримуватимемо плоску карту, для якої виконується потрібна рівність.

При $k = 0$, як показано вище, потрібна рівність виконується.

При додаванні нового ребра кількість вершин існуючої плоскої карти не змінюється, кількість ребер збільшується на одиницю, і кількість граней також збільшується на одиницю. Звідси випливає, що і для отриманої плоскої карти шукана рівність матиме місце. □

Наслідок 6.5. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— плоский граф,* k *— кількість компонент зв'язності* Γ, (V, E, P) *— відповідна плоска карта. Тоді*

$$|V| - |E| + |P| = k + 1.$$

Доведення. Індукція за k.

При $k = 1$ необхідна рівність випливає з теореми Ойлера.

Нехай $k > 1$. Розглянемо деяку зв'язну компоненту Γ_1 графа Γ і відповідну плоску карту (V_1, E_1, P_1). Нехай Γ_2 — об'єднання усіх інших зв'язних компонент графа Γ, $(V_2, E_2, P_)$ — відповідна плоска карта. За припущенням індукції виконуються рівності

$$|V_1| - |E_1| + |P_1| = 2,$$

$$|V_2| - |E_2| + |P_2| = k.$$

Зауважимо, що множини V та E є диз'юнктними об'єднаннями множин V_1, V_2 і E_1, E_2 відповідно. З іншого боку, множина P є об'єднаннями множин P_1 та P_2, причому вони мають єдину спільну, а саме зовнішню, грань. Тому

$$|V| = |V_1| + |V_2|, \quad |E| = |E_1| + |E_2|, \quad |P| = |P_1| + |P_2| - 1.$$

Отже,

$$|V| - |E| + |P| = 2 + k - 1 = k + 1,$$

що й потрібно було довести. □

Доведені співвідношення можна застосувати для отримання оцінку згори кількості ребер планарного графа.

Теорема 6.6. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— планарний граф,* $|V| \geq 3$*. Тоді*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Доведення. Якщо $|E| \leq 3$, то з нерівності $|V| \geq 3$ отримуємо

$$3|V| - 6 \geq 9 - 6 = 3 \geq |E|,$$

тобто потрібна нерівність має місце.

Нехай $|E| > 3$. Зафіксуємо деяке укладення графа Γ на площині. Не обмежуючи загальності можна вважати, що сам граф Γ є плоским. Розглянемо відповідну плоску карту (V, E, P). Нехай кількість компонент зв'язності графа Γ рівна k. За наслідком з теореми Ойлера отримуємо рівність

$$|P| = k + 1 + |E| - |V|.$$

Зауважимо, що для довільної грані $r \in P$ виконується нерівність $\deg r \geq 3$. Тому

$$2|E| = \sum_{r \in P} \deg r \geq 3|P| = 3(k + 1 + |E| - |V|).$$

Звідси

$$|E| \leq 3|V| - 3k - 3 \leq 3|V| - 6,$$

що й потрібно було довести. □

Отриману нерівність можна використовувати для доведення простих достатніх умов непланарності графів.

Твердження 6.5. *Нехай у простого графа* $\Gamma = (V, E)$ *степінь кожної вершини не менший за 6. Тоді граф* Γ *не планарний.*

Доведення. Справді, для графа Γ з леми про рукостискання маємо

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|.$$

Звідси $|E| \geq 3|V|$, що неможливо для планарного графа внаслідок раніше доведеної нерівності. □

Переформулювавши, одержуємо

Наслідок 6.7. *Кожен планарний граф містить вершину степеня, не більшого за 5.*

Приклад 6.8. Знайдемо найбільшу кількість граней, яку може містити плоский граф G на 5 вершинах і побудуємо такий граф. За теоремою Ойлера для графа G виконується рівність $|V| - |E| + |P| = 2$. Тому із рівності $5 - |E| + |P| = 2$ випливає, що $|P| = |E| - 3$. Оскільки граф плоский, то він $\neq K_5$ і тому $|E| \leqslant 9$. Звідси отримаємо, що $|P| \leqslant 6$. Плоский граф на 5 вершинах з 9 ребрами і 6 гранями зображено на Рис. 6.3.

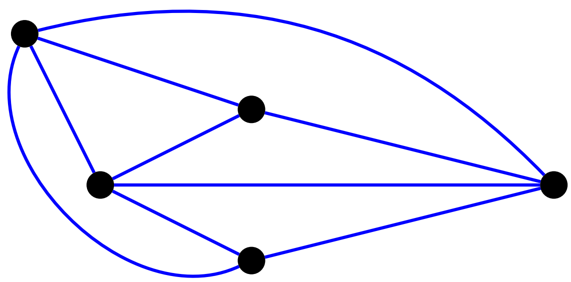


Рис. 6.3: Плоский граф з максимальним числом граней

Твердження 6.6. *Для довільного $n \geq 5$ повний граф K_n не є планарним.*

Доведення. Досить довести для графа K_5, оскільки він є підграфом K_n, $n \geq 5$, а підграф планарного графа сам є планарним.

У графа K_5 кількість вершин $|V| = 5$, а кількість ребер $|E| = 10$. Тому $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$, що неможливо для планарного графа. Отже, граф K_5 не планарний. □

Зауважимо, що повні графи K_1, K_2, K_3, K_4 є планарними.

Твердження 6.7. *Для довільних $n, m \geq 3$ повний дводольний граф $K_{n,m}$ не є планарним.*

Доведення. Досить довести для графа $K_{3,3}$, оскільки він є підграфом $K_{n,m}$, $n, m \geq 3$, а підграф планарного графа сам є планарним.

Припустимо, що граф $K_{3,3}$ є планарним і розглянемо відповідну плоску карту (V, E, P). Граф $K_{3,3}$ має 6 вершин і 9 ребер. З теореми Ойлера маємо

$$|P| = |E| - |V| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Нехай степені граней з P рівні d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. Оскільки в графі $K_{3,3}$ кожне ребро належить деякому циклу, то всі ребра з E належать межам рівно двох граней. Тому

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 2|E| = 18.$$

Зауважимо, що з дводольності графа $K_{3,3}$ випливає, що в ньому немає циклів непарної довжини. Тому степені усіх граней з P не менші за 4, тобто

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \geq 5 \cdot 4 = 20.$$

Отримана суперечність означає, що граф $K_{3,3}$ не є планарним. □

Це твердження також випливає з такої оцінки на кількість ребер планарного дводольного графа.

Теорема 6.9. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— планарний дводольний граф без мостів. Тоді*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Для того, щоб сформулювати один з критеріїв планарності, визначимо операцію підрозбиття простого графа.

Означення 6.7. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— простий граф,* $e \in E$ *— його ребро, яке з'єднує вершини* v_1, v_2*. Підрозбиттям графа* Γ *називається такий граф* $\Gamma' = (V', E')$*, що*

- $V' = V \cup \{u\}$, *де* $u \notin V$*;*
- $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, w_2\}$*, де* e_1, e_2 *з'єднують вершину* u *з вершинами* v_1, v_2 *відповідно.*

Таким чином, підрозбиття отримується шляхом "заміни" деякого ребра початкового графа двома ребрами зі спільним кінцем (Рис. 6.4). Для графа, укладеного на площині, відповідна операція може бути інтерпретована, як додавання вершини на деякому ребрі. Зокрема, це означає, що підрозбиття планарного графа є планарним графом.

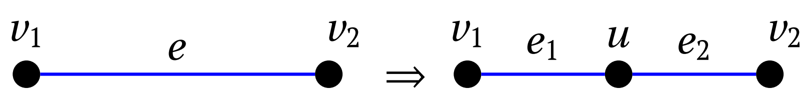


Рис. 6.4: Підрозбиття графа

Безпосередньо з означення отримуємо.

Твердження 6.8. *При переході до підрозбиття*

1. *степені усіх вершин початкового графа зберігаються;*
2. *степінь доданої вершини дорівнює 2;*
3. *кількості вершин та ребер збільшуються на 1.*

Означення 6.8. *Граф* Γ_1 *називається гомеоморфним графу* Γ*, якщо існує скінченна послідовність (можливо порожня) підрозбиттів графа* Γ*, в результаті якої отримуємо граф, ізоморфний* Γ_1.

Теорема 6.10 (Куратовський)**.** *Простий скінченний граф є планарним тоді й лише тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних* K_5 *чи* $K_{3,3}$.

Переконайтеся, що граф Петерсена (Рис.4.11) не містить підграфів, гомеоморфних K_5, проте у нього існує підграф, гомеоморфний $K_{3,3}$. Таким чином, граф Петерсена не планарний.

Для планарного графа з множиною вершин V природно вводиться поняття максимальності.

Означення 6.9. *Планарний граф називається максимальним, якщо в результаті додавання до множини його ребер хоча б одного нового ребра, яке б з'єднувало несуміжні вершини, отримуємо вже не планарний граф.*

Планарний граф, зображений на Рис. 6.1, є максимальним, а планарний граф, зображений на Рис. 6.5, не максимальний.

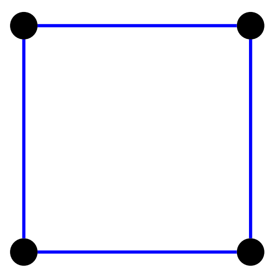


Рис. 6.5: Планарний граф, який не є максимальним

Охарактеризуємо максимальні планарні графи в термінах відповідних плоских графів.

Означення 6.10. *Зв'язний плоский граф називається тріангуляцією, якщо межею кожної грані відповідної йому плоскої карти є цикл довжини 3.*

Легко бачити, що для довільного $n \geq 3$ існує тріангуляція з n вершинами (Рис. 6.6).

Теорема 6.11. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— зв'язний плоский граф,* $|V| \geq 3$. *Тоді множину ребер* E *можна доповнити до такої множини* E', *що граф* $\Gamma' = (V, E')$ *буде тріангуляцією.*

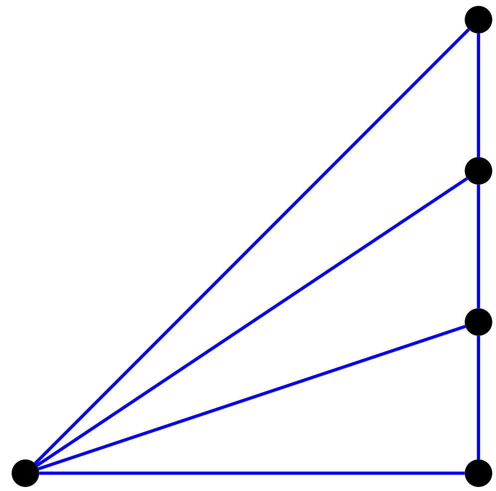


Рис. 6.6: Тріангуляція на 5 вершинах

Доведення. Припустимо, що граф Γ не є тріангуляцією. Виберемо в його плоскій карті грань r, степінь якої не менший за 4. Тоді межа цієї грані містить простий шлях довжини 3:

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4).$$

Зокрема, вершини v_1, v_2, v_3, v_4 попарно різні. В графі Γ немає ребра, яке б з'єднувало вершини v_1, v_3. В іншому випадку, якби таке ребро e існувало, то цикл (e_1, e_2, e) був би межею грані, яка є власною підмножиною початкової грані, що суперечило б її вибору. Отже, до множини ребер E можна додати ребро e, яке з'єднує вершини v_1, v_3 і повністю належить грані r. При цьому отриманий граф залишиться плоским, з'явиться грань, межею якої є цикл довжини 3, а степінь однієї з граней початкової карти зменшиться на 1. Таким чином, за скінченне число кроків, отримаємо плоский граф, який є тріангуляцією. □

Теорема 6.12. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— тріангуляція,* $|V| \geq 3$*,* P *— множина граней відповідної плоскої карти. Тоді*

1. $|E| = 3|V| - 6$*;*

2. $|P| = 2|V| - 4$.

Доведення. Оскільки степінь кожної грані з P рівний 3, маємо рівності

$$2|E| = \sum_{r \in P} \deg r = 3|P|.$$

За теоремою Ойлера

$$|P| = |E| - |V| + 2.$$

Звідси

$$2|E| = 3|P| = 3(|E| - |V| + 2).$$

Отже, маємо першу необхідну рівність:

$$|E| = 3|V| - 6.$$

Тепер отримуємо другу необхідну рівність.

$$|P| = |E| - |V| + 2 = 3|V| - 6 - |V| + 2 = 2|V| - 4.$$

□

Приклад 6.13. Покажемо, що в будь-якому планарному графі G на n вершинах, $n \geqslant 4$ є принаймні 4 вершини, степені яких $\leqslant 5$. Дійсно, не втрачаючи загальності, можна вважати, що граф G плоский. Додаючи ребра зробимо граф максимальним плоским графом (кількість вершин степеня $\leqslant 5$ при цьому не збільшиться). Тоді за відзначеним вище степінь кожної вершини графа G буде $\geqslant 3$. Зауважимо також, що число ребер графа $m = 3n - 6$ (бо граф максимальний плоский). За лемою про рукопотискання маємо

$$2(3n - 6) = 2m = \sum_{v \in V} \deg v_i.$$

Позначивши через n_i число вершин степеня i, отримаємо

$$6n - 12 = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6\sum_{i\geqslant 6} i n_i$$

Звідси випливає, що

$$6n - 12 \geqslant 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i\geqslant 6} n_i$$

З урахуванням рівності $n = n_3 + n_4 + n_5 + \sum_{i\geqslant 6} n_i$ маємо, що

$$6(n_3 + n_4 + n_5 + \sum_{i\geqslant 6} n_i) - 12 \geqslant 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i\geqslant 6} n_i$$

Але тоді звідси отримаємо

$$6(n_3 + n_4 + n_5) - 12 \geqslant 3(n_3 + n_4 + n_5),$$

що дає шукану нерівність $n_3 + n_4 + n_5 \geqslant 4$, яка і означає, що в графі є принаймні 4 вершини степеня $\geqslant 4$.

Теорема 6.14. *Плоский граф* $\Gamma = (V, E)$, $|V| \geq 3$, *буде максимальним планарним графом тоді й тільки тоді, коли він є тріангуляцією.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що плоский граф Γ не є тріангуляцією. Тоді до нього можна додати ребра зі збереженням планарності, що й означає, що Γ не є максимальним планарним.

Достатність. Нехай Γ є тріангуляцією. Тоді $|E| = 3|V| - 6$. Якби Γ не був максимальним планарним, можна було б додати принаймні одне ребро і отримати планарний граф $\Gamma' = (V, E')$ такий, що $|E'| = |E| + 1 = 3|V| - 2$. Суперечність. Отже, Γ є максимальним планарним. □

Наслідок 6.15. *Серед усіх плоских графів з* $n \geq 3$ *вершинами максимальну можливу кількість граней мають тріангуляції.*

Доведення. Серед плоских графів з $n \geq 3$ вершинами найбільшу можливу кількість ребер мають максимальні планарні графи, тобто тріангуляції. Застосувавши теорему Ойлера отримуємо, що максимально можлива кількість граней досягається тоді й лише тоді, коли кількість ребер максимальна. Звідси маємо необхідне твердження. $\square$

Приклад 6.16. Доведемо, що в тріангуляції G з n вершинами при $n \geqslant 4$ степінь кожної вершини $\geqslant 3$. Дійсно, візьмемо довільну вершину v тріангуляції G. Нехай w – яка-небудь суміжна з нею вершина. Тоді ребро $\overline{vw}$ належить двом граням із G – трикутникам vwu_1 і vwu_2, причому $u_1 \neq u_2$, бо число вершин графа $\geqslant 4$. Тому v суміжна хоча б з трьома вершинами W, u_1, u_2 графа G. Звідси отримаємо, що $\deg v \geqslant 3$.

6.3 Розфарбування графів

У багатьох прикладних задачах графи природно наділяти певною додатковою структурою. Зокрема, часто виникають ситуації, коли вершинам (або ребрам) графа ставляться у відповідність елементи з деякої скінченної множини "кольорів". Будемо ототожнювати кольори з натуральними числами і розглянемо лише випадок, коли кольори ставляться у відповідність вершинам графа.

Розглядаються лише прості скінченні графи.

Означення 6.11. *Розфарбуванням графа* $\Gamma = (V, E)$ *у* k *кольорів,* $k \in \mathbb{N}$, *називається таке відображення*

$$p : V \to \{1, \ldots, k\},$$

що для довільних вершин $u, v \in V$, *які з'єднані ребром, відповідні їм кольори різні, тобто* $p(u) \neq p(v)$.

Граф, на якому визначено розфарбування, називають (вершинно) розфарбованим. На Рис. 6.7 зображено граф, розфарбований трьома кольорами.

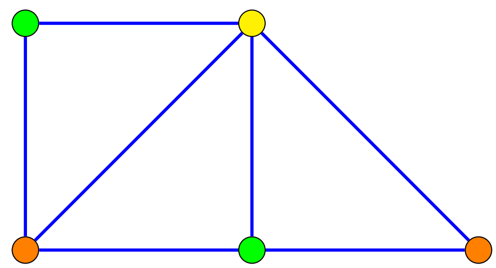


Рис. 6.7: Розфарбований граф

Відповідь на питання про існування розфарбувань дає таке

Твердження 6.9. *Для довільного графа існує розфарбування.*

Доведення. Нехай k — кількість вершин графа. Тоді довільна бієкція з множини його вершин у множину $\{1, \dots, k\}$ буде розфарбуванням. □

Тому коректним є таке

Означення 6.12. *Хроматичним числом графа* Γ *називається найменше натуральне число* k*, для якого існує розфарбування* Γ *у* k *кольорів.*

Хроматичне число графа Γ позначається $\chi(\Gamma)$.

Легко бачити, що має місце

Твердження 6.10. *Для графа* $\Gamma = (V, E)$ *існує розфарбування у* k *кольорів тоді й тільки тоді, коли виконуються нерівності* $1 \leq k \leq \chi(\Gamma)$.

Приклад 6.17. Хроматичне число графа Γ дорівнює 1 тоді й лише тоді, коли Γ не містить ребер, тобто граф Γ є доповнюючим до повного графа.

Приклад 6.18. Хроматичне число графа Γ дорівнює 2 тоді й лише тоді, коли Γ містить хоча б одне ребро і є дводольним.

В загальному випадку оцінку згори для хроматичного числа графа дає

Теорема 6.19. *Нехай найбільший зі степенів вершин графа* Γ *дорівнює* $t(\Gamma)$. *Тоді* $\chi(\Gamma) \le t(\Gamma) + 1$.

Доведення. Індукція за кількістю вершин графа Γ.

База індукції: 1 вершина. В цьому випадку Γ не містить ребер, тобто $t(\Gamma) = 0$. Таким чином, $\chi(\Gamma) = 1 = 0 + 1 = t(\Gamma) + 1$.

Індуктивний крок. Нехай кількість вершин граф Γ більша за 1. Вилучимо з Γ деяку вершину v разом з усіма ребрами, кінцем яких вона є. До отриманого графа Γ_1 можна застосувати припущення індукції. Тому $\chi(\Gamma_1) \le t(\Gamma_1) + 1$. Але $t(\Gamma_1) \le t(\Gamma)$. Тому граф Γ_1 можна розфарбувати $t(\Gamma) + 1$ кольорами. Зафіксуємо таке розфарбування. В графі Γ степінь вершини v не більший за $t(\Gamma)$. Таким чином, для розфарбування вершин, суміжних з v, було використано не більший за $t(\Gamma)$ кольорів. Отже, знайдеться хоча б один не використаний колір, яким можна пофарбувати v. Отримаємо розфарбування графа Γ за допомогою $t(\Gamma) + 1$ кольорів. □

Питання про побудову розфарбувань графів виникають у таких практичних задачах.

Задача складання розкладу. Нехай потрібно провести певну кількість лекцій, причому деякі з них не можуть проводитися одночасно. Потрібно скласти розклад, за яким усі лекції будуть проведені якнайшвидше. Розглянемо граф, вершинами якого є лекції, причому ребром будуть з'єднуватися ті й лише ті пари лекцій, які не можна проводити одночасно. Тоді довільне розфарбування отриманого графа визначає розклад. При цьому хроматичне число цього графа визначає найменший проміжок часу, за який усі лекції можуть бути проведені.

Задача розподілу обладнання. Припустимо, що потрібно виконати певну кількість робіт, причому для виконання кожної з них потрібно використати деякий набір обладнання з існуючої сукупності. При цьому дві роботи, для виконання кожної з яких потрібно використати певне обладнання, одночасно виконуватись не можуть. Потрібно спланувати виконання робіт так, щоб витрачений час був мінімальним. Розглянемо граф, вершинами якого є роботи, що потрібно виконати, а ребра з'єднують ті з них, для виконання кожного з яких потрібне певне обладнання. Тоді кожне розфарбування такого графа визначає можливі розподіл обладнання і порядок виконання робіт.

Задача знаходження хроматичного числа особливо цікава для планарних графів. Однією з найбільш відомих є

Гіпотеза чотирьох фарб. Хроматичне число планарного графа не більше за 4.

Наразі існує ряд доведень цієї гіпотези, котрі істотно використовують великі обсяги перебору, що виконуються за допомогою комп'ютерів. "Чисто" теоретичного доведення досі не існує, тому відповідне твердження має статус гіпотези.

Доведемо послаблений варіант цього твердження, відомий як теорема про 5 фарб.

Теорема 6.20 (Хівуд)**.** *Хроматичне число планарного графа не більше за 5.*

Доведення. Індукція за числом n вершин планарного графа.

База індукції: $n \leq 5$. Твердження теореми має місце.

Індуктивний крок. Нехай у планарного графа Г число n його вершин більше 5. Виберемо в ньому вершину v, степінь якої не більший 5. Вилучимо з Г цю вершину разом з ребрами, кінцями яких вона є. До отриманого графа Γ_1 застосуємо припущення індукції і зафіксуємо деяке його розфарбування за допомогою k кольорів, де $k \leq 5$. Зауважимо, що у випадку, коли степінь вершини v менший 5, існує колір, яким можна пофарбувати цю вершину, щоб отримати розфарбування Г.

Розглянемо випадок, коли степінь вершини v дорівнює 5. Нехай суміжні з нею вершини v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 пофарбовано кольорами 1,2,3,4,5 відповідно. Будемо вважати, що при деякому укладанні графа Г на площині при обході кола достатньо малого радіуса з центром у точці, що відповідає v, ребра, що з'єднують її з точками, які відповідають v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, перетинаються у вказаному порядку (Рис.6.8).

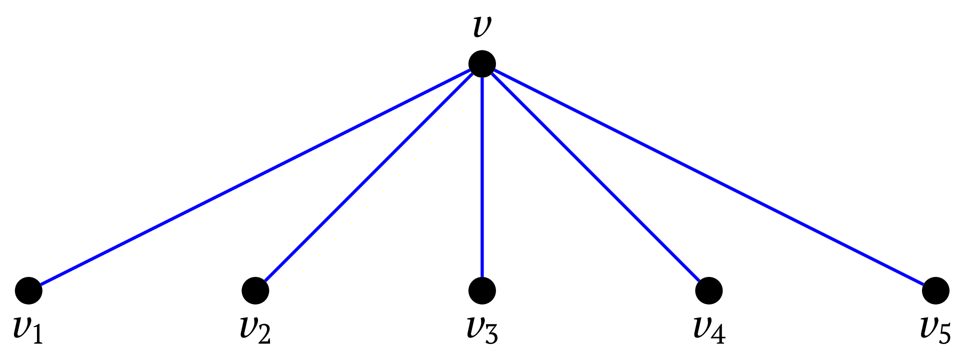


Рис. 6.8: Вершина степеня 5 планарного графа

Позначимо $\Gamma_{1,3}$ підграф графа Γ_1, вершинами якого є усі вершини, що пофарбовано кольорами 1 або 3, а ребрами — усі можливі ребра графа Γ_1, які з'єднують такі вершини. Тоді вершини v_1, v_3 є вершинами графа $\Gamma_{1,3}$. Розглянемо 2 випадки.

1 випадок: вершини v_1, v_3 належать різним компонентам зв'язності графа $\Gamma_{1,3}$. Тоді в компоненті, яка містить v_1, замінимо колір кожної вершини: 1 на 3, а 3 на 1. Отримаємо розфарбування графа Γ_1, причому в ньому вершина v_1 буде мати колір 3. Таким чином, для розфарбування вершин, суміжних з v, не використовувався колір 1, і розфарбувавши v цим кольором, отримуємо розфарбування початкового графа Г.

2 випадок: вершини v_1, v_3 належать одній і тій же компоненті зв'язності графа $\Gamma_{1,3}$. Тоді в $\Gamma_{1,3}$ існує простий шлях p, котрий з'єднує v_1 з v_3. Колір кожної вершини цього шляху 1 або 3. В графі Г розглянемо простий шлях (v_1, v, v_2). Разом зі шляхом

p він утворює цикл, який обмежує область, що містить або вершину v_2, або обидві вершини v_4, v_5. Це означає, що в графі Γ_1 немає шляху, котрий з'єднує v_2 з v_4 і колір кожної вершини цього шляху 2 або 4. Розглянемо підграф $\Gamma_{2,4}$ графа Γ_1, вершинами якого є усі вершини, що пофарбовано кольорами 2 або 4, а ребрами — усі можливі ребра графа Γ_1, які з'єднують такі вершини. Тоді вершини v_2, v_4 належать різним компонентам зв'язності графа $\Gamma_{2,4}$. В компоненті, яка містить v_2, замінимо колір кожної вершини: 2 на 4, а 4 на 2. Отримаємо розфарбування графа Γ_1, причому в ньому вершина v_2 буде мати колір 4. Таким чином, для розфарбування вершин, суміжних з v, не використовувався колір 2, і розфарбувавши v цим кольором, отримуємо розфарбування початкового графа Γ. □

6.4 Матроїди

Поняття матроїда було введено у тридцятих роках XX століття. Матроїди можна розглядати як природний спосіб узагальнити властивості лінійної незалежності в лінійній алгебрі та ациклічності в теорії графів. Крім того, вони є зручною математичною моделлю для розв'язання ряду комбінаторних оптимізаційних задач.

Означення 6.13. *Матроїдом називається пара $(S, \mathcal{I})$, в якій*

1. *S — скінченна множина, яку називають носієм матроїда, а її елементи — точками матроїда;*

2. *$\mathcal{I}$ — непорожня родина підмножин S, які називають незалежними і задовольняють таким двом умовам:*

   - *якщо $A \in \mathcal{I}$ і $B \subset A$, то $B \in \mathcal{I}$ (умова спадковості);*
   - *$A, B \in \mathcal{I}$, причому $|A| < |B|$, то існує така точка $x \in B \setminus A$, що $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ (умова заміни).*

З умови спадковості випливає, що порожня множина є незалежною.

Розглянемо ряд прикладів матроїдів.

Вільний матроїд. Нехай S — скінченна множина, $\mathcal{I}$ — множина усіх підмножин S. Оскільки підмножина підмножини S сама є підмножиною S, то умова спадковості виконується. Якщо A, B — такі підмножини S, що $|A| < |B|$, то різниця $B \setminus A$ непорожня і для довільної точки x цієї різниці об'єднання$A \cup \{x\}$ є підмножиною S. Таким чином, пара $(S, \mathcal{I})$ є матроїдом, який називають вільним матроїдом з носієм S.

Рівномірний матроїд. Нехай S — скінченна множина, $|S| = n$. Для натурального числа k, яке задовольняє нерівності $k \leq n$, розглянемо родину $\mathcal{I}_k$ усіх таких підмножин S, які містять не більше за k елементів. Тоді для $\mathcal{I}_k$ умова спадковості очевидно виконується. Якщо $A, B \in \mathcal{I}_k$ і $|A| < |B|$, то $|A| < k$ і $B \setminus A \neq \varnothing$. Тоді для довільної точки $x \in B \setminus A$ об'єднання $A \cup \{x\}$ є підмножиною S, яка містить не більше k елементів, тобто належить $\mathcal{I}_k$. Отже, пара $(S, \mathcal{I}_k)$ є матроїдом.

Матричний матроїд. Розглянемо матрицю M розміру m на n, елементи якої належать деякому полю F. Нехай $S = \{1, \ldots, n\}$ і $v_1, \ldots, v_n$ — система векторів-стовпчиків матриці M. Підмножину $A \subseteq S$ назвемо незалежною, якщо система векторів v_i, $i \in A$ є лінійно незалежною системою в m-вимірному векторному просторі над F. Тоді пара $(S, \mathcal{I})$ є матроїдом (перевірте це!), який називається матричним матроїдом, визначеним матрицею M. Даний приклад можна розглядати як інтерпретацію лінійної незалежності мовою матроїдів.

Матроїд Фано. Розглянемо матрицю

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

над полем із двох елементів. Матричний матроїд, визначений матрицею M, називається матроїдом Фано. На Рис. 6.9 точкам цього матроїда відповідають вершини графа, а триелементним незалежним множинам відрізки і коло.

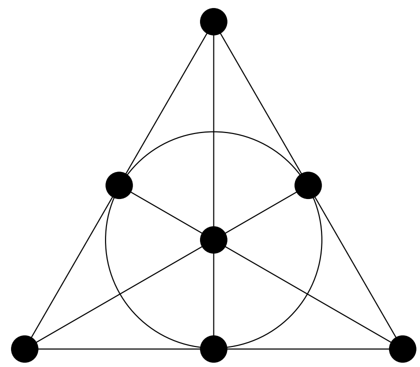


Рис. 6.9: Площина Фано

Графовий матроїд. Нехай $\Gamma = (V, E)$ — простий скінченний граф. Визначимо матроїд $(S_\Gamma, \mathcal{I}_\Gamma)$, носієм S_Γ якого є множина E ребер графа Γ. Родина $\mathcal{I}_\Gamma)$ складається з таких підмножин $A \subseteq E$, що підграф графа Γ, індукований A, тобто підграф, множиною ребер якого є A, а множиною вершин V, є ациклічним.

Теорема 6.21. *Нехай* $\Gamma = (V, E)$ *— простий скінченний граф. Тоді* $(S_\Gamma, \mathcal{I}_\Gamma)$ *є матроїдом.*

Доведення. Оскільки підграф ациклічного графа є ациклічним, то умова спадковості виконується.

Нехай $A, B \in \mathcal{I}_\Gamma$ і $|A| < |B|$. Позначимо підграфи графа Γ, індуковані A і B, символами Γ_A і Γ_B відповідно. Тоді обидва графи Γ_A і Γ_B є ациклічними, тобто лісами. Тоді ліси Γ_A і Γ_B мають $|V| - |A|$ і $|V| - |B|$ компонент зв'язності відповідно. Отже, в Γ_A компонент зв'язності більше, ніж в Γ_B. Тому знайдуться такі дві вершини з V, які належать різним компонентам зв'язності графа Γ_A, але лежать в одній і тій же компоненті зв'язності графа Γ_B. Звідси випливає, що знайдуться такі дві вершини з цієї компоненти зв'язності графа Γ_B, які у ній з'єднані ребром e, але належать різним компонентам зв'язності графа Γ_A. Таким чином, ребро e належить $B \setminus A$ і додавши його до графа Γ_A отримаємо ациклічний граф. Отже, $A \cup \{e\} \in \mathcal{I}_\Gamma$ і умова заміни також виконується. □

Матроїд $(S_\Gamma, \mathcal{I}_\Gamma)$ називається графовим матроїдом, визначеним графом Γ. Цей приклад можна розглядати як інтерпретацію ациклічності мовою матроїдів.

Означення 6.14. *Базисом матроїда $(S, \mathcal{I})$ називається така незалежна множина $A \in \mathcal{I}$, що жодна її власна надмножина, тобто підмножина $B \subseteq S$, для якої $A \subsetneq B$, не є незалежною.*

Іншими словами, базиси матроїдів — це максимальні за включенням незалежні множини. Зокрема, в матричному матроїді базиси відповідають максимальним лінійно незалежним підсистемам системи векторів-стовпчиків.

Означення 6.15. *Циклом матроїда $(S, \mathcal{I})$ називається така підмножина $B \subseteq S$, яка не є незалежною, але усі її власні підмножини є незалежними.*

Іншими словами, цикли матроїдів — це мінімальні за включенням підмножини їх носіїв.

Зауважимо, що кожен матроїд з носієм S повністю характеризується як сукупністю базисів, так і сукупністю циклів.

Теорема 6.22. *Довільні два базиси матроїда $(S, \mathcal{I})$ містять рівні кількості точок.*

Доведення. Нехай A і B — базиси матроїда $(S, \mathcal{I})$. Припустимо, що кількості їх точок різні. Без обмеження загальності вважатимемо, що $|A| < |B|$. Тоді з умови заміни випливає, що існує така точка $x \in B \setminus A$, що $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Таким чином, для базису A існує власна незалежна надмножина. Суперечність. Отже, $|A| = |B|$. □

Таким чином, коректним є таке

Означення 6.16. *Рангом матроїда* $(S, \mathcal{I})$ *називається кількість точок у його базисі.*

З означення випливає, що ранг матричного матроїда, визначеного матрицею M, дорівнює рангу цієї матриці.

Доведемо так звану умову заміни точки в базисі матроїда.

Теорема 6.23. *Нехай A і B — різні базиси матроїда $(S, \mathcal{I})$. Тоді для довільної точки $a \in A \setminus B$ існує така точка $b \in B \setminus A$, що підмножина $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ є незалежною.*

Доведення. Зауважимо, що з припущення, що базиси A і B є різними і теореми про рівну кількість точок в базисах випливає, що A і B непорожні.

З умови спадковості випливає, що підмножина $A \setminus \{a\}$ є незалежною. Оскільки $|A \setminus \{a\}| < |B|$, то з умови заміни випливає, що для деякої точки $b \in B \setminus (A \setminus \{a\})$ підмножина $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ є незалежною. Оскільки $a \in A \setminus B$, то $b \neq a$ і тому $b \in B \setminus A$. □

Дуальний матроїд. Розглянемо матроїд $(S, \mathcal{I})$. Визначимо родину $\mathcal{I}'$ підмножин носія S такою умовою: підмножина $A \subseteq S$ належить $\mathcal{I}'$ тоді й тільки тоді, коли доповнення $S \setminus A$ містить деякий базис матроїда $(S, \mathcal{I})$. Перевірте, що $(S, \mathcal{I}')$ є матроїдом. Матроїд $(S, \mathcal{I}')$ називається дуальним до матроїда $(S, \mathcal{I})$.

Розглянемо скінченну множину S і деяке її розбиття на k непорожніх підмножин $S_1, \ldots, S_k$. Визначимо родину $\mathcal{I}$ підмножин S такою умовою: підмножина $A \subseteq S$ належить $\mathcal{I}$ тоді й тільки тоді, коли

$$|A \cap S_i| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Перевірте, що тоді пара $(S, \mathcal{I})$ — це матроїд.

Означення 6.17. *Матроїд $(S, \mathcal{I})$ називається зваженим, якщо на його носієві визначено функцію ваги $\omega : S \to \mathbb{R}^+$.*

В цьому випадку для довільної точки $x \in S$ число $\omega(x)$ називається вагою точки x, а для підмножини $A \subseteq S$ її вагою є сума

$$\sum_{x \in A} \omega(x).$$

Ряд задач комбінаторної оптимізації зводяться до пошуку в певному зваженому матроїді незалежної підмножини максимально можливої ваги. Таку підмножину називатимемо оптимальною. Оскільки вага кожної точки матроїда додатна, то оптимальна підмножина є базисом матроїда, тобто її потрібно шукати серед незалежних підмножин, котрі є базисами заданого матроїда.

Задача знаходження мінімального кістякового дерева. Нехай $\Gamma = (V, E)$ — зв'язний простий скінченний граф. Визначимо на множині його ребер функцію ваги $\omega : E \to \mathbb{R}^+$. Задача знаходження мінімального кістякового дерева — це задача пошуку такого кістякового дерева графа Γ, сума ваг ребер якого є мінімально можливою.

Цю задачу можна переформулювати як задачу знаходження оптимальної підмножини матроїда. А саме, розглянемо графовий матроїд $(S_\Gamma, \mathcal{I}_\Gamma)$. Його базисами будуть ті підмножини множини E, що індуковані ними підграфи є кістяковими деревами. Для числа $\alpha = \max\{\omega(e) \mid e \in E\} + 1$ визначимо вагову функцію $\omega' : E \to \mathbb{R}^+$, поклавши $\omega'(e) = \alpha - \omega(e)$, $e \in E$. Тоді мінімальне кістякове дерево відносно вагової функції ω буде індукуватися оптимальною підмножиною відносно вагової функції ω'.

Наведемо жадібний алгоритм пошуку оптимальної підмножини A в зваженому матроїді $(S, \mathcal{I})$, на якому визначено вагову функцію ω.

1. Ініціалізуємо множину A як порожню.

2. Сортуємо всі точки матроїда у порядку незростання ваг:
$$\omega(x_1) \geq \ldots \geq \omega(x_n), \text{ де } S = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$
3. Перебираємо точки $x \in S$ у порядку незростання ваг і якщо $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, то оновлюємо A, додавши до неї x.

Покажемо, що отримана в результаті роботи цього алгоритму множина A буде оптимальною. Для цього доведемо кілька допоміжних тверджень.

Лема 6.24. *Нехай точка $x \in S$ має найбільшу вагу серед точок, що належать незалежним підмножинам. Тоді існує така оптимальна підмножина A, що $x \in A$.*

Доведення. Розглянемо деяку оптимальну підмножину B. Припустимо, що $x \notin B$.

Оскільки x належить деякій незалежній підмножині, то з умови спадковості випливає, що одноелементна підмножина $A' = \{x\}$ незалежна. Якщо підмножина B також одноелементна, то A' оптимальна і все доведено. В іншому випадку $|A'| < |B|$ і, застосувавши $|B| - 1$ разів умову заміни, отримаємо незалежну підмножину $A = \{x\} \cup B'$ для деякої $B' \subset B$, $|B'| = |B| - 1$. Тоді вага A не менша за вагу B, тобто A є шуканою оптимальною підмножиною. □

Лема 6.25. *Нехай для точки $x \in S$ одноелементна підмножина $\{x\}$ не є незалежною. Тоді для довільної $A \in \mathcal{I}$ підмножина $A \cup \{x\}$ також не є незалежною.*

Доведення. Якщо припустити, що $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, то з умови спадковості отримаємо $\{x\} \in \mathcal{I}$. Це суперечить умові леми. □

Припустимо, що в результаті роботи описаного вище алгоритму знаходження оптимальної підмножини першою точкою, включеною у таку підмножину є точка $x \in S$. Визначимо нову пару $(S_x, \mathcal{I}_x)$, поклавши

$$S_x = \{y \in S \mid \{x, y\} \in \mathcal{I}\},$$

$$\mathcal{I}_x = \{B \subseteq S_x \mid B \cup \{x\} \in \mathcal{I}\}.$$

Тоді $(S_x, \mathcal{I}_x)$ є матроїдом, який назвемо звуженням матроїда $(S, \mathcal{I})$. Зауважимо, що звуження вагової функції ω на S_x буде ваговою функцією на звуженні.

Лема 6.26. *Нехай A_x — оптимальна підмножина для звуження $(S_x, \mathcal{I}_x)$. Тоді підмножина $\{x\} \cup A_x$ є оптимальною для $(S, \mathcal{I})$.*

Доведення. Довільна підмножина $A \in \mathcal{I}$ така, що $x \in A$, має вигляд $\{x\} \cup B$ для деякої підмножини $B \in \mathcal{I}_x$. При цьому вага A рівна сумі ваг точки x і підмножини B. Враховуючи, що вага x максимальна серед точок, вибраних алгоритмом пошуку оптимальної підмножини, звідси отримуємо твердження леми. □

Теорема 6.27. *Жадібний алгоритм пошуку оптимальної підмножини є коректним, тобто підмножина, знайдена в результаті його роботи, є оптимальною.*

Доведення. За лемою 6.25 всі точки $x \in S$, для яких підмножина $\{x\}$ не є незалежною, можна не розглядати.

За лемою 6.24, обравши в результаті роботи жадібного алгоритму знаходження оптимальної підмножини першу точку, вага якої максимальна, отримаємо існування оптимальної підмножини, яка її містить.

Нарешті, лема 6.26 означає, що в результаті подальшої робота жадібного алгоритму буде отримано оптимальну підмножину. □

Задачі. 1) Чи існує планарний граф, який має 8 вершин і 17 ребер?

2) Яку найбільшу кількість граней може мати планарний граф на 5 вершинах? Побудувати цей граф.

3) Для набору степенів вершин $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$ побудувати два графи, один із яких планарний, а інший непланарний.

4) Довести, що в кожному плоскому графі є або вершина степеня $\leqslant 3$, або грань степеня $\leqslant 6$ (нагадаємо, що степінь грані α є числом Δ_α, яке визначається рівністю $\Delta_\alpha = k_\alpha + b_\alpha$, де k_α – число ребер грані, b_α – кількість тих ребер із цих k_α, які не входять в жоден цикл графа).

5) Побудувати граф на 6 вершина з 12 ребрами, який містить одночасно підграфи, гомеоморфні K_5 і $K_{3,3}$.

6) Знайти хроматичне число а) повного дводольного графа $K_{m,n}$, б) простого циклу довжини $2k$, $k \geqslant 1$, в) простого циклу довжини $2k + 1$, $k \geqslant 1$

7) Довести, що хроматичне число непорожнього графа G дорівнює 2 тоді і тільки тоді, коли граф G не містить циклів непарної довжини.

Бібліоґрафія

[1] В.І.Андрійчук, М.Я.Комарницький, Ю.Б.Іщук, Вступ до дискретної математики. Київ: "Центр навчальної літератури". – 2004.

[2] Оксана Безущак, Олександр Ганюшкін, Математична логіка. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2023.

[3] Ю.В. Боднарчук, Б.В. Олійник, Основи дискретної математики. Київ: Вид. дім "Києво-Могилянська академія". – 2009.

[4] В.А. Вишенський, М.О. Перестюк, Комбінаторика: перші кроки. Кам'янець-Подільський: Аксіома. – 2010.

[5] О.Г.Ганюшкін, Комбінаторний аналіз. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2024.

[6] Ю.А. Дрозд, Дискретна математика. Київ. – 2004.

[7] С.Л. Кривий, Дискретна математика : вибрані питання. Київ: Вид. дім "Києво-Могилянська академія". – 2007.

[8] М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк, Прикладна логіка. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2013.

[9] А.С. Олійник, В.І. Сущанський, Математична логіка. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2013.

[10] М.Й. Ядренко, Дискретна математика. Київ: ТВіМС. – 2004.

[11] Р.Є. Ямненко, Дискретна математика. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2010.

[12] R. Diestel, Graph theory. Graduate Texts in Mathematics, 5th ed., Springer. – 2016.

[13] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. – 1989.

[14] M. Hall (Jr.), Combinatorial Theory. New-York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[15] Stanley R.P. Enumerative Combinatorics. Vol. 1, 2rd ed., Cambridge University Press. – 2011.

[16] W.D. Wallis, A Beginner’s Guide to Discrete Mathematics. New-York: Birkhaeuser, 2012.