ВІЙСЬКОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ ТА ІНФОРМАТИЗАЦІЇ ІМЕНІ ГЕРОЇВ КРУТ

**Козубцова Л.М., Бескровний О.І.,
Сухомлинова О.В., Соловйова Т.В.**

Практикум з теорія прийняття рішень

Київ – 2025

УДК 51:004(076)
П69

Козубцова Л.М., Бескровний О.І., Сухомлинова О.В., Соловйова Т.В.

Практикум з теорії прийняття рішень. – К.: ВІТІ, 2025. – 125 с.

Практикум з теорії прийняття рішень має на меті допомогти курсантам у самостійному засвоєнні практичної частини дисципліни «Теорія прийняття рішень» під час виконання практичних та групових робіт, а також при виконанні індивідуальних завдань

Видання включає в себе тематику практичних та групових робіт, переліки основних теоретичних питань, короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування типових задач, а також задачі для самостійного розв'язування за темою заняття. Сформульовано питання для самоконтролю.

Практикум призначений для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальностей F3 «Комп'ютерні науки» та F6 «Інформаційні системи і технології.

Рекомендовано до друку Вченою радою інституту, протокол № від року.

ВСТУП

Аргументоване прийняття рішень є основою успішної діяльності в будь якій сфері діяльності. В умовах збільшення кількості інформації не можливо зробити вибір, користуючись тільки власним досвідом та інтуїцією. Тому актуальним є використання математичних методів дослідження системи різної природи та прийняття рішення.

Дисципліна «Теорія прийняття рішення» є необхідним елементом сучасної освіти офіцера в галузі інформаційних технологій. Вона належить до загальноосвітнього циклу підготовки і спрямована на оволодіння сучасними методами дослідження і прийняття рішення.

Мета вивчення дисципліни «Теорія прийняття рішень» - це формування компетентностей у сфері моделювання процесу прийняття рішень та обґрунтованого застосування відповідних методів до розв’язування прикладних задач професійного спрямування в умовах невизначеності різного роду.

Основне завдання практикуму – надання методичної допомоги курсантам у вивченні навчальної дисципліни „Теорія прийняття рішень” та сформувати у них системні уявлення опанування методологією і методами теорії прийняття рішень, як майбутніх фахівців у галузі комп’ютерних та інформаційних технологій

Теорія прийняття рішень дозволяє з одного боку, формалізувати задачу, з іншого боку, з великою вірогідністю не тільки прийняти необхідне рішення, але й визначити найкраще з усіх можливих.

Дане видання призначено для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальностей F3 «Комп’ютерні науки» та F6 «Інформаційні системи і технології.

Практична робота № 1

Тема роботи: Бінарні відношення

Мета роботи: вивчення властивостей бінарних відношень, операцій над відношеннями, побудова матриць попарних порівнянь (МПП), дослідження їх властивостей та відновлення за МПП загального порядку серед об'єктів, набуття навичок прийняття рішень на основі заданих відношень.

Теоретичні відомості

В реальних ситуаціях часто буває важко або неможливо дати характеристику окремого об'єкта $a \epsilon A$ у вигляді числового наслідку. Але якщо розглядати об'єкт не окремо, а в парі з іншим, то знаходяться підстави сказати, який з них краще (переважає інший).

Визначити бінарне відношення R означає тим чи іншим способом вказані всі пари об'єктів, для яких виконується R.

Означення Відношенням R на множині називається підмножина декартового добутку $\Omega \times \Omega$, тобто $R \subset \Omega^2$.

Задання підмножини R у множині $\Omega \times \Omega$ визначає, які саме пари елементів перебувають у відношенні R.

Існує три способи визначення бінарних відношень: переліком усіх пар, за допомогою графа, та у вигляді матриць парних порівнянь (МПП).

Елементи МПП можуть визначатись, наприклад т

При поданні відношення матрицею на перетині i-го рядка та j-го стовпчика ставимо 1, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j , і нуль в інших випадках, а саме:

$$a_{ij}(R) = \begin{cases} 1, & x_i R x_j \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Відношення називається *порожнім* (позначається $\emptyset$), якщо воно не виконується для жодної пари $(x, y) \in \Omega \times \Omega$

Для порожнього відношення справедливі такі твердження:

1. У матриці А $(\emptyset)$ величини a_{ij} $(\emptyset) = 0$ для всіх значень i, j.
2. Граф G $(\emptyset)$ не має дуг.
3. $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \emptyset$ для всякого елемента x є A.

Відношення називається *повним* (позначається U), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \in \Omega \times \Omega$. Для повного відношення правильні такі ознаки:

1. У матриці $A(U)$ величиниa_{ij} $(U) = 1$ для всіх значень i, j.
2. У графі $G(U)$ дуги з'єднують будь-яку пару вершин.
3. Перерізи $R^{+}(x) = R^{-}(x) = A$ для всіх елементів x є A.

Відношення називається *діагональним* або відношенням *рівності* (позначається Е), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \in A \times A$, які складаються із збіжних елементів. Тобто xEy, якщо x та y - це один і той самий елемент множини А. Для діагонального відношення Е мають місце такі твердження:

1. У матриці А(Е)
$$x_{ij}(E) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$
2. У графі G(E) наявні тільки петлі при вершинах, інші дуги відсутні.
3. Розрізи $R^{+}(x) = R^{-}(x) = x$ для всіх елементів x є А.

Відношення називається *антидіагональним* (позначається $\bar{E}$), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \in A \times A$, які складаються із незбіжних елементів. Для відношення $(x, y) \in A \times A$ справедливі такі ознаки:

1. У матриці А $(\bar{E})$

$$x_{ij}(E) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \neq j \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

2. У графі G($\bar{E}$) наявні всі дуги (x_i, x_j) якщо $i \neq j$ (відсутні тільки петлі при вершинах).

Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = A \backslash x$ для всіх елементів $x \epsilon A$.

Операції над відношеннями

Відношення R_1 *включено* у відношення R_1 (записується як $R_1 \leq R_2$), коли множину пар, для яких виконується відношення R_1 , включено в множину пар, для яких виконується R_2 .

Будемо говорити, що відношення R_1 строго включено в R_1 ($R_1 < R_2$), якщо $R_1 \leq R_2$ й $R_1 \neq R_2$. Рівність відношень реалізується так само, як і рівність множин.

Для матричного задання відношень буде діяти таке правило: якщо $R_1 \leq R_2$, то $a_{ij}(R_1) \leq a_{ij}(R_2), i, j = 1,2, \dots, n$

Приклад R_1 - відношення « $\leq$» на множині дійсних чисел, R_2- відношення « < » на тій самій множині. Тоді $R_1 \leq R_2$

Відношення $\overleftarrow{R}$ називається *доповненням* відношення R, тоді і тільки тоді, коли воно пов'язує тільки ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що $\overleftarrow{R} = A^2 \backslash R$

Тому в матричному записі $a_{ij}(\overleftarrow{R}) = 1 - a_{ij}(R)$, $i, j = 1,2, \dots, n$

У графі $G(\overleftarrow{R})$ наявні ті і тільки ті дуги, що відсутні у графі $G(R)$.

Для розрізів відношення R справедливі такі твердження:

$$\overleftarrow{R}^+(x) = A \backslash R^+$$
$$\overleftarrow{R}^-(x) = A \backslash R^-$$

Приклад Нехай R - відношення «≥», задане на множині дійсних чисел, тоді $\overleftarrow{R}$ - відношення « < », задане на тій самій множині.

Перетином відношень R_1 та R_2 (записується $R_1 \cap R_2$) називається відношення, визначене перетином відповідних підмножин множини A^2.

У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cap R_2) = \min\{a_{ij}(R_2), a_{ij}(R_2)\}$$

Об'єднанням відношень R_1 та R_2 (записується $R_1 \cup R_2$)називається відношення, отримане шляхом об'єднання відповідних підмножин множини Q2.

В матричному записі це можна подати таким чином:

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2) = \max\{a_{ij}(R_2), a_{ij}(R_2)\}$$

Оберненим до відношення R називається відношення R^{-1}, яке задовольняє таку умову:

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow xRy$$

Для матриць відношень R та R^{-1} буде мати місце така формула:

$$a_{ij}(R^{-1}) = a_{ij}(R)$$

Приклад. Нехай R - відношення «≥» на множині дійсних чисел. Тоді оберненим до нього відношенням R^{-1} буде відношення « < » на множині дійсних чисел.

Приклад. Нехай відношення R на множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ задано матрицею

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

Розв'язання. Згідно з визначенням доповнене відношення R можна задати такою матрицею:

$$\overleftarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обернене відношення будуємо за означенням

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добутком (або композицією) відношень R_1 та R_2 (позначається як $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, яке будується за таким правилом:

$x(R_1 \cdot R_2)$y, коли існує елемент $z \in A$, який задовольняє умови xR_1z та zR_2y .

Приклад Розглянемо відношення R_1 та R_2, подані на множині дійсних чисел. Причому, R_1 -відношення «менше», R_2- відношення «більше». Пара чисел $(x; y) \subset R_1 \cdot R_2$, коли існує число z, для якого виконано такі вимоги: $x < z$ та $z > y$. Вочевидь, ця умова виконується для всіх чисел x, y, а тому $R_1 \cdot R_2$ - це повне відношення (тобто таке, яким пов’язані всі елементи даної множини).

Приклад. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, на ній подано два відношення R_1 та R_2, а саме

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначити їх композицію.

Розв’язання

Згідно із визначенням $x(R_1 \cdot R_2)$y, коли існує елемент $z \in A$, який задовольняє умови xR_1z та zR_2y. У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cdot R_2) = \max_{k=1,\dots,n} min\ \{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\}$$

де n - порядок матриці.

Інакше кажучи, композиція відношень обчислюється як максимінний добуток відповідних їм матриць.

Тоді отримуємо, що

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Відношення (R_1, A_1) називається *звуженням* відношення (R, A) на множину A_1, якщо $A_1 \subset A$ та $R_1 = R \cap A_1 \times A_1$. Звуження відношення (R, A) на множину A_1називають також відношенням R на множині A_1.

Приклад. Відношення «>» на множині натуральних чисел є звуженням відношення « >» на множині дійсних чисел

Властивості відношень

Відношення R називається *рефлексивним,* якщо xRx для будь-якого елемента $x \epsilon A$.

Наприклад, відношення «бути схожими», «бути не старшим», «менше або дорівнює» - рефлексивні; «бути братом», «бути старшим», «більше» - не рефлексивні.

У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі розміщуються одиниці, тобто елемент матриці $a_{ij}, =$ 1, якщо $i = j$.

Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі при вершинах. Стосовно верхнього й нижнього розрізів справедливі твердження: $x \in R^{+}(x),\ x \in R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \epsilon$А.

Відношення R називається *антирефлексивним,* коли твердження xRy означає, що $x \neq y$ для всіх x є А.

У матриці антирефлексивного відношення елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, тобто $Qj = 0$, якщо $i = j$.

Граф антирефлексивного відношення не має петель при вершинах, а верхні та нижні розрізи задовольняють такі умови: $x \notin R^+(x),\ x \notin R^-(x)$ для всіх елементів $x \epsilon$A.

Антирефлексивними будуть відношення «більше», «менше», «бути старшим».

Відношення R називається *симетричним,* якщо $R = R^{-1}$ $(xRy \Rightarrow yRx)$

Матриця симетричного відношення симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i, j. У графі такого відношення всі дуги парні, а верхні й нижні розрізи збігаються для всіх елементів x ϵ A, тобто $R^+(x) = R^-(x)$ для всіх $x \epsilon$ A.

Симетричними є відношення рівності, «бути схожим», «вчитися в одній групі».

Відношення R називається *асиметричним,* якщо $R \cap R^{-1} = \emptyset$ (тобто з двох виразів *xRy* та *yRx* хоча б один не відповідає дійсності).

У матриці симетричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх значень i, j. Тобто з двох симетричних елементів a_{ij} і a_{ji} хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Асиметричними, наприклад, є відношення «більше» та «менше».

Зауважимо, що антирефлексивність - це обов'язкова умова асиметричності.

Відношення R називається *антисиметричним,* якщо твердження *xRy* та *yRx* можуть бути правильними одночасно тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

У матриці антисиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$.

Прикладами антисиметричних будуть відношення «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше».

Відношення R називається *транзитивним,* якщо $R^2 \leq R$ (тобто, коли з тверджень xRz та zRy випливає, що xRy).

Транзитивними є відношення «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «вчитися в одній групі».

Умова $R^2 \leq R$, дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення в разі, коли відношення задано за допомогою матриці. Для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}(R^2) \leq a_{ij}(R)$ для всіх значень i, j, то відношення транзитивне. Коли ж цю умову порушено хоча б для однієї пари індексів i, j, то відношення не буде транзитивним/

Відношення R називається *ациклічним,* якщо $R^k \cap R^{-1} = \emptyset$, тобто з умов $xRz_1, z_1Rz_2, \dots, z_{k-1}Ry$ випливає, що $x \neq y$. .

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

Відношення R називається *від'ємно транзитивним*, якщо його доповнення $\bar{R}$ транзитивне.

Відношення R називається *сильно транзитивним,* якщо воно одночасно транзитивне і від'ємно транзитивне.

Властивості ациклічності й транзитивності відіграють особливу роль у теорії прийняття рішень, оскільки вони виражають природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт *x* у деякому сенсі не гірший за об'єкт *y*, а об'єкт *y* в тому самому сенсі не гірший за об'єкт *z*, то природно чекати, що об'єкт *x* буде не гіршим від об'єкта *z* (транзитивність), і в будь-якому разі об'єкт *z* не кращий за об'єкт *x* (ациклічність).

Приклад Визначити властивості заданого відношення:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв 'язання

Дане відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (тому що серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад елементи a_{12} та a_{21}). Оскільки елемент $a_{31} = a_{13}$, то відношення не буде також асиметричним й антисиметричним.

Для перевірки його транзитивності обчислимо добуток даного відношення на себе, тобто

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^2 \notin R,$ отже, вихідне відношення не є транзитивним.

Відношення R є *відношенням еквівалентності* (еквівалентністю), якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Позначимо його R_e або символом ~ .

Прикладами відношеннями еквівалентності будуть такі:

- «вчитися на одному курсі», «учитися в одній групі», задані на множині курсантів факультету;
- «мати однакову остачу при діленні на 3» на множині натуральних чисел;
- відношення подібності на множині трикутників та інші.

Характерним для еквівалентності є те, що вона розподіляє елементи на класи. У першому прикладі - це курси або групи курсантів факультету, у другому - множини чисел, що мають однакову остачу при діленні на 3, у третьому - множини подібних трикутників. Отже, задання еквівалентності на множині тісно пов’язане з її розбиттям на неперетинні підмножини. Розглянемо цю властивість еквівалентності докладніше.

Відношенням нестрогого порядку «≤» (нестрогим порядком) називається відношення, що має властивості рефлексивності, антисиметричності й транзитивності.

Відношенням строгого порядку «<» (строгим порядком) називається відношення, яке має властивості антирефлексивності, асиметричності й транзитивності.

Якщо на множині A задано відношення «≤», тобто деякий нестрогий порядок, то йому можна поставити у відповідність строгий порядок «<» , що визначається за таким правилом: $x <$ у тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$ та $x \neq y$. І навпаки, якщо «<» - відношення строгого порядку, задане на множині А, то йому можна поставити у відповідність відношення «<≤ » таким чином $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $x <$ у або $x =$ у. Тобто за нестрогим порядком ми можемо визначити відповідний йому строгий порядок і навпаки.

Припустимо, що на деякій множині задано відношення порядку (для всіх, або деяких пар її елементів), тоді кажуть, що на цій множині задано *частковий порядок.*

Частковий порядок на множині А називається лінійним порядком, якщо для будь яких елементів $x, y \epsilon A$ справедливе одне з трьох тверджень: $x <$ у, $x =$ у або $x >$ у (тобто ми можемо порівняти будь-які два елементи множини Q).

Відношенням домінування називається відношення, що має властивості антирефлексивності й асиметричності.

Будемо говорити, що елемент x домінує над елементом y, якщо x в якому- небудь сенсі кращий за y.

Таким чином, відношення строгого порядку являє собою окремий випадок відношення домінування, для якого характерна ще й транзитивність. У загальному ж сенсі при домінуванні як транзитивність так і ациклічність можуть не мати місця.

Два елементи можна порівняти за відношенням R, коли *xRy* або *yRx*. В інших випадках елементи непорівнянні.

Якщо R - повне відношення на множині А, то будь-які два елементи цієї множини можна порівняти.

Розглянемо, які порядки можна задати на *n*-вимірному просторі E_m:

1. $a \geq b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \geq b_i$, і = 1,2, ...m;
2. $a \geq b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \geq b_i$, і = 1,2, ...m та $a \neq b$; ;
3. $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i > b_i$, і = 1,2, ...m;
4. $a = b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i = b_i$, і = 1,2, ...m;

Відношення 1 являє собою частковий порядок, воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне).

Відношення 2 і 3 - це строгі часткові порядки. Вони антирефлексивні, асиметричні й транзитивні.

Для опису переваги зазвичай використовують такі бінарні відношення, задані на множині альтернатив А: строгої переваги, байдужості та нестрогої переваги.

Відношення строгої переваги R^s означає, що один об'єкт (строго) переважає над іншим (тобто один об'єкт кращий від іншого).

Відношення байдужості R^I означає, що об'єкти однакові за перевагами, і коли обмежити вибір цими двома об'єктами, не важливо, який з них буде вибрано.

Відношення нестрогої переваги означає, що один об'єкт не менш переважний, ніж інший (тобто один об'єкт не гірший від іншого).

Приклад розв'язування задач

1. Визначити властивості такого відношення:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дане відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (тому що серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад елементи a_{12} та a_{21}). Оскільки елемент $a_{31} = a_{13}$, то відношення не буде також асиметричним й антисиметричним.

Для перевірки його транзитивності обчислимо добуток даного відношення на себе, тобто

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^2 \notin R,$ отже, вихідне відношення не є транзитивним.

2. Нехай відношення R на множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ задано матрицею

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

Розв'язання. Згідно з визначенням доповнене відношення R можна задати такою матрицею:

$$\overleftarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обернене відношення будуємо за означенням

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задачі для самостійного розв'язання

Відношення задано у вигляді матриці. Задати його да допомогою:

а) графа; б) верхніх розрізів; в) нижніх розрізів.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Перевірити властивості записаних нижче відношень та побудувати відношення строгої переваги, еквівалентності та байдужості.

а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ б) $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Контрольні питання

1. Дайте визначення бінарного відношення.
2. Які існують способи задання відношень?
3. Яким чином можна задати відношення за допомогою матриці?
4. Як можна задати відношення у вигляді графа?
5. Як задати відношення за допомогою розрізів?
6. Сформулюйте визначення верхнього (нижнього) розрізу відношення.
7. Які із способів задання відношень можна використовувати на нескінченній множині елементів?
8. Які математичні операції виконують над відношеннями?
9. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?
10. Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?
11. Які відношення називають транзитивними, сильно транзитивними, від’ємно транзитивними?
12. Яким чином обчислюють транзитивне замикання відношення?
13. Які властивості характерні для відношення переваги?
14. Дайте визначення найкращого (найгіршого) елемента множини.
15. Який елемент множини називається мінімальним (максимальним) за
16. даним відношенням переваги?
17. Яке значення в теорії прийняття рішень мають поняття найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів? Де вони використовуються?

Варіанти індивідуальних завдань

Перевірити, чи буде дане відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асимеитричним, транзитивним. Відшукати для нього найбільший, найменший, максимальний та мінімальний елементи, якщо такі існують, і побудувати обернене й додаткове відношеня.

1. $$R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

2. $$R=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&1&1&0\\1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

3. $$R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

4. $$R=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

5. $$R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

6. $$R=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

7. $$R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

8. $$R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

9. $$R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

10. $$R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

11. $$R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

12. $$R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

13. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

16. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

20. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

22. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

24. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

25. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

26. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

27. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 28. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

29 $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 30. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Практична робота № 2

Тема роботи: Побудова функції корисності.

Мета роботи: вивчення поняття функції корисності й методів її побудови на основі заданих відношень переваги.

Теоретичні відомості

Для порівняння різних альтернатив і вибору найкращої з них також можна керуватися деякою кількісною мірою їхніх властивостей, значення якої слугує критерієм такого вибору. Правила (процедури) прийняття рішень на основі такої міри побудовано за допомогою теорії корисності, розробленої Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном. Математичною базою цієї теорії виступає система аксіом, у яких стверджується існування деякої міри цінності, що дозволяє впорядкувати альтернативи (результати рішень). Така міра називається *функцією корисності* або *корисністю результатів*.

Практичне застосування теорії корисності ґрунтується на таких аксіомах:

1. Результат (альтернатива) є кращою за альтернативу x_j (записується $x_i > x_j$), тоді і тільки тоді, коли $u(x_i) = f(x_i) > u(x_j)$, де $u(x_i)$ і $u(x_j)$ – значення корисності альтернатив x_i і x_j відповідно.

2. Якщо $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $x_i > x_k$ і $u(x_i) > u(x_{k)}$ (транзитивність).

3. Якщо $x_1,\ x_2$ – деякі альтернативи, то $u(x_1,\ x_2) = u(x_1)+u(x_2)$ (адитивність).

Аналогічно, коли є n результатів $x_1, x_2, \dots, x_n$, які досягаються одночасно, то

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_s(x)$$

Іншими словами, корисність кількох результатів, досягнених одночасно, дорівнює сумі значень їхньої корисності.

Застосовуючи поняття функції корисності (цільової функції) $f(x)$, можна визначити такі відношення на множині альтернатив X:

– відношення слабкої (нестрогої) переваги «не гірше», яке позначається символом ≥ ,

– відношення рівноцінності, позначене символом ~,

– відношення строгої переваги, що позначається символом >.

Визначення Стосовно двох альтернатив $x_1,\ x_2$ можна стверджувати таке:

$x_1 \geq x_2$, тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$;

$x_1 \sim x_2$, тоді і тільки тоді, коли $f(x_1) = f(x_2)$;

$x_1 > x_2$, тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) > f(x_2)$.

У порівнянні значень цільових функцій стосовно різних альтернатив беруться символи ≥ або < залежно від того, чи вважається кращою альтернатива при більшому або меншому значенні цільової функції.

Розглянемо кілька варіантів застосування цієї методики в різних ситуаціях.

І. Наявні тільки два результати. У цьому разі методика обчислення корисності така:

1. Встановлюємо, який результат є кращим для особи, що приймає рішення. Припустимо, що $x_1 > x_2$, тобто альтернатива x_1 краща, ніж альтернатива x_2.

2. Потім визначаємо таку ймовірність α, коли досягнення результату x_1 буде еквівалентним результату x_2, отриманому з імовірністю 1.

3. Оцінюємо співвідношення між значеннями корисності результатів x_1 і x_2.

Для цього припустимо, що корисність $u(x_2) = 1$, тоді $\alpha u(x_1) = u(x_2)$ та $u(x_1) = \frac{1}{\alpha}$.

ІІ. Існує n можливих альтернатив $x_1, x_2, \dots, x_n$,, між якими встановлено такі переваги: $x_1 > x_2, > \cdots > x_n$,.

У цьому випадку методика визначення корисності така:

1. Визначаємо величину α_1 із умови, що $\alpha_1 u(x_1) = u(x_2)$.

2. Виконуємо аналогічні дії стосовно альтернативx_2, x_3, ..., тобто

$$\alpha_2 u(x_2) = u(x_3);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-1} u(x_{n-1}) = u(x_n).$$

3. Вважаючи, що корисність найменш переважного результату дорівнює 1, знаходимо значення корисності для інших результатів, а саме:

$$u(x_n) = 1;$$
$$u(x_{n-1}) = \frac{1}{\alpha_{n-1}};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..$$
$$u(x_1) = \frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \dots \alpha_1}.$$

ІІІ. Наявні якісні критерії. За таких умов маємо інформацію про переваги між окремими альтернативами та їхніми групами. Тоді можна застосовувати методику, побудовану на алгоритмі, запропонованому Р. Акофом і Р. Черчменом.

Припустимо, що існує n альтернатив, а саме: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Методика визначення корисності передбачає такі етапи:

1. Упорядковують усі альтернативи в порядку зменшення переваги. Нехай x_1 – альтернатива, що має найбільшу перевагу, а x_n – альтернатива, перевага якої найменша.

2. Складають таблицю можливих комбінацій результатів, що досягаються одночасно, і тоді встановлюють їхню перевагу над окремими результатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ (табл. 2).

Таблиця 2.1

1	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_n$	$n+1$	x_2 або $x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1}$
2	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}$	$n+1$	x_2 або $x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-2}$
3	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-2}$	$n+1$	x_2 або $x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-3}$
…	…	…	…
n	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_n$	N	x_{n-2} або $x_{n-1} + x_n$

Інформацію про переваги результатів зазвичай отримують від експертів.

3. Приписують початкові оцінки корисності окремим результатам, а саме $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)$. Потім початкові оцінки підставляють в останнє співвідношення з табл. 2. Якщо воно задовольняється, то оцінки не змінюють.

У протилежному випадку проводять корекцію корисності так, аби наведене співвідношення було правильним.

Після цього переходять до наступного співвідношення. Процес корекції триває до тих пір, поки не утвориться така система оцінок: $u^*(x_1)$, $u^*(x_2), \ldots$, $u^*(x_n)$, що задовольнятиме всі перелічені в таблиці співвідношення. Корекцію належить проводити таким чином, щоб змінювати мінімальну кількість оцінок результатів.

Приклад розв'язування задач

Приклад. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \ldots, x_5$, надавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$, $u_0(x_2) = 4$, $u_0(x_3) = 2$, $u_0(x_4) = 1{,}5$, $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів, а саме:

1) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
2) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4$;
3) $x_1 > x_2 + x_3 + x_5$;
4) $x_1 > x_2 + x_3$;

5) $x_2 < x_3 + x_4 + x_5$;
6) $x_2 > x_3 + x_4$;
7) $x_3 > x_4 + x_5$.

Потрібно оцінити корисність результатів, щоб задовольнити всі перелічені вище нерівності.

Для розв'язування цієї задачі підставляємо початкові оцінки в нерівність 7, тобто

$$u_0(x_3) = 2 < u_0(x_4) + u_0(x_5) = 2{,}5$$

Як бачимо, нерівність 7 не є правильною.

Змінимо корисність результату x_3, а саме: $u_1(x_3) = 3$. Тепер нерівність 7 є правильною. Далі перевіримо нерівність 6, тобто

$$u_0(x_2) = 4 < u_1(x_3) + u_0(x_4) = 4{,}5$$

Ця нерівність також не є правильною.

Отже, задамо нове значення корисності результату x_2, а саме $u_1(x_2) = 5$, тоді нерівності 6 і 5 будуть правильними.

Розглянемо тепер нерівність 4, а саме:

$$u_0(x_1) = 7 < u_1(x_2) + u_1(x_3) = 8$$

Вона не виконується, тому встановимо, що $u_1(x_1) = 8{,}5$. Тепер нерівності 3, 2, 1 будуть виконуватись.

Перевіряємо ще раз нерівності 6 і 7, після застосування змінених значень корисності альтернатив, а саме:

$$5>3+1{,}5$$
$$3>1{,}5+1$$

Отже, обидві нерівності виконуються.

Випишемо остаточні оцінки корисності результатів, тобто

$$u_1(x_1) = 8{,}5;$$
$$u_1(x_2) = 5;$$
$$u_1(x_3) = 3;$$
$$u_1(x_4) = 1{,}5;$$
$$u_1(x_5) = 1.$$

Зауважимо, що описану методику визначення корисності альтернатив можна застосовувати, коли кількість результатів обмежена, а саме, $n < 6$ або 7. Тоді ж, коли $n > 7$, використовують модифікований спосіб корекції оцінок.

Множину альтернатив розбивають на підмножини, що складаються з 5–7 альтернатив і мають один спільний результат, наприклад, x_1. Потім приписують початкові значення корисності всім альтернативам, причому корисність спільного результату x_1 має бути однаковою у всіх підмножинах. Далі застосовують спосіб корекції оцінок корисності окремо до кожної з підмножин, враховуючи таке обмеження: $u(x_1) = const$. Унаслідок цього отримують систему корисності з єдиною мірою для всіх підмножин $u(x_1)$.

Після того, як відповідно до описаної методики функцію корисності всіх альтернатив встановлено, формулюють правило вибору найкращої з них в умовах визначеності, а саме: знайти таку альтернативу x_0, щоб $f(x_0) = max f(x)$.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення колективної функції корисності?
2. Яким чином визначають корисність альтернатив на основі заданих переваг?
3. Сформулюйте алгоритм побудови функції корисності на множині альтернатив, коли наявні якісні критерії.
4. На яких аксіомах ґрунтується практичне застосування теорії корисності?

Задачі для самостійного розв’язання

1. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots, x_5$ приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$, $u_0(x_2) = 4$, $u_0(x_3) = 3$, $u_0(x_4) = 2$, $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4;$$
$$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_5;$$
$$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5;$$
$$x_2 \ge x_3 + x_4;$$
$$x_3 \le x_4 + x_5.$$

Оцініть корисність результатів.

2. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots, x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 10$, $u_0(x_2) = 7$, $u_0(x_3) = 5$, $u_0(x_4) = 2$, $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_3 \leq x_4 + x_5$.

Оцініть корисність результатів.

Варіанти індивідуальних завдань

Побудова функцію корисності на такій множині альтернатив: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, якщо задано наведені нижче співвідношення.

1.
$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$;
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

2.
$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

3.
$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$;
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

4.
$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

5.
$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;

6.
$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;

$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \le x_4 + x_5.$

$x_2 \le x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

7. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \ge x_2 + x_3;$
$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 \le x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

8. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \le x_2 + x_3;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \le x_4 + x_5.$

9. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \ge x_2 + x_3;$
$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \le x_3 + x_4;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

10. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \ge x_2 + x_3;$
$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

11. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \ge x_2 + x_3;$
$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 < x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

12. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \ge x_2 + x_3$
$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 \le x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

13. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5;$
$x_1 \ge x_2 + x_3;$
$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 \le x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

14. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \ge x_2 + x_3$
$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \ge x_3 + x_4;$
$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \ge x_4 + x_5.$

15. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \leq x_4 + x_5$.

16. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

17. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

18. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \leq x_2 + x_3$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \leq x_4 + x_5$.

19. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \leq x_3 + x_4$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

20. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

21. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$;
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

22. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \geq x_3 + x_4$;
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5$;
$x_3 \geq x_4 + x_5$.

23. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$;
$x_1 \geq x_2 + x_3$;
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;

24. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4$;

$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

25. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \leq x_4 + x_5.$

26. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

27. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

27. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \leq x_2 + x_3;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \geq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \leq x_4 + x_5.$

29. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4;$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \leq x_3 + x_4;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

30. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$x_1 \geq x_2 + x_3 + x_4 + x_5;$
$x_2 \geq x_3 + x_4;$
$x_2 \leq x_3 + x_4 + x_5;$
$x_3 \geq x_4 + x_5.$

Практична робота № 3

Тема роботи: Розв’язування задач багатокритерійної оптимізації.

Мета роботи: вивчення методів розв’язування задач багатокритерійної оптимізації.

Теоретичні відомості

У загальному випадку багатокритерійна задача оптимізації може бути записана таким чином:

$$f_i(x) \to max, i\epsilon I,$$
$$f_i(x) \to min, i\epsilon I,$$

де $x\epsilon X$

Альтернатива x_0 називається *ефективною*, якщо на множині допустимих альтернатив X не існує жодної альтернативи x, яка задовольняє наступні нерівності:

$$f_i(x) \geq f_i(x_0),\ \ i\epsilon I,$$
$$f_i(x) \leq f_i(x_0),\ \ i\epsilon I,$$

причому хоча б одна з них виконується як строга.

Іншими словами, ніяка інша альтернатива не може «покращити» значення жодної цільової функції, не погіршивши при цьому значення деякої іншої. Такі альтернативи ще називають *непокращуваними* за множиною цілей, або *оптимальними за Парето*.

Серед множини оптимальних за Парето альтернатив слід шукати розв’язок задачі багатокритерійної оптимізації. Причому, яку саме альтернативу потрібно вибирати, сказати не можна, необхідне додаткове дослідження.

Для розвязування задачі багатокритерійної оптимізації можуть бути застосовані різні методи. Розглянемо деякі з них.

Метод головного критерію

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації, у якій усі критерії мінімізуються, й упорядковані за важливістю:

$$f_i(x) \to min, i\epsilon I,$$
$$x\epsilon X,$$
$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_M(x)$$

Головна ідея методу полягає в тому, що вихідна багатокритерійна задача оптимізації замінюється однокритерійною задачею із додатковими обмеженнями, які дозволяють у певному сенсі врахувати вимоги, описувані іншими критеріями.

Алгоритм розв’язання задачі за методом головного критерію містить чотири кроки.

1. Вибирають один головний критерій $f_1(x)$, за яким буде проводитися оптимізація.

2. Для менш важливих критеріїв $f_2(x), \dots, f_M(x)$ обчислюють (або вибирають, враховуючи певні міркування) допустимі значення $\overline{f_2}, \dots, \overline{f_M}$.

3. Критерії $f_2(x), \dots, f_M(x)$ замінюють на обмеження такого вигляду:

$$f_i(x) \le \overline{f_i}\text{, коли } i \epsilon I$$

4. Замість вихідної, розглядають таку скалярну зада

$$f_i(x) \to min$$
$$f_i(x) \le \overline{f_i}, \qquad i \epsilon I$$
$$x \epsilon X$$

Перевагою описаного методу є те, що його реалізація не вимагає кількісної оцінки пріоритетів критеріїв. Водночас за недолік можна вважати складність вибору припустимих значень неосновних критеріїв. У більшості випадків вибір здійснюється суб'єктивно, тому в разі рівнозначності критеріїв, в якості головного краще обирати той, для якого такий вибір здійснити найскладніше.

Метод головного критерію може бути застосований також і до розв'язування задач, у яких критерії максимізуються. За цієї умови додаткові обмеження будуть мати такий вигляд:

$$f_i(x) \ge \overline{f_i}$$

У загальному випадку отримана скалярна задача буде набувати такого вигляду:

$$f_1(x) \to opt$$
$$f_i(x) \ge \overline{f_i}, i \epsilon I_1, x \epsilon X$$
$$f_i(x) \le \overline{f_i}, i \epsilon I_2, x \epsilon X$$

де I_1 – множина індексів, для яких цільові функції максимізуються;

I_2 – множина індексів, для яких цільові функції мінімізуються.

Метод згортки

Методи згортки дозволяють привести початкову багатокритеріальну задачу до скалярного вигляду за рахунок введення деякого узагальненого критерію. Алгоритм перетворень багатокритеріальної задачі за методами згортки має загальну структуру і містить наступні етапи.

Спочатку всі критерії нормуються, тобто зводяться до безрозмірного вигляду

Нормалізацію можна проводити різними способами, найбільш поширеними серед них є наведені нижче перетворення.

$$w_i^1(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{max} - f_i(x)}{f_1^{max} - f_i^{min}}, \forall i \epsilon I_1 \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{min}}{f_1^{max} - f_i^{min}}, \forall i \epsilon I_2 \end{cases}$$

$$w_i^2(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{max} - f_i(x)}{f_1^{max}}, \forall i \epsilon I_1 \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{min}}{f_i^{max}}, \forall i \epsilon I_2 \end{cases}$$

де f_i^{max} – максимальне, а f_i^{min} – мінімальне значення критерію $f_i(x)$ на множині допустимих альтернатив X, $\forall i \epsilon I_1 \cup I_2$, I_1 – множина індексів, для яких цільові функції максимізуються, I_2 – множина індексів, для яких цільові функції мінімізуються.

Критерії «згортають» в одну цільову функцію, формуючи так званий узагальнений критерій, у якому враховано відносну важливість кожного з критеріїв за допомогою вагових коефіцієнтів, що мають задовольняти такі співвідношення:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_i \geq 0, i \epsilon I,$$
$$\sum_{i \epsilon I} \alpha_i = 1$$

Внаслідок такого перетворення початкова багатокритеріальна задача зводиться до задачі оптимізації, яка має один критерій. Найбільш поширеними методами згортки, які дозволяють привести початкову багатокритеріальну задачу до однокритеріальної наступні:

Метод введення узагальнених критеріїв на основі середньозваженої функції

$$F = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i^s\right)^{1/s},$$

де $k_i, i = 1, \dots, m$ – нормовані локальні критерії;
$\alpha_i, i = 1, \dots, m$– вагові коефіцієнти.

Серед цієї групи особливо виділяють узагальнений критерій такого вигляду:

$$F_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i,$$

що являє собою лінійну згортку локальних критеріїв. Даний критерій зручний у використанні, бо дозволяє зберігати лінійність вихідних функцій. Іншими словами, якщо вихідні критерії лінійні, то результівний критерій також буде лінійним.

1. Мультиплікативна згортка

$$\Phi_{\pi} = \prod_{i=1}^{m} k_i^{\alpha_i}$$

2. У задачах, де мають місце одночасно критерії, що мінімізуються, і критерії, які максимізуються, дуже часто використовують критерій такого вигляду:

$$F = \frac{\sum_{i \epsilon I_1} f_i(x)}{\sum_{i \epsilon I_2} f_i(x)}$$

Тут у чисельнику записано суму критеріїв, які максимізуються, а в знаменнику – суму критеріїв, що мінімізуються.

Недоліком такого методу є той факт, що недостатній рівень одного показника може компенсуватися за рахунок іншого, наприклад, низька продуктивність виробництва компенсується низькою вартістю виробів.

Метод послідовної поступки

Цей метод, так само, як і метод головного критерію, застосовується в тих випадках, коли критерії впорядковані за важливістю, але невідомі кількісні оцінки їх пріоритетів

Сутність методу покрокової послідовної поступки полягає в тому, що початкова багатокритеріальна задача замінюється на послідовність однокритеріальних задач, область припустимих розв'язків яких звужується від однієї задачі до іншої за допомогою додаткових обмежень, які враховують вимоги до критеріїв, тобто стосовно більш важливого критерію робиться поступка, величина якої залежить від вимог задачі й оптимального розв'язку за цим критерієм.

Опишемо схему методу.

1. Розв'язують скалярну задачу оптимізації за найважливішим критерієм на всій множині допустимих альтернатив X, тобто

$$f_1(x) \to min, x\epsilon X.$$

В результаті отримуємо оптимальне значення критерію $f_1(x)$: f_1^{min}.

2. Розв'язують задачу оптимізації керуючись наступним за важливістю критерієм та враховуючи додаткове обмеження:

$$f_1(x) \leq f_1^{min} + \Delta_1$$

де Δ_1 - допустима поступка за першим критерієм. Цю задачу можна записати таким чином:

$$f_2(x) \to min,$$
$$f_1(x) \leq f_1^{min} + \Delta_1$$
$$x\epsilon X.$$

У результаті її розв'язування отримуємо оптимальне значення критерію $f_2(x)$: f_2^{min}.

Нехай після здійснення k кроків було отримано оптимальні значення критеріїв: $f_1^{min}, f_2^{min}, \dots\ f_k^{min}$, тоді на $(k + 1)$-му кроці розв'язують таку задачу:

$$f_{k+1}(x) \to min,$$
$$f_1(x) \le f_1^{min} + \Delta_1,$$
$$f_2(x) \le f_2^{min} + \Delta_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_k(x) \le f_k^{min} + \Delta_k, \ \ x \epsilon X$$
й одержують оптимальне значення критерію f_{k+1}^{min}.

Після розгляду всіх критеріїв розв’язок задачі буде відшуканий. І ним буде розв’язок останньої скалярної задачі.

Таким чином, початкову багатокритерійну задачу було зведено до послідовного розв’язування ряду скалярних задач, кількість яких буде дорівнювати числу критеріїв.

Цей метод дає можливість враховувати пріоритети критеріїв та уникнути підвищення їхніх значень більше, ніж на деякий допустимий рівень, а тоді, коли критерії максимізуються, уникнути зниження їхнього рівня більше ніж певний допустимий рівень. Складність його застосування зумовлено суб'єктивністю у визначенні допустимих рівнів. Зазвичай допустима поступка встановлюється експертами з огляду на оптимальне значення критерію та умови задачі .

Якщо критерій максимізується, то відповідне йому обмеження формулюють таким чином:
$$f_i(x) \ge f_i^{max} - \Delta_i,$$
де Δ_i – допустима поступка за цим критерієм.

Приклад розв’язування задач

Під час будівництва фортиційних споруд можуть бути використані три види техніки I, II і III, які здатні виконувати три види робіт A, B і C. У табл. 2.1 відображено ресурси робочого часу кожного виду техніки, їх продуктивність при виконанні різних робіт і вартість однієї години роботи (у грн). Визначити оптимальне завантаження техніки, яке забезпечує максимальний сумарний обсяг виконаних робіт і мінімальну їх вартість.

Таблиця 3.1

Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Питома вартість, c_{ij}, грн/год			Ресурс часу, год
	A	B	C	A	B	C	
I	30	20	40	2	4	2	400
II	20	30	50	3	2	5	300
III	60	40	20	5	3	6	280

Складемо математичну модель задачі. Для цього позначимо через x_{ij} час виконання $i-$м видом техніки роботи $j,$ тоді сумарний обсяг роботи першого виду техніки можна записати таким чином:

$$30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13}$$

другого виду

$$20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23}$$

і третього

$$60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33}$$

Сумарний обсяг роботи, виконаної всіма трьома комбайнами, буде таким:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33}$$

Цей вираз описує першу цільову функцію.

Вартість $j-$ї роботи, коли її виконує $i-$й техніки, буде описуватися виразом $c_{ij}x_{ij}$, де c_{ij} питома вартість $j-$ї роботи, коли її виконує $i-$й вид техніки. Отже, сумарна вартість усіх робіт, виконаних трьома видами техніки, буде описуватися таким виразом:

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33}$$

Це буде друга цільова функція.

Обмеження на час роботи техніки запишуться таким чином:

$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \leq 400$ – для першого виду техніки

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$ – для другого виду техніки

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 280$ – для третього виду техніки

Враховуючи природні обмеження щодо змінних x_{ij} отримуємо математичну модель такого виду:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to max;$$

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \to min;$$

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \le 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280$$
$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \ge 0$$

Метод згортки.

Оскільки критерії задачі мають різну розмірність, то перш за все їх слід нормалізувати. Спочатку потрібно визначити максимальні й мінімальні значення для кожного критерію на множині припустимих альтернатив.

Знайти максимальне значення для першого критерію, а саме:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to max;$$

за умови виконання таких обмежень

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \le 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280$$
$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \ge 0$$

Для розв’язання задачі потрібно скористатися надбудовою «Пошук рішення» табличного процесора та результати занесемо в таблицю 2.2, де x_{ij} – час виконання технікою кожного виду робіт.

Таблиця 3.2

Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Ресурс часу, год.	
	A	B	C	Реальний	За умовою
I	0	0	400	400	400
II	0	0	300	300	300
III	280	0	0	280	280

Максимальний обсяг робіт f_1 дорівнюватиме 47800 м^3 Визначимо мінімальне значення f1 за допомогою цільової функції. Очевидно, що мінімальний обсяг роботи f_1 дорівнюватиме 0. Нормалізуємо критерій за з урахуванням того, що функція f_1 прагне до максимуму, а саме

$$f_1^*(x) = \\ = \frac{47800 - (30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33})}{47800}$$

$$f_1^*(x) = 1 - 0{,}0006x_{11} + 0{,}0004x_{12} + 0{,}0008x_{13} + 0{,}0004x_{21} \\ + 0{,}0006x_{22} + 0{,}001x_{23} + 0{,}0013x_{31} \\ + 0{,}0008x_{32} + 0{,}004x_{33}$$

Аналогічно визначимо максимальні й мінімальні значення для другого критерію та здійснити нормалізацію, а саме

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} \\ + 3x_{32} + 6x_{33} \to min;$$

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \le 400 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280 \\ x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \ge 0$$

Для знаходження розв'язку скористатися надбудовою «Пошук рішення» табличного процесора та результати занесемо в таблицю 2.3

Таблиця 3.3

Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Ресурс часу, год.	
	A	B	C	Реальний	За умовою
I	0	400	0	400	400
II	0	0	300	300	300
III	0	0	280	280	280

За таких умов максимальний обсяг робіт f_2 дорівнює 4780 м3 мінімальна вартість f_2 дорівнює нулю.

З урахуванням того, що критерій f_2 мінімізується, одержаний нормалізований критерій матиме наступний вигляд

$$f_2^*(x) = \\ = \frac{2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} - 4780}{4780}$$

$$f_2^*(x) = 0{,}0063x_{11} + 0{,}0042x_{12} + 0{,}0084x_{13} + 0{,}0042x_{21} \\ + 0{,}0063x_{22} + 0{,}0105x_{23} + 0{,}0126x_{31} \\ + 0{,}0084x_{32} + 0{,}0042x_{33} - 1$$

Тоді задача багатокритеріальної оптимізації набуде такого вигляду:

$$f_1^*(x) = 1 - 0{,}0006x_{11} + 0{,}0004x_{12} + 0{,}0008x_{13} + 0{,}0004x_{21} \\ + 0{,}0006x_{22} + 0{,}001x_{23} + 0{,}0013x_{31} \\ + 0{,}0008x_{32} + 0{,}004x_{33}$$

$$f_2^*(x) = 0{,}0063x_{11} + 0{,}0042x_{12} + 0{,}0084x_{13} + 0{,}0042x_{21} \\ + 0{,}0063x_{22} + 0{,}0105x_{23} + 0{,}0126x_{31} \\ + 0{,}0084x_{32} + 0{,}0042x_{33} - 1$$

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \leq 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 280$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \geq 0$$

Оскільки критерії нормалізовано, то можна перейти до розв'язання задачі методом згортки. Вважатимемо, що експерти оцінили значущість критеріїв таким чином: $\alpha_1 = 0{,}7, \alpha_2 = 0{,}3$, тобто пріоритет першого критерію дорівнює 0,7, а другого – 0,3.

Визначимо узагальнений критерій за використання лінійної адитивної згортки, оскільки обидва критерії є лінійними.

Узагальнений критерій матиме вигляд:

$$F(x) = \alpha_1 f_1^*(x) + \alpha_2 f_2^*(x) \\ = 0{,}7(1 - 0{,}0006x_{11} + 0{,}0004x_{12} + 0{,}0008x_{13} \\ + 0{,}0004x_{21} + 0{,}0006x_{22} + 0{,}001x_{23} + 0{,}0013x_{31} \\ + 0{,}0008x_{32} + 0{,}004x_{33}) \\ + 0{,}3\,(0{,}0063x_{11} + 0{,}0042x_{12} + 0{,}0084x_{13} \\ + 0{,}0042x_{21} + 0{,}0063x_{22} + 0{,}0105x_{23} + 0{,}0126x_{31} \\ + 0{,}0084x_{32} + 0{,}0042x_{33} - 1) \\ = 0{,}4 - 0{,}0421x_{11} - 0{,}0028x_{12} - 0{,}00561x_{13} \\ - 0{,}0027x_{21} - 0{,}00421x_{22} - 0{,}00701x_{23} \\ - 0{,}00841x_{31} - 0{,}00561x_{32} - 0{,}0028x_{33}$$

Відповідна скалярна задача набуде вигляду:

$$F(x) = 0{,}4 - 0{,}0421x_{11} - 0{,}0028x_{12} - 0{,}00561x_{13} - 0{,}0027x_{21} - 0{,}00421x_{22} - 0{,}00701x_{23} - 0{,}00841x_{31} - 0{,}00561x_{32} - 0{,}0028x_{33}$$

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \leq 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 280$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \geq 0$$

Розв'язавши дану задачу за допомогою методу згортки, отримаємо

Таблиця 3.4

Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Ресурс часу, год.	
	A	B	C	Реальний	За умовою
I	0	0	400	400	400
II	0	0	300	300	300
III	280	0	0	280	280

Оптимальне значення узагальненого критерію за результатами обчислень дорівнює (–6,3), при цьому обсяг виконаних робіт дорівнює 47800 м^3, а його вартість складає 3700 гривень

Метод головного критерію

Розв'яжемо задачу, посилаючись на думку експертів про те, що перший критерій є більш значущим, ніж другий. Нормалізація критерію за застосування цього методу не потрібна. Сформулюємо додаткові обмеження для другого критерію. Припустимо, що максимально припустимий рівень витрат становить 2500 гривень. За умови мінімізації другого критерію і фіксації його порогового значення на рівні максимально припустимих витрат буде отримано додаткове обмеження:

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \leq 2500$$

Відповідна скалярна задача набуде вигляду

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to max;$$

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \leq 2500$$

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \leq 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 280$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \geq 0$$

Розв'язавши дану задачу за допомогою надбудовою «Пошук рішення» табличного процесора отримаємо, що сумарний обсяг робіт становить $f_1(x) = 38800$м^3, а їх вартість $f_2(x) = 2500$ гривень.

Результат розв'язання задачі методом головного критерію

Таблиця 3.5

Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Ресурс часу, год.	
	A	B	C	Реальний	За умовою
I	0	0	400	400	400
II	0	300	0	300	300
III	130	150	0	280	280

Метод послідовної поступки

Розв'яжемо задачу за умови існування переваги першого критерію над другим за значущістю. Спочатку розв'яжемо скалярну задачу за першим (більш значущим) критерієм на вихідній множині альтернатив.

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to max;$$

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \leq 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 280$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \geq 0$$

Результат першого кроку розв'язання задачі методом послідовної поступки

Таблиця 3.6

Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Ресурс часу, год.	
	A	B	C	Реальний	За умовою
I	0	0	400	400	400
II	0	0	300	300	300
III	280	0	0	280	280

Максимальний обсяг робіт f_1 дорівнює 47800 м^3.

Припустимо, що особа, що приймає рішення, згодна зменшити обсяг роботи не більше ніж на 7800 м^3, тоді додаткове обмеження для нової задачі, за умови максимізації критерію, матиме вигляд

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \to min$$

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \leq 40000$$

$$x_{11} + 4x_{12} + x_{13} \leq 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 280$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33} \geq 0$$

У результаті розв’язування задачі отримаємо значення тривалості x_{ij} виконання пехнікою кожної з робіт

Таблиця 3.7

Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Ресурс часу, год.	
	A	B	C	Реальний	За умовою
I	0	0	400	400	400
II	0	300	0	300	300
III	1900	90	0	280	280

При цьому обсяг виконаної роботи становить 40000 м^3, а її вартість 2620 грн.

Подати результати обчислень у вигляді зведеної таблиці, де має бути представлено три ефективних варіанта розв’язку задачі багатокритеріальної оптимізації.

Таблиця 3.8

Метод розв'язу–вання	Час роботи техніки									Значення критеріїв	
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$f_1(x)$	$f_2(x)$
Згортки	0	0	400	0	0	300	280	0	0	47800	3700
Головного критерію	0	0	400	0	300	0	130	150	0	38800	2500
Послідовної поступки	0	0	400	0	300	0	190	90	0	40000	2620

Кожен із варіантів, хоча й відповідає низці вимог та прагне до мети, але має й недоліки. Який розв'язок обрати остаточно має вирішити особа, що приймає рішення.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Механічний завод при виготовленні I, II та III типу деталей використовує токарні, фрезерувальні й стругальні верстати. При цьому обробку деталей кожного типу можна вести трьома різними технологічними способами T1, T2 і T3. У табл. 1 подано норми часу для обробки деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також часові ресурси (у верстато- годинах) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробу становить відповідно 22, 18 та 30 грн. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток за умови мінімального використання токарних вестатів.

Таблиця 3.9.

Тип верстата	Норми часу на обробку деталей, год									Ресурс часу
	I			II			III			
	T1	T2	T3	T1	T2	T3	T1	T2	T3	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	–	0,9	–	–	200
Фрезеру–вальний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	–	400
Стругаль ний	–	0,7	0,7	0,7	–	1,3	1,3	0,6	–	300

Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі багатокритерійної оптимізації.
2. Які альтернативи називають ефективними за Парето?
3. Які властивості ефективних альтернатив ви знаєте?
4. Які методи пошуку ефективних альтернатив Ви знаєте?
5. Для чого потрібна нормалізація критеріїв при розв'язуванні багатокритерійних задач?
6. Які способи нормалізації критеріїв Ви знаєте?
7. Які види згорток ви знаєте?
8. Назвіть переваги й недоліки методів типу згортки?
9. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв у разі застосування методів згортки?
10. У чому полягає сутність методу головного критерію розв'язування багатокритерійних задач?
11. Яка сутність методу послідовної поступки розв'язування багатокритерійних задач?
12. Які існують переваги і в чому полягають труднощі застосування методу послідовної поступки до розв'язування багатокритерійних задач?
13. Чи є обов'язковою нормалізація критеріїв при використанні методу послідовної поступки?
14. Чи потрібні кількісні значення переваг у разі застосування методу послідовної поступки?

Варіанти індивідуальних завдань

Під час будівництва фортиційних споруд можуть бути використані три види техніки I, II і III, які здатні виконувати три види робіт A, B і C. У таблиці наведено ресурси робочого часу кожного виду техніки, їх продуктивність при виконанні різних робіт і вартість однієї години роботи (у грн). Визначити оптимальне завантаження техніки, яке забезпечує максимальниӥ сумарний обсяг виконаних робіт і мінімальну їх вартість.

Номер варіанта	Вид техніки	Продуктивність, q_{ij}, м^3/год			Питома вартість, c_{ij}, грн/год			Ресурс часу, год
		A	B	C	A	B	C	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	I	20	10	30	6	7	8	350
	II	40	30	40	3	6	4	300
	III	20	40	20	4	2	3	260
2	I	30	20	40	3	5	4	350
	II	40	30	20	6	2	3	300
	III	20	40	30	5	3	2	260
3	I	40	10	30	5	3	2	350
	II	30	30	20	3	2	6	300
	III	20	30	40	2	5	3	260
4	I	40	20	40	3	6	4	350
	II	20	30	20	5	2	3	300
	III	30	40	30	5	3	2	260
5	I	30	20	40	3	6	4	300
	II	40	30	20	5	2	3	350
	III	20	40	30	5	3	2	290
6	I	30	20	40	3	5	6	450
	II	40	30	20	4	2	3	320
	III	20	40	30	5	3	2	300
7	I	30	20	40	3	2	4	400
	II	40	30	20	3	4	5	310
	III	20	40	30	3	4	2	260
8	I	40	10	30	4	3	2	350
	II	30	30	20	3	2	6	300
	III	20	30	40	2	5	3	260
9	I	30	20	40	3	2	4	350
	II	40	30	20	3	4	5	300
	III	20	40	30	3	4	2	260
10	I	40	10	30	4	3	2	350
	II	30	30	20	3	2	6	300
	III	20	30	40	2	5	3	260

11	I	40	20	40	3	6	4	380
	II	20	30	20	5	2	3	320
	III	30	40	30	5	3	2	290
12	I	30	10	30	4	3	2	300
	II	20	30	40	3	2	4	350
	III	40	30	20	2	5	3	290
13	I	30	20	40	3	6	4	450
	II	40	30	20	4	2	3	320
	III	20	40	30	5	3	2	300
14	I	30	10	30	6	3	2	400
	II	20	30	40	3	2	7	310
	III	40	30	20	2	5	3	260
15	I	30	20	40	3	8	4	350
	II	40	30	20	3	2	3	300
	III	20	40	30	6	3	2	260
16	I	30	10	30	4	3	2	450
	II	20	30	40	6	3	2	320
	III	40	30	20	4	5	3	300
17	I	30	40	30	3	4	3	400
	II	40	20	20	4	2	3	310
	III	20	30	40	5	3	2	260
18	I	30	20	40	3	6	4	450
	II	40	30	20	4	2	3	320
	III	20	40	30	3	3	2	300
19	I	40	30	40	3	6	4	400
	II	20	30	30	4	2	3	310
	III	30	40	20	5	3	2	260
20	I	30	20	40	3	4	5	350
	II	40	30	20	4	2	3	300
	III	20	40	30	2	3	2	260
21	I	30	40	30	3	4	3	350
	II	40	20	20	4	2	3	300
	III	20	30	40	5	3	2	260
22	I	30	20	40	3	6	4	350
	II	40	30	20	4	2	3	300

	III	20	40	30	3	3	2	260
23	I	30	20	40	3	6	4	350
	II	40	30	20	4	2	3	300
	III	20	40	30	3	3	2	260
24	I	30	20	40	3	4	5	350
	II	40	30	20	4	2	3	300
	III	20	40	30	2	3	2	260
25	I	30	20	20	4	3	2	300
	II	40	30	20	3	2	4	350
	III	20	30	30	2	5	3	290
26	I	**40**	20	30	3	5	4	450
	II	20	30	40	4	2	3	320
	III	30	40	30	6	3	2	300
27	I	40	30	40	3	4	5	400
	II	20	30	30	4	2	3	310
	III	30	40	20	2	3	2	260
28	I	40	20	30	3	5	4	350
	II	20	30	40	4	2	3	300
	III	30	40	30	6	3	2	260
29	I	30	20	40	3	2	4	350
	II	40	30	20	4	5	3	300
	III	20	40	30	6	3	2	260
30	I	30	20	40	3	6	4	350
	II	40	30	20	4	2	3	300
	III	20	40	30	5	3	2	260

Практична робота № 4

Тема роботи: Метод аналізу ієрархій.

Мета роботи: ознайомитися з підходом щодо прийняття рішень з використанням метода аналізу ієрархій.

Теоретичні відомості

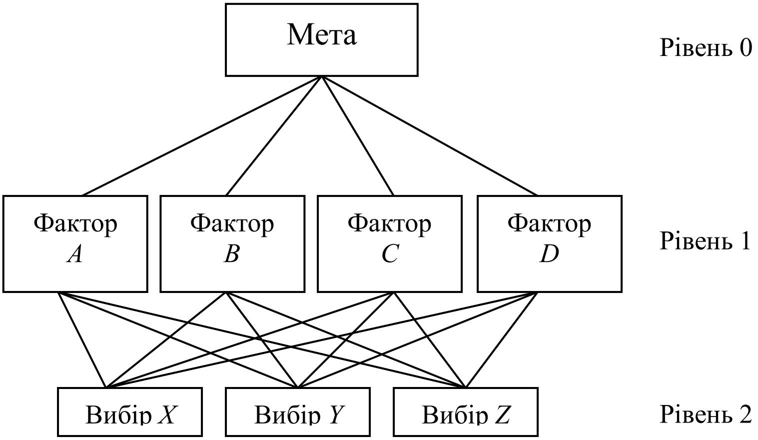
Метод аналізу ієрархій (МАІ) − це математичний інструмент системного підходу до складних проблем, пов’язаних з прийняттям рішень, запропонований американським математиком Томасом Сааті. Сутність методу полягає в тому, що він не пропонує особі, що приймає рішення (ОПР), будь-якого «правильного» рішення, а дозволяє в інтерактивному режимі знайти такий його варіант (альтернативу), який щонайкраще узгоджується з розумінням суті проблеми і вимогами щодо її розв’язання.

Метод аналітичної ієрархії ґрунтується на принципах декомпозиції та синтезу, реалізація яких дає змогу зменшити кількість можливих помилок у процесі отримання інформації від експерта. Цей метод дає змогу перевіряти послідовність (несуперечливість) тверджень експерта. За допомогою МАІ отримують структуру у вигляді ієрархії, що дозволяє уникнути складних порівнянь, замінивши їх попарними. Для цього застосовують матриці парних порівнянь, побудова яких не є складною задачею для експертів.

Побудова ієрархії починається з окреслення проблеми дослідження. Далі будується власне ієрархія, що включає мету (призначення), яка відповідає корінню ієрархії, проміжні рівні (аспекти мети, мети-критерії, критерії) і альтернативи, які формують найбільш низький ієрархічний рівень. Встановлюється підпорядкованість елементів нижчих рівнів елементам вищих та аґрегування інформаційних потоків в напрямку „знизу – догори”. Крім того, зазвичай вважається, що елементи кожного рівня є незалежними, хоча й можуть обмінюватися інформацією між собою.

Для наочності аналізу будується структурна модель для ієрархічного представлення компонентів проблеми.

Структура моделі задачі прийняття рішень в МАІ становить схему:



Рівень 0: 0-й рівень ієрархії – мета задачі;

Рівень 1: 1-й рівень ієрархії – критерії;

Рівень 2: 2-й рівень ієрархії (альтернативи) – кінцева мета аналізу.

Послідовність етапів метод аналізу ієрархій

Метод аналізу ієрархій включає наступні основні етапи:

1-ий етап: декомпозиція проблеми;

2-ий етап: побудова ієрархічної структури моделі проблеми;

3-ій етап: експертне оцінювання переваг – будуються матриці парних порівнянь (спочатку порівнюються один з одним всі критерії в змісту їх важливості для розв’язку задачі, потім для кожного з критеріїв виконується парне порівняння можливих рішень з точки зору оцінки їх важливості в межах даного критерію В результаті отримаємо одну $[nxn]$ для порівняння критеріїв і n матриць $[mxm]$ для порівняння альтернатив у межах кожного критерію;

4-ий етап: побудова локальних пріоритетів L; в кожній з матриць парних порівнянь R виконуються наступні дії: будують нормалізовану матрицю N (спочатку знаходять суму єлєментів кожного стовпця матриці парних порівнянь R, потім ділять кожен елемент стовпця на відповідну суму) і обчислюють середнє арифметичне (геометричне) рядків нормалізованої матриці парних порівнянь;

5-ий етап: оцінка узгодженості матриць парних порівнянь R; неузгодженість матриць парних порівнянь полягає в порушенні транзитивності відношення переваги (якщо $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ і $\mathrm{B} > \mathrm{C}$, то $\Rightarrow \mathrm{A} > \mathrm{C}$); існує алгоритм, наведений ниже, який дозволяє визначити оцінку погодження;

6-ий етап: синтез глобальних пріоритетів, необхідно помножити матрицю локальних пріоритетів, які відповідають рішенням, на вектор – рядок пріоритетів, які відповідають критеріям. Отримаємо вектор – стовпець пріоритетів, які відповідають рішенням;

7-ий етап: висновки й пропозиції для прийняття рішень;

8-ий етап: формулювання рішення.

2. Метод парних порівнянь у методі аналізу ієрархій. Міра узгодженості. Вектор пріоритетів

Метод аналізу ієрархій при побудові єдиної шкали для різних компонентів проблеми використовує міру ступеня впливу кожного фактору одного рівня на фактори верхнього рівня або на кінцеву мету. Ця міра утвориться в результаті висловлення суджень про ступінь впливу (важливості) цих факторів.

ПП елементів рівня виконується за результатом думок ОПР, але чисельна переваги цих елементів визначаються згідно ранжуванню за психометричною шкалою Сааті.

Психометрична шкала Сааті

Ступінь значущо-сті	Визначення	Пояснення
1	Однакова значимість	Дві дії вносять однаковий вклад у досягнення мети
3	Деяка перевага значимості	Існують розуміння на користь переваги

	однієї дії над іншим (слабка значимість)	однієї з дій, однак ці порозуміння не достатньо переконливі
5	Істотна або сильна значимість	Маються надійні дані або логічні судження для того, щоб показати перевагу однієї з дій
7	Очевидна або дуже сильна значимість	Переконливе свідчення на користь однієї дії перед іншим
9	Абсолютна значимість	Свідчення на користь переваги однієї дії іншому найвищою мірою переконливі
2, 4, 6, 8	Проміжні значення між двома сусідніми судженнями	Ситуація, коли необхідно компромісне рішення

Для порівняння *n* об'єктів складають матрицю парних порівнянь R $[nxn]$ (завжди квадратна):

Об'єкти	O_1	O_2	…	O_n
O_1	1	a_{12}	…	a_{1n}
O_2	a_{21}	1		a_{2n}
…	…	…	…	…
O_n	a_{n1}	a_{n2}	…	1

Елемент матриці a_{ij} – міра переваги об'єкта O_i над об'єктом O_j, яка виражається експертом у шкалі Сааті й приймає значення від 1 до 9. Діагональні елементи матриці завжди дорівнюють 1. У матриці ПП симетричні елементи логічно відповідають правилу:

$$a_{ij}\,\frac{1}{a_{ji}}.$$

Експерт заповнює тільки верхню наддіагональну частину матриці ПП і при цьому кількість необхідних суджень експерта обмежується числом: $\frac{n(n-1)}{2}$, де n – кількість порівнювальних об'єктів.

Розрізняють шкали:

– простого порядку (шкала найменувань);

– слабого порядку (рангова шкала, шкала Сааті);

– сильного порядку (шкала інтервалів, шкала відносин, абсолютна шкала).

Шкала простого порядку складається тільки з списку об'єктів з вказанням порядкового номера; об'єкти не порівнюються.

Шкала слабого порядку: виконується порівняння об'єктів в змісту „гірше, краще, такий самий"; обчислюються ранги (упорядкування).

Шкала сильного порядку: не тільки виконується упорядкування об'єктів за будь-якою властивістю, а й чисельно визначаються сила (степінь) цієї переваги.

Розрізняють дві ситуації експертних оцінок порівняльної важливості об'єктів:

Ситуація 1 має місце коли міра порівнювальних властивостей виражена в сильних шкалах (для упорядкування об'єктів чисельно визначається їх міра властивості; шкала інтервалів, шкала відносин, абсолютна шк.). У цьому випадку, якщо міра властивості об'єкта $O_i = w_i$, а міра об'єкта $O_j = w_j$, то міра переваги O_i порівняно з O_j:

$$\frac{O_i}{O_j} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Матриця переваг у цьому випадку є узгодженою.

Узгодженість означає, що якщо порівнюються n об'єктів, то достатньо $(n-1)$ думок щодо їх порівняння.

Приклад. Для матриці ПП трьох об'єктів шляхом вимірювань за абсолютною шкалою було отримано, що вага $O_1 = 6$, вага $O_2 = 2$ вага $O_3 = 1$, то з

$\frac{O_1}{O_2} = 3$ та $\frac{O_1}{O_3} = 6 \Rightarrow O_1 = 3O_2$ і $O_1 = 6O_3 \Rightarrow 3O_2 = 6O_3$

$$\frac{O_2}{O_3} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

Також за умовою $O_2 = 2$ і $O_3 = 1 \Rightarrow \frac{O_2}{O_3} == \frac{2}{1} = 2.$

Достатня кількість порівнянь дорівнює: $3 - 1 = 2.$

Матриця ПП має вигляд:

	Альтернативи	A_1	A_2	A_3
R	A_1	1	3	6
	A_2	$^1/_3$	1	2
	A_3	$^1/_6$	$^1/_2$	1

Таку узгодженість називають повною.

Повна узгодженість включає як порядкову, так і кардинальну узгодженість.

Порядкову узгодженість називають транзитивною, якщо

$$O_i > O_j \text{ та } O_j > O_k, \text{ то } O_i > O_k.$$

В прикладі: якщо $6 > 3$, а $3 > 1$, то $6 > 1$.

Кардинальна узгодженість означає, що $a_{ij}a_{ik} = a_{ik}$.

У прикладі це: $a_{12}a_{23} = a_{13}$, тобто $3 \times 2 = 6$.

Ситуація 2 полягає в тому, що властивості об’єктів слабо структуровані і можуть бути оцінені тільки в шкалі слабого порядку. Виконується порівняння об’єктів у змісті < гірше, краще, такий самий >, для упорядкування обчислюються ранги (рангова шкали, шкали Сааті). В такому випадку, при використанні шкали Сааті, неможливо досягти повної узгодженості через різні кваліметричні шкали у різних об’єктів тому порушується питання про ступінь погодженості отриманих оцінок.

Як міру погодженості розглядають два показники:

1. Індекс узгодженості (ІУ);
2. Відношення узгодженості (ВУ).

Індекс узгодженості (ІУ) і відношення узгодженості (ВУ).

В загальному випадку узгодженість зворотньо-симетричної матриці еквівалентна до вимоги рівності її максимального власного значення $\lambda_{\max}$ числу порівнювальних об’єктів n:

$$\lambda_{\max} = n = \mathrm{n}\,.$$

В якості міри узгодженості розглядають нормоване відхилення $\lambda_{\max}$ від n, таку міру називають індексом узгодженості ІУ:

$$\text{ІУ} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}\,.$$

Оцінка прийнятності отриманого узгодження виконується порівнянням його з випадковим індексом (ВІ).

Випадковий індекс – це індекс узгодженості, розрахований для квадратної n–вимірної позитивної зворотньо-симетричної матриці, елементи якої згенерували датчиком випадкових чисел, розподілених за рівномірному законом для інтервалу значень: 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

У таблиці представлені значення випадкового індексу ВІ для різних матриць порядку від 2 до 15.

Порядок матриці n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ВІ	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59	1,24

Або ВІ обчислюється за формулою:

$$\text{ВІ} = \frac{1{,}98\,(n-2)}{n}.$$

Відношення узгодженості ВУ обчислюється за формулою:

$$\text{ВУ} = \frac{\text{ІУ}}{\text{ВІ}}\,.$$

Якщо ВУ ≤ 0,1 або ВУ∈ (0,1; 0,3), то рівень узгодженості є прийнятним.

Якщо ВУ > (0,1; 0,3), то відношення узгодженості – неприйнятне, в такому випадку, експерту рекомендується переглянути свої думки.

Аналіз результатів експертних оцінок полягає в отриманні вектору пріоритетів порівнювальних об’єктів.

Вектор пріоритетів

З математичної точки зору необхідно обчислити головний власний вектор матриці. Після нормалізації він стає вектором пріоритетів.

Об’єкти	O_1	O_2	…	O_n	Головний власний вектор (вагові коефіцієнти) $V_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n}$	Вектор локальних пріоритетів (нормовані вагові коефіцієнти) $L_i = \frac{V_i}{\sum_{j=1}^{n} V_i}$
O_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	V_1	L_1
O_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	V_2	L_2
…	…	…	…	…	…	…
O_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	V_n	L_n
			…		$\sum_{n=1}^{n} V_i$	

Наближені значення $\lambda_{\max}$ для оцінки відношення узгодженості можна отримати, якщо:

1. Початкову матрицю ПП R помножити на її ветор локальних пріоритетів L:

$$R = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}; \quad L = \{L_i\}_{i=1,\dots,\ n}; \Longrightarrow Y = R \cdot L.$$

2. Знайти суму елементів матриці Y:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\max} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ .$$

Отримане значення $\boldsymbol{\lambda}_{\max}$ дозволяє обчислити для зворотно-симетричної матриці індекс узгодженості ІУ за формулою

$$ІУ = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

а потім відношення узгодженості ВУ за формулою

$$ВУ = \frac{ІУ}{ВІ}.$$

Приклад розв’язування задач

Здійснити вибір пакета прикладного програмного забезпечення (ППЗ) для автоматизованого робочого місця (АРМ) офіцера штабу”. Вектор глобальних пріоритетів

Необхідно розробити автоматизоване робоче місце (АРМ) офіцера штабу.

1. Постановка задачі

Виникла задача вибору пакета прикладного програмного забезпечення (ППЗ) з трьох можливих варіантів: офісний пакет (ОП), система управління базами даних (СУБД), середовище математичного моделювання (СММ).

Потрібно прийняти рішення про обрання одного з ППЗ на основі двох обраних критеріїв: функціональна повнота, захищеність.

Ще можливі критерії по горизонталі: комфортність, супровід, складність, комплексність, сумісність, ресурсоємність, швидкодія, стійкість, гнучкість поставки, вартість пакета та інші, а також критерії по вертикалі (додатковій рівень ієрархії): ергономічність, функціональність, конструктивність, вартість.

2. Модель структури ієрархій

Модель структури ієрархій складається із трьох рівнів ієрархії:

0-ий рівень ієрархії являє собою мету {вибрати ППЗ}.

1-ий рівень ієрархії складають критерії вибору:

$K_1 = \{\text{функціональна повнота}\}$ − відображає чи всі необхідні функції реалізуються за допомогою даного пакета ППЗ;

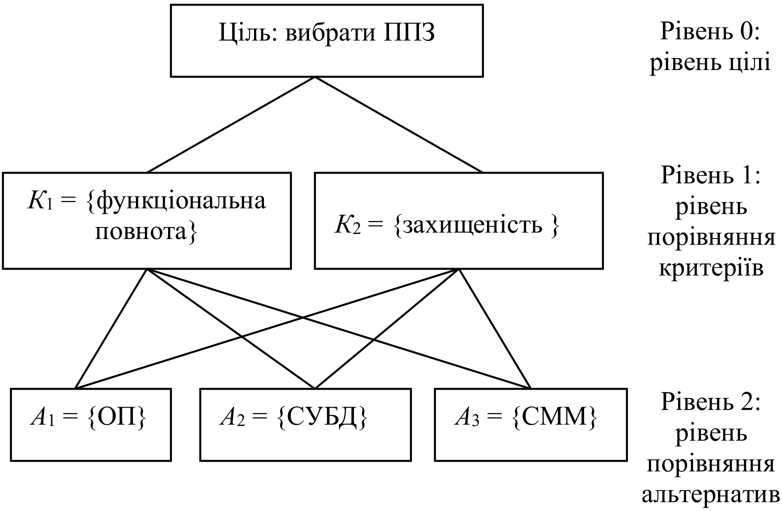
$K_2 = \{\text{захищеність}\}$ − визначає ступень захищеності інформації, що обробляється за допомогою пакета.

2-ий рівень ієрархії − альтернативи (пакети):

$A_1 = \{\text{офісний пакет, ОП}\}$;

$A_2 = \{\text{система управління базами даних, СУБД}\}$;

$A_3 = \left\{\begin{matrix}\text{середовище математичного} \\ \text{моделювання, СММ}\end{matrix}\right\}$;



3. Твердження експерта

На 1-му рівні ієрархії мають два об’єкти – 2 критерії вибору, тому для складання матриці парних порівнянь другого рівня R, необхідно мати наступну кількість тверджень експерта:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(2-1)}{2} = 1,$$

де n − кількість критеріїв, $n = 2$.

Твердження експерта щодо парного оцінювання критеріїв другого рівня за шкалою Сааті набувають, наприклад, такого змісту: „Захищеність (K_2) має суттєву перевагу (=5) над функціональною повнотою (K_1)”

4. Матриця парних порівнянь другого рівня ієрархії

На основі твердження експерта та шкалою відносної важливості Сааті будується матриця попарних порівнянь $\boldsymbol{R}$

важливості критеріїв:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Визначення локальних пріоритетів

Визначення локальних пріоритетів L_i базується на застосуванні матриць парних порівнянь шляхом обчислення середньо-арифметичного (геометричного) рядків матриці попарних порівнянь R з попередньою нормалізацією всіх складових матриці парних порівнянь:

$$L_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{ij}}{n} \ ,$$

де n– кількість критеріїв рівня ієрархії;

$N_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$ – елементи нормалізованої матриці.

Для першого рівня $n = 2$.

Розраховуються чисельники формули (3.3) для визначення локальних пріоритетів:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} = 1 + 5 = 6;$$

$$N_{11} = \frac{a_{11}}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}17;$$

$$N_{21} = \frac{a_{21}}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i2} = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5} = 1.2;$$

$$N_{12} = \frac{a_{12}}{1{,}2} = \frac{0{,}2}{1{,}2} = 0{,}17 \ ;$$

$$N_{22} = \frac{a_{22}}{1{,}2} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83.$$

Нормалізована матриця парних порівнянь критеріїв:

$$N_R = \begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}83 & 0{,}83 \end{pmatrix}.$$

Локальні пріоритети Li кожного критерію:

$$L_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{1j}}{n} = \frac{0{,}17 + 0{,}17}{2} = 0{,}17,$$

$$L_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{2j}}{n} = \frac{0,83 + 0,83}{2} = 0,83.$$

Розрахунки для 1-го рівня ієрархії трансформуємо в таблицю для обчислення вектора локальних пріоритетів:

	Матриця парних порівнянь R_1		Нормалізована матриця парних порівнянь критеріїв $N_1 R_1$:		Вектор локальних пріоритетів (нормовані вагові коефіцієнти)
	K_1	K_2	K_1		K_1
K_1	1	1/5	0,17	K_1	1
K_2	5	1	0,83	K_2	5
$\sum a_{ij}$	6	1.2	1	$\sum a_{ij}$	6

Таким чином, вагові коефіцієнти (вектор пріоритетів) для двох критеріїв першого рівня ієрархії становлять:

Функціональна повнота	$L_1 = 0,17$
Захищеність	$L_2 = 0,83$

Вектор пріоритетів для двох критеріїв першого рівня ієрархії має зміст:

$$L_R = \{0,17;\ 0,83\}.$$

6. Оцінювання узгодженості матриці

Всі матриці парних порівнянь другого порядку ідеально узгоджені, можна перевірити.

7. Матриця парних порівнянь другого рівня ієрархії

Відносні ваги альтернативних рішень, що відповідають пакетам програмного забезпечення, обчислюються за допомогою наступних матриць парних порівнянь альтернатив окремо в межах кожного критерію (функціональна повнота, захищеність).

Матриці попарних порівнянь для другого рівня ієрархії мають розмірність $n = 3$ за кількістю об'єктів: A_1, A_2, A_3.

Необхідна кількість тверджень експерта: $\frac{3(3-1)}{2} = 3.$

Експерт визначив елементи матриць за шкалою Сааті:

	За критерієм K_1 = {функціональна повнота}	A_1	A_2	A_3
R_1	A_1	1	$1/2$	$1/5$
	A_2	2	1	$1/2$
	A_3	5	2	1
	$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$	8	3,5	1,7

	За критерієм K_1 = {захищеність}	A_1	A_2	A_3
R_0	A_1	1	2	3
	A_2	$1/2$	1	$3/2$
	A_3	$1/3$	$2/3$	1
	$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$	1,83	3,67	5,5

Визначення локальних пріоритетів другого рівня

Визначення локальних пріоритетів L_i базується на застосуванні матриць попарних порівнянь шляхом обчислення середньо-арифметичного (геометричного) рядків матриці попарних порівнянь R з попередньою нормалізацією всіх складових матриці парних порівнянь:

$$\boldsymbol{L_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{ij}}{n}}, \tag{5}$$

де n – кількість об’єктів третього рівня ієрархії, $n = 3$.

$\boldsymbol{N_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}}$ – елементи нормалізованої матриці.

Нормалізовані матриці парних порівнянь альтернатив по кожному критерію:

$$N1_{R_1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}143 & 0{,}118 \\ 0{,}250 & 0{,}286 & 0{,}294 \\ 0{,}625 & 0{,}571 & 0{,}588 \end{pmatrix},$$

$$N2_{R_2} = \begin{pmatrix} 0{,}545 & 0{,}545 & 0{,}545 \\ 0{,}273 & 0{,}273 & 0{,}273 \\ 0{,}182 & 0{,}182 & 0{,}182 \end{pmatrix}.$$

Локальні пріоритети L_i кожної альтернативи за критерієм $K_1 =$ {функціональна повнота} за (5):

$$L_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{1j}}{n} = \frac{0{,}125 + 0{,}143 + 0{,}118}{3} = 0{,}129,$$

$$L_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{2j}}{n} = \frac{0{,}250 + 0{,}286 + 0{,}294}{3} = 0{,}277,$$

$$L_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{3j}}{n} = \frac{0{,}625 + 0{,}571 + 0{,}588}{3} = 0{,}594.$$

Локальні пріоритети L_i кожної альтернативи за критерієм $K_2 =$ {Захищеність} за (5):

$$L_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{1j}}{n} = 0{,}545;$$

$$L_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{2j}}{n} = 0{,}273; \qquad L_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{3j}}{n} = 0{,}182.$$

Розрахунки для 2-го рівня ієрархії трансформуємо з таблиці:

K_1 = {функціональна повнота}	Матриця парних порівнянь R_1			Нормалізована матриця парних порівнянь критеріїв N_1R_1:			Вектор локальних пріоритетів (нормовані вагові коеф.)
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	$L_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{ij}}{n}$
A_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0,125	0,143	0,118	$L_1 = 0{,}129$
A_2	2	1	$\frac{1}{2}$	0,250	0,286	0,294	$L_2 = 0{,}277$
A_3	5	2	1	0,625	0,571	0,588	$L_3 = 0{,}594$
$\sum \text{a}_{ij}$	8	3,5	1,7	1	1	1	$\sum = 1$

K_2 = {Захищеність}	Матриця парних порівнянь R_1			Нормалізована матриця парних порівнянь критеріїв N_1R_1:			Вектор локальних пріоритетів (нормовані вагові коефіцієнти)
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	$L_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_{ij}}{n}$
A_1	1	2	3	0,545	0,545	0,545	$L_1 = 0{,}545$
A_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0,273	0,273	0,273	$L_2 = 0{,}237$
A_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0,182	0,182	0,182	$L_3 = 0{,}182$
$\sum \mathrm{a}_{ij}$	1,83	3,67	5,5	1	1	1	$\sum = 1$

Вектор локальних пріоритетів для трьох альтернатив за критерієм $K_1 =$ {функціональна повнота}:

$$L_{R_1} = \{0{,}129;\ 0{,}277;\ 0{,}594\}.$$

Вектор локальних пріоритетів для трьох альтернатив за критерієм $K_2 =$ {захищеність}:

$$L_{R_2} = \{0{,}545;\ 0{,}273;\ 0{,}182\}.$$

Матрицю парних порівнянь R_1 слід перевірити на узгодженість. З такою метою спочатку знайдемо λ_{max} – максимальне власне значення матриці R_1

$$Y_{R_1} = R_1 L_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}129 \\ 0{,}277 \\ 0{,}594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3863 \\ 0{,}8320 \\ 1{,}7930 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\max} = \sum_{i=1}^{n} Y_{R_1} = 0{,}3863 + 0{,}8320 + 1{,}7930 = 3{,}0113.$$

Якщо $\lambda_{\max} = n$, то матриця ПП є ідеально узгодженою, але в нашому випадку $\lambda_{\max} > n$, тобто $3{,}0113 > 3$.

Тому необхідно знайти й проаналізувати значення відношення узгодженості ВУ.

Індекс узгодженості (1) приймає значення:

$$\text{І}У = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{3{,}0113-3}{3-1} = 0{,}00565,$$

ВІ − випадковий індекс узгодженості визначимо за довідковою таблицею випадкових індексів (фрагмент) для *n*=3:

Порядок матриці (n)	1	2	3	4	5	6	7	8
Випадковий індекс (ВІ)	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41

За таблицею, $\text{ВІ} = 0{,}58$ і знайдемо відношення узгодженості ВУ :

$$\text{ВУ} = \frac{\text{ІУ}}{\text{ВІ}} = \frac{0{,}00565}{0{,}58} = 0{,}009741.$$

Отримали, що ВУ<0,10, тому рівень узгодженості можна вважати доволі прийнятним.

Матриця парних порівнянь R_2 ідеально узгоджена, тому що в її нормалізованій матриці всі стовбці однакові. Судження експертів для складання матриці R_2 висловлені без субективних помилок.

8. Розрахунок глобальних пріоритетів

	Локальні пріоритети альтернатив (ППЗ), нормовані вагові коефіцієнти		Глобальні пріоритети для кожної альтернативи $G_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(L_j L_{R_j}\right)$
	$K_1 =$ {функціональна повнота} ваговий коефіцієнт $L_1 = 0{,}17$	$K_2 =$ {захищеність}, ваговий коефіцієнт $L_2 = 0{,}83$	
	L_{R_1}	L_{R_2}	
$A_1 = \{\text{ОП}\}$	0,129	0,545	$G_{A_1} = 0{,}129 * 0{,}17 + 0{,}545 * 0{,}83 = 0{,}4743$
$A_2 = \{\text{СУБД}\}$	0,277	0,273	$G_{A_2} = 0{,}277 * 0{,}17 + 0{,}273 * 0{,}83 = 0{,}2737$
$A_3 = \{\text{СММ}\}$	0,594	0,182	$G_{A_3} = 0{,}594 * 0{,}17 + 0{,}182 * 0{,}83 = 0{,}2520$
Перевірка	1	1	1

Відповідь: Найпривабливішим, з погляду ОПР, є перший ППЗ $A_1 = \{\text{офісний пакет, ОП}\}$, який суттєво випереджає другий $A_2 = \{\text{СУБД}\}$ і третій варіант $A_3 = \{\text{СММ}\}$. Другий та третій пакети майже рівнозначні.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Заклад вищої освіти подає замовлення на працевлаштування молодого спеціаліста. Обрання одного з чотирьох можливих претендентів (A,B,C,D) відбувається за такими критеріями, як:

1) успіхи в навчанні;
2) місце постійного проживання;
3) організаційні здібності;
4) тема магістерської роботи

2. Фірма прагне отримати замовлення на розробку інформаційної системи і має на увазі трьох замовників (A,B,C). Критерії обрання замовника є такими:

1) пропозиції замовника щодо вартості роботи;
2) репутація замовника;
3) терміни виконання;
4) країна виконавця;
5) можливості фірми щодо виконання роботи.

Контрольні запитання

1. В чому полягає зміст поняття „ієрархічна структура моделі проблеми”?
2. Які основні етапи в МАІ?
3. В чому полягає зміст поняття „метод парних порівнянь в МАІ”?
4. В чому полягає зміст поняття „зворотно-симетрична матриця”?
5. В чому полягає зміст поняття „порядкова узгодженість”?
6. В чому полягає зміст поняття „кардинальна узгодженість”?
7. В чому полягає зміст поняття „індекс узгодженості (ІУ)”?
8. В чому полягає зміст поняття „відношення узгодженості (ВУ)”?
9. Поясніть поняття адекватності моделі, отриманої методом МАІ.

Варіанти індивідуальних завдань

1. Досліднику потрібно оцінити кваліфікацію чотирьох експертів (A,B,C,D) за критеріями:

1. професійний рівень;
2. незалежність;
3. порядність.

2. Начальнику науково-дослідного відділу потрібно оцінити кваліфікацію чотирьох потенційних експертів наукової та науково-технічної експертиз (A,B,C,D) за критеріями:

1. професійний рівень;
2. досвід;
3. академічна доброчесність.

3. Командиру роти БПЛА потрібно оцінити кваліфікацію чотирьох операторів БПЛА (A,B,C,D) за критеріями:

1. професійний рівень IT;
2. досвід;
3. знання аеродинаміки та пілотування .

4. Фірма приймає рішення щодо будівництва своєї філії в одній із трьох країн (A,B,C). При цьому до уваги беруться такі критерії:

1. дешева робоча сила;
2. незначне втручання держави;
3. надійність транспортних комунікацій;
4. стабільність валюти країни-господаря.

5. Міністерство оборони приймає рішення щодо будівництва фортифікаційних споруд в одному із трьох районів Харківської області (A,B,C). При цьому до уваги беруться такі критерії:

1. дешева робоча сила найманців;
2. неможливо втручання колоборантів;
3. надійність транспортних комунікацій;

4. стабільність постачання будівельними матеріалами.

6. Для відновлення комп’ютерного парку корпорації необхідно обрати один із трьох типів комп’ютерів (A,B,C), враховуючи такі аспекти:

1. технічний;
2. вартісний;
3. ергономічний;
4. супровід.

7. Для побудови системи електронного документообороту новоствореної військової частини необхідно обрати один із трьох типів комп’ютерів (A,B,C), враховуючи такі аспекти:

1. технічний;
2. вартісний;
3. ергономічний;
4. супровід.

8. Фірмі необхідно обрати керівника проекту з чотирьох претендентів (A,B,C,D). Урахувати такі критерії оцінювання, як:

1. вік;
2. досвід;
3. освіта;
4. харизма.

9 Командиру батальйону необхідно обрати кандидата до подання на посаду командира роти з чотирьох претендентів (A,B,C,D). Урахувати такі критерії оцінювання, як:

вік;
досвід;
освіта;
лідерські здібності.

10. Командиру роти потрібно оцінити кваліфікацію чотирьох лейтинантів (А, В, С), що прибули в підрозділ для походження військової служби. До уваги беруться такі критерії:

1.рівень професійних знань;

1. рівень фізичної підготовки;
2. морально-психологічний стан..

11. З метою сприяння прориву оборони противника на окремих ділянках фронту, визначитись з розподілом боєприпасів 155-мм калібру серед трьох військових частин (80 Оамбр (А); 1 Сіверська танкова Бр (В); 121 Одшбр(С)) у відповідності з їхнім внеском у три значущі напрями (критерії).

1. мобільність у наступі;
2. стійкість у обороні;
3. маневреність.

12. Для здійснення подорожі пропонуються три види транспорту: залізничний (А), автомобільний (В) і авіа (С). Клієнт керується такими критеріями вибору:

1. час у дорозі;
2. комфорт;
3. безпека;
4. вартість проїзду.

13. Для здійснення переміщення військової частини з пункту постійної дислокації до визначено району виконання завдання пропонуються три види транспорту:

залізничний (А), автомобільний (В) і авіа (С). Командир частини керується такими критеріями вибору:

1. час у дорозі;
2. комфорт особового складу;
3. безпека (прихованість) переміщення;
4. вартість проїзду (додаткові витрати на паливно-мастильні матеріали та зменшення ресурсу озброєння та техніки).

14. Громадська організація шукає лідера серед трьох претендентів (A,B,C) за такими ознаками:

1. комунікабельність;
2. емоційна стійкість;
3. енергійність;
4. соціальна зрілість;
5. оптимізм.

15. Громадська волонтерська організація шукає лідера серед трьох претендентів (A,B,C) за такими ознаками:

1. комунікабельність;
2. емоційна стійкість;
3. енергійність;
4. соціальна зрілість;
5. оптимізм.

16. Командир військової частини шукає лідера волонтерської підтримки серед трьох претендентів (A,B,C) за такими ознаками:

1. комунікабельність;
2. емоційна стійкість;
3. енергійність;
4. соціальна зрілість;
5. оптимізм.

17. Серед чотирьох вантажних марок автомобілів (A,B,C,D) обрати один за такими критеріями:

1. комфортність;
2. надійність;
3. економія пального.

18. Військовослужбовці постійно моніторять сайт продажу аатомобілей. Потрібно оюрати серед чотирьох моделей автомобілів (A,B,C,D) один за такими критеріями:

1. комфортність пересування;
2. вартість покупки;

3. надійність;

4. економія пального.

Варіант 17. Командир військової частини має намір розгорнути тиловий пункт управління в одній із чотирьох районів (A,B,C,D). Вибір району обумовлюється такими критеріями, як:

1. вартість робочої сили в разі потреби залучення цивільного населення;

2 транспортна розвязка

3. помірна віддаленість (безпека) від ліні фронту.

18. На продаж виставлено три Інтернет-магазини (A,B,C). Потрібно обрати один з них за такими критеріями:

1. вартість;

2. умови придбання;

3. супровід розробника;

4. інтерфейс користувача.

19. У тендері на закупівлю паливно-мастильних матеріалів окремої військової частини виставлено три позиції мастило, бензин та дизельне пальне (A,B,C). Потрібно обрати один з них за такими критеріями:

1. вартість;

2. умови придбання;

3. супровід постачальника;

20 Молодому фахівцю запропоновано роботу в трьох компаніях (A,B,C). Для оцінки альтернатив він керувався такими критеріями, як:

1. заробітна плата;
2. умови кар’єрного зросту;
3. наявність закордонних відряджень;
4. час, витрачений на поїздку на роботу.

21 Замовник від Міністерства оборони запропонував випускнику ВВНЗ на вибір посади в одній з трьох військових частин (A,B,C). Для оцінки альтернатив він керувався такими критеріями, як:

1. заробітна плата в залежності від посади;
2. умови кар'єрного зросту;
3. наявність відряджень до зони проведення бойових дій;
4. час, витрачений на поїздку на роботу.

22. Потенційний покупець військової амуніції обирає між двома варіантами: купити товари в Інтернет-магазині (A) або в звичайному (B). За критерії оцінювання варіантів обрано:

1. вартість товару;
2. економія часу на придбання;
3. гарантії якості;
4. кількість асортименту.

23. Підприємець обирає банк для одержання кредиту серед трьох можливих варіантів (A,B,C). Критерії обрання банку є такими:

1. репутація банку;
2. відсотки по кредиту;
3. термін повернення кредиту;
4. можливості щодо дострокового повернення кредиту;
5. пропозиції банку щодо застави.

24. Для розвитку бізнесу фірма має намір орендувати (A) або придбати (B) додаткові площі. Критеріями обрання є:

1. вартість одного квадратного метра;
2. територіальне розташування;
3. умови придбання;
4. репутація власника.

25. Наукова установа Міністерство оборони подає замовлення на працевлаштування вакантної посади провідного наукового співробітника з числа працівників Збройних сил

України. Обрання одного з чотирьох можливих претендентів (A,B,C,D) відбувається за такими критеріями, як:

1. здобутки в науковій роботі;
2. організаційні та наукові (творчі) здібності;
3. тема дисертації на здобуття вченого ступеня доктора філософії

26. Підприємець обирає фахівця для роботи в офісі серед трьох претендентів (A,B,C) за такими критеріями, як:

1. заклад вищої освіти, який закінчив претендент;
2. володіння комп'ютером;
3. володіння іноземною мовою;
4. стаж роботи;
5. віковий ценз.

27. Сім'я бажає змінити місце проживання і має три альтернативи (A,B,C) . Критерії вибору сім'ї такі:

1. кліматичні умови;
2. транспортне забезпечення;
3. заклади культури;
4. дитячі заклади;
5. спортивні установи.

29. Корпорація з розробки БПЛА «Байрактар» має намір створити дочірнє підприємство в одній із чотирьох областей України (A,B,C,D). Обрання країни обумовлюється такими критеріями, як:

1. наявність фахівців даного напрямку;
2. безпека району розміщення заводу;
3. наявність транспортної інфраструктури довозу комплектуючих;

30. Військово-промисловий комплекс наймає фахівців для розробки БПЛА серед трьох претендентів (A,B,C) за такими критеріями, як:

1. заклад вищої освіти, який закінчив претендент;

2. володіння знаннями програмування;
3. навички роботи в напрямку удосконалення БПЛА;
4. володіння іноземною мовою рівня не нижче В2.

Практична робота № 5

Тема роботи: Прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності.

Мета роботи: розв'язок формалізованих задач в умовах ризику та невизначеності з метою знаходження оптимальних рішень..

Теоретичні відомості

Невизначеність є типовою властивістю практичних задач теорії прийняття рішень, що обумовлене розмаїттям цілей, властивостей і особливостей складних систем.

В загальному випадку задача прийняття рішень (ЗПР) є визначеною на наступній тріаді множин: X – множина альтернатив; Y - множина наслідків; S - множина станів.

Множина S є проявом стохастичної невизначеності в прийнятті рішень, причому конкретна інтерпретація станів залежить від формулювання задачі.

Для ЗПР у нормальній формі очікувана корисність альтернативи x може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $U(x) = U(u(x,s), p(s))$, де $u(x,s)$ – корисність альтернативи x в умовах стану s, $p(s)$ – ймовірність появи стану s.

Розглянемо конкретні види функцій корисності (критеріїв) для нормальної форми ЗПР, які найбільш часто вживаються в методах прийняття рішень.

Задача прийняття рішень в умовах невідомих станів очікування. В цих випадках для оптимізації вибору застосовуються найчастіше критерії максиміну (гарантованого результату), Севіджа та Гурвіца.

Критерій Ваальда (Максимінний критерій, критерій гарантованого результату).

Максімінний критерій (ММ) використовує функцію корисності альтернатив

$$U_{MM}(x) = \min_{s\epsilon S} u(x,p),$$

що відповідає позиції крайньої обережності. Шукана альтернатива вибирається з умови

$$x^* = arg \max_{x\epsilon X} U_{MM}(x) = arg \max_{x\epsilon X} \min_{s\epsilon S} u(x,p).$$

Обрані таким чином альтернативи цілком виключають ризик.

Критерій Севіджа(SE-критерій)

За цим критерієм корисність кожної альтернатив характеризується величино.

$$U_{SE}(x) = \max_{s\epsilon S} (\min_{z\epsilon X} u(z,s) - u(x,s)$$

Цю величину можна інтерпретувати як втрати (штрафи), що виникають у стані $s\epsilon S$ при заміні оптимальної для нього альтернативи на альтернативу x. Тоді логічно приймати рішення за умовою мінімізації максимально можливих втрат:

$$x^* = arg \min_{x\epsilon X} U_{SE}(x) = arg \min_{x\epsilon X} \max_{s}(\max_{z\epsilon X} u(z,s) - u(x,s))$$

Критерій Гурвіца (GW-критерій)

За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною

$$U_{GW}(x) = \alpha \max_{s} u(x,s) + (1{-}\propto) \min_{s} u(x,s),$$

де $\alpha\epsilon[0;1]$ – ваговий коефіцієнт, що характеризує схильність об’єкту прийняття рішень до ризику. За критерієм Гурвіца функція корисності забезпечує компроміс між граничним оптимізмом і крайнім песимізмом.

Рішення приймається з умови:

$$x^* = \arg \max_{x\epsilon X}(\alpha \max_{s} u(x,s) + (1-\alpha) \min_{s} u(x,s)$$

Для $\alpha = 0$ GW-критерій перетворюється в ММ-критерій. Для $\alpha = 1$ він перетворюється в критерій азартного гравця. На практиці найчастіше $\alpha = 0{,}5$ без заперечень приймається в якості деякої “середньої” точки зору.

Задача прийняття рішень в умовах відомих станів очікування. В цих випадках для оптимізації вибору застосовуються зокрема критерії Байєса-Лапласа та модальний. На відміну від попередніх критеріїв, ці критерії враховують кожен із можливих наслідків альтернативи, тобто задача прийняття рішень доповнюється інформацією про $p(x)$ - ймовірність появи стану $s \epsilon S$.

Критерій Байеса – Лапласа (BL – критерій)

Нехай $p(x)$ - ймовірність появи стану $s \epsilon S,$ тоді для BL – критерію корисність кожної альтернативи характеризується математичним сподіванням корисностей її наслідків

$$U_{BL} = p(s) \sum_{s} u(x, s)$$

Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$U_{BL} = arg \max_{x \epsilon X} U_{BL}(x) = \max_{x \epsilon X} \sum_{s} p(x) u(x, s)$$

При досить великій кількості реалізацій середнє значення корисностей альтернативи x наближається до математичного сподівання корисностей її наслідків.

Модальний критерій.

Суть цього критерію полягає у виборі альтернативи, виходячи з найбільш ймовірного стану середовища $s^* \epsilon\, S$:

$$s^* = arg \max_{s} p(x)$$

При використанні цього критерію особа, що приймає рішення вважає, що середовище знаходиться у стані $s*$ і вибирає альтернативу з умови:

$$U_{MOD}(x) = \max_{x \epsilon X} u(x, s^*)$$

Хоча цей критерій є досить песимістичним, він має певні переваги:

- достатньо виділити лише найбільш ймовірний стан середовища і не потрібно знати точне кількісне значення ймовірності його виникнення;

- збільшується швидкість обчислень, оскільки розрахунки ведуться лише для найбільш ймовірного стану середовища.

Приклад розв’язування задач

Розв’язати двох критеріальні задачі прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.

ЗПР (вибір системи ППО). Країна агресор завдає удару по нашій країна ракетами трьох типів: A, B, C. Проти цих ракет є сім систем ППО, позначених далі x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. За вартістю виробництва системи ППО ранжуються в наступному порядку, де x_1 – найдорожча, де x_7 – найдешевша. Для систем ППО кожного типу різна дія і може бути оцінена в балах (таблиця 3.1.). Оцінка 4 означає високу ймовірність збиття ворожих ракет, 3 – достатньо високу, 2 – низьку, 1 – дуже низьку. Вибір якого типу системи ППО буде оптимальним, якщо мета в мінімізації витрат та максимізації ефективності збиття ворожих ракет?

1. Розглянути задачі в умовах 1, коли ефективність $>$ ціну (ефективність значно переважає ціну) та в умовах 2, коли ціна $>$ ефективність (аналогічно);
2. Розглянути задачу в умовах невідомих та відомих ймовірностях очікування трьох типів ракет;
3. Для оптимізації вибору застосувати по черзі критерії : Ваальда, Севіджа, Гурвіца, Байєса-Лапласа та модального.

Таблиця 5.1

	s_1	s_2	s_3
	A	B	C
x_1	4	3	4
x_2	3	3	4
x_3	4	3	2
x_4	3	2	3
x_5	2	3	2
x_6	3	2	1
x_7	1	2	1

Наведену задачі можна розглядати як ЗПР в умовах невизначеності: варіантами рішення є X_1, $X_2, \ldots, X_7$, можливі стани середовища (s_1 ,s_2 ,s_3) – А, В, С, отримані рішення оцінюються за 2 показниками – вартість та ефективність, Табл. 3.1 є таблицею реалізації функції корисності u(x). Розглянемо насамперед ЗПР в умовах невідомих та відомих ймовірностей очікуваних вірусів типу А, В та С і застосуємо до неї відповідні критерії.

Для оцінювання оптимальності рішень для умов 1 (коли ефективність значно переважає ціну) будемо оцінювати між собою альтернативи з верхньої частини таблиці (умовно альтернативи $X_1 - X_4$, а для умов 2 (коли ціна значно переважає ефективність будемо оцінювати між собою альтернативи з нижньої частини таблиці (умовнј альтернативи $X_4 - X_7$). Оптимальні за умовами 1 альтернативи будем представляти жовтим кольором, а оптимальні за умовами 2 – зеленим.

Критерій Вальда

Розв'язок за цим критерієм можна представити у вигляді табл.3.2:

Таблиця 5.2

	s_1	s_2	s_3	$U_{MM}(x) = \min\limits_{s \epsilon S} u(x,p)$
	A	B	C	$x^* = \max\limits_{x \epsilon X} U_{MM}(x)$
x_1	4	3	4	3
x_2	3	3	4	3
x_3	4	3	2	2
x_4	3	2	3	2
x_5	2	3	2	2
x_6	3	2	1	1
x_7	1	2	1	1

Оптимальними максимінними альтернативами є X_2 , X_5 та X_7. В умовах 1 коли ефективність > ціну, то це однозначно буде X_2, вона дає такий же ефект, як і X_1 , але при цьому коштує дешевше. В умовах 2, коли ціна > ефективність, то оптимальні рішення не такі очевидні: це може бути і X_5, коли допускається невелике збільшення ціни, а також це може бути і X_7 коли кошти лімітовані.

Критерій Севіджа (SE-критерій)

Розв'язок за цим критерієм можна представити у вигляді табл.3.3:

Таблиця 5.3

	s_1	s_2	s_3	$U_{SE}(x) = \max\limits_{s\epsilon S}(\min\limits_{z\epsilon X} u(z,s) - u(x,s))$
	A	B	C	$x^* = \min\limits_{x\epsilon X} U_{SE}(x)$
x_1	4	3	4	1
x_2	3	3	4	1
x_3	4	3	2	2
x_4	3	2	3	1
x_5	2	3	2	1
x_6	3	2	1	2
x_7	1	2	1	1

Оптимальними альтернативами за критерієм Севіджа є X_2 (в умовах 1) та X_7 (в умовах 2), причому рішення однозначні.

Критерій Гурвіца (GW-критерій)

Будемо вважати коефіцієнт $\alpha = 0{,}5$ в якості деякої "середньої" точки зору.

Розв'язок за цим критерієм можна представити у вигляді табл.3.4:

Таблиця 5.4

	s_1	s_2	s_3	$U_{GW}(x) = \alpha \max\limits_{s} u(x,s) + (1 - \alpha) \min\limits_{s} u(x,s)$
	A	B	C	$x^* = \min\limits_{x\epsilon X} U_{GW}(x)$
x_1	4	3	4	0,5*4+0,5*3=4,5
x_2	3	3	4	4,5

x_3	4	3	2	3
x_4	3	2	3	2,5
x_5	2	3	2	2,5
x_6	3	2	1	2
x_7	1	2	1	1,5

Оптимальними альтернативами за критерієм Гурвіца є X_2 та X_6.

Примітка: при застосуванні цього критерію до власної задачі оцініть самостійно (або за допомогою тесту) свою схильність до ризику (коефіцієнт α)/

Для наступних критеріїв потрібно початкову задачу прийняття рішень довизначити. Нехай відомі ймовірності очікування типів ракет, $p(s), p(s)\epsilon[0; 1]$.

Критерій Байеса – Лапласа (BL – критерій)

Розв'язок за цим критерієм з довизначеними даними можна представити у вигляді табл.3.5:

Таблиця 5.5

	s_1	s_2	s_3	$U_{BL}(x) = p(x)\sum_{s} u(x,s)$
	A $p(A) = 0{,}25$	B $p(B) = 0{,}5$	C $p(C) = 0{,}25$	$x^* = \max_{x\epsilon X} U_{BL}(x)$
x_1	4	3	4	4*0,25+3*0,25+4*0,25=3,5
x_2	3	3	4	3,25
x_3	4	3	2	3
x_4	3	2	3	2,5
x_5	2	3	2	2,5
x_6	3	2	1	2
x_7	1	2	1	1,5

Однозначних оптимальних рішень за критерієм Байєса-Лапласа і в умовах 1 і в умовах 2 немає. В умовах 1 можна припустити, оптимальними рішеннями можуть бути як і X_1 , так і X_2, оскільки їх ефективність розрізняється несуттєво і варто би було уточнити,чи суттєво відрізняється їх ціна. В умовах 2 можна з більшою очевидністю припустити, що X6 – це і є оптимальне рішення.

Примітка: при застосуванні цього критерію результуючі рішення дуже чутливі до визначених коефіцієнтів ймовірності.

Модальний критерій

Цей критерій на відміну від попереднього не вимагає точних даних про коефіцієнти ймовірностей появи того чи іншого стану, слід лише визначити найбільш ймовірний серед них. Розв'язок за цим критерієм для попередньо визначеними даними можна представити у вигляді табл.3.6:

Таблиця 5.6

	s_1	s_2	s_3	U_{MOD} для $s^* \epsilon S: s^* = \max\limits_{s} p(x)$
	A $p(A) = 0{,}25$	B $p(B) = 0{,}5$	C $p(C) = 0{,}25$	$x^* = \max\limits_{x \epsilon X} U_{MOD}(x)$
x_1	4	3	4	3
x_2	3	3	4	3
x_3	4	3	2	3
x_4	3	2	3	2
x_5	2	3	2	3
x_6	3	2	1	2
x_7	1	2	1	2

Оптимальними альтернативами за модальним критерієм є X_3 (в умовах 1) та X_7 (в умовах 2), причому рішення однозначні. У табл.3.7 представлено результати дослідницької роботи:

Таблиця 5.7

Назва критерію	Оптимальне рішення в умовах 1	Оптимальне рішення в умовах 2
Вальда	X_2	X_5 та X_7
Севіджа	X_2	X_7
Гурвіца	X_2	X_6
Байєса-Лапласа	X_5 та X_7	X_6
Модальний	X_3	X_7

Висновок: в умовах 1, коли ефективність>ціну, то більшість критеріїв визначають систему ППО X_2, як оптимальну. В умовах 2, коли ціна>ефективність то оптимальні рішення не такі очевидні це може бути і X_6 , коли допускається невелике збільшення ціни, а також це може бути і X_7 коли кошти дужне лімітовані.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Недержавний освітній заклад у зв'язку з розширенням діяльності бажає придбати будівлю під навчальний корпус. Є варіанти купівлі чотирьох будівель: в центрі міста - А; в житловому секторі - В; в промисловій зоні С; на околиці міста D. В якості критеріїв виступають: ціна покупки (K_1, млн. грн.), площа будови (K_2, кв.м.), місце розташування (K_3, хвилини від метро), якість будови (K_4, бал за 10-бальною шкалою).

Результати оцінок альтернатив за критеріями:

	K_1	K_2	K_3	K_4
A	12	10500	25	4
B	11	12000	20	9
C	9	7500	15	8
D	7	6000	10	6
Вага	8	7	9	6

Де краща купувати будівлю?

2. Є 5 варіантів вибору проекту охоронної системи підприємства: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. В якості критеріїв виступають: K_1 вартість (тис. грн.), K_2 надійність, вірогідність безвідмовної роботи протягом терміну експлуатації, K_3 – споживча потужність (кВт), K_4 - електробезпека (бал). Оцінки альтернатив за всіма критерієм та ваги критеріїв:

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	540	0,28	22	7
A_2	480	0,22	10	6
A_3	390	0,15	5	3
A_4	500	0,24	13	8
A_5	350	0,12	7	5
Вага	7	8	6	5

Яку охоронну систему потрібно встановлювати?

3. Вибір варіанту літнього відпочинку. Для літнього відпочинку (строго визначеного терміну) пропонуються варіанти $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$, $n = 7 \ldots 10$ (визначити за власними уподобаннями); за вартістю варіанти відпочинку ранжуються в наступному порядку: де x_1, – найдорожча, x_n- найдешевша. На цей період погода може бути оцінена вербальною шкалою {Холодна, Помірна, Спекотна}. Для особи, що приймає рішення привабливість відпочинку кожного варіанту залежить від погодних умов і може бути оцінена в балах. Бальну шкалу можна визначити самостійно, рекомендована п'ятибальна шкала. Вибір якого варіанту відпочинку буде оптимальним, якщо мета в мінімізації витрат та максимізації привабливості?

Умови розв'язку ЗПР:

1. Розглянути задачу в умовах коли привабливість>вартість (привабливість значно переважає вартість) та коли вартість>привабливості (вартість відпочинку значно переважає його привабливість);

2. Розглянути задачу в умовах, коли відомі вірогідності очікування того чи іншого типу погоди;
3. Для оптимізації вибору застосувати по черзі всі наведені вище критерії.

Контрольні запитання

1. Чим обумовлена невизначеність ситуацій складних систем?
2. В яких випадках доцільне використання критерія Байєса-Лапласа, а в яких критерій гарантованого результату?
3. Які критерії варто використовувати в умовах максимальної обережності, коли про вірогідність станів нічого не відомо?
4. Який критерій варто застосовувати, коли потрібно мінімізувати втрати?
5. Який критерій дозволяє врахувати ризикованість гравця?
6. У чому полягає головна відмінність між ситуаціями прийняття рішень в умовах ризику та в умовах невизначеності?
7. Які найбільш відомі критерії прийняття рішень застосовують в умовах ризику?
8. Які найбільш відомі критерії прийняття рішень застосовують в умовах невизначеності?
9. Що являє собою показник оптимізму (або схильності до ризику), який використовується в критерії Гурвіца?
10. Яку точку зору особи, що приймає рішення в умовах невизначеності, відображає: а) критерій Лапласа; б) критерій мінімаксу (максиміну); в)критерій Севіджа; г) критерій Гурвіца?

Варіанти індивідуальних завдань

В умовах невизначеності прийняти оптимальне рішення, використовуючи критерії Вальда, Гурвіца (α=0,6), Лапласа і максимаксний критерій.

В умовах ризику при експертних оцінках вірогідності станів зовнішнього середовища p_1=0,3, p_2=0,45, p_3=0,25 визначити оптимальне рішення, використовуючи критерії Байеса-Лапласа (β=0,8).

Варіанти чисельних значень матриці альтернатив для трьох можливих альтернатив і трьох станів зовнішнього середовища вказані в таблиці.

№ варіанту	Матриця альтернатив	№ варіанту	Матриця альтернатив
1.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 40 \\ 90 & 90 & 70 \\ 60 & 60 & 80 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 40 \\ 80 & 90 & 70 \\ 50 & 70 & 100 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 100 & 70 & 60 \\ 80 & 90 & 70 \\ 60 & 70 & 80 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} 100 & 60 & 40 \\ 60 & 90 & 50 \\ 60 & 70 & 80 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 40 \\ 70 & 90 & 60 \\ 60 & 70 & 80 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 70 \\ 50 & 80 & 70 \\ 90 & 60 & 70 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 20 \\ 80 & 90 & 40 \\ 30 & 40 & 80 \end{pmatrix}$	19.	$\begin{pmatrix} 100 & 90 & 70 \\ 50 & 80 & 70 \\ 70 & 90 & 60 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 80 & 95 & 70 \\ 60 & 70 & 80 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 100 & 60 & 80 \\ 60 & 70 & 50 \\ 80 & 90 & 80 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 90 & 100 & 70 \\ 60 & 90 & 80 \end{pmatrix}$	21.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 50 & 70 & 80 \\ 70 & 60 & 50 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 80 & 90 & 70 \\ 60 & 60 & 80 \end{pmatrix}$	22.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 60 & 90 & 70 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 80 & 90 & 70 \\ 60 & 90 & 80 \end{pmatrix}$	23.	$\begin{pmatrix} 100 & 50 & 40 \\ 80 & 50 & 70 \\ 60 & 40 & 50 \end{pmatrix}$

9.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 40 \\ 70 & 90 & 50 \\ 50 & 70 & 80 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} 100 & 60 & 40 \\ 60 & 90 & 50 \\ 50 & 70 & 80 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 80 & 90 & 70 \\ 40 & 70 & 80 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 100 & 70 & 50 \\ 80 & 70 & 70 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 30 \\ 90 & 90 & 40 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 30 \\ 80 & 90 & 70 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 100 & 70 & 50 \\ 90 & 90 & 60 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix}$	27.	$\begin{pmatrix} 100 & 60 & 50 \\ 70 & 80 & 60 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 100 & 70 & 50 \\ 80 & 90 & 60 \\ 60 & 70 & 80 \end{pmatrix}$	28.	$\begin{pmatrix} 100 & 60 & 50 \\ 70 & 70 & 60 \\ 60 & 60 & 50 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 70 & 90 & 60 \\ 60 & 70 & 70 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 100 & 60 & 90 \\ 70 & 80 & 60 \\ 50 & 70 & 70 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 \\ 70 & 90 & 70 \\ 40 & 60 & 70 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} 100 & 60 & 50 \\ 50 & 70 & 70 \\ 40 & 60 & 50 \end{pmatrix}$

Практична робота № 6

Тема роботи: Побудова дерева рішень.

Мета роботи: ознайомитися з типологією побудови «дерева рішень», проаналізувати процес прийняття рішень в умовах невизначеності.

Теоретичні відомості

В реальних умовах процес прийняття рішень має ланцюговий характер, тобто коли результат одного рішення змушує приймати наступне рішення і т.д. Цю послідовність не можна виразити табличним методом, а тому використовують метод графів, який більш повно відображає процес прийняття рішень.

Дерево рішень – графічне відображення процесу, яке визначає альтернативи рішення, стану природи та їхні відповідні ймовірності віддачі для кожної комбінації альтернатив і станів природи.

Також це спосіб представлення правил у вигляді ієрархічної, послідовної структури, де кожному об'єкту відповідає єдиний вузол, що дає рішення. Під правилом розуміється логічна конструкція, представлена у вигляді «якщо ... то ...».

Сфера застосування дерева рішень в даний час широка, але всі завдання, що вирішуються цим апаратом можуть бути об'єднані в наступні три класи:

– опис даних (дерева рішень дозволяють зберігати інформацію про дані в компактній формі);

– класифікація (дерева рішень відмінно справляються із завданнями класифікації, тобто віднесення об'єктів до одного із заздалегідь відомих класів; цільова змінна повинна мати дискретні значення);

– регресія (якщо цільова змінна має неперервні значення, дерева рішень дозволяють встановити залежність цільової змінної від незалежних (вхідних) змінних; наприклад, до цього класу відносяться завдання чисельного прогнозування (передбачення значень цільової змінної).

На сьогоднішній день існує значне число алгоритмів, що реалізовують побудову і аналіз дерева рішень.

«Дерево рішень» складається із «стовбура» і «гілок», що відображають структуру проблеми: зліва направо. «Гілки» позначають можливі альтернативні рішення, що можуть бути прийняті, і можливі наслідки, що виникають в результаті цих рішень. На схемі використовується два типи «гілок»: перший – пунктирні лінії, що з’єднують квадрати можливих рішень;

другий – суцільні лінії, що з’єднують кружки можливих наслідків.

Квадратні «вузли» позначають момент, коли приймається рішення, круглі «вузли» - появу наслідків. Через відсутність змоги впливати на появу наслідків тому, хто приймає рішення залишається лише обчислювати ймовірність їхньої появи.

Алгоритм використання методу:

1. Перша точка ухвалення рішення. На графіку ставиться одиниця, яка є першою точкою ухвалення рішення.

2. Можливі дії. З першої точки ухвалення рішення проведіть дві або більше лінії. Кількість ліній залежить від кількості взаємовиключних варіантів дій (альтернатив). Над кожною лінією зробіть пояснюючий запис можливого варіанту дії.

3. Імовірність подій. Як правило, імовірність кожної події може бути високою, середньою або низькою. Наприклад, високий попит на продукцію, що продається, середній попит і низький попит. Запишіть імовірність кожної події (врахувати те, що значення суми імовірності дорівнює 100% або одиниці).

4. Очікуваний результат (виграш). Запишіть з правого боку від кожної імовірності передбачувані результати в цифровому вигляді при подібному розвитку подій.

5. Підрахунки результатів по кожній альтернативі. Для цього необхідно помножити очікуваний результат (виграш) на цифрове значення імовірності, тобто перемножуємо дані з пунктів 3 і 4. Таким чином, можна розрахувати результати, які вийдуть при різних мірах імовірності.

6. Порівняння альтернатив. Підсумовуємо результати п. 5 окремо по кожній альтернативі. Отримані цифрові дані по альтернативах порівнюються між собою для вибору найбільш вигідного варіанту.

Тоді процес ухвалення рішень в загальному випадку передбачає виконання наступних п'яти етапів.

Етап 1. Формулювання завдання. Перш за все, необхідно відкинути чинники, що не відносяться до проблеми, а серед множини тих, що залишилися виділити істотні і неістотні.

Мають бути виконані наступні основні процедури: визначення можливостей збору інформації за допомогою експерименту; складання переліку подій, які з певною імовірністю можуть статися; встановлення часового порядку розташування подій, в результатах яких міститься корисна і доступна інформація і тих послідовних дій, які можна зробити.

Етап 2. Побудова дерева рішень.

Етап 3. Оцінка ймовірності станів середовища, тобто зіставлення шансів виникнення кожної конкретної події. Слід зазначити, що вказана імовірність визначається або на підставі наявної статистики, або експертним шляхом.

Етап 4. Встановлення виграшів (або програшів як виграшів із знаком мінус) для кожної можливої комбінації альтернатив (дій) і станів середовища.

Етап 5. Рішення задачі.

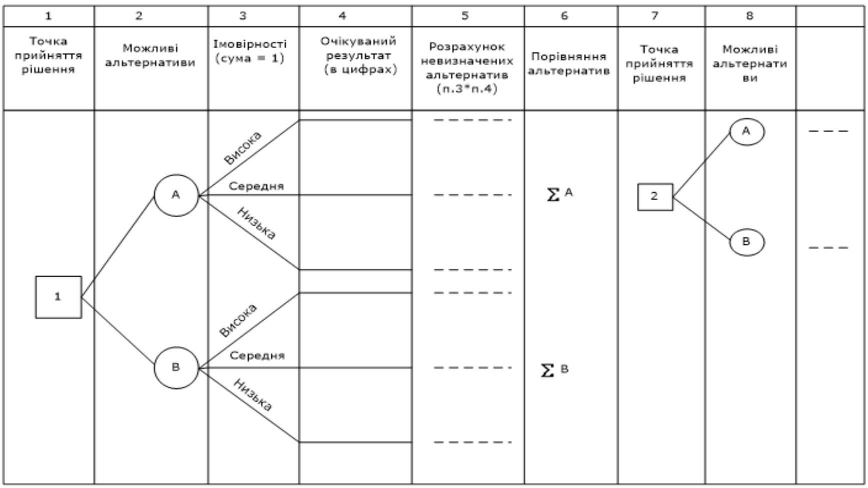


Рис. 1

ДР будують зліва направо.

У закінченому «дереві рішень»» шлях від початкового вузла дерева до якого-небудь кінцевого вузла представляє послідовність аналізу рішень і можливих випадкових подій.

Обчислення в «дереві рішень» виконуються за схемою зворотного перерахування. Перерахунок починається від кінцевих вузлів і закінчується початковим вузлом дерева. Цей метод називають методом «згортання» дерева. При цьому для вузлів подій обчислюються очікувані значення від випадкових подій, а для вузлів рішень як значення, вибирається максимальне очікуване значення, обчислене для гілок, що виходять із вузла рішень.

Таким чином, за «деревом рішень» визначається оптимальна стратегія – послідовність рішень, які повинні виконуватися при виникненні тих або інших випадкових подій.

Рішення, що приймаються за допомогою «дерева», залежать від ймовірностей результатів. Чутливість рішення визначається розміром зміни ймовірностей. Вибираючи рішення, необхідно знати, настільки рішення залежить віз зміни ймовірностей, а відтак – настільки можна покладатися на цей вибір.

Приклад розв'язування задач

Приклад 1. Певна компанія склала план виготовлення нової продукції (спосіб реалізації послуги) у вигляді 2-3 альтернативних варіантів, що відрізняються величиною капіталовкладення, затратами на обслуговування, та ін. показниками. Рішення про вибір варіанту розвитку залежить сприятливого чи несприятливого стану ринку (наприклад, від очікуваного попиту на продукт (послугу) – високий чи низький).

Таблиця 1

Номер стратегії	Дії компанії	Виграш при оцінці стану ринку, грн	
		сприятливий	несприятливий
1	Випуск продукту 1 (a_1)	300 000	-150 000
2	Випуск продукту 2 (a_2)	250 000	-70 000
3	Випуск продукту 3 (a_3)	100 000	-10 000

Приймемо ймовірність встановлення сприятливого чи несприятливого стану ринку 0,5 (50%).

На основі таблиці 1 можна побудувати дерево рішень (рис.2). Процедура ухвалення рішення полягає в обчисленні для кожної вершини дерева (при русі справа наліво) очікуваних грошових оцінок та відкиданні неперспективних гілок.

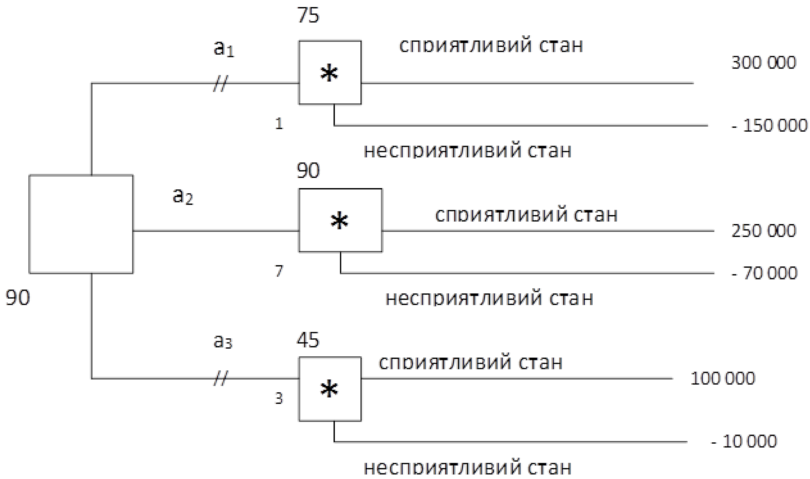


Рис. 2 Дерево рішень

Визначаємо середній очікуваний виграш:

для вершини 1

$$B_1 = 0{,}5 \cdot 300000 + 0{,}5 \cdot (-150000) = 75000 \text{ грн.};$$

для вершини 2

$$B_2 = 0{,}5 \cdot 250000 + 0{,}5 \cdot (-70000) = 90000 \text{ грн.};$$

для вершини 3

$$B_3 = 0{,}5 \cdot 100000 + 0{,}5 \cdot (-10000) = 45000 \text{ грн.};$$

Висновок. Найбільш оптимально вибрати стратегію a_2

Приклад 2. Керівництву підприємства необхідно розробити оптимальну стратегію придбання нового обладнання з метою максимізації прибутку підприємства. Можливі два варіанти придбання: закордонного та українського обладнання. Витрати на придбання закордонного обладнання становлять 80000 грн, а українського – 56 000 грн.

У випадку вдалого придбання закордонного обладнання ймовірність досягнення бажаного рівня підвищення прибутку складе 0,4 і прибуток підприємства збільшиться на 500 000 грн.

За умови невдалого придбання обладнання в закордонних компаніях ймовірність підвищення прибутку складе 0,6 і дохід підприємства збільшиться на 20 000 грн. Якщо ж керівництво придбає обладнання українських виробників, то ймовірність досягнення бажаного рівня прибутку складе 0,6 та збільшить свій прибуток на 600000 грн., а за умови невдалого придбання – ймовірність досягнення бажаного рівня прибутку складе 0,4 і прибуток підприємства збільшиться на 15000 грн.

Прийняти рішення щодо оптимальної стратегії придбання нового обладнання.

Рішення:

1. Підприємство має кошти для придбання нового обладнання з метою максимізації прибутку підприємства.

Після аналізу ідентифіковано 2 альтернативи:

A_1 = {придбати закордонне обладнання};

A_2 = {придбати вітчизняне обладнання}.

В процесі реалізації кожної альтернативи можливі наступні ситуації:

$П_1$ = {придбати обладнання вдало};

$П_2$ = {придбати обладнання невдало}.

2. Для вирішення питання, яка альтернатива найкраща, побудуємо дерево рішень:

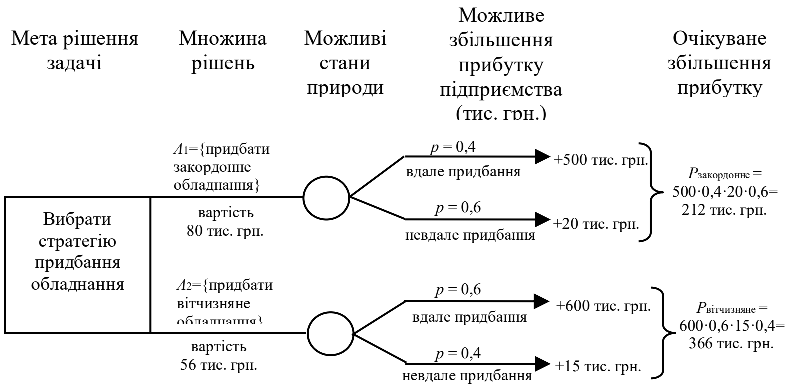


Рис.3.

Підсумком побудови дерева рішень є визначення очікуваного збільшення прибутку підприємства за кожною ,,гілкою дерева”:

$$\mathrm{P}_{\text{законд.}} = 500000 * 0{,}4 + 20000 * 0{,}6 = 212000;$$

$$\mathrm{P}_{\text{вітчізн.}} = 600000 * 0{,}6 + 15000 * 0{,}4 = 366000.$$

3. За допомогою порівняння цих варіантів зробимо остаточний вибір на рахунок першої чи другої гілки. Зробимо аналіз в оберненому напрямку та по кожному шляху врахуємо відповідні витрати. Отримаємо показники цінності рішення від придбання обладнання вітчизняних та закордонних виробників:

$$W_{\text{закорд.}} = 212000 - 80000 = 132000;$$

$$W_{\text{вітчізн}} = 366000 - 56000 = 310000.$$

Оскільки цінність рішення від придбання обладнання вітчизняних виробників має найбільше значення, то необхідно прийняти рішення – придбати обладнання вітчизняних виробників.

Приклад 3 Німецький виробник БпЛА Quantum-Systems розглядає можливість будівництво заводу в Україні. Можливі три варіанти подій:

А. Побудувати великий завод вартістю $M_1 = 700$ тис. доларів. При цьому варіанті можливий великий попит (річний прибуток в розмірі $R_1 = 280$ тисяч доларів на протязі наступних 5 років) з ймовірністю $p_1 = 0{,}8$ і низький попит (щорічні збитки в розмірі $R_2 = 80$ тисяч доларів на протязі) з ймовірністю $p_2 = 0{,}2$.

Б. Побудувати малого завод вартістю $M_2 = 300$ тис. доларів. При цьому варіанті можливий великий попит (річний прибуток в розмірі $T_1 = 180$ тисяч доларів на протязі наступних 5 років) з ймовірністю $p_1 = 0{,}8$ і низький попит (щорічні збитки в розмірі $T_2 = 55$ тисяч доларів на протязі) з ймовірністю $p_2 = 0{,}2$.

В. Відкласти будівництво заводу на один рік для збору додаткової інформації, яка може бути позитивною чи негативною з ймовірністю $p_3 = 0{,}7$ і $p_2 = 0{,}3$ відповідно. У випадку позитивної інформації можна побудувати завод за вказаними вище цінами, але зміняться ймовірності попиту:

великий - $p_5 = 0,9$ і низький $p_{10} = 0,1$. Дохід на наступні чотири роки залишиться таким же. У випадку негативної інформації компанія будувати завод не буде.

Намалюємо «дерево рішень».

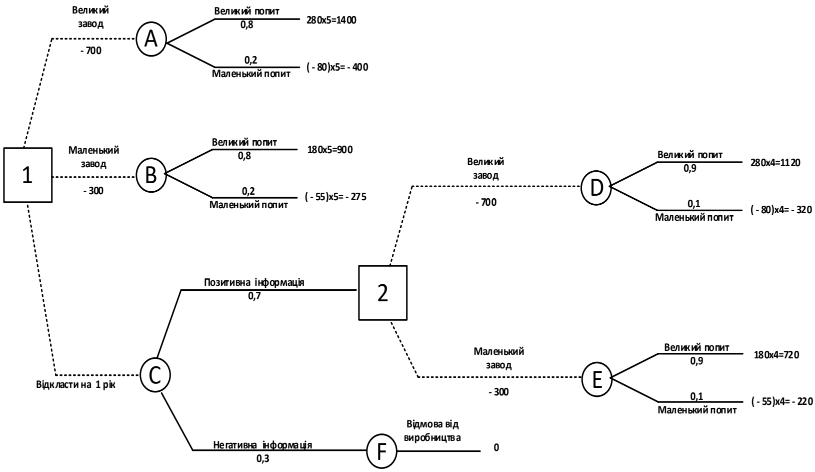


Рис. 4

Намалювавши «дерево рішень» визначимо найбільш ефективну послідовність дій, які ґрунтуються на очікуваному прибутку.

Розв'язок.

Очікувана вартісна оцінка вузла A рівна математичному сподівання можливого прибутку від експлуатації великого заводу з врахуванням витрат та його будівництво:

$$M(A) = 0,8 \cdot 1400 + 0,2 \cdot (-400) - 700 = 340;$$

Вузла B – математичному сподівання можливого прибутку від експлуатації малого заводу з врахуванням витрат та його будівництво:

$$M(\text{B}) = 0,8 \cdot 900 + 0,2 \cdot (-275) - 300 = 365;$$

Вузла D – математичному сподівання можливого прибутку від експлуатації великого заводу з врахуванням витрат та його будівництво, яке було відкладено на рік для збору додаткової інформації:

$$M(D) = 0,9 \cdot 1120 + 0,1 \cdot (-320) - 700 = 276;$$

Вузла Е – математичному сподівання можливого прибутку від експлуатації малого заводу з врахуванням витрат та його будівництво, яке було відкладено на рік для збору додаткової інформації:

$$M(E) = 0{,}9 \cdot 720 + 0{,}1 \cdot (-220) - 300 = 326.$$

Очікувана вартісна оцінка вузла 2 рівна максимуму з очікуваних вартостей оцінки вузлів В та D.

$$M(2) = \max\{M(D); M(E)\} = \max\{276; 326\} = M(E)$$

Тому у вузлі 2 відкидається можливе рішення будівництва великого заводу.

Очікувана вартість вузла F рівна нулю, оскільки збір негативної інформації веде до відмови будівництва заводу і, відповідно, при цьому немає ніяких прибутків та витрат.

Очікувана вартісна оцінка вузла С рівна математичному сподіванні можливого прибутку у випадку, якщо буде прийнято рішення відкласти будівництво заводу на рік для збору додаткової інформації.

$$M(\mathrm{C}) = 0{,}7 \cdot 326 + 0{,}3 \cdot 0 = 228{,}2.$$

Тому очікувана вартісна оцінка вузла 1 дорівнює максимуму очікуваних вартісних оцінок вузлів *A, B* і *C*.

$$M(1) = \max\{M(\mathrm{A}); M(\mathrm{B}), M(C)\} = \max\{340; 365; 228{,}2\}$$

$$M(1) = M(D)$$

Тому при вибору вузла 1 вибираємо рішення – маленький завод.

Таким чином, отримуємо послідовність найкращих рішень з очікуваною вартістю оцінки 365 тисяч доларів:

– Дослідження не проводити;
– Будувати маленький завод.

Контрольні питання

1. За яких умов користуються методикою „дерево” рішень?
2. Поясніть суть методу «дерева рішень».
3. Поясніть методику побудови та читання графічної моделі дерева рішень.
4. Поясніть алгоритм побудови «дерева рішень».

5. Назвіть складові структури „дерева” рішень.
6. Назвіть правила побудови „дерева” рішень.
7. Назвіть правила розрахунку „дерева” рішень.
8. Чи може особа, що приймає рішення вплинути на появу результату рішення?
9. У якому випадку можлива зміна попереднього рішення?
10. Що таке чутливість рішень?

Задачі для самостійного розв’язання

1. Для підприємства розроблено три варіанти розвитку (А, В, С). Розмір виграшу, який можна отримати, залежить від сприятливого або несприятливого стану ринку: ймовірність сприятливого результату проекту А = 0,6; проекту В = 0,4; проекту С = 0,5. Використовуючи дерево рішень, оберіть правильний проект.

Номер варіанту	Проект	Виграш в залежності від стану ринку, грн	
		сприятливий	несприятливий
1	А	200 000	100 000
2	В	300 000	100 000
3	С	270 000	80 000

2. Фірма, що виробляє обчислювальну техніку, провела аналіз ринку нового високопродуктивного персонального комп'ютера. Якщо буде випущена крупна партія комп'ютерів, то при сприятливому ринку прибуток складе 250 тис. грн, а за несприятливих умов фірма зазнає збитків в 185 тис. грн. Невелика партія техніки в разі її успішної реалізації принесе фірмі 50 тис. грн. прибутку і 10 тис. грн. збитків – за несприятливих умов. Можливість сприятливого і несприятливого результатів фірма оцінює однаково. Використовуючи дерево рішень, виберіть правильну техніко-

економічну стратегію. Яка очікувана грошова оцінка найкращого рішення?

3. Для задачі 2 припустимо, що фірма наймає експерта для оцінки перспективи стану ринку (керівництво розуміє, що додаткове дослідження як і раніше не здатне дати точної інформації, але воно допоможе уточнити очікувані оцінки кон'юнктури ринку, змінивши тим самим значення ймовірності). Дослідження ринку, яке провів експерт, обійшлося фірмі в 15 тис. грн. Експерт вважає, що з імовірністю 0,6 ринок виявиться сприятливим. В той же час при позитивному висновку експерта сприятливі умови очікуються лише з імовірністю 0,8. При негативному висновку з імовірністю 0,15 ринок також може виявитися сприятливим. Використовуючи дерево рішень, виберіть правильну техніко-економічну стратегію. Яка очікувана грошова оцінка найкращого рішення? Чи слід замовляти експертові додаткове обстеження ринку?

4. Головному інженерові компанії, треба вирішити, впроваджувати чи ні нову виробничу лінію, що використовує новітню технологію. Якщо нова лінія безвідмовно працюватиме, компанія отримає прибуток 200 млн. грн. Якщо ж вона відмовить, то компанія може втратити 150 млн. грн. По оцінках інженера, існує 60% шансів, що нова виробнича лінія відмовить. Можна створити експериментальну установку, а потім вже вирішувати, вмонтовувати чи ні виробничу лінію. Експеримент обійдеться в 10 млн. грн. Існує 50% шансів, що експериментальна установка працюватиме. Якщо експериментальна установка працюватиме, то 90% шансів за те, що виробнича лінія, якщо її змонтувати, також працюватиме. Якщо ж експериментальна установка не працюватиме, то лише 20% шансів за те, що виробнича лінія працюватиме. Чи слід будувати експериментальну установку? Чи слід впроваджувати виробничу лінію?

5. Підприємець провів аналіз, пов'язаний з відкриттям нового магазину. Якщо він відкриє великий магазин, то при сприятливому ринку отримає 60 млн. грн, при несприятливому

ж ринку зазнає збитків 40 млн. грн. Маленький магазин принесе йому 30 млн. грн. прибутку при сприятливому ринку і 10 млн. грн. збитків при несприятливому. Можливість сприятливого і несприятливого ринків він оцінює однаково. Дослідження ринку, яке можна замовити в спеціалістів коштує 5 млн. Експерти вважають, що з імовірністю 0,6 ринок виявиться сприятливим. В той же час при позитивному висновку експертів ринок виявиться сприятливим лише з імовірністю 0,9. При негативному висновку експертів ринок теж може виявитися сприятливим з імовірністю 0,12. Чи слід замовити проведення обстеження ринку? Чи слід відкрити великий магазин? Яка очікувана вартісна цінність найкращого рішення?

Варіанти індивідуальних завдань

Згідно варіанту визначити стратегію підприємства.

Підприємство має на меті освоєння нових видів діяльності маючи на це відповідні ресурси в розмірі $Q_А$ грн. Можливими стратегічними напрямками в даному випадку можуть бути:

– стратегія "А" – відмова підприємства від розширення кола діяльності та збереження наявних ресурсів;

– стратегія "Б" – реалізація принципово нового проекту з метою виробництва нового продукту чи надання нових послуг з можливістю отримання позитивного результату в розмірі $Q_Б$ грн. з ймовірністю $p_{пБ}$ та можливістю отримання негативного результату з ймовірністю $p_{нБ}$;

– стратегія "В" – освоєння вже існуючих на ринку видів діяльності з можливістю отримання позитивного результату в розмірі $Q_В$ грн. з ймовірністю $p_{пВ}$ та можливістю отримання негативного результату з ймовірністю $p_{нВ}$;

– стратегія "Г" – звернення за відповідною інформацією про ринкову кон'юнктуру до консалтингових організацій і тоді:

– в разі отримання негативного прогнозу щодо перспектив диверсифікації – відмова від її здійснення;

– в разі отримання позитивного прогнозу – використання наявних ресурсів на здійснення нових видів діяльності з можливістю отримання позитивного результату в розмірі

$Q_Г$ грн. з ймовірністю $p_{пГ}$ та можливістю отримання негативного результату з ймовірністю $p_{нГ}$.

На основі вхідних даних визначити оптимальну стратегію диверсифікації діяльності підприємства.

Керуючись даними таблиці потрібно:

1. Сформувати дерево стратегічних рішень в текстовому редакторі Word.

2. Розрахувати очікувану корисність альтернативних стратегій.

3. Визначити оптимальну стратегію диверсифікації діяльності підприємства.

Варіанти вхідних даних для визначення очікуваної корисності альтернативних стратегій

Варіант	Стратегії										Негативний результат	Витрати на консультаційні послуги
	А Q_A	Б			В			Г				
		Позитивний результат		Негативний результат	Позитивний результат		Негативний результат	Позитивний результат		Негативний результат		
		R	p	p	R	p	p	R	p	p	R	B
А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	55000	340000	0,13	0.87	144000	0,37	0,63	193000	0,31	0,69	2000	15000
2	40000	139000	0,19	0,81	78000	0,24	0,76	93000	0,41	0,59	-4000	5000
3	76000	327000	0,12	0,88	134000	0,28	0,72	182000	0,35	0,65	6000	10000

4	63000	412000	0,12	0,88	232000	0,32	0,68	277000	0,34	0,66	15000	18000
5	77000	511000	0,11	0,89	248000	0,25	0,75	314000	0,31	0,69	7400	17000
6	78000	350000	0,17	0,83	176000	0,37	0,63	220000	0,44	0,56	5700	16000
7	57000	306000	0,19	0,81	179000	0,21	0,79	211000	0,31	0,69	-5100	11000
8	76000	573000	0,2	0,8	315000	0,28	0,72	380000	0,48	0,52	-6500	14000
9	84000	331000	0,1	0,9	176000	0,24	0,76	215000	0,39	0,61	6100	10000
10	42000	207000	0,14	0,86	93000	0,23	0,77	122000	0,42	0,58	-13000	8000
11	33000	166000	0,18	0,82	67000	0,36	0,64	92000	0,45	0,55	13000	5000
12	41000	202000	0,15	0,85	82000	0,28	0,72	112000	0,41	0,59	17000	7000
13	29000	168000	0,15	0,85	92000	0,38	0,62	111000	0,33	0,67	2800	3000
14	51000	175000	0,12	0,88	74000	0,26	0,74	99000	0,38	0,62	-6000	9000

15	59000	220000	0,12	0,88	114000	0,32	0,68	141000	0,46	0,54	-9000	12000
16	60000	210000	0,12	0,88	100000	0,31	0,69	128000	0,35	0,65	-29000	15000
17	18000	140000	0,18	0,82	72000	0,25	0,75	89000	0,42	0,58	14000	4000
18	55000	340000	0,13	0.87	144000	0,37	0,63	193000	0,31	0,69	2000	15000
19	55000	340000	0,13	0.87	144000	0,37	0,63	193000	0,31	0,69	2000	15000
20	55000	340000	0,13	0.87	144000	0,37	0,63	193000	0,31	0,69	2000	15000
21	55000	340000	0,13	0.87	144000	0,37	0,63	193000	0,31	0,69	2000	15000
22	58000	366000	0,12	0,88	162000	0,4	0,6	213000	0,37	0,63	4000	8000
23	56000	447000	0,18	0,82	181000	0,28	0,72	248000	0,42	0,58	15000	13000
24	23000	159000	0,19	0,81	84000	0,3	0,7	103000	0,45	0,55	-20000	6000
25	24000	127000	0,1	0,9	68000	0,38	0,62	83000	0,43	0,57	-23000	4000

26	77000	549000	0,2	0,8	313000	0,32	0,68	372000	0,4	0,6	7000	12000
27	69000	307000	0,13	0,87	150000	0,33	0,67	189000	0,44	0,56	-5600	7000
28	79000	464000	0,12	0,88	227000	0,28	0,72	286000	0,31	0,69	8000	13000
29	27000	176000	0,2	0,8	87000	0,31	0,69	109000	0,46	0,54	-22000	3000
30	58000	366000	0,12	0,88	162000	0,4	0,6	213000	0,37	0,63	4000	8000

Практична робота № 7

Тема роботи: Елементи теорії ігор. Графічний метод.

Мета роботи: Засвоєння основних понять теорії ігор та графраналітичного методу рішень матричних ігор

Теоретичні відомості

Теорія ігор – сукупність методів математичного аналізу та оцінки правил поведінки учасників конфліктної ситуації. Кожна конфліктна ситуація передбачає взаємодію двох чи більше учасників цієї ситуації (гравців) для досягнення кожним з них своєї мети. Протилежні інтереси учасників гри створюють конфліктну ситуацію. Рівень досягнення мети гравцем, тобто кінцевий результат його участі у грі, залежить як від непередбачуваних ситуацій, так і від поведінки інших учасників гри. Кожен з учасників гри, зрозуміло, хоче отримати для себе найбільшу вигоду. Результат гри, яку частково контролює кожен з учасників, певною мірою залежить від випадку, а найголовніше – від кмітливості і майстерності гравців.

Конфліктні ситуації, до яких можна застосувати теорію ігор, існують як у класичних іграх (шахах, покері та інших), так і в економіці, біології, геології, політиці, військовій справі.

Теорію ігор як математичну дисципліну започатковано одночасно з теорією ймовірностей у середині XVII ст., однак її розвитку практично не відбувалося. Поштовхом до нових розробок у цій галузі була книга Дж. Неймана «До теорії стратегічних ігор» (1928) і книга 1944 Дж. Неймана та О. Моргенштерна «Теорія ігор і економічна поведінка» (1944). Теорія ігор з самого початку була спрямована на розв'язок задач щодо прийняття рішень у конкурентній економіці. У зазначених працях містились переважно економічні приклади, економічні конфліктні ситуації.

З часу другої світової війни теорія ігор серйозно зацікавила військових, які наявний математичний апарат застосували для аналізу військових стратегій. Зараз істотно розширилась сфера застосування теорії ігор, до неї тепер належать і соціальні науки.

Теорію ігор використовують з метою визначення вибору стратегій у конфліктних ситуаціях. Сьогодні теорія ігор все ще залишається чистою теорією, сфера використання теорії ігор обмежена, оскільки за умови, що суперників більше двох і правила їхньої поведінки ускладнено, труднощі аналізу різко зростають.

Основна задача теорії ігор – пошук оптимальних стратегій, що дають гравцям найбільший середній виграш (найменший середній програш).

Ігри двох гравців займають центральне місце в теорії ігор. Їх ще називають іграми двох гравців з нульовою сумою, в яких один гравець виграє стільки, скільки програє другий. До таких ігор шляхом відповідних перетворень можна звести ігри двох гравців з постійною сумою, у яких конкуренти намагаються зі зазначеної суми забрати якомога більшу частку. Усі інші ігри кваліфікують як такі, що мають понад два учасники.

Учасни гри можуть вступати у коаліції дій, множину яких позначають через R. Кожну дію коаліції у грі називають стратегією. Це поняття є центральним у теорії ігор.

Стратегія – метод вибору ходів протягом гри (прийняття рішення про дію) у будь-якій можливій ситуації і при будь-якій фактичній інформації про дії іншої сторони.

Матрична гра- це кінцева гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш першого гравця у вигляді матриці (таблиця 1), рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 1, а стовпець – номеру застосовуваної стратегії 2-го гравця; на перетинанні рядка й стовпця матриці перебувають виграш гравця 1, відповідний до застосовуваних стратегій).

Платіжна матриця гри

Стратегія гравця А	Стратегія гравця В						α
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…	…	
A_j	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	α_i
…	…	…	…	…	…	…	
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	α_m
β	β_1	β_2		β_j		β_n	

Розв'язання гри полягає у знаходженні оптимальних стратегій гравців

$$S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m); \qquad S_B^* = (q_1, q, \dots, q_n),$$

де $p_1, p_2, \dots, p_m$ – ймовірність вибору гравцем А його чистих стратегій A_1 ,..., A_m;

$q_1, q, \dots, q_n$ – ймовірність вибору гравцем В його чистих стратегій B_1 ,…, B_m.

Очевидно, перший гравець вибирає рядок з метою максимізувати плату (свій виграш), а другий гравець вибирає стовпчик з метою мінімізувати плату (свій програш). Таку гру називають *матричною.* Тобто перший гравець намагатиметься спочатку вибрати мінімальне значення виграшу по кожній стратегії

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \quad i = 1,2, \dots, m$$

А потім серед цим виграшів шукатиме той, який забезпечує максимум:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величину α називають *нижньою чистою ціною гри* або *мінімаксом*. Їй відповідає максимінна стратегія, дотримання якої першим гравцем при будь-яких стратегіях другого гравця, гарантує для нього виграш, не менший, ніж α. Тобто це гарантований виграш першого гравця за умови будь-яких стратегій другого гравця.

У свою чергу, другий учасник максимізує свій програш по кожній стратегії

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = 1,2, \dots, n$$

А потім серед усіх стратегій вибирає ту, при якій програш найменший:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величину β називають *верхньою чистою ціною гри (мінімаксом)*. Їй відповідає мінімаксна стратегія другого гравця, дотримання якої за умови будь-якої стратегії першого гравця, забезпечує йому програш, не більший, ніж β. Тобто це гарантований програш другого гравця за умови будь-яких стратегій першого гравця.

Якщо $\beta = \alpha$, тобто верхня ціна гри дорівнює нижній ціні гри, то відповідні чисті стратегії називають *оптимальними*, а про гру кажуть, що вона має сідлову точку.

Гра називається такою, що має *сідлову точку*, якщо її нижня ціна α дорівнює верхній ціні β:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij};$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij};$$

$$\alpha = \beta.$$

У випадку, коли гра має сідлову точку кажуть, що гра має рішення в *чистих стратегіях*.

Алгоритм рішення гри:

1 Знайти верхню та нижню ціну гри та перевірити наявність у гри сідлової точки та рішення у чистих стратегіях/

2 За відсутності у гри сідлових точок спробувати спростити гру, шляхом виключення з платіжної матриці домінуючих (заздалегідь невигідних) та дублюючих стратегій

3 Після спрощення платіжної матриці гри її рішення проводять одним з методів:

гра $2 \times m$ чи $n \times 2$ – графоаналітичним методом, гра $m \times m$ – методом зведення гри до задачі лінійного програмування.

У більшості матричних ігор відсутні сідлові точки, тобто не виконується умова:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Змішаною стратегією S_A першого гравця називають застосування чистих стратегій A_1,...,A_m з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_m$, причому

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \ p_i \geq 0, i = 1,2, \dots,$$

Змішані стратегії гравця А запишемо у вигляді матриці:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

Або у вигляді рядка $S_A\ = (p_1, p_2, \dots, p_m)$. .

Аналогічно змішані стратегії гравця В позначимо

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_i & \cdots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_i & \cdots & q_n \end{pmatrix}$$

Або у вигляді рядка $S_B\ = (q_1, q, \dots, q_n)$, де

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1,\ \ q_i \geq 0, i = 1,2, \dots, n$$

Гравець А вибирає стратегію так, щоб максимізувати найменший очікуваний виграш по стовпцях платіжної матриці, а гравець В вибирає стратегію так, щоб мінімізувати найбільший очікуваний виграш по стовпцях. Отже, гравець А вибирає стратегію p_i:

$$\max_{p_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}p_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}p_i,\right)\right\}$$

Гравець В вибирає стратегію q_j:

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}q_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2i}q_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}q_j,\right)\right\}$$

Якщо стратегії оптимальні, то виконується рівність між максимінним очікуваним виграшем та мінімаксним очікуваним програшем.

Приклад розв'язування задач

Задача 1. Нехай кожний з двох гравців А і В має по три стратегії. Визначити нижню та верхню ціну гри, що задана платіжною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Чи має гра сідлову точку?

Розв'язання. Складемо платіжну матрицю гри (таблицю 1).

Таблиця 1

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	0,7	0,8	0,7
A_3	0,7	0,6	0,6	0,6
β_j	0,9	0,7	0,8	$\alpha = \beta = 0{,}7$

Всі розрахунки зручно звести в таблицю, до якої, крім матриці P, додається стовпець α_i і рядок β_j (таблиця 1), де

$$\alpha_i = \min_{j=1,2,3} a_{ij}, \quad \beta_j = \max_{i=1,2,3} a_{ij}.$$

Проаналізувавши рядка матриці (стратегії гравця А), заповнюємо стовпець α_i: $\alpha_1 = 0{,}5,\ \alpha_2 = 0{,}7,\ \alpha_3 = 0{,}6$ мінімальні числа в рядках 1, 2, 3.

Проаналізувавши стовпці матриці (стратегії гравця В), заповнюємо стовпець β_j: $\beta_1 = 0{,}9,\ \beta_2 = 0{,}7,\ \beta_3 = 0{,}8$ максимальні числа в стовпцях 1, 2, 3.

Нижня ціна гри

$\alpha = \max_{i=1,2,3} \alpha_i = \max(0{,}5; 0{,}7; 0{,}6) = 0{,}7$ – найбільше число в стовпці α_i.

Верхня ціна гри

$\beta = \min_{j=1,2,3} \beta_j = \min(0{,}9; 0{,}7; 0{,}8) = 0{,}7$ - найменше число в рядка β_j.

Отже, гра має сідлову точку (A_2, B_2) і ціна гри $g = 0{,}7$. Це значить, що гравець А при постійному використанні стратегії A_2 одержує максимальний гарантований виграш, що дорівнює 0,7, а гравець В при постійному використанні стратегії B_2 одержує мінімальний гарантований програш.

У випадку, коли гра не має сідловок точки $\alpha \neq \beta$ можна одержати оптимальне рішення, відповідним образом чергуючи чисті стратегії.

Задача 2. Вибрати оптимальний режим роботи нової системи ПЕОМ, яка складається з двох ЕОМ типів A_1 та A_2. Відомі виграші від впровадження кожного типу ЕОМ в залежності від зовнішніх умов, якщо порівняти зі старою системою.

При використанні ЕОМ типів A_1 та A_2. в залежності від характеру розв'язуваних задач B_1 і B_2. (довгострокові та короткострокові) буде різний ефект. Мається на увазі, що максимальний виграш відповідає найбільшому значенню критерію ефекту від заміни обчислювальної техніки старого покоління на ЕОМ A_1 і A_2. .

Задана матриця гри, де A_1, A_2. –стратегії керівника; B_1, B_2- стратегії, що відображають характер задач, які розв'язуються на ЕОМ.

$$p = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Потрібно знайти оптимальну змішану стратегію керівника та гарантований середній результат g , тобто визначити, яку долю часу повинні використовуватися ЕОМ типів A_1 і A_2.

Розв'язання. Визначимо наявність сідлової точки.

	B_1	B_2	$\alpha_i = min a_{ij}$
A_1	0,3	0,8	0,3
A_2	0,7	0,4	0,4
$\beta_j = max a_{ij}$	0,7	0,8	

Нижня ціна гри

$$\alpha = \max_{i=1,2} \alpha_i = \max(0{,}3; 0{,}4) = 0{,}4.$$

Верхня ціна гри

$$\beta = \min_{j=1,2} \beta_j = \min(0{,}7; 0{,}8) = 0{,}7.$$

Таким чином, $\alpha \neq \beta$, отже сідлової точки задача не має.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2)$ і ціну гри g графічним методом. Геометричний аналіз можливий, тому що маємо платіжну матрицю розмірності 2×2.

Гравець А, виходячи зі своїх інтересів зацікавлений виграти якнайбільше і тому буде прагнути одержати виграш, що перевищує ціну гри. При застосуванні гравцем В своїх чистих стратегій B_1та B_2 це прагнення гравця А визначають такі обмеження:

$$\begin{cases} 0{,}3p_1 + 0{,}7p_2 \geq g \\ 0{,}8p_1 + 0{,}4p_2 \geq g \end{cases} \quad (*)$$

Відповідно, гравець В так само застосовує свої змішані стратегії $S_B(q_1, q_2)$, але прагне, щоб величина програшу була якнайменше ціни гри, тобто

$$\begin{cases} 0{,}3q_1 + 0{,}8q_2 \geq g \\ 0{,}7q_1 + 0{,}4q_2 \geq g \end{cases}$$

Побудуємо графіки прямих (*), заміняючи відповідні обмеження нерівності рівностями.

$$0{,}3p_1 + 0{,}7p_2 = g$$
$$p_2 = 1 - p_1$$
(I) $$0{,}3p_1 + 0{,}7(1 - p_1) = g$$
$$-0{,}4p_1 + 0{,}7 = g$$

p_1	0	1
g	0,7	0,3

$$0{,}8p_1 + 0{,}4p_2 \geq g$$
(II) $$0{,}8p_1 + 0{,}4(1 - p_1) = g$$
$$0{,}8p_1 + 0{,}4 - 0{,}4p_1 = g$$
$$0{,}4p_1 + 0{,}4 = g$$

p_1	0	1
g	0,4	0,8

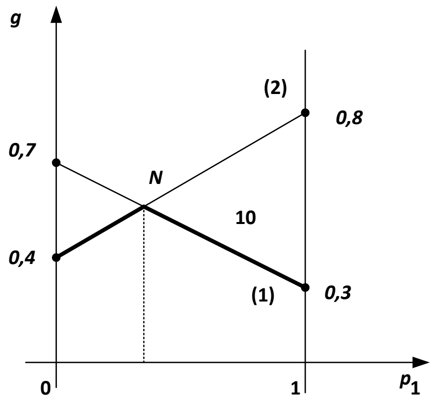


Рисунок 1 – Графічний розв’язок

Гарантований середній виграш гравця А – жирна ламана лінія. Максимальний гарантований виграш досягається в крапці N.

Знайдемо координати точки N.

$$\begin{cases} -0{,}4p_1 + 0{,}7 = g \\ 0{,}4p_1 + 0{,}4 = g \end{cases}$$
$$0{,}8p_1 = 0{,}3$$
$$p_1 = 0{,}375$$
$$g = 0{,}55$$
$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$$

Таким чином оптимальна стратегія для гравця А $S_A(0{,}375, 0{,}625)$, ціна гри $g = 0{,}55$

Висновок: При установці нової системи ЕОМ, якщо невідомі умови розв'язання задач замовника, на роботу ЕОМ A_1 повинно приходитися 37,5% часу, а на роботу ЕОМ A_1 - 62,5%. При цьому виграш буде складати 55% в порівнянні зпопередньою системою ЕОМ.

Задача 3. Знайти рішення й ціну гри, заданою платіжною матрицею

$$p = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Визначимо наявність сідлової точки.

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = min a_{ij}$
A_1	3	2	7	4	2
A_2	2	4	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\beta_j = max a_{ij}$	3	4	7	4	

Оскільки, $\alpha = 2$ та $\beta = 3$, то задача немає сідлової точки.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2)$ і ціну гри g графічним методом. Геометричний аналіз можливий, тому що маємо платіжну матрицю розмірності 2×4.

Гравець А, виходячи зі своїх інтересів зацікавлений виграти якнайбільше і тому буде прагнути одержати виграш, що перевищує ціну гри. При застосуванні гравцем В своїх чистих стратегій $B_1 . B_2, B_3$ та B_4 це прагнення гравця А визначають такі обмеження:

$$\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 \geq g \\ 2p_1 + 4p_2 \geq g \\ 7p_1 + 3p_2 \geq g \\ 4p_1 + \frac{3}{2}p_2 \geq g \end{cases} \quad (**)$$

Відповідно, гравець B так само застосовує свої змішані стратегії $S_B(q_1, q_2, q_3, q_4)$, але прагне, щоб величина програшу була якнайменше ціни гри, тобто

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_2 + 7q_3 + 4q_4 \geq g \\ 2q_1 + 4q_2 + 3q_3 + \frac{3}{2}q_4 \geq g \end{cases}$$

Побудуємо графіки прямих (**), заміняючи відповідні обмеження нерівності рівностями.

(I)

$$3p_1 + 2p_2 = g$$
$$p_2 = 1 - p_1$$
$$3p_1 + 2(1 - p_1) = g$$
$$2p_1 + 2 = g$$

p_1	0	1
g	2	3

(II)

$$2p_1 + 4p_2 \geq g$$
$$2p_1 + 4(1 - p_1) = g$$
$$2p_1 + 4 - 4p_1 = g$$
$$-2p_1 + 4 = g$$

p_1	0	1
g	4	2

(III)

$$7p_1 + 3p_2 \geq g$$
$$7p_1 + 3(1 - p_1) = g$$
$$7p_1 + 3 - 3p_1 = g$$
$$4p_1 + 3 = g$$

p_1	0	1
g	3	4

(IV)

$$4p_1 + \frac{3}{2}p_2 \geq g$$
$$4p_1 + \frac{3}{2}(1 - p_1) = g$$
$$4p_1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}p_1 = g$$
$$\frac{5}{2}p_1 + \frac{3}{2} = g$$

p_1	0	1
g	$\frac{3}{2}$	4

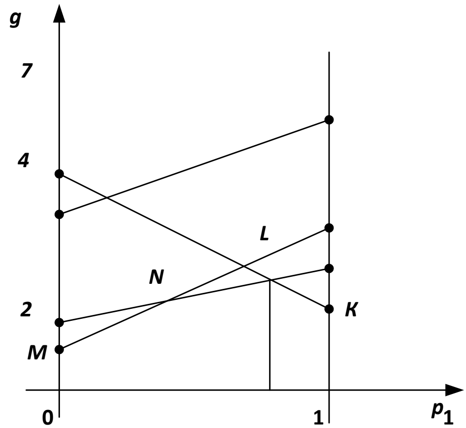


Рисунок 2 – Графічний розв’язок

Нижня границя виграшу задається ламаної MNLK. Оптимальне рішення гри досягається в крапці L.

Знайдемо її координати. Крапка L утворена перетинанням I й II прямих. Це означає, що оптимальна стратегія гравця включає чисті стратегії B_1 та B_2 з імовірностями q_1 і q_2.

$$\begin{cases} p_1 + 2 = g \\ -2p_1 + 4 = g \end{cases}$$

$$3p_1 - 2 = 0$$

$$p_1 = \frac{2}{3}; \quad g = \frac{8}{3}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

У такий оптимальна стратегія для гравця A $S_A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, ціна гри $g = \frac{8}{3}$.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію для гравця *B* з рівнянь

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_2 + 7q_3 + 4q_4 \geq g \\ 2q_1 + 4q_2 + 3q_3 + \frac{3}{2}q_4 \geq g \end{cases}$$

Враховувати стратегії, що визначив гравець А в якості оптимальних, приходимо до стратегій, що визначають оптимальне рішення, тобто маємо $q_3 = 0, q_4 = 0$. Отже,

$$3q_1 + 2q_2 \leq g$$
$$2q_1 + 4q_2 \leq g,$$

при цьому $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$.

Будуємо графіки прямих, що відповідають нерівностям. Знаходимо координати крапки перетинання

$$3q_1 + 2(1 - q_1) = 2q_1 + 4(1 - q_1)$$
$$3q_1 + 2 - 2q_1 - 4 + 4q_1 = 0$$
$$3q_1 = 2$$
$$q_1 = \frac{2}{3}$$
$$q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{3}$$

Таким чином $S_B\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0\right)$, $g = \frac{8}{3}$.

Висновок: Рішенням гри є стратегії $S_A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ та $S_B\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0\right)$, при цьому ціна гри $g = \frac{8}{3}$.

Задачі для самостійного розв'язання

Розглянемо війну між двома великими державами, яка ведеться на протязі 30 днів.

Для бомбардування моста – важливого військового об'єкту країни В – країна А використовує два своїх літаки, і кожний літак здійснює один політ в день по одному з двох повітряних маршрутів, що з'єднають ці країни.

В країни В є два зенітні комплекси за допомогою яких можна збити літаки країни А.

Якщо літак знищать, то деяка третя країна до ранку наступного дня дасть країні А новий літак.

Інженери країни В також відновлять до ранку наступного дня міст.

Країна А може відправити літаки або по одному маршруту, або по різним.

Країна В може розмістити або дибва зенітні комплекси на одному маршруті, або по одному комплексу на двої маршрутах.

Якщо один літак летить по маршруту, на якому розташований один зенітний комплекс, то цей літак неодмінно буде збито.

Якщо два літака летять по маршруту, на якому розміщені два зенітні комплекси, то два літаки будуть збиті.

Якщо два літака летять по маршруту, на якому розміщено один зенітний комплекс, то збитим буде тільки один літак.

Якщо літак долетить до цілі, то міст буде знищено.

Визначити графічним методом оптимальні стратегії обох гравців та ціну гри.

Варіанти індивідуальних завдань

Знайти розв’язок гри графічним методом

1.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-9	4	-8	3
A_2	2	-6	3	-5

2.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	1	0	-2
A_2	4	5	-3	9

3.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	0	4	-1
A_2	8	7	3	8

4.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	2	3	5
A_2	0	7	-1	-4

5.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	0	2	1
A_2	5	2	8	-4

6.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	-1	0	3
A_2	2	4	-2	2

7.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	2	0
A_2	-4	-3	0	5

8.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-2	0	4	3
A_2	6	1	-3	2

9.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	4	5	1
A_2	2	1	-4	3

10.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-3	7	2	4
A_2	10	0	5	-1

11.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	-1	3	0
A_2	0	5	3	5

12.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	4	2	1
A_2	6	-5	2	9

13.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	7	-1	0
A_2	2	1	3	8

14.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	7	-3
A_2	10	5	0	6

15.

	B_1	B_2
A_1	7	-4
A_2	5	0
A_3	3	-1
A_4	-2	6

16.

	B_1	B_2
A_1	-5	4
A_2	-1	2
A_3	0	3
A_4	2	1

17.

	B_1	B_2
A_1	-3	8
A_2	2	7
A_3	4	-1
A_4	5	4

18.

	B_1	B_2
A_1	-6	0
A_2	4	-4
A_3	3	-6
A_4	2	-1

19.

	B_1	B_2
A_1	9	-1
A_2	5	4
A_3	0	6
A_4	1	4

20.

	B_1	B_2
A_1	6	0
A_2	-2	5
A_3	3	4
A_4	0	1

21.

	B_1	B_2
A_1	0	10
A_2	2	8
A_3	4	1
A_4	1	0

22.

	B_1	B_2
A_1	-1	-3
A_2	-8	2
A_3	0	-4
A_4	2	-3

23.

	B_1	B_2
A_1	-2	9
A_2	0	4
A_3	2	1
A_4	-4	7

24.

	B_1	B_2
A_1	0	4
A_2	6	3
A_3	2	0
A_4	1	4

25.

	B_1	B_2
A_1	0	8
A_2	1	4
A_3	4	1
A_4	1	0

26.

	B_1	B_2
A_1	-2	-5
A_2	-8	2
A_3	0	-2
A_4	2	-3

27.

	B_1	B_2
A_1	-5	2
A_2	-1	4
A_3	0	3
A_4	2	1

28.

	B_1	B_2
A_1	-4	18
A_2	0	8
A_3	4	2
A_4	-8	14

29.

	B_1	B_2
A_1	5	-4
A_2	7	0
A_3	3	-1
A_4	-2	6

30.

	B_1	B_2
A_1	0	8
A_2	12	6
A_3	4	0
A_4	1	8

Контрольні питання

1. Дайте загальну постановку задачі теорії ігор
2. Які види ігор ви знаєте? За якими ознаками можна класифікувати ігри?
3. Чим задається гра? Як звести конфліктну ситуацію до гри?
4. Назвіть головні поняття теорії ігор та дайте їх визначення.
5. Яку гру називають матричною? Чим відрізняються чисті та змішані стратегії матричних ігор?

6. Як обчислити нижню та верхню ціну гри? Яке співвідношення між ними виконується?
7. Яку точку називають сідловою в теорії гри? Як її знайти?
8. Які ви знаєте критерії існування чистих стратегій?
9. У чому полягає принцип мінімакса в теорії ігор?
10. Яку стратегію називають змішаною? Як її задають?
11. Які стратегії називають дублюючими, домінуючими та номінованими? Як їх виявити? Чи можна виключати їх з платіжної матриці?
12. Чи завжди є розв'язок матричних ігор у змішаних стратегіях? Обґрунтуйте відповідь.
13. Які методи розв'язування скінченої гри із сідловою точкою ви знаєте?
14. Яку гру можна розв'язати графічно? Розкажіть покроковий алгоритм графічного методу розв'язування гри.
15. Як звести гру до задачі лінійного програмування? Для чого це необхідно? Яку гру можна розв'язати у такий спосіб?
16. Чи може бути в одного гравця декілька оптимальних стратегій? За яких умов? Обґрунтуйте.

Практична робота № 8

Тема роботи: Прийняття рішень на основі нечітких відношень переваги.

Мета роботи: вивчення властивостей нечітких відношень переваги та методів прийняття рішень за нечіткими відношеннями переваги.

Теоретичні відомості

Означення 1. *Нечітким відношенням* R на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$.

Вона характеризується такою функцією належності: $\mu_R: X \times X \to [0; 1]$.

Значення $\mu_R(x; y)$ цієї функції показує міру або ступінь, з якою виконується відношення R між елементами x та y. Звичайні відношення ми можемо вважати окремим випадком нечітких відношень, функції належності яких можуть мати тільки два значення: 0 або 1.

Означення 2. Нехай на множині X подано два нечітких відношення A та B, тобто в декартовому добутку X^2 подано дві нечіткі підмножини A та B. Тоді нечіткі множини: $C = A \cap B$ та $D = A \cup B$, назвемо відповідно *перетином* та *об'єднанням* нечітких відношень A та B на множині X.

Означення 3. Нечітке відношення B містить нечітке відношення A, якщо для нечітких множин B та A має місце включення: $A \subset B$, тобто їх функції належності задовольняють таку нерівність:

$$\mu_A(x; y) \leq \mu_B(x; y), \forall x, y \epsilon X.$$

Означення 4. Якщо R – нечітке відношення на множині X, то нечітке відношення $\bar{R}$, функція належності якого $\mu_{\bar{R}}(x; y) = 1 - \mu_R(x; y)$, називається *доповненням* відношення R на множині X.

Наприклад, доповненням нечіткого відношення «краще» буде відношення «не краще».

Обернене до R нечітке відношення R^{-1} на множині X визначається таким чином:

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx, \forall x, y \epsilon X,$$

або з використанням термінології функцій належності

$$\mu_{\bar{R}}(x; y) = \mu_R(x; y), \forall x, y \epsilon X.$$

Прийняття рішень за даними відношеннями переваги

Розглянемо таку задачу: нехай задано множину альтернатив X і кожна альтернатива цієї множини характеризується кількома ознаками, номери яких $j = 1, \ldots, m$. Інформацію про попарне порівняння альтернатив подано у вигляді відношень переваги $R_j, j = 1, \ldots, m$. Таким чином, маємо m відношень переваги на множині X. Припустимо також, що відношення R_j, відрізняються за важливістю відповідних ознак, на основі яких порівнюють альтернативи, а важливість кожної з ознак описується величиною коефіцієнта $\lambda_j, j = 1, \dots, m$

Необхідно на основі даної інформації зробити раціональний вибір альтернативи з множини $(X,\ R_1, \dots, R_m)$.

Сформулюємо алгоритм, який дозволяє розв'язати сформульовану задачу

1.Будуємо нечітке відношення Q_1(перетин вихідних відношень), а саме:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\mu_1(x, y), \dots, \mu_m(x, y)\}$$

Далі визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}) за такою формулою:

$$\mu_{Q_1}^{\text{н.д.}}(x) = 1 - \sup_{y \epsilon X}[\mu_{Q_1}(x, y) - \mu_{Q_1}(y, x)]$$

2. Створюємо нечітке відношення Q_2 (адитивну згортку відношень), а саме:

$$\mu_{Q_2}(y, x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x, y)$$

і визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}),тобто

$$\mu_{Q_2}^{\text{н.д.}}(x) = 1 - \sup_{y \epsilon X}[\mu_{Q_2}(x, y) - \mu_{Q_2}(y, x)]$$

3. Знаходимо перетин множин $\mu_{Q_1}^{\text{н.д.}}(x)$ та $\mu_{Q_2}^{\text{н.д.}}(x)$за таким правилом:

$$\mu^{\text{н.д.}}(x) = \min\{\mu_{Q_1}^{\text{н.д.}}(x), \mu_{Q_2}^{\text{н.д.}}(x)\}$$

4. Раціональним вважаємо вибір альтернатив із такої множини:

$$X^{\text{Н.Д.}} = \left\{x \epsilon X \middle| \mu^{\text{н.д.}}(x) = \sup_{x' \epsilon X} \mu^{\text{н.д.}}(x')\right\}$$

Тут слід зауважити, що залежно від типу задачі раціональними можна вважати не тільки альтернативи з множини $X^{\text{Н.Д.}}$, але в тому чи іншому сенсі й слабко (або не дуже сильно) доміновані альтернативи, тобто ті, ступінь належності яких до множини $\mu^{\text{н.д.}}$ нижчий від певного заданого.

Приклад розв'язування задачі

Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги R_1 та R_2 причому друге з них має значущість, вдвічі більшу ніж перше, зокрема

R_1 =

	x_1	x_2	x_3
x_1	1	0,5	0,3
x_2	0	1	0,8
x_3	1	0,5	1

R_1 =

	x_1	x_2	x_3
x_1	1	0,5	0,3
x_2	0	1	0,8
x_3	1	0,5	1

Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

Розв'язування

1. Будуємо відношення: $Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2$, враховуючи, що $\lambda_1 = 0{,}33$ і $\lambda_2 = 0{,}67$, воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}167 & 0{,}33 \end{pmatrix}$$

а відповідне йому відношення строгої переваги

$$\mu_{Q_1}^{s}(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}167 \\ 0{,}33 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}) за формулою:

$$\mu_{Q_1}^{\text{н.д.}}(x) = 1 - \sup_{y \epsilon X} \mu_{Q_1}^{s}(x, y)$$

Її функція належності

$$\mu_{Q_1}^{\text{н.д.}}(x_i) = \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0,67 & 0,967 & 0,833 \end{array}$$

2.Будуємо відношення $Q_2 = \lambda_1\mu_1(x_i, y_j) - \lambda_2\mu_2(x_i, y_j)$. Його функція належності

$$\mu_{Q_2}(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,367 & 0,2 \\ 0,2 & 1 & 0,867 \\ 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

а відповідне відношення строгої переваги має такий вигляд:

$$\mu_{Q_2}^{S}(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0,167 & 0 \\ 0 & 0 & 0,367 \\ 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Скористаємося формулою

$$\mu_{Q_2}^{\text{н.д.}}(x) = 1 - \sup_{y \epsilon X} \mu_{Q_2}^{S}(x, y),$$

знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}), а саме:

$$\mu_{Q_2}^{\text{н.д.}}(x_i) = \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0,2 & 0,833 & 0,633 \end{array}$$

Вихідна множина недомінованих альтернатив має таку функцію належності:

$$\mu^{\text{н.д.}} = \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0,2 & 0,833 & 0,633 \end{array}$$

Максимальним ступенем недомінованості характеризується альтернатива x_2, тому її вибір можна вважати раціональним.

Контрольні питання

1. Що називають нечітким відношенням?
2. Як можна задавати нечіткі відношення?
3. Які математичні операції можна застосовувати до нечітких відношень?
4. Яке нечітке відношення називають рефлексивним (антирефлек- сивним)?
5. Яке нечітке відношення називають симетричним, антисиметричним, асиметричним?
6. Що являє собою нечітке відношення переваги?
7. Які властивості має нечітке відношення переваги, що воно характеризує?
8. Яким чином здійснюють раціональний вибір альтернатив, коли відоме відношення переваги на даній множині альтернатив?
9. Як відбувається раціональний вибір альтернатив, коли задано кілька відношень переваги на множині альтернатив?
10. Яким чином виконують раціональний вибір альтернатив, коли задано відношення переваги на множині альтернатив й нечітку перевагу на множині ознак?

Варіанти індивідуальних завдань

Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги R_1 та R_2, значущість яких, на думку ОПР, дорівнює відповідно λ_1 і λ_2. Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

1. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,3 \text{ i } \lambda_2 = 0,7$$

2. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,9 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,4 \text{ i } \lambda_2 = 0,6$$

3. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,6 \text{ i } \lambda_2 = 0,4$$

4. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,5 \text{ i } \lambda_2 = 0,5$$

5. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,2 \text{ i } \lambda_2 = 0,8$$

6. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,3 & 0,8 & 0,7 \\ 0,8 & 0,5 & 1 & 0,9 & 0,6 \\ 0,7 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,4 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,4$ i $\lambda_2 = 0,6$

7. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,7$ i $\lambda_2 = 0,3$

8. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$

9. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,7$ i $\lambda_2 = 0,3$

10. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,7 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,6$ i $\lambda_2 = 0,4$

11. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 0,1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,6$ i $\lambda_2 = 0,4$

12. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 0,1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,5$ i $\lambda_2 = 0,5$

13. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,7 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,5$ i $\lambda_2 = 0,5$

14. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0,6 \\ 0,8 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,5 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,3$

15. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$

16. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,7 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0,2 \text{ i } \lambda_2 = 0,8$$

17. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0,4 \text{ i } \lambda_2 = 0,6$$

18. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0,7 \text{ i } \lambda_2 = 0,3$$

19. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,9 & 0,8 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,2 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,9 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0,7 \text{ i } \lambda_2 = 0,3$$

20. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0,7 \text{ i } \lambda_2 = 0,3$$

21. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,5$ i $\lambda_2 = 0,5$

22. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,1$ i $\lambda_2 = 0,9$

23. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,9$ i $\lambda_2 = 0,1$

24. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,2 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,8 & 0,4 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$

25. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,1$ i $\lambda_2 = 0,9$

26. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$

27. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,8 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,7 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,7 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$

28. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$

29. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,8 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,7 & 0,6 & 0,4 & 1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$

30. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,4 & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 0,6 & 1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 & 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$

Література

1. Сілко О.В., Рудоміно-Дусятська І.А., Соловйова Т.В., Козубцова Л.М. Курс лекцій «Теорія прийняття рішень» К.: ВІТІ, 2021. – 147 с.
2. Ус С. А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С. А. Ус, Л. С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – 2-ге вид. випр. – Дніпро : НТУ «ДП»,
3. Ус С.А. Задачі вибору. Методичні рекомендації до виконання практичних робіт й індивідуальних завдань з дисципліни «Теорія прийняття рішень» студентами спеціальності 124 Системний аналіз / С.А. Ус: М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 31 с.2018. – 302 с.
4. Катренко А. В. Теорія прийняття рішень: підручник з грифом МОН / А. В. Катренко, В. В. Пасічник, В. П. Пасько — К. : Видавнича група BHV, 2009. — 448 с.
5. Файнзільберг Л.С. Теорія прийняття рішень: підруч., Л.С. Файнзільберг, О. А. Жуковська, В. С. Якимчук. Київ: Освіта України, 2018. — 246 с.
6. Творошенко І.С. Технології прийняття рішень в інформаційних системах: навч. посіб./ І.С. Творошенко; Харків. нац. ун -т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2021. — 118 с.
7. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Методичні рекомендації до виконання практичних і лабораторних робіт з теорії прийняття рішень.– К., 2001.
8. Баранкевич М.М. Експертні методи в ухваленні рішень: Текст лекцій / М.М. Баранкевич – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. – 214 с.
9. Гнатієнко Г.М., Снитюк В.Є. Експертні технології прийняття рішень: Монографія.– К.: ТОВ «Маклаут»,– 2008.– 444с.

Зміст