

О. Д. Кічмаренко, А. О. Стехун, А. Т. Яровий

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

О. Д. Кічмаренко, А. О. Стехун, А. Т. Яровий

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика,
122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи і технології

ОДЕСА
ОНУ
2024

УДК 519.8
К46

Автори:

О. Д. Кічмаренко, доктор фізико-математичних наук, професор, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики;

А. О. Стехун, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики;

А. Т. Яровий, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики.

Рецензенти:

І. В. Стрелковська, доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, декан факультету кібербезпеки, програмної інженерії та комп'ютерних наук Міжнародного гуманітарного університету;

А. В. Плотніков, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури;

В. М. Євтухов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано до видання вченою радою ОНУ імені І. І. Мечникова.

Протокол № 7 від 19 червня 2023 року.

Кічмаренко О. Д.

К46 Дослідження операцій : навч. посіб. для здобув. першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. 111 Матем., 113 Прикладна матем., 122 Комп'ютерні науки, 126 Інформ. системи і технології / О. Д. Кічмаренко, А. О. Стехун, А. Т. Яровий. Електронні текстові дані (1 файл: 1,9 МБ). Одеса : Одес. нац. ун-т. ім. І. І. Мечникова, 2024. – 172 с.

ISBN 978-617-689-502-2

Навчальний посібник призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика, 122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи і технології. У посібнику викладено методику проведення дослідження операцій. Досліджується аналіз лінійних моделей на чутливість за допомогою симплекс-методу, двоїстого симплекс-методу і параметричного програмування. Розглядаються транспортна задача, задача про призначення, задача комівояжера. Також представлені моделі керування запасами, моделі систем масового обслуговування та імітаційного моделювання. Кожна тема містить задачі для самостійного розв'язання, питання для самоконтролю.

УДК 519.8

ISBN 978-617-689-502-2

© Кічмаренко О. Д., Стехун А. О.,
Яровий А. Т., 2024

© Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова, 2024

Зміст

Вступ	6
Тема 1. Методика проведення дослідження операцій	7
1.1 Визначення цілей	8
1.2 Складання плану розробки проекту	9
1.3 Формулювання проблеми	10
1.4 Побудова моделі	12
1.5 Розробка обчислювального методу	12
1.6 Розробка технічного завдання на програмування. Програмування і налагоджування	13
1.7 Збір даних	13
1.8 Перевірка моделі	13
1.9 Реалізація результатів дослідження операцій	14
1.10 Запитання для самоконтролю	15
1.11 Завдання для самостійної роботи	15
Тема 2. Симплекс-метод і аналіз моделі на чутливість	16
2.1 Оптимальний розв'язок	16
2.2 Статус ресурсів	18
2.3 Цінність ресурсу	19
2.4 Максимальна зміна запаса ресурсу	21
2.5 Максимальна зміна коефіцієнтів питомого прибутку (вартості)	24
2.6 Запитання для самоконтролю	26
2.7 Завдання для самостійної роботи	26
Тема 3. Аналіз моделей на чутливість за допомогою двоїстості	28
3.1 Зміни умов задачі, що впливають на припустимість розв'язку	32
3.1.1 Зміна правих частин обмежень	32
3.1.2 Додавання нового обмеження	34
3.2 Зміни умов задачі, що впливають на оптимальність розв'язку	37
3.2.1 Зміна коефіцієнтів цільової функції	37
3.2.2 Зміна питомих витрат ресурсів	40
3.2.3 Додавання нового виду виробничої діяльності	41
3.3 Висновки	43

3.4	Запитання для самоконтролю	44
3.5	Завдання для самостійної роботи	44
Тема 4. Параметричне лінійне програмування		46
4.1	Параметрична зміна вектора коефіцієнтів цільової функції c	47
4.2	Параметрична зміна вектора вільних членів обмежень b .	50
4.3	Параметрична зміна вектора P_j	53
4.4	Одночасна параметрична зміна векторів	55
4.5	Запитання для самоконтролю	59
4.6	Завдання для самостійної роботи	60
Тема 5. Транспортна задача		61
5.1	Метод північно-західного кута	64
5.2	Метод найменшої вартості	72
5.3	Наближений метод Фогеля	75
5.4	Запитання для самоконтролю	78
5.5	Завдання для самостійної роботи	80
Тема 6. Задача про призначення		81
6.1	Запитання для самоконтролю	86
6.2	Завдання для самостійної роботи	87
Тема 7. Цілочисельне програмування		88
7.1	Класифікація методів розв'язування задач цілочисельного програмування	88
7.2	Алгоритми, що реалізують метод відсікаючих площин	89
7.2.1	Дробовий алгоритм розв'язування повністю цілочисельних задач (перший алгоритм Гоморі)	90
7.2.2	Ефективність відсікання Гоморі	97
7.3	Метод гілок і меж	98
7.4	Запитання для самоконтролю	107
7.5	Завдання для самостійної роботи	108
Тема 8. Задача комівояжера		109
8.1	Постановка задачі. Математична модель	109
8.2	Метод гілок і меж	112
8.3	Приклад	112
8.4	Запитання для самоконтролю	116
8.5	Завдання для самостійної роботи	117

Тема 9. Моделі керування запасами	118
9.1 Узагальнена модель керування запасами	118
9.1.1 Типи моделей керування запасами	120
9.2 Детерміновані моделі	123
9.2.1 Однопродуктова статична модель	123
9.2.2 Однопродуктова статична модель з «розривами» цін	128
9.2.3 Багатопродуктова статична модель з обмеження- ми на ємність складських приміщень	132
9.2.4 Модель зі скінченною інтенсивністю надходжен- ня замовлення	134
9.2.5 Модель з урахуванням незадоволених вимог . . .	135
9.2.6 Модель з визначенням точки замовлення	137
9.3 Модель керування запасами на складі	138
9.4 Запитання для самоконтролю	144
9.5 Завдання для самостійної роботи	145
Тема 10. Моделі систем масового обслуговування	147
10.1 Показники ефективності систем масового обслуговування	149
10.2 Система масового обслуговування з обмеженою довжи- ною черги	153
10.3 Системи масового обслуговування з очікуванням	154
10.4 Система масового обслуговування з обмеженням часом очікування	155
10.5 Замкнені системи масового обслуговування	156
10.6 Запитання для самоконтролю	158
10.7 Завдання для самостійної роботи	159
Тема 11. Імітаційне моделювання	160
11.1 Випадкові числа	161
11.2 Метод Монте-Карло	162
11.3 Експлуатація імітаційної моделі	163
11.4 Запитання для самоконтролю	167
11.5 Завдання для самостійної роботи	168
Список літератури	170

Вступ

Навчальний посібник написаний на основі курсу лекцій «Дослідження операцій» та «Математичні методи дослідження операцій», які читаються здобувачам першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика, 122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи та технології факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Враховуючи, що засвоєння курсу дослідження операцій є важливою складовою частиною вищої освіти, у навчальному посібнику головна увага приділена питанням практичного використання основних методів дослідження операцій з детальним описом алгоритмів та наведенням прикладів. Завданням посібника є представлення методів як інструмента дослідження операцій, що надало можливість уникнути розгляду обґрунтування складних теоретичних питань. Особлива увага приділена практичним розрахункам.

Потреби практики викликали до життя спеціальні наукові методи, які заведено поєднувати під загальною назвою «Дослідження операцій». Під дослідженням операцій розуміють застосування математичних, кількісних методів для обґрунтування рішень у всіх сферах цілеспрямованої людської діяльності. Дослідження операцій – прикладна математична дисципліна, яка займається розробкою та застосуванням методів знаходження оптимальних рішень щодо управління операціями у складних системах. Дослідження операцій є однією з основних дисциплін, необхідних для підготовки фахівців.

Навчальний посібник містить викладення основних питань дослідження операцій. Розглянути методики постоптимального аналізу за допомогою симплекс методу та аналізу моделі на чутливість, за допомогою теорії двоїстості, розкриті питання параметричного лінійного програмування. Розглядаються класичні задачі дослідження операцій такі, як транспортна задача, задача про призначення, задача комівояжера. Представлені моделі цілочисельного програмування та моделі управління запасами, деякі задачі систем масового обслуговування, методи імітаційного моделювання. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами розв'язання задач, також кожний розділ посібника містить задачі для самостійного розв'язування.

Тема 1. Методика проведення дослідження операцій

Сподіваємося, що після ознайомлення з цим матеріалом, студент буде більш підготовленим до практичного виконання дослідження операцій і буде мати більше шансів успішно його завершити.

З одного боку, задача дослідження операцій достатньо проста, оскільки легко перерахувати етапи процесу проведення таких досліджень, які мало чим відрізняються від тих, що властиві усім науковим дослідженням.

З іншого боку, питання, що розглядаються тут, є достатньо складними. У дійсності задача полягає в тому, щоб допомогти у реалізації етапів, необхідних для проведення дослідження операцій. Інакше, труднощі полягають не в ідентифікації окремих етапів, а в тому, щоб допомогти фахівцю розробити для кожного етапу схему дій, що найкраще відповідає поставленим задачам. Тому основна увага тут приділяється не стільки опису етапів дослідження операцій, скільки питанням їх практичного виконання. Таким чином, увага сконцентрується на тому «як робити», а не «що робити».

Чому звертаємо увагу на методи проведення дослідження операцій?

Перш за все, використання правильної методики гарантує, що виконавець не зробить помилки, яку статистики могли б віднести до «помилки третього роду», тобто він не буде шукати розв'язок неправильно поставленої задачі. Грамотне проведення дослідження операцій включає також і можливість неправильного розв'язку правильно сформульованої задачі. Якщо дослідницька група керувалася правильною методикою, то розроблені моделі адекватні розглянутій проблемі і припустимі з точки зору реалізації обчислювального процесу, виконуються обмеження на виділені кошти і терміни виконання роботи, а впровадження результатів дослідження операцій відбувається кваліфіковано й ефективно.

Слід зауважити, що методика і керівні принципи дослідження операцій, що розглядаються тут не є універсальними.

Кожне дослідження має свої особливості і вимагає від виконавця інтуїції, ініціативи, щоб правильно визначити ціль проекту і досягти успіху у її досягненні.

Основні етапи, характерні для дослідження операцій:

- 1) визначення цілей;
- 2) складання плану розробки проекту;
- 3) формулювання проблеми;
- 4) побудова моделі;
- 5) розробка обчислювального методу;
- 6) розробка технічного завдання та програмування, програмування і налагоджування програми;
- 7) збір даних;
- 8) перевірка моделі;
- 9) реалізація результатів.

1.1 Визначення цілей

Першочергова мета будь-якого дослідження операцій полягає в тому, щоб з'ясувати, що хоче отримати у результаті його проведення керівник або користувач. Іншими словами, необхідно визначити, які очікувані результати завершення проекту.

Мету дослідження необхідно формулювати, виходячи з суті рішень, на отримання яких орієнтована дана робота. Фахівцю з дослідження операцій необхідно особливо потурбуватись про те, щоб формулювання мети роботи не було досить вузьким. Не слід ставити і досить широку мету. Дослідник повинен чітко уявляти, яка повинна бути у нього лінія поведінки, щоб після серії обговорень з адміністрацією були виявлені її дійсні проблеми. У зв'язку з цим досліднику можна дати такі п'ять порад:

- 1) він повинен не тільки слухати, але і чути, що йому говорять. Очевидність сказаного поступається тільки частоті, з якою цій пораді не наслідують на практиці;
- 2) він повинен поставити себе на місце керівника і подивитись на проблему його очима. Іншими словами, досліднику необхідно з'ясувати

задачі, які були поставлені перед керівником, обмеження і політичні обставини, що впливають на його поведінку, суперечливі цілі, між якими він намагається знайти компроміс. Наскільки це можливо, дослідник повинен знати особливі якості керівника, його нахили і упередження;

- 3) дослідник повинен також знати організацію, яка буде мати вплив на його діяльність. Йому необхідно ретельно ознайомитись з існуючою ієрархією управління, функціями різних груп, попередніми дослідженнями відповідних питань і т. д.;
- 4) він повинен стримуватися від висловлювання своєї упередженої думки і намагання втиснути її у рамки своїх попередніх уявлень задля того, щоб використати бажаний для себе підхід до її розв'язку;
- 5) дуже важливо, щоб твердження і зауваження керівника не залишалися неперевіреними. Досить часто дослідник сидить і з поваги тільки пасивно слухає керівника. Дослідник повинен запитувати і перевіряти. Чому це говорите? Що ви під цим розумієте? Коли ви це хочете зробити? Подібні питання дослідник повинен задавати весь час.

Крім того, необхідно передбачити, як ці цілі можуть з часом змінитися, або дослідження могли б зацікавити керівників іншого рівня.

1.2 Складання плану розробки проекту

Дослідження операцій у багатьох відношеннях є творчий процес. Тому може виникнути питання: «Як можна планувати таку роботу?» Відповідь буде така: «Під плануванням розуміємо не вибір методу виконання тих чи інших робіт, а встановлення часових координат, відповідних строкам завершення певних видів роботи». Встановлення строків виконання проміжних етапів стимулює творчу активність і сприяє своєчасному закінченню відповідних робіт.

Порушення графіку робіт створює додаткові складнощі. Керівники досить часто зацікавлені в тому, щоб робота була виконана у стислі терміни. Якщо проведення дослідження затягується, то проблема або її розуміння керівником змінюється. У результаті дослідник розв'язує не ту задачу, яка потрібна на даний момент.

Етапи проекту досить часто деталізуються до рівня окремих завдань.

Розділення всього дослідження на окремі послідовні етапи — кращий спосіб оцінки необхідних фінансових, людських і часових ресурсів ще до початку робіт над проектом.

Також необхідно встановити межі строків для виконання проміжних етапів. Слід звернути увагу на виділення ресурсів для аналізу даних, що збираються в процесі дослідження.

1.3 Формулювання проблеми

Цей етап включає додаткові обговорення з керівником, що призводить до першого контакту з штабом або лінійним персоналом, а також вимагає збору даних, що дають зрозуміти такі моменти:

- у чому суть проблеми;
- що було у минулому;
- чого чекати у майбутньому;
- який характер співвідношень між змінними задачі.

На основі отриманих результатів формується загальна схема побудови моделі для вивчення проблеми і визначається напрямок подальшої роботи.

Перше питання при формуванні проблеми — це чи можливо представити всю проблему у вигляді окремих, більш часткових підпроблем, для того, щоб паралельно чи послідовно дослідити їх незалежно одну від одної.

Досліднику слід дотримуватися наступної схеми дослідження:

1. Почати з розгляду центральної задачі дослідження.
2. З'ясувати, які вхідні та вихідні дані необхідні для формування моделі центральної задачі. Це допоможе визначити підмоделі, розробка яких може знадобитися у подальшому.
3. Встановити, чи існують способи отримання необхідної вхідної інформації або використання результуючої вихідної інформації. Якщо вони є, то необхідно їх використати. Інакше, необхідно визначити допоміжні моделі.

4. З'ясувати, що необхідно розробити для кожної з допоміжних моделей: швидкий і грубий спосіб розрахунку або нові методи ручних розрахунків.

Далі наведено перелік *контрольних питань*, які допоможуть в успішному функціонуванні моделі:

- Чи передбачені способи для неперервного коригування вхідної інформації моделі?
- Чи достатньо документації для забезпечення інших дій для поліпшення моделі?
- Зможе модель функціонувати у рамках традиційних методів управління фірмою?
- Чи можна простим способом модифікувати структуру моделі, якщо відбулися зміни діяльності організації?
- Чи проведено необхідний аналіз можливих способів використання моделі для отримання інформації про її слабкі місця і помилки?

Процес побудови моделі вимагає вирішення наступних питань:

1. Визначення змінних задачі, їх кількість.
2. Визначення змінних, які можуть змінюватися керівним органом.
3. Далі необхідно визначити некеровані змінні.
4. Визначення технологічних параметрів є четвертим питанням, яке необхідно з'ясувати на стадії формулювання проблеми. Технологія описується сукупністю констант, які визначають граничні значення змінних і співвідношень між ними.
5. Визначення показників ефективності. Вони є основою для оцінки конкретних рішень розглянутої проблеми. У більшості випадків використовується декілька показників ефективності. Найбільш важливі з них необхідно виявити на стадії визначення цілей дослідження.

1.4 Побудова моделі

Четвертий етап пов'язаний з розробкою моделі. Модель виражає взаємозалежність між керованими змінними і некерованими змінними, технологічними параметрами і показниками ефективності.

Існує декілька різних типів співвідношень, що формують модель:

1. *Співвідношення, що витікають з означень.*

Це аналітичні вирази фізичних законів або загальноприйнятих правил діяльності об'єктів.

2. *Емпіричні співвідношення.*

Вони також характеризують взаємозв'язки між двома або більшою кількістю змінних. Вони виводяться на основі вивчених даних за попередній період, аналізу технічних аспектів, експериментальних даних, правових розпоряджень.

3. *Нормативні співвідношення.*

Ці співвідношення встановлюють, які змінні повинні бути пов'язані між собою, а не те, як вони були пов'язані у минулому. Ці співвідношення можуть бути результатом тих вимог, які пред'являє керуючий орган до якості функціонування системи.

1.5 Розробка обчислювального методу

Для розробки обчислювального методу необхідно виявити такі моменти:

- Чи необхідно використовувати імітаційне моделювання, чи якийсь з методів оптимізації?
- Повинна модель враховувати, що деякі змінні є випадковими величинами, чи використати детермінований підхід?
- Необхідно враховувати нелінійність деяких співвідношень, чи обмежитись лінійною апроксимацією?
- Використовувати існуючі методи, чи розробити новий метод?

Ще зазначимо питання вибору одного з двох варіантів:

- знайти оптимальний розв'язок спрощеної задачі;

- знайти наближений розв’язок точно сформульованої задачі.

Практичний досвід дає перевагу другому варіанту. Це пов’язано з тим, що інакше важко бути впевненому в правильності отриманих результатів через можливі помилки при побудові моделі.

1.6 Розробка технічного завдання на програмування. Програмування і налагоджування

Процес розробки програми у багатьох випадках затягується, що затримує успішне виконання робіт. Детальна розробка технічного завдання забезпечує якісне документальне оформлення програми, в наслідок чого дослідження стає більш орієнтоване на користувача і задовольняє його потреби.

Слід звернути увагу на те, що вхідні і вихідні форми повинні бути орієнтовані на користувача.

Взагалі проекти по дослідженню операцій не вимагають розробки машинних програм, а використовують уже розроблені. А якщо і треба розробити програму, то вона виконується іншими підрозділами.

1.7 Збір даних

На цьому етапі здійснюється збір і аналіз даних, необхідних для перевірки правильності моделі і практичного використання результатів дослідження операцій. На попередніх етапах збір даних мав за мету здійснити правильне формулювання проблеми при побудові моделі. На практиці цей етап виконується з зайвим зусиллям. При розробці будь-якого проекту з’ясовується, що до одних вхідних параметрів модель дуже чутлива, а до інших — ні. Тому спочатку можна використовувати «округлені» дані. Потім, використовуючи модель, можна з’ясувати: до яких вхідних параметрів модель дуже чутлива, а до яких — ні. Далі уже провести роботу по уточнювані моделі.

1.8 Перевірка моделі

Важливість цього етапу важко переоцінити. Він включає дві фази: визначення способів перевірки моделі і здійснення цієї перевірки. На першій фазі обираються аналітичні і експериментальні методи для перевірки несуперечливості, чутливості, реалістичності і працездатності.

Для здійснення перевірки моделі необхідні дані, що зібрані на попередньому етапі. Результати такої роботи нерідко приводять до необхідності перебудови моделі і складання нових програм.

1. *Несуперечливість.*

Чи дає модель результати, що не суперечать логіці при варіації величин важливих параметрів, особливо у тих випадках, коли їх значення близькі до екстремальних? Щоб відповісти на це питання, необхідно проаналізувати характер реакції моделі на зміну відповідних вхідних параметрів.

2. *Чутливість.*

Чи відповідають відносні зміни вихідних змінних моделі невеликим змінам їх параметрів?

3. *Реалістичність.*

Відповідає модель тим частковим випадкам, для яких уже є фактичні дані?

4. *Працездатність.*

Чи легко отримати розв'язок за допомогою нашої моделі? Якщо вона повинна використовуватись у процесі виробки рішень, які будуть використовувати підрозділи, то необхідно, щоб розрахунки можна було виконати у межах, що встановлені для підготовки відповідних рішень. Крім того, трудові витрати і ресурси, необхідні для експлуатації моделі, повинні вміщуватися в ліміти машинного часу і фонду зарплатні.

1.9 Реалізація результатів дослідження операцій

Досить часто після розробки і перевірки моделі фахівець з дослідження операцій вважає свою роботу завершеною. Але це неправильно. У дійсності багато труднощів виникає на кінцевому етапі розробки проекту, пов'язаним з реалізацією отриманих результатів. Ефективність операційного проекту в цілому істотно залежить від того, в якій мірі вдалося забезпечити при його розробці співробітництво керівників різних рівнів управління, що відповідають за вирішення нашої проблеми або виконання функцій, що мають до неї якесь відношення. Проблеми, з якими зустрічаються в процесі дослідження викликані не важливими причинами, а лише відсутністю розуміння і небажанням змін.

Такі проблеми можна перебороти тільки у тому випадку, якщо розробник витратить необхідний для нього час і проявить відповідну наполегливість. Для успішної реалізації проекту необхідно скласти матеріали для ознайомлення керівного персоналу з принципами функціонування нової системи, підготовка і проведення відповідних семінарів, і демонстрація результатів дослідження на практичних прикладах. Хоча до моменту завершення проекту багато керівників уже ознайомлені зі всіма моделями і розробленими системами, але все-таки важливо ще раз впевнитись у тому, що їх уявлення достатньо ґрунтовні і є потрібні матеріали для навчання інших співробітників.

1.10 Запитання для самоконтролю

1. Розкрийте поняття «Дослідження операцій».
2. Назвіть основні задачі дослідження операцій.
3. Перелічіть головні етапи. Наведіть характеристику основних етапів операційного дослідження.
4. Назвіть основні методи дослідження операцій.
5. Вирішення яких питань вимагає процес побудови моделі.
6. Назвіть основні типи співвідношень що формують модель.
7. Назвіть ознаки, за якими класифікують математичні моделі.
8. Що необхідно знати для постановки задачі дослідження операцій?

1.11 Завдання для самостійної роботи

Зробити огляд літератури за цією темою, написати реферат.

Тема 2. Симплекс-метод і аналіз на чутливість

Заключна симплекс-таблиця вміщує в себе досить важливі дані. Із симплекс-таблиці або безпосередньо, або за допомогою додаткових обчислень можна отримати інформацію відносно:

- оптимального розв'язку;
- статусу ресурсів;
- цінності кожного ресурсу;
- чутливості оптимального розв'язку до зміни запасів, варіаціям коефіцієнтів цільової функції і інтенсивності споживання ресурсів.

Відомості про перші три пункти можна отримати безпосередньо зі симплекс-таблиці для оптимального розв'язку. Отримання інформації для останнього пункту вимагає додаткових обчислень.

2.1 Оптимальний розв'язок

Для ілюстрації можливостей отримання вказаної вище інформації із заключної симплекс-таблиці скористаємося такою задачею про виробництво фарб.

Задача про фарби. Фабрика виготовляє два види фарб: для зовнішніх (1) і внутрішніх (2) робіт. Продукція обох видів йде у оптовий продаж. Для виробництва фарб використовуються два види продукту A і B . Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 6 і 8 т. відповідно. Витрати A і B на 1 т відповідних фарб представлені у таблиці:

Початковий продукт	Витрати початкових продуктів на тонну фарби		Максимально можливий запас (т.)
	фарба 1	фарба 2	
A	1	2	6
B	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу 2 ніколи не перевищує попит на фарбу 1 більш, ніж на 1 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу 2 ніколи не перевищує 2 т. на добу.

Оптові ціни однієї тони фарби дорівнюють: 3 тис. грн для фарби 1 та 2 тис. грн для фарби 2.

Яку кількість фарб кожного виду необхідно виробляти фабриці, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним?

Математичну модель можна записати таким чином: визначити добові об'єми виробництва (x_1 і x_2) фарб 1 і 2, при яких досягається максимум функції

$$z = 3x_1 + 2x_2,$$

при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

У стандартній формі ця модель має вигляд:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2,$$

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 8,$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1,$$

$$x_2 + s_4 = 2,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, s_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Розглянемо оптимальну симплекс таблицю цієї моделі:

Базисні змінні	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Розв'язок
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
s_3	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

У першу чергу нас цікавлять об'єми виробництва фарб, тобто значення x_1 і x_2 . Використовуючи дані оптимальної симплекс-таблиці основні результати можна представити таким чином:

Змінні	Оптимальні значення	Розв'язок
x_1	$\frac{10}{3}$	Об'єм виробництва фарби 1 = $\frac{10}{3}$ т./добу
x_2	$\frac{4}{3}$	Об'єм виробництва фарби 2 = $\frac{4}{3}$ т./добу
z	$\frac{38}{3}$	Прибуток від реал. прод. $\frac{38}{3}$ тис. грн./добу

2.2 Статус ресурсів

Ресурси відносяться до дефіцитних або недефіцитних у залежності від того, повне чи часткове їх використання передбачає оптимальний розв'язок задачі. Ціль полягає в тому, щоб отримати відповідну інформацію безпосередньо із симплекс-таблиці для оптимального розв'язку.

Зауваження 2.1. Кажучи про ресурси, що фігурують в задачі ЛП, ми маємо на увазі, що встановлені деякі максимальні межі їх запасів, тому у відповідних початкових обмеженнях повинен використовуватися знак $\leq$. Отже, обмеження зі знаком $\geq$ не можуть розглядатися як обмеження на ресурси. Швидше обмеження такого типу відображають ту обставину, що розв'язок повинен задовольняти певним вимогам, наприклад, забезпеченню мінімального попиту або мінімальних відхилень від встановлених структурних характеристик виробництва (збуту).

З цього зауваження випливає, що статус ресурсів для довільної моделі ЛП можна встановити безпосередньо з заключної симплекс-таблиці, звертаючи увагу на значення залишкових змінних. Для нашої задачі маємо такі результати:

Ресурс	Залишкові змінні	Статус ресурса
Початковий продукт А	$s_1 = 0$	дефіцитний
Початковий продукт В	$s_2 = 0$	дефіцитний
Перевищення об'єма виробництва фарби 2 по відношенню до фарби 1	$s_3 = 3$	недефіцитний
Попит на фарбу 2	$s_4 = 2/3$	недефіцитний

Додатне значення залишкової змінної вказує на неповне використання відповідного ресурсу, тобто даний ресурс є недефіцитним. Якщо ж залишкова змінна дорівнює нулеві, то це свідчить, що ресурс є дефіцитним. З таблиці видно, що ресурси 3 і 4, що пов'язані з можливостями збуту продукції, є недефіцитними. Тому збільшення їх запасів понад встановленого максимального значення приведе тільки до того, що вони стануть ще більш недефіцитними. Оптимальний розв'язок задачі при цьому залишається незмінним.

Ресурси, збільшення запасів яких дозволяє покращити розв'язок (збільшити прибуток), — це початкові продукти А і В, оскільки з симплекс-таблиці для оптимального розв'язку видно, що вони дефіцитні.

У зв'язку з цим логічно поставити питання: якому з дефіцитних ресурсів віддати перевагу при вкладенні додаткових коштів на збільшення їх запасів, з тим щоб отримати максимальну віддачу? Відповідь на це питання буде у слідуючому пункті.

2.3 Цінність ресурсу

Цінність ресурсу характеризується величиною покращення оптимального значення z , що приходить на одиницю приросту об'єма даного ресурсу.

Позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу i через y_i . Покажемо, яким чином можна визначити y_i безпосередньо з симплекс-таблиці

для оптимального розв'язку. Розглянемо z -рівняння симплекс-таблиці для оптимального розв'язку задачі про виробництво фарб

$$z = \frac{38}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot s_1 + \frac{4}{3} \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 \right).$$

Додатний приріст змінної s_1 відносно її поточного нульового значення призводить до пропорційного зменшення z і коефіцієнт пропорційності дорівнює $\frac{1}{3}$ тис. грн. за тону. Але, як видно з першого обмеження моделі,

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6,$$

збільшення s_1 призводить до зниження запасу ресурсу 1 (продукту А). Звідси отримаємо, що зменшення запасу ресурсу 1 викликає пропорційне зменшення цільової функції з тим же коефіцієнтом пропорційності, рівним $\frac{1}{3}$ тис. грн. за тонну. Так як ми оперуємо з лінійними функціями, отриманий висновок можна узагальнити, вважаючи, що збільшення запасу ресурса 1 (еквівалентне надлишкової змінної $s_1 < 0$) призводить до пропорційного збільшення z з тим же коефіцієнтом пропорційності, рівним $\frac{1}{3}$ тис. грн. за тонну. Аналогічні міркування справедливі і для ресурсу 2. Таким чином, $y_2 = \frac{4}{3}$ тис. грн. за тонну.

Відносно ресурсів 3 і 4 отримаємо, що їх цінність дорівнює нулеві ($y_3 = y_4 = 0$). Це і мали очікувати, так як ресурси 3 і 4 є недефіцитними. Такий результат отримуємо завжди, якщо відповідні залишкові змінні мають додатне значення.

Отримані результати свідчать про те, що додаткові вкладення в першу чергу необхідно робити на збільшення ресурсу 2 (продукту В), так як $y_2 = \max\{y_1, y_2\}$ і тільки потім на збільшення ресурсу 1 (продукт А). Відносно недефіцитних ресурсів, то їх об'єм збільшувати не потрібно.

Зауваження 2.2. Не дивлячись на те, що цінність різних ресурсів, що визначається значеннями змінних y_i , була представлена у вартісному (тис. грн.) виразі, її не можна ототожнювати з дійсними цінами, по яким можна закуповувати відповідні ресурси. Дійсно, мова йде про деяку міру, що має економічну природу і кількісно характеризує цінність ресурсу тільки відносно отриманого оптимального значення цільової

функції. При зміні обмежень моделі відповідні економічні оцінки будуть змінюватися навіть тоді, коли оптимізаційний процес передбачає застосування тих же ресурсів. Тому при характеристиці цінності ресурсу економісти дають перевагу такому терміну, як тіньова ціна, скрита ціна, або більш спеціальний термін — двоїста оцінка.

Тіньова ціна (цінність ресурсу) характеризує інтенсивність покращення оптимального значення z . При цьому не фіксується інтервал значень збільшення запасів ресурсу, при яких інтенсивність покращення цільової функції залишається постійною. Для більшості практичних ситуацій логічно вважати наявність верхньої межі збільшення запасів, при перебільшенні якої відповідне обмеження стає надлишковим, що у свою чергу призводить до нового базисного розв'язку і відповідним йому новим тіньовим цінам. У слідуючому пункті визначається проміжок значень запасів ресурсу, при яких відповідне обмеження не стає надлишковим.

2.4 Максимальна зміна запаса ресурсу

При розв'язанні питання про те, запас якого із ресурсів необхідно збільшувати в першу чергу, звичайно використовуються тіньові ціни. Щоб визначити проміжок значень зміни запаса ресурсу, при яких тіньова ціна даного ресурсу, що фігурує в заключній симплекс-таблиці, залишається незмінною, необхідно виконати ряд допоміжних обчислень. Розглянемо спочатку відповідні обчислювальні процедури, а потім покажемо, як необхідна інформація може бути отримана з симплекс-таблиці для оптимального розв'язку.

Нехай у задачі про фарби запас першого ресурсу змінився на Δ_1 , тобто запас продукту А складає $6 + \Delta_1$ тонн. При додатній величині Δ_1 запас цього ресурсу збільшується, при від'ємній — зменшується. Як правило, досліджується ситуація, коли об'єм ресурсу збільшується ($\Delta_1 > 0$). Щоб отримати результат у загальному вигляді, розглянемо обидва випадки. Як зміниться симплекс-таблиця при зміні величини запаса ресурсу на Δ_1 ? Краще всього отримати відповідь на це питання, якщо ввести Δ_1 в праву частину першого обмеження початкової симплекс-таблиці, а потім виконати усі алгебраїчні перетворення, що відповідають послідовності ітерацій. Так як праві частини обмежень ніколи не використовуються у якості ведучих елементів, то очевидно, що на кожній ітерації Δ_1 буде впливати тільки на праві частини обмежень. Легко перевірити, що результати, отримані на відповідних іте-

раціях при розв'язуванні задачі, мають вигляд, що представлений в таблиці:

Рівняння	Значення елементів правої частини на відповідних ітераціях		
	Початок обчислень	1	2 (оптимум)
z	0	12	$\frac{38}{3} + \frac{1}{3} \cdot \Delta_1$
1	$6 + \Delta_1$	$2 + \Delta_1$	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \Delta_1$
2	8	4	$\frac{10}{3} - \frac{1}{3} \cdot \Delta_1$
3	1	5	$3 - 1 \cdot \Delta_1$
4	2	2	$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \Delta_1$

Фактично всі зміни правих частин обмежень, обумовлені введенням Δ_1 , можна визначити безпосередньо по даним, що знаходяться в симплекс-таблицях. Перш за все відмітимо, що на кожній ітерації нова права частина кожного обмеження є сума двох величин: 1) постійної і 2) члена, що лінійно залежить від Δ_1 . Постійні відповідають числам, що фігурують на відповідних ітераціях у правих частинах обмежень симплекс-таблиць до введення Δ_1 . Коефіцієнти при Δ_1 у других доданках дорівнюють коефіцієнтам при s_1 на той же ітерації. Так, наприклад, на останній ітерації (оптимальний розв'язок) постійні $\left(\frac{38}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{2}{3}\right)$ є числа, що фігурують в правих частинах обмежень оптимальної симплекс-таблиці до введення Δ_1 . Коефіцієнти $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1, -\frac{2}{3}\right)$ дорівнюють коефіцієнтам при s_1 в тій же симплекс-таблиці тому, що ця змінна пов'язана тільки з першим обмеженням. Іншими словами, при аналізі впливу зміни в правих частинах другого, третього і четвертого обмежень потрібно користуватися коефіцієнтами при змінних s_2, s_3 і s_4 відповідно.

Які висновки можна зробити з отриманих результатів? Так як введення Δ_1 впливає лише на праву частину симплекс-таблиці, то змі-

на запаса ресурсу може вплинути тільки на припустимість розв'язку. Тому Δ_1 не може приймати значення, при яких якась із (базисних) змінних стане від'ємною. З цього отримуємо, що величина Δ_1 повинна бути обмежена таким проміжком значень, при яких виконується умова невід'ємності правих частин обмежень в остаточній симплекс-таблиці, тобто

$$x_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta_1 \geq 0, \quad (2.1)$$

$$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1 \geq 0, \quad (2.2)$$

$$s_3 = 3 - \Delta_1 \geq 0, \quad (2.3)$$

$$s_4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\Delta_1 \geq 0. \quad (2.4)$$

Для визначення припустимого проміжку зміни Δ_1 розглянемо два випадки:

Випадок 1: $\Delta_1 > 0$. Співвідношення (2.1) завжди виконується при $\Delta_1 > 0$. Співвідношення (2.2), (2.3), (2.4) визначають такі межові значення Δ_1 :

$$\Delta_1 \leq 10, \quad \Delta_1 \leq 3 \quad \text{і} \quad \Delta_1 \leq 1.$$

Випадок 2: $\Delta_1 < 0$. Співвідношення (2.2), (2.3) і (2.4) завжди виконуються при $\Delta_1 < 0$, тоді як співвідношення (2.1) справедливе тільки при $\Delta_1 \geq -2$.

Об'єднуючи результати обох випадків робимо висновок: що при $-2 \leq \Delta_1 \leq 1$ розв'язок задачі завжди буде припустимим. Довільне значення, що виходить за межі вказаного проміжку (тобто зменшення запасу продукту А більш ніж на 2 тони і збільшення більш ніж на 1 тону), приведе до неприпустимості розв'язку і нової сукупності базисних змінних.

Аналогічно, змінюючи запаси ресурсів 2, 3 і 4 на Δ_2 , Δ_3 і Δ_4 відповідно, знайдемо припустимі проміжки зміни Δ_2 , Δ_3 і Δ_4 :

$$-2 \leq \Delta_2 \leq 4,$$

$$-3 \leq \Delta_3 < +\infty,$$

$$-\frac{2}{3} \leq \Delta_4 < +\infty.$$

Отримані результати справедливі тільки тоді, якщо розглядається зміна запаса тільки одного з ресурсів.

2.5 Максимальна зміна коефіцієнтів питомого прибутку (вартості)

Поряд з визначенням припустимих змін запасів ресурсів представляє інтерес і встановлення проміжку припустимих змін коефіцієнтів питомого прибутку (або вартості).

Покажемо, як цю інформацію можна отримати з даних, що знаходяться в заключній симплекс-таблиці.

Необхідно відмітити, що рівняння цільової функції також ніколи не використовується у якості ведучого рівняння. Тому довільні зміни коефіцієнтів цільової функції мають вплив тільки на z -рівняння результуючої симплекс-таблиці. Це означає, що такі зміни можуть зробити отриманий розв'язок неоптимальним. Наша мета полягає в тому, щоб знайти проміжки значень зміни коефіцієнтів цільової функції (роздивляючи кожний коефіцієнт окремо), при яких оптимальне значення змінних залишаються без змін.

Щоб показати, як виконуються відповідні обчислення, вважатимемо, що питомий прибуток від виробничої діяльності, що асоціюється зі змінною x_1 змінюється від 3 до $3 + \delta_1$, де δ_1 може бути як додатне, так і від'ємне число. Цільова функція в цьому випадку прийме такий вигляд: $z = (3 + \delta_1)x_1 + 2x_2$.

Якщо скористатися даними початкової симплекс-таблиці і виконати всі обчислення, необхідні для отримання заключної симплекс-таблиці, то останнє z -рівняння матиме вигляд:

Базисні змінні	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Розв'язок
z	0	0	$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta_1$	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\delta_1$	0	0	$\frac{38}{3} + \frac{10}{3}\delta_1$

Коефіцієнти при базисних змінних x_1 і x_2 і залишкових змінних s_3 , s_4 залишаються рівними нулеві. Ці рівняння відрізняються від z -рівняння до введення δ_1 тільки наявністю членів, що мають δ_1 . Коефіцієнти при δ_1 дорівнюють коефіцієнтам при відповідних змінних в x_1 -рівнянні симплекс-таблиці для отриманого раніше оптимального розв'язку:

Базисні змінні	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Розв'язок
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$

Ми розглядаємо x_1 -рівняння, тому що коефіцієнт при цій змінній у виразі для цільової функції змінився на δ_1 . Оптимальні значення змінних будуть залишатися незмінними при значеннях δ_1 , що задовольняють умові невід'ємності (задача на максимум) усіх коефіцієнтів при небазисних змінних в z -рівнянні. Таким чином, повинні виконуватись такі нерівності:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta_1 &\geq 0, \\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\delta_1 &\geq 0.\end{aligned}$$

З першої нерівності отримаємо, що $\delta_1 \leq 1$, а з другого — $\delta_1 \geq -2$. Ці результати визначають межі зміни коефіцієнта δ_1 у вигляді співвідношення: $-2 \leq \delta_1 \leq 1$. Таким чином, при зменшенні коефіцієнта цільової функції при змінній x_1 до значення, рівного $3 + (-2) = 1$ або при його збільшенні до $3 + 1 = 4$ оптимальні значення змінних залишаються незмінним. Однак оптимальне значення буде змінюватися (у відповідності до виразу $\frac{38}{3} + \frac{10}{3}\delta_1$, де $-2 \leq \delta_1 \leq 1$).

Аналогічним чином, змінивши коефіцієнт цільової функції при змінній x_2 на величину δ_2 , отримаємо проміжок значень δ_2 , при яких оптимальні значення змінних залишаються незмінними, у вигляді $-\frac{1}{2} \leq \delta_2 \leq 4$, при цьому $z = \frac{38}{3} + \frac{4}{3}\delta_2$.

Усі попередні обговорення відносились до дослідження змін коефіцієнта при змінній, якій поставлено у відповідність обмеження, що фігурує у симплекс-таблиці. Однак таке обмеження є тільки у тому випадку, якщо змінна є базисною (наприклад, x_1 і x_2). Якщо змінна небазисна, то у стовпчиків, що має базисні змінні, вона не буде представлена.

Довільна зміна коефіцієнта цільової функції при небазисній змінній призводить тільки до того, що у заключній симплекс-таблиці зміниться тільки цей коефіцієнт.

Розглянемо у якості ілюстрації випадок, коли коефіцієнт при змінній s_1 (першої залишкової змінної) змінюється від 0 до δ_3 . Виконання перетворень, необхідних для отримання заключної симплекс-таблиці, дає таке z -рівняння

Базисні змінні	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Розв'язок
z	0	0	$\frac{1}{3} - \delta_3$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$

З отриманого фрагменту заключної таблиці симплекс-методу видно, що єдина відмінність від z -рівняння до введення δ_3 полягає в тому, що коефіцієнт при s_1 зменшився на δ_3 . Таким чином, коефіцієнт при небазисній змінній в результуючому z -рівнянні потрібно зменшити на ту ж величину, на яку він збільшувався в z -рівнянні.

2.6 Запитання для самоконтролю

1. З якою метою проводять аналіз чутливості оптимального розв'язку?
2. В чому полягає процес аналізу моделей на чутливість?
3. В чому полягає задача аналізу змін запасів ресурсів?
4. Що можна встановити безпосередньо з заключної симплекс таблиці, звертаючи увагу на значення залишкових змінних?
5. Який ресурс називають дефіцитним?
6. В чому полягає задача визначення найбільш вигідного (цінного) ресурсу?
7. Розкрийте поняття тіньова ціна.
8. Поясніть, чому зміна запаса ресурсу впливає лише на припустимість розв'язку.
9. В чому полягає задача визначення меж зміни коефіцієнтів цільової функції?

2.7 Завдання для самостійної роботи

Нехай i — номер групи (1 група — $i = 1$; 2 група — $i = 2$), а j — порядковий номер студента в академічній групі.

Розглянути задачу ЛП, пов'язану з розподілом ресурсів:

$$\max z = (1 + i)x_1 + ix_2 \text{ (прибуток)}$$

при обмеженнях

$$(1 + i)x_1 + (4 + j)x_2 \leq (1 + i)(4 + j), \text{ ресурс 1,}$$

$$(5 + j)x_1 + ix_2 \leq i(5 + j), \text{ ресурс 2,}$$

$$jx_1 - ix_2 \leq ij, \text{ ресурс 3,}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для цієї задачі необхідно:

1. Визначити статус кожного ресурсу.
2. Визначити цінність кожного ресурсу.
3. Використовуючи дані про цінність кожного ресурсу, визначте, запас якого з них необхідно збільшити в першу чергу.
4. Для ресурсу, який необхідно збільшити в першу чергу, визначте максимальний проміжок зміни запасу, в межах якого поточний розв'язок залишається припустимим.
5. Для пункту 4 визначте відповідну зміну оптимального значення z .
6. Визначте максимальний інтервал зміни питомого прибутку для змінної x_1 , в межах якого отриманий розв'язок залишається оптимальним.

Тема 3. Аналіз моделей на чутливість за допомогою двоїстості

Розв'язування задач ЛП повинно забезпечувати користувача динамічною інформацією. Як тільки умови, у відповідності з якими була побудована модель, змінюються, інформація, що асоціюється зі статичним оптимальним рішенням, зразу ж губить актуальність. Аналіз моделі на чутливість якраз і пов'язаний з дослідженням можливих змін отриманого оптимального розв'язку у результаті змін початкової моделі.

Щоб дати більш повне уявлення про потенційні можливості аналізу моделі на чутливість, проілюструємо його на прикладі задачі ЛП, пов'язаної з виробництвом двох фарб.

Задача про фарби. Фабрика виготовляє два види фарб: для зовнішніх (1) і внутрішніх (2) робіт. Продукція обох видів йде у оптовий продаж. Для виробництва фарб використовуються два продукта A і B . Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 6 і 8 т. відповідно. Витрати A і B на 1 т. відповідних фарб представлені у таблиці:

Початковий продукт	Витрати початкових продуктів на тонну фарби		Максимально можливий запас (т.)
	фарба (1)	фарба (2)	
A	1	2	6
B	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу (2) ніколи не перевищує попит на фарбу (1) більш, ніж на 1 т. Крім того, попит на фарбу (2) ніколи не перевищує 2 т. на добу.

Оптові ціни однієї тонни фарби дорівнюють 3 тис. грн для фарби (1) і 2 тис. грн для фарби (2).

Яку кількість фарб кожного виду необхідно виробляти фабриці, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним?

Нехай

x_1 — добовий об'єм виробництва фарби (1) (в т.),

x_2 — добовий об'єм виробництва фарби (2) (в т.).

Випишемо математичну модель сформульованої задачі:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2,$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad (\text{початковий продукт } A), \\2x_1 + x_2 &\leq 8 \quad (\text{початковий продукт } B), \\-x_1 + x_2 &\leq 1 \quad (\text{обмеження на попит}), \\x_2 &\leq 2 \quad (\text{обмеження на попит}), \\x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Отримавши оптимальний розв'язок для початкових умов керівництво фабрики може проявити зацікавленість до досліджень, наприклад, таких ситуацій:

1. Виробничий відділ вважає необхідним скоригувати план випуску продукцій на наступний тиждень, тому що потрібно перерозподілити початковий продукт B таким чином, щоб його витрати на виробництво фарб були зменшені на 2 т. на добу. При цьому витрати початкового продукту A збільшуються на 3 т. на добу.
2. Відділ збуту вважає, що у наступному півріччі зміни на ринку дозволять продавати на добу не 2 т., а 3,5 т. фарби 2.
3. Відділ досліджень і розробок запропонував вводити новий технологічний процес, що дозволить знизити витрати початкових продуктів A і B на виробництво тонни фарби 1 з 1 і 2 т. до 0,8 і 1,7 т. відповідно.
4. Фінансовий відділ вважає, що збільшення конкуренції на ринку збуту призведе до зниження ціни на фарби 1 і 2 до 2,5 і 1,5 тис. грн за тонну відповідно.
5. Один з членів групи по дослідженню операцій аналізував дані про об'єми реалізації продукції за попередній рік і прийшов до висновку, що попит на фарбу 1 ніколи не перевищував 3 т. на добу. Його рекомендація зводиться до того, щоб об'єм з поставок фарби 1 не перевищував цієї величини.
6. Відділ збуту скептично відноситься до ідеї поставок у деякі райони більш дешевого сорту фарби 1.

Наведено ситуації, які можна дослідити шляхом аналізу моделей на чутливість. Ситуації можна розглядати як окремо, так і в різних сполученнях. Кінцевий результат дослідження повинен дати відповідь на таке питання: чи зміниться отриманий раніше оптимальний розв'язок і якщо так, то який новий оптимальний розв'язок?

Розглянемо запропонований перелік можливих ситуацій більш ретельно. На питання про те, яким чином кожна із ситуацій може змінити попередній оптимальний розв'язок, можна дати відповідь:

- 1) попередній розв'язок може стати неприпустимим або
- 2) попередній розв'язок може стати неоптимальним.

Можливий і третій варіант — отриманий розв'язок стане і неоптимальним, і неприпустимим. Це може бути наслідком таких змін лівих частин обмежень, які у свою чергу приводять до зміни оберненої матриці. Так як обернена матриця безпосередньо використовується при розрахунку елементів z -рівняння і правої частини симплекс-таблиці, попередній розв'язок може стати і неоптимальним і неприпустимим. Такий випадок будемо далі розглядати головним чином для того, щоб допомогти виявити подібні ситуації. Однак підкреслимо, що зміни такого типу не надаються детальному дослідженню у рамках аналізу моделей на чутливість.

Аргументація відповіді базується на результатах обчислень з використанням співвідношень двоїстості. Проаналізувавши їх у розглянутому аспекті, можна прийти до таких висновків:

1. До неприпустимості попереднього розв'язку можуть призвести тільки зміни запасу ресурсу (тобто правих частин обмежень) і (або) додавання нових обмежень (прикладом можуть бути ситуації 1, 2 і 5 з приведених вище).
2. До неоптимальності попереднього розв'язку може призвести тільки зміна цільових функцій і (або) зміни окремих елементів лівих частин обмежень (наприклад, ситуації 3 і 4). Такий же наслідок може мати і включення до моделі нового виду виробничої діяльності (ситуація 6).

Виходячи з вищесказаного загальну схему аналізу моделі на чутливість можна представити таким чином:

Крок 1. Розв'язати початкову задачу ЛП і скласти симплекс-таблицю для оптимального розв'язку. Перейти до Кроку 2.

- Крок 2. Стосовно розглянутих змін початкової моделі знайти нові значення елементів симплекс-таблиці, що відповідає попередньому оптимальному розв'язку, за допомогою обчислювальних процедур, заснованих на співвідношеннях двоїстості. Перейти до Кроку 3.
- Крок 3. Якщо розв'язок, що представлений у новій таблиці, неоптимальний, то перейти до Кроку 4. Якщо цей розв'язок неприпустимий, перейти до Кроку 5. Якщо отриманий розв'язок є оптимальним, процес обчислень закінчити.
- Крок 4. За допомогою звичайного симплекс-методу отримати новий оптимальний розв'язок (або довести, що він необмежений). Закінчити обчислення.
- Крок 5. За допомогою двоїстого симплекс-методу отримати припустимий розв'язок (або довести, що задача не має припустимих розв'язків). Закінчити обчислення.

Знову звернемося до конкретного випадку і проілюструємо застосування аналізу моделі на чутливість на прикладі задачі про фарби. З цією метою розглянемо формулювання прямої і двоїстої задач, а також симплекс-таблицю (поточного) оптимального розв'язку початкової задачі. Ця інформація необхідна для початкового етапу аналізу.

Пряма задача	Двоїста задача
максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2$	мінімізувати $w = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4$
при обмеженнях	при обмеженнях
$x_1 + 2x_2 \leq 6,$	$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3,$
$2x_1 + x_2 \leq 8,$	$2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2,$
$-x_1 + x_2 \leq 1,$	$y_1, y_2 \geq 0,$
$x_2 \leq 2,$	$y_3, y_4 \geq 0.$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	

Симплекс-таблиця для оптимального розв'язку має вигляд (див. наступну таблицю).

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Розв'язок
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

Подальший матеріал зручно вивчати, маючи перед собою початкову формулюровку задач і результуючу симплекс-таблицю. Нижче будемо називати отриманий оптимальний розв'язок прямої задачі поточним розв'язком.

Далі матеріал розділений на два параграфи. У першому розглядатимемо зміни умов початкової задачі, що можуть призвести до неприпустимості поточного розв'язку, а в другому – зміни, які можуть призвести до неоптимальності поточного розв'язку.

3.1 Зміни умов задачі, що впливають на припустимість розв'язку

До неприпустимості поточного розв'язку можуть призвести:

- 1) зміна запасів ресурсів (тобто правих частин обмежень),
- 2) введення нових обмежень.

Розглянемо кожний випадок окремо.

3.1.1 Зміна правих частин обмежень

Нехай у задачі про фарби запас початкового продукту A з 6 т. збільшили до 7 т. Як це відобразиться на поточному розв'язку?

Із співвідношень двоїстості виходить, що зміна правих частин обмежень може вплинути тільки на елементи правої частини симплекс-таблиці і, отже, тільки на припустимість розв'язку. Тому потрібно визначити нові значення елементів правої частини таблиці з використанням обчислювальних процедур, наведених в теорії двоїстості.

Новий базисний розв'язок задачі має вигляд (див. лабораторну роботу по теорії двоїстості)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{нова} \\ \text{права} \\ \text{частина} \\ \text{таблиці} \end{pmatrix}$$

Так як елементи правої частини таблиці залишились невід'ємними, склад поточних базисних змінних не змінився. Вони отримали тільки нові значення: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_5 = 2$, $x_3 = x_4 = x_6 = 0$.

Нове значення z дорівнює $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$.

Розглянемо випадок, коли значення поточних базисних змінних стає неприпустимим. Нехай максимальний добовий запас початкових продуктів A і B буде складати не 6 і 8 т., а 7 і 4 т. відповідно. Елементи правої частини таблиці обчислюються таким чином:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 1/3 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{нова} \\ \text{права} \\ \text{частина} \\ \text{таблиці} \end{pmatrix}$$

Поточний розв'язок буде неприпустимим, так як змінні x_5 і x_6 стали від'ємними. Щоб отримати новий припустимий розв'язок, необхідно скористатися двоїстим симплекс-методом. У наведеній нище таблиці, що відповідає новому оптимальному розв'язку прямої задачі, змінена права частина зафарбована. Всі інші елементи таблиці залишилися попередніми.

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Розв'язок
z	0	0	1/3	4/3	0	0	23/3
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	10/3
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	1/3
x_5	0	0	-1	1	1	0	-2
x_6	0	0	-2/3	1/3	0	1	-4/3

Зазначимо, що нове значення z дорівнює $3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{23}{3}$.

Отриманий розв'язок оптимальний (усі коефіцієнти z -рівняння невід'ємні), однак він не є припустимим (хоча б одна базисна змінна

має від'ємний знак). Результати обчислень за допомогою двоїстого симплекс-методу вказують на те, що змінну x_5 виключаємо, а новою базисною змінною буде x_3 . Отримаємо таку таблицю:

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Розв'язок
z	0	0	0	$5/3$	$1/3$	0	7
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	0	2
x_1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	1
x_3	0	0	1	-1	-1	0	2
x_6	0	0	0	$-1/3$	$-2/3$	1	0

Розв'язок, що представлений у цій таблиці, і оптимальний, і припустимий; при цьому $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ і $z = 7$. Припустимий розв'язок отримали за одну ітерацію, але у загальному випадку двоїстий симплекс-метод приводить до припустимого розв'язку за більшу кількість ітерацій.

3.1.2 Додавання нового обмеження

Введення додаткового обмеження може призвести до однієї з двох ситуацій:

1. Нове обмеження при поточному розв'язку виконується. У цьому випадку дане обмеження або незв'язуюче, або надлишкове, і тому його додавання не змінює отриманий розв'язок.
2. Нове обмеження при поточному розв'язку не виконується. Так як таке обмеження зв'язуюче, то за допомогою симплекс-методу знаходиться новий розв'язок.

Розглянемо вказані випадки на конкретних прикладах. Нехай максимальний попит на фарбу 1 не перевищує 4 т. на добу. Необхідно ввести до моделі нове обмеження $x_1 \leq 4$. Так як очевидно, що при поточному розв'язку ($x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$) це обмеження виконується, то воно відноситься до незв'язуючих, і тому розв'язок залишається незмінним.

Нехай тепер максимальний попит на фарбу 1 не перевищує 3 т. на добу. Нове обмеження $x_1 \leq 3$ при поточному розв'язку ($x_1 = 10/3$,

$x_2 = 4/3$) не виконується, тому необхідно знайти припустимий розв'язок.

Введемо спочатку нове обмеження в стандартне формулювання задачі, додаючи, якщо це необхідно, залишкову або надлишкову змінну. Виразимо яку-небудь з поточних базисних змінних, що знаходяться в цьому обмеженні через поточні небазисні змінні.

Введемо «модифіковане» обмеження в симплекс-таблицю, що відповідає поточному оптимальному розв'язку, і скористаємося двоїстим симплекс-методом для знаходження припустимого розв'язку.

Для приведення нового обмеження $x_1 \leq 3$ до стандартної форми введемо залишкову змінну x_7 , у результаті чого отримаємо

$$x_1 + x_7 = 3, \quad x_7 \geq 0.$$

У поточному розв'язку x_1 є базисною змінною, тому необхідно виразити її через небазисні змінні. У таблиці для поточного оптимального розв'язку x_1 – рівняння має вигляд

$$x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = \frac{10}{3}.$$

Таким чином, нове обмеження, де фігурують тільки поточні небазисні змінні, можна записати так

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_7 = 3$$

або

$$\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_7 = -\frac{1}{3}.$$

Права частина рівняння від'ємна, що свідчить про неприпустимість розв'язку, оскільки $x_3 = x_4 = 0$, $x_7 = -1/3$, тобто порушено обмеження $x_7 \geq 0$.

Модифіковане обмеження вводиться в симплекс-таблицю для поточного оптимального розв'язку так, як показано нижче. Додаткові елементи таблиці замальовані. Інша частина симплекс-таблиці повністю відповідає початковій.

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Розв'язок
z	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	0	$38/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	0	$4/3$
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	0	$10/3$
x_5	0	0	-1	1	1	0	0	3
x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	0	$2/3$
x_7	0	0	$1/3$	$-2/3$	0	0	1	$-1/3$

Реалізація двоїстого симплекс-методу передбачає заміну в цій таблиці поточної базисної змінної x_7 змінною x_4 , що призводить до отримання такої таблиці для оптимального припустимого розв'язку:

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Розв'язок
z	0	0	1	0	0	0	2	12
x_2	0	1	$1/2$	0	0	0	$-1/2$	$3/2$
x_1	1	0	0	0	0	0	1	3
x_5	0	0	$-1/2$	0	1	0	$3/2$	$5/2$
x_6	0	0	$-1/2$	0	0	1	$1/2$	$1/2$
x_4	0	0	$-1/2$	1	0	0	$-3/2$	$1/2$

Нове оптимальне значення z гірше, ніж те, що відповідало умовам задачі до введення нового обмеження. Це і треба було очікувати, так як додавання нового зв'язуючого обмеження не може покращити значення цільової функції.

Послідовне включення нових обмежень у симплекс-таблицю, що відповідає поточному оптимальному розв'язку, інколи використовується для зменшення об'єму обчислень, пов'язаних з розв'язуванням задач ЛП. Об'єм обчислень при використанні симплекс-методу перш за все залежить від кількості обмежень. Можна істотно полегшити обчислення, видаливши другорядні обмеження моделі, які мало впливають (або зовсім не впливають) на вигляд оптимального розв'язку. Потім розв'язується задача ЛП з урахуванням тільки основних обмежень. Після того у результуючу симплекс-таблицю послідовно вводяться другорядні обмеження (і оцінюються їх вплив на поточний опти-

мум) до тих пір, доки не стане ясно, що розв'язок задовольняє всім цим обмеженням, що не враховані спочатку. Спрощення обчислень особливо помітно у тих випадках, коли виключається багато другорядних обмежень.

3.2 Зміни умов задачі, що впливають на оптимальність розв'язку

Поточний розв'язок перестає бути оптимальним тільки у тому випадку, коли значення коефіцієнтів z -рівняння не задовольняє умові оптимальності. Відомо (див. економічну інтерпретацію двоїстості), що значення z -коефіцієнтів дорівнюють різниці між лівими і правими частинами відповідних двоїстих обмежень. Так як ліва частина двоїстого обмеження визначається стовпчиками коефіцієнтів прямої задачі, що асоційовані з видами виробничої діяльності, можна зробити висновок, що на оптимальність поточного розв'язку впливають зміни або коефіцієнтів цільової функції, або питомих витрат ресурсів. Розглянемо спочатку кожний з цих випадків окремо. Ситуацію, коли має місце і те, і інше, представимо включенням до моделі нових видів виробничої діяльності. Варто пам'ятати, що у кожному з цих випадків усе зводиться лише до одного — перевірки умови оптимальності для нових значень коефіцієнтів z -рівняння.

3.2.1 Зміна коефіцієнтів цільової функції

Нагадаємо, що при визначенні двоїстих оцінок використовуються коефіцієнти цільової функції при базисних змінних. У свою чергу ці двоїсті оцінки підкладаються в обмеження двоїстої задачі для розрахунку коефіцієнтів z -рівняння.

При цьому можливі два варіанти:

1. Якщо зміна цільової функції пов'язана зі зміною коефіцієнтів при поточних базових змінних, необхідно отримати нові двоїсті оцінки і потім використати їх при розрахунку коефіцієнтів z -рівняння.
2. Якщо зміни відносяться тільки до коефіцієнтів при небазисних змінних, необхідно використати поточні двоїсті оцінки (взяті безпосередньо з симплекс-таблиці) і розрахувати коефіцієнти z -рівняння тільки для відповідних небазисних змінних. Ніякі інші зміни симплекс-таблиці не відбуваються.

Нехай цільова функція $z = 3x_1 + 2x_2$ в задачі про фарби замінена на $z = 5x_1 + 4x_2$. Змінилися коефіцієнти при x_1 і x_2 , які зараз є базисними змінними поточного розв'язку. Зазначимо, що порядок базисних змінних у симплекс-таблиці для поточного розв'язку такий: x_2, x_1, x_5, x_6 . Отже, необхідно отримати нові двоїсті оцінки:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (4; 5; 0; 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1; 2; 0; 0).$$

Коефіцієнти z -рівняння обчислюються як різниця між лівими і правими частинами відповідних обмежень двоїстої задачі. (Зверніть увагу на те, що праві частини двоїстих обмежень повинні бути рівними новим значенням коефіцієнтів цільової функції).

$$x_1 - \text{коефіцієнт} = y_1 + 2y_2 - y_3 - 5 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 0 - 5 = 0,$$

$$x_2 - \text{коефіцієнт} = 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4 = 2 \cdot 1 + 2 + 0 + 0 - 4 = 0,$$

$$x_3 - \text{коефіцієнт} = y_1 - 0 = 1 - 0 = 1,$$

$$x_4 - \text{коефіцієнт} = y_2 - 0 = 2 - 0 = 2,$$

$$x_5 - \text{коефіцієнт} = y_3 - 0 = 0 - 0 = 0,$$

$$x_6 - \text{коефіцієнт} = y_4 - 0 = 0 - 0 = 0.$$

Оскільки у нашій задачі цільова функція підлягає максимізації і усі коефіцієнти z -рівняння невід'ємні, вказані зміни цільової функції не впливають на склад змінних в оптимальному розв'язку, ні на їх значення. Змінюється тільки величина z , яка дорівнює $5 \cdot \frac{10}{3} + 4 \cdot \frac{4}{3} = 22$.

Вправа 1. Визначте нові значення коефіцієнтів z -рівняння для кожного із вказаних нижче випадків. Який загальний висновок можна зробити відносно значень коефіцієнтів z -рівняння при базових змінних? Чи можуть вони бути відмінними від нуля?

а) $z = 6x_1 + 4x_2$

(відповідь: Коефіцієнти z -рівняння дорівнюють $(0; 0; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 0; 0)$);

$$\text{б) } z = 5x_1 + 5x_2$$

(відповідь: Коефіцієнти z -рівняння дорівнюють $(0; 0; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 0; 0)$).

Загальний висновок: коефіцієнти z -рівняння при базисних змінних завжди залишаються рівними нулеві. Це вказує на те, що відповідні обмеження двоїстої задачі повинні задовольнятися у вигляді рівностей, тому необхідно заново розрахувати тільки коефіцієнти при небазисних змінних.

Розглянемо другий приклад, коли зміни цільової функції призводять до неоптимальності поточного розв'язку. Нехай $z = 4x_1 + x_2$. Тоді

$$(y_1; y_2; y_3; y_4) = (1; 4; 0; 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; 0; 0\right).$$

Можна впевнитися в тому, що новий z -рядок симплекс-таблиці буде мати такий вигляд:

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Розв'язок
z	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{44}{3}$

Так як коефіцієнт при змінній x_3 має від'ємне значення, цю змінну необхідно ввести до базису і знайти новий оптимальний розв'язок за допомогою звичайного симплекс-методу. З наступної таблиці видно, що новий оптимум досягається за одну ітерацію. Підтаблиця, що відповідає першій ітерації, за виключенням z -рядка, повторює таблицю, що відповідає поточному оптимальному розв'язку.

Ітерація		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Розв'язок
1	z	0	0	$-2/3$	$7/3$	0	0	$44/3$
(початок обчислень) x_3 вводитьься x_2 виводиться	x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
	x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
	x_5	0	0	-1	1	1	0	3
	x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
2 оптимум	z	0	1	0	2	0	0	16
	x_3	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
	x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
	x_5	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
	x_6	0	1	0	0	0	1	2

3.2.2 Зміна питомих витрат ресурсів

Зміна коефіцієнта, що характеризує витрати ресурса на одиницю продукції для якогось виду виробничої діяльності, може вплинути тільки на оптимальність розв'язку, так як ця зміна пов'язана з лівою частиною відповідного двоїстого обмеження. Однак ми обмежимося розглядом даного питання тільки стосовно до коефіцієнтів, що фігурують при небазисних змінних. Зміна коефіцієнтів при відповідних обмеженнях, що стоять перед базисними змінними, впливає на обернену матрицю і в цьому випадку обчислення можуть бути доволі складними. Тому розглянемо зміни питомих витрат ресурсів, що відносяться тільки до тих видів виробничої діяльності, яким в розв'язку відповідають небазисні змінні. Простіше всього проаналізувати ситуацію, пов'язану зі зміною коефіцієнтів при базисних змінних шляхом розв'язку заново сформульованої задачі. Розроблені методи, що дозволяють проаналізувати наслідки зміни одного з коефіцієнтів при базисних змінних. Однак вони дають менше інформації, ніж інші способи аналізу моделей на чутливість.

Розглянемо задачу про фарби при $z = 4x_1 + x_2$. Оптимальний розв'язок для цього випадку представлено в попередній таблиці. Змінна x_2 є небазисною, тому можна провести аналіз наслідків, до яких приведе зміна коефіцієнта при цій змінній у відповідному обмеженні.

Нехай питомі витрати початкових продуктів A і B для даного виду виробничої діяльності дорівнюють 4 і 3 замість 2 і 1 відповідно. Двоїсті обмеження приймають вигляд: $4y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \geq 1$. (Зазначимо, що права частина обмеження дорівнює коефіцієнту при x_2 у виразі $z = 4x_1 + x_2$). Так як цільова функція не змінюється, двоїсті оцінки будуть такими ж, як і в попередній таблиці. Таким чином, в z -рівнянні нове значення коефіцієнта при x_2 буде таким $4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 = 5$. Оскільки це значення невід'ємне, при вказаній зміні умов оптимальний розв'язок залишається таким же, як і представлений в попередній таблиці.

3.2.3 Додавання нового виду виробничої діяльності

Новий вид виробничої діяльності можна асоціювати з такою небазисною змінною початкової моделі, яка спочатку має нульові коефіцієнти і в цільовій функції, і у всіх обмеженнях. Значення відповідних коефіцієнтів нового виду виробничої діяльності будуть представляти зміни відносно початкового нульового рівня.

Нехай в задачі про фарби ($z = 3x_1 + 2x_2$) нас цікавить виробництво більш дешевого сорту фарби 1, що вимагає по $3/4$ т. продуктів A і B на 1 т. кінцевого продукту. Співвідношення між об'ємами виробництва фарб номер 1 і 2, що представлене обмеженням (3), залишається зв'язуючим, однак у новому формулюванні цього обмеження повинні бути представлені два сорти фарби 1. Прибуток від реалізації 1 т. нової фарби дорівнює 1,5 тис. грн.

Позначимо об'єм виробництва нової фарби через x_7 ; при цьому задача формулюється таким чином:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + (3/2)x_7,$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 + (3/4)x_7 \leq 6,$$

$$2x_1 + x_2 + (3/4)x_7 \leq 8,$$

$$-x_1 + x_2 - x_7 \leq 1,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

Додавання нового виду виробничої діяльності еквівалентне одночасній зміні цільової функції і коефіцієнтів, що характеризують питому витрату ресурсів. Змінну x_7 можна розглядати як змінну, що фігурувала раніше в початковій моделі з нульовими коефіцієнтами, які

потім були змінені і прийняли значення, що відповідають параметрам модифікованої моделі. Такий підхід дозволяє вважати x_7 небазисною змінною.

Перший етап обчислень пов'язаний з аналізом відповідної двоїстої задачі:

$$(3/4)y_1 + (3/4)y_2 - y_3 \geq 3/2.$$

У початковій симплекс-таблиці x_7 розглядається як небазисна змінна, тому двоїсті оцінки залишаються незмінними. Тоді z -коефіцієнт при x_7 в таблиці, що відповідає поточному оптимальному розв'язку, буде дорівнювати

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} - 1 \cdot 0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Звідси отримаємо, що, якщо змінна стане додатною, поточний розв'язок буде покращено.

Симплекс-таблиця, що відповідає поточному оптимальному розв'язку, змінюється таким чином: у її ліву частину вводиться стовпчик, що асоціюється зі змінною x_7 , причому коефіцієнт, що фігурує при цій змінній в z -рівнянні дорівнює $-1/4$. Відповідні коефіцієнти обмежень будуть дорівнювати (див. двоїстість в ЛП):

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

У наступній таблиці представлені результати ітерації, що призводять до отримання нового оптимального розв'язку (дивіться нижче).

Як можна побачити, новий вид виробничої діяльності не може бути представленим у розв'язку, якщо він не покращує значення цільової функції. (Наприклад, у попередній таблиці наслідком включення в оптимальний розв'язок змінної x_7 є збільшення оптимального значення z від $12\frac{2}{3}$ до 14).

Цей результат прямо протилежний тому, який отримали при аналізі наслідків включення додаткового обмеження:

нове обмеження ніколи не покращує значення цільової функції.

Дійсно, якщо додаткове обмеження є зв'язуючим, то воно погіршує оптимальне значення.

Ітерація		x_1	x_2	x_7	x_3	x_4	x_5	x_6	Розв'язок
1	z	0	0	$-1/4$	$1/3$	$4/3$	0	0	$38/3$
(початок обчислень) x_7 вводитьься x_2 виводиться	x_2	0	1	$1/4$	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
	x_1	1	0	$1/4$	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
	x_5	0	0	-1	-1	1	1	0	3
	x_6	0	0	$-1/4$	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
2 оптимум	z	0	1	0	1	1	0	0	14
	x_7	0	4	1	$8/3$	$-4/3$	0	0	$16/3$
	x_1	1	-1	0	-1	1	0	0	2
	x_5	0	4	0	$5/3$	$-1/3$	1	0	$25/3$
	x_6	0	1	0	0	0	0	1	2

3.3 Висновки

Результати, отримані при аналізі моделей на чутливість, можна сформулювати таким чином:

1. Зміни різних коефіцієнтів у початковій моделі може вплинути на оптимальність або припустимість поточного розв'язку і привести до однієї з трьох можливостей:
 - а) склад змінних і їх оптимальні значення залишаються незмінними;
 - б) склад змінних залишається незмінним, але їх оптимальне значення змінюється;
 - в) склад змінних і їх значення змінюються.

У випадках а) і б) методи аналізу моделей на чутливість досить ефективні. Даже у третьому випадку новий оптимальний розв'язок, як правило, вдається отримати, використовуючи невелику кількість додаткових ітерацій.

2. Додавання додаткового обмеження не може привести до покращення значень цільової функції.
3. Введення нової змінної не погіршує значення цільової функції.

3.4 Запитання для самоконтролю

1. Які зміни умов задачі можуть привести попередній оптимальний розв'язок до неприпустимого?
2. Які зміни умов задачі можуть привести до неоптимальності попереднього розв'язку?
3. Наведіть загальну схему аналізу моделі на чутливість за допомогою двоїстості.

3.5 Завдання для самостійної роботи

Нехай i – номер групи, j – порядковий номер студента в академічній групі.

Розглянемо задачу ЛП:

$$\min z = ix_1 + x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}(i+4)x_1 + x_2 &= j+1, \\(i+1)x_1 + x_2 &\geq j, \\ix_1 + x_2 &\leq j, \\x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Виконати такі завдання:

1. Нехай праві частини обмежень у даній задачі мають вигляд $(j+1, j+\Delta, j-\Delta)$, де Δ – невід'ємний параметр. Визначте інтервал значень Δ , при яких отриманий розв'язок цієї задачі залишається припустимим.
2. Перевірте, чи впливає введення обмеження

$$x_1 + x_2 \leq j$$

на оптимальність отриманого розв'язку. Якщо так, то знайдіть новий розв'язок.

3. Нехай у цій задачі цільова функція має вигляд

$$z = (i-\Delta)x_1 + (1+\Delta)x_2,$$

де Δ — невід’ємний параметр. Визначте інтервал значень Δ , при якому зберігається оптимальність розв’язку, що відповідає випадку $\Delta = 0$.

4. Розгляньте вище описану задачу. Перевірте, чи можна за рахунок введення нової змінної x_3 покращити оптимальне значення z при вказаних нище значеннях її коефіцієнтів у цільовій функції і обмеженнях. Якщо так, то знайдіть новий оптимальний розв’язок

$$(j; 0; 2; 4).$$

Тема 4. Параметричне лінійне програмування

Параметричне програмування — це метод дослідження зміни оптимального розв'язку задачі ЛП, обумовленої неперервними змінами коефіцієнтів лінійної моделі.

Методи параметричного програмування і методи аналізу моделей на чутливість мають загальну теоретичну основу. Головна відмінність цих методів полягає в тому, що при параметричному аналізі розглядається не дискретна, а неперервна зміна коефіцієнтів лінійної моделі.

Як і при аналізі на чутливість, розглянемо зміну:

- 1) вектора коефіцієнтів цільової функції c ;
- 2) вектора вільних членів (правих частин) обмежень b ;
- 3) вектора коефіцієнтів обмежень P_j (стовпчик коефіцієнтів обмежень при змінній x_j);
- 4) векторів c , b і P_j .

Позначимо через t параметр, у залежності від якого змінюються різні коефіцієнти моделі. При параметричному аналізі спочатку визначаємо оптимальний розв'язок задачі при $t = 0$. Потім за допомогою умов оптимальності і припустимості, які використовуються в симплекс-методі, знаходиться інтервал значень t , для якого розв'язок, отриманий при $t = 0$, залишається оптимальним і припустимим. Нехай ці значення знаходяться в інтервалі $(0, t_1)$. Це означає, що при $t > t_1$ розв'язок буде неприпустимим і (або) неоптимальним. Таким чином, для $t = t_1$ необхідно знайти новий розв'язок, який буде залишатися оптимальним і припустимим при значенні t , що змінюється від t_1 до деякого $t_2 > t_1$. Потім процес повторюється для точки $t = t_2$ і визначається новий розв'язок. У кінці кінців знаходиться точка t , за якою лежить область значень параметра t , де розв'язок або не існує, або залишається незмінним попередній розв'язок. На цьому параметричне дослідження закінчується.

Далі буде показано, як визначаються критичні значення параметра t і як знаходяться відповідні розв'язки задачі.

4.1 Параметрична зміна вектора коефіцієнтів цільової функції c

Нехай $c(t)$ є вектор коефіцієнтів цільової функції, що залежить від параметра t . Нехай $t \geq 0$. Припустимо, що B_i є оптимальна базисна матриця, що відповідає критичному значенню параметра t_i . Покажемо, як визначається наступне критичне значення t_{i+1} і відповідний цьому значенню новий оптимальний базис. У якості початкової точки беремо $t = t_0 = 0$, для якої оптимальна базисна матриця дорівнює B_0 .

Нехай вектор iX_B відповідає оптимальному базисному розв'язку при $t = t_i$, а $c_B(t)$ — вектор відповідних коефіцієнтів, що фігурують в $c(t)$. Як ми знаємо, зміна вектора c може вплинути тільки на оптимальність поточного розв'язку. Тому розв'язок

$${}^iX_B = B_i^{-1}b$$

буде оптимальним для всіх значень $t \geq t_i$, при яких різниці $z_j(t) - c_j(t)$ залишаються невід'ємними (задача максимізації).

Ця умова записується у вигляді співвідношення:

$$c_B(t) B_i^{-1}P_j - c_j(t) \geq 0 \quad \text{для всіх } j.$$

Наведені нерівності виконуються в інтервалі значень t від t_i до t_{i+1} , де t_{i+1} визначається як найбільше значення t , при перевищенні якого у крайньому випадку одна з цих нерівностей не виконалась.

Зазначимо, що нерівності не вимагають, щоб вектор $c(t)$ змінювався лінійно по t . Основна проблема при використанні нелінійних функцій — це розв'язування нелінійних нерівностей.

Приклад 4.1. Максимізувати $z = (3 - 6t)x_1 + (2 - 2t)x_2 + (5 + 5t)x_3$ при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40,$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 60,$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 30,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Вважається, що параметр $t \geq 0$.

Розв'язання. Маємо $c(t) = (3 - 6t, 2 - 2t, 5 + 5t)$. Аналіз починаємо з точки $t = t_1 = 0$. Симплекс-таблиця для оптимального розв'язку наведена нижче. У ній x_4, x_5 і x_6 — введені залишкові змінні.

Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Розв'язок
z	4	0	0	1	2	0	160
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	5
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	2	0	0	-2	1	1	10

З таблиці отримаємо, що

$${}^0X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначимо перше критичне значення $t = t_1$. Параметричне представлення вектора коефіцієнтів цільової функції, що асоціюються з 0X_B , має вигляд

$$c_B(t) = (2 - 2t, 5 + 5t, 0).$$

Тоді

$$c_B(t) B_0^{-1} = (1 - t, 2 + 3t, 0).$$

Значення $z_j(t) - c_j(t)$ для $j = 1, 4$ і 5 (небазисних x_j) визначається так:

$$\begin{aligned} \{c_B(t) B_0^{-1} P_j - c_j(t)\}_{j=1,4,5} &= (1 - t, 2 + 3t, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ &- (3 - 6t, 0, 0) = (4 + 14t, 1 - t, 2 + 3t). \end{aligned}$$

Отриманий розв'язок 0X_B (як і обернена базисна матриця B_0^{-1}) залишається оптимальним при зміні t в області $t \geq 0$ до тих пір, поки виконуються умови: $4 + 14t \geq 0$, $1 - t \geq 0$, $2 + 3t \geq 0$. Отримаємо, що $t \leq 1$. Це означає, що $t_1 = 1$ є наступне критичне значення і розв'язок 0X_B залишається оптимальним в інтервалі $(t_0, t_1) = (0, 1)$.

Зазначимо, що $z_4(t) - c_4(t) = 0$ при $t = 1$ і $z_4(t) - c_4(t) < 0$ при $t > 1$. Це означає, що при $t > 1$ до базису необхідно включити змінну x_4 , а виключити змінну x_2 (див. табл. для оптимального розв'язку при $t = t_0 = 0$). При $t > 1$ включення x_4 до базису приводить до отримання альтернативного оптимуму.

Цей новий розв'язок залишається оптимальним при значеннях t у деякому новову інтервалі (t_1, t_2) , де t_2 — наступне критичне значення параметра t , яке необхідно визначити.

Розрахуємо матрицю B_1^{-1} , що відповідає альтернативному базису, а потім визначимо критичне значення t_2 .

Альтернативний оптимальний базис у точці $t = t_1 = 1$

Так як вектори P_4 і P_2 такі, що перший включаємо, а другий виключаємо, то

$$\alpha^4 = B_0^{-1} P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\xi = \frac{1}{(1/2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо нову обернену матрицю

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і

$${}^1X_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Знайдену 1X_B відповідає

$$C_B(t) B_1^{-1} = (0; 5 + 5t; 0) B_1^{-1} = (0; (5 + 5t)/2; 0).$$

Різниці $z_j(t) - c_j(t)$ для $j = 1, 2$ і 5 дорівнюють

$$\left(0; \frac{5 + 5t}{2}; 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (3 - 6t; 2 - 2t; 0) =$$

$$= \left(\frac{9 + 27t}{2}; -2 + 2t; \frac{5 + 5t}{2} \right).$$

Базисна матриця B_1 буде оптимальною до тих пір, поки $z_j(t) - c_j(t) \geq 0$ для всіх j . Ця умова виконується для всіх $t \geq 1$. Звідси отримаємо, що $t_2 = +\infty$. (Зазначимо, що умовами оптимальності автоматично фіксується та обставина, що 1X_B відповідає розв'язку для інтервала значень t , який починається з попереднього критичного значення $t = t_1 = 1$. При параметричному аналізі таке «запам'ятовування» відбувається у всіх випадках).

Оптимальні розв'язки для всієї області визначення параметра t представлені в таблиці. Зазначимо, що значення z отримані безпосередньою підстановкою значень змінних у цільову функцію

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq 1$	0	5	30	$160 + 140t$
$t \geq 1$	0	0	30	$150 + 150t$

4.2 Параметрична зміна вектора вільних членів обмежень b

Позначимо через $b(t)$ вектор вільних членів обмежень, представлених у вигляді функцій від t . Нехай B_i і iX_B позначають базисну матрицю і базисний вектор відповідно при критичному значенні параметра t , рівному t_i .

Раніше показано, що зміна вектора b може вплинути тільки на припустимість розв'язку. Таким чином, розв'язок iX_B залишається припустимим, якщо виконується умова

$$B_i^{-1}b(t) \geq 0.$$

Нижче показується, яким чином визначаються послідовні критичні значення параметра t .

Приклад 4.2. Максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ при обмеженнях

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40 - t, \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 60 + 2t, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 30 - 7t, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Як завжди $t \geq 0$. При $t = t_0 = 0$ маємо задачу, що ідентична розглянутій у прикладі 4.1 при $t = 0$. Тому

$${}^0X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перше критичне значення t_1 знаходимо з умови $B_0^{-1}b(t) \geq 0$. Отримаємо

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 - t \\ 60 + 2t \\ 30 - 7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - t \\ 30 + t \\ 10 - 3t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши нерівності отримаємо $t \leq 10/3$. Отже, $t_1 = 10/3$ і базис, що відповідає B_0 , залишається незмінним в інтервалі $(t_0, t_1) = (0; 10/3)$.

Хоча при $0 \leq t \leq 10/3$ базис B_0 залишається без змін, значення змінних x_2 , x_3 і x_6 , що асоціюються з цим базисом, зміняться таким чином: $x_2 = 5 - t$, $x_3 = 30 + t$, $x_6 = 10 - 3t$. Величина z дорівнює $2(5 - t) + 5(30 + t) = 160 + 3t$, де $0 \leq t \leq 10/3$.

У точці $t = t_1 = 10/3$ змінна x_6 дорівнює нулеві. При подальшій зміні t змінна x_6 буде від'ємною. Тому у критичній точці $t = t_1 = 10/3$ за допомогою двоїстого симплекс-методу можна визначити альтернативний базис (матриця B_1), причому виключаємо x_6 .

Альтернативний базис у точці $t = t_1 = 10/3$

Так як виключається змінна x_6 , для обчислення матриці B_1^{-1} необхідно ідентифікувати тільки змінну, що включаємо. При відомих ${}^0X_B = (x_2, x_3, x_6)^T$, $C_B = (2; 5; 0)$ і $C_B B_0^{-1} = (1; 2; 0)$ значення $z_j - c_j$ для $j = 1, 4$ і 5 визначаються таким чином:

$$\{C_B B_0^{-1} P_j - c_j\} = (1; 2; 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (3; 0; 0) = (4; 1; 2).$$

Потім обчислюємо α_z^j для $j = 1, 4, 5$ і $x_z = x_6$:

$$\begin{aligned} (\alpha_6^1, \alpha_6^4, \alpha_6^5) &= (\text{рядок } B_0^{-1}, \text{ що асоціюється з } x_6) (P_1, P_4, P_5) = \\ &= (\text{третій рядок } B_0^{-1}) (P_1, P_4, P_5) = (-2; 1; 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= (2; -2; 1). \end{aligned}$$

Звідси отримаємо, що для $j = 1, 4, 5$

$$\Theta = \min \{ -, |1/(-2)|, - \} = \frac{1}{2}$$

і відповідає змінній x_4 , тобто виключається з базису вектор P_4 .

Замінюючи вектор P_4 вектором P_6 знаходимо матрицю B_1^{-1} за допомогою таких обчислень:

$$\begin{aligned} \alpha^4 = B_0^{-1} P_4 &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -(1/2)/(-2) \\ -0/(-2) \\ +1/(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \\ B_1^{-1} = EB_0^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

при цьому ${}^1X_B = (x_2, x_3, x_4)^T$.

Наступне критичне значення параметра t визначається з умови

$$B_1^{-1}b(t) \geq 0,$$

звідки

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 - t \\ 60 + 2t \\ 30 - 7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30 - 7t}{4} \\ 30 + t \\ \frac{-10 + 3t}{2} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, B_1 залишається припустимим при $10/3 \leq t \leq 30/7$. У точці $t = t_2 = 30/7$ за допомогою двоїстого симплекс-методу можна знайти альтернативний базис, причому змінною, що виключається буде x_2 .

Альтернативний базис у точці $t = t_2 = 30/7$

Змінна x_2 виключається з базису. Щоб ідентифікувати змінну, що включаємо до базису, розрахуємо за допомогою двоїстого симплекс-методу відношення, значення яких визначає вибір змінної, що вводиться до базису.

Знаючи ${}^1X_B = (x_2, x_3, x_4)^T$, $C_B = (2; 5; 0)$ і $C_B B^{-1} = (0; 5/2; 1/2)$, знаходимо $(z_j - c_j)$ для $j = 1, 5$ і 6 :

$$\{C_B B^{-1} P_j - c_j\} = \left(0; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (3; 0; 0) = \left(5; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Потім для $j = 1, 5$ і 6 і $x_z = x_2$ розраховуємо α_z^j :

$$\begin{aligned} (\alpha_2^1, \alpha_2^5, \alpha_2^6) &= (\text{перший рядок } B_1^{-1}) (P_1, P_5, P_6) = \\ &= \left(0; 0; \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Так як усі $\alpha_z^j \geq 0$, то при $t > 30/7$ задача не має припустимих розв'язків, і параметричний аналіз закінчується в точці $t = t_2 = 30/7$.

Оптимальний розв'язок для розглянутої області зміни параметра t знаходиться в таблиці:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq 10/3$	0	$5 - t$	$30 + t$	$160 + 3t$
$10/3 \leq t \leq 30/7$	0	$(30 - 7t) / 4$	$30 + t$	$165 + 3t/2$
$t > 30/7$	задача не має припустимих розв'язків			

4.3 Параметрична зміна вектора P_j

Будемо вважати, що у оптимальному розв'язку задачі ЛП при $t = 0$ розглядається небазисний вектор P_j . Ситуація, коли P_j є базисним не піддається вивченню методами параметричного аналізу, так як у цьому випадку зміна P_j впливає на базисну матрицю B_0 .

Для параметричного представлення вектора P_j використовуємо позначення $P_j(t)$. Пам'ятаємо, що зміна небазисного вектора може мати тільки один наслідок — необхідність включення його до числа базисних векторів. Вектор P_j вводиться в базис тільки у тому випадку, якщо асоційована з ним величина $z_j - c_j$ стає від'ємною. Поточний базис B_i залишається оптимальним до тих пір, доки виконується умова:

$$z_j(t) - c_j = C_B B_i^{-1} P_j(t) - c_j \geq 0.$$

Цю нерівність можна використати для визначення наступного критичного значення t_{i+1} .

Зазначимо, що, включаючи до складу базисних векторів у точці $t = t_{i+1}$ вектор P_j , можна отримати альтернативний оптимальний базис B_{i+1} . При $t > t_{i+1}$ вектор P_j вводиться до базису. Подальше продовження параметричного аналізу стає неможливим, так як з того моменту, як вектор P_j стає базисним, ситуація ускладнюється і запропонований метод дослідження не підходить. Обмежимося тому визначенням лише одного критичного значення t_{i+1} по відомій точці $t = t_1$ матриці B_i .

Приклад 4.3. У прикладі 1 змінна x_1 у точці $t = 0$ була небазисною.

Покладемо вектор $P_1(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 3-2t \\ 1+3t \end{pmatrix}$.

З прикладу 1 маємо

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^0X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Маємо,

$$\begin{aligned} z_1(t) - c_1 &= C_B B_0^{-1} P_1(t) - c_1 = \\ &= (2; 5; 0) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t \\ 3-2t \\ 1+3t \end{pmatrix} - 3 = 4 - 3t. \end{aligned}$$

Отже, матриця B_0 залишається базисною до тих пір, поки P_1 є небазисним вектором. Це має місце при $4 - 3t \geq 0$. Тому критичне значення $t_1 = 4/3$.

Включаючи в базис P_1 і виключаючи з нього вектор P_6 , в точці $t = t_1$ можна отримати альтернативний розв'язок. Однак після введення до базису вектора P_1 подальший параметричний аналіз, пов'язаний зі зміною цього вектора, стає неможливим.

У практичному відношенні параметричний аналіз, пов'язаний зі зміною тільки небазисних векторів, в загальному випадку не дає корисної інформації. Звичайно параметричне задання різних векторів передуює розв'язку задачі при довільних значеннях t . Очевидна неможливість виконання параметричного дослідження в тих випадках, коли вектори поточного базису мають параметричну складову. На це необхідно звернути увагу.

4.4 Одночасна параметрична зміна векторів

Розглянемо випадок, коли одночасно змінюються вектори c і b . Аналогічно, як і раніше, при відомій оптимальній базисній матриці B_i окремо перевіряються умови оптимальності і припустимості. Нехай t' і t'' — наступні критичні значення параметра t , отримані з умови оптимальності і умови припустимості розв'язку відповідно. При цьому можливі три ситуації.

1. Якщо $t' < t''$, то першою порушується умова оптимальності. У цьому випадку в точці $t_{i+1} = t'$ за допомогою звичайного симплекс-метода визначається новий базис B_{i+1} .
2. Якщо $t'' < t'$, то першою порушується умова припустимості. У цьому випадку новий базис B_{i+1} в точці $t_{i+1} = t''$ визначається за допомогою двоїстого симплекс-методу.
3. Якщо $t' = t''$, то умова оптимальності і умова припустимості порушуються одночасно в точці $t_{i+1} = t' = t''$. У цьому випадку для знаходження нового базису B_{i+1} необхідно використовувати метод одночасного розв'язку прямої і двоїстої задачі. Цей випадок розглядати не будемо.

Приклад 4.4. Розглянемо випадок, коли вектори c і b змінюються одночасно. Залежності $c(t)$ і $b(t)$ такі, як і в прикладах 1 і 2 відповідно. Необхідно пам'ятати, що сумісний розгляд $c(t)$ і $b(t)$ у загальному випадку не приводить до результату, що визначається як суперпозиція критичних значень t , отриманих для кожного з розглянутих випадків окремо.

Отже, розглянемо задачу:

$$\begin{aligned} \text{максимізувати} \quad z &= (3 - 6t)x_1 + (2 - 2t)x_2 + (5 + 5t)x_3, \\ \text{при обмеженнях} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40 - t, \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 60 + 2t, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 30 - 7t, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Оптимальний базис в точці $t = t_0 = 0$

З прикладу 4.1 маємо

$${}^0X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оптимальність. Матриця B_0 залишиться оптимальною до тих пір, поки різниця $z_j(t) - C_j(t)$ для $j = 1, 4, 5$ буде невід'ємною, тобто при

$$\{z_j(t) - c_j(t)\}_{j=1,4,5} = (4 + 14t, 1 - t, 2 + 3t) \geq (0, 0, 0).$$

З цієї умови отримуємо, що $t' = 1$.

Припустимість. Матриця B_0 залишається припустимою до тих пір, поки

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = B_0^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} 5 - t \\ 30 + t \\ 10 - 3t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умова припустимості виконується при $t \leq 10/3$, тобто $t'' = 10/3$.

Оптимальність і припустимість: $t_1 = \min\{t', t''\} = t' = 1$. Це означає, що спочатку порушується умова оптимальності. Тому альтернативний розв'язок у точці $t_1 = 1$ визначається з використанням звичайного симплекс-методу.

Альтернативний оптимум у точці $t = t_1 = 1$

З умови оптимальності випливає, що до альтернативного базису включається змінна x_4 . Для визначення змінної, що виключається, зробимо такі розрахунки:

$$\alpha^4 = B_0^{-1}P_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = B_0^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 30 + 1 \\ 10 - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 31 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, для x_1 , x_3 і x_6

$$\Theta = \min \left\{ \frac{4}{1/2}, -, - \right\} = 8,$$

тобто виключаємо x_2 .

Знаючи матрицю B_0 і заміняючи P_2 на вектор P_4 , знаходимо новий базис. При цьому

$$x_B = (x_4, x_3, x_6)^T$$

і

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер визначимо нове критичне значення параметра t , тобто t_2 .

Оптимальність.

$$\{z_j(t) - c_j(t)\}_{j=1,2,5} = \left(\frac{9 + 27t}{2}, -2 + 2t, \frac{5 + 5t}{2} \right) \geq (0, 0, 0).$$

Таким чином, матриця B_1 залишається оптимальною при всіх значеннях $t \geq 1$, звідки отримуємо $t' = +\infty$.

Припустимість.

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = B_1^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} 10 - 2t \\ 30 + t \\ 30 - 7t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця B_1 залишається припустимою при $t \leq 30/7$, тобто $t'' = 30/7$.

Оптимальність і припустимість: $t_2 = \min\{t', t''\} = 30/7$, тобто спочатку порушується умова припустимості.

Альтернативний базис в точці $t = t_2 = 30/7$

Альтернативний базис визначається з використанням двоїстого симплекс-методу, і тією ж змінною, що виключається є x_6 . Для визначення змінної, що включається до базису необхідно виконати такі обчислення. Для $j = 1, 2, 5$ маємо

$$\{z_j(t) - c_j(t)\}_{t=30/7} = \left(\frac{9}{2} + \frac{27}{2} \cdot \frac{30}{7}; \quad -2 + 2 \cdot \frac{30}{7}; \quad \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{30}{7} \right) = \\ = (62.36; \quad 6.57; \quad 13.21),$$

$$(\alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^5) = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (1, 4, 0).$$

Так як всі $\alpha_z^j \geq 0$, при $t > 30/7$ припустимих розв'язків не існує, і параметричний аналіз закінчується.

Оптимальні розв'язки задачі для розглянутої області зміни параметра t приведені в таблиці:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq 1$	0	$5 - t$	$30 + t$	$7t^2 + 143t + 160$
$1 \leq t \leq 30/7$	0	0	$30 + t$	$5t^2 + 155t + 150$
$t > 30/7$	задача не має припустимих розв'язків			

Зазначимо, що критичне значення $t = 10/3$, яке було отримано, коли досліджувався вплив лише одного вектора $b(t)$, у розв'язку даної задачі не фігурує. Це підтверджує справедливність зробленого раніше зауваження про те, що одночасна зміна векторів $b(t)$ та $c(t)$ приводить до результатів, не тотожні тим, які дає суперпозиція критичних значень t , отриманих у тих випадках, коли вплив параметричних складових векторів c і b розглядається окремо.

4.5 Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте призначення постоптимального аналізу.
2. Назвіть види постоптимального аналізу.
3. Який вид постоптимального аналізу дає відповідь питанням: «До яких меж ми можемо збільшувати (зменшувати) кількість відповідної сировини, і навіть оптимальний план двоїстої завдання (у структурному розумінні) залишиться незмінним (у базисі залишаться ті ж змінні, що й були, але з новими значеннями)?»
4. Назвіть ситуації, до яких може призвести зміна вільних членів системи обмежень?
5. Який зміст вкладають у поняття «параметрична стійкість»?
6. Сформулюйте умови для припустимих змін цільової функції задачі, за яких її оптимальний план залишається незмінним.
7. Як визначаються критичні значення параметра t при параметричній зміні вектора коефіцієнтів цільової функції?
8. Як розраховується обернена базисна матриця, що відповідає альтернативному базису?
9. Як знайти альтернативний оптимальний базис?
10. Як визначаються критичні значення параметра t при параметричній зміні вектора вільних членів обмежень?

4.6 Завдання для самостійної роботи

Нехай i - номер академічної групи, j - порядковий номер студента в академічній групі. Нехай $t \geq 0$, необхідно дослідити зміну оптимального розв'язку в залежності від величини параметра t в таких задачах ЛП:

А:

$$\begin{aligned}\min z &= ix_1 + x_2(1 - t), \\ (i + 4)x_1 + x_2 &= j + 1, \\ (i + 1)x_1 + x_2 &\geq j, \\ ix_1 + x_2 &\leq j, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Б:

$$\begin{aligned}\min z &= ix_1 + x_2, \\ (i + 4)x_1 + x_2 &= j + 1 + t, \\ (i + 1)x_1 + x_2 &\geq j - 2t, \\ ix_1 + x_2 &\leq j + 3t, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

В:

$$\begin{aligned}\min z &= ix_1 + x_2(1 - t), \\ (i + 4)x_1 + x_2 &= j + 1 + t, \\ (i + 1)x_1 + x_2 &\geq j - 2t, \\ ix_1 + x_2 &\leq j + 3t, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Тема 5. Транспортна задача

Транспортна модель використовується для складання найбільш економічного плану перевезень одного виду продуктів з декількох пунктів відправлення у пункти доставки (з заводів на склади). Це, як правило, задачі пошуку оптимального плану перевезення готової продукції. Однак деякі задачі, які зводяться до моделі транспортної задачі, наприклад, задачі планування виробництва, керування запасами, рух капіталу, складання змінних графіків, призначення службовців на робочі місця, регулювання витратами води у водоймищах, тощо насправді не мають нічого спільного з транспортуванням, але до них можна застосовувати ті ж самі методи, що й для транспортної задачі.

Класична задача транспортного типу формулюється таким чином. Нехай є m пунктів відправлення (виробництва) продукції $A_1, A_2, \dots, A_m$, в яких сконцентровано запаси певного *однорідного* товару (вантажу) в кількості відповідно $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць. Крім того, є n пунктів призначення (споживання) $B_1, B_2, \dots, B_n$, які подали замовлення відповідно на $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць товару. Оскільки розглядається тільки один вид продукції, то потреби пункту призначення можуть задовольнятися за рахунок декількох вихідних пунктів. Відома вартість перевезень c_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) одиниці товару від пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j матрицею (таблицею) перевезень

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мета побудови моделі полягає у визначенні кількості продукції, яку необхідно перевезти з кожного вихідного пункту в кожен пункт призначення, щоб вивезти всю продукцію від постачальників, задовольнити потреби всіх споживачів і загальні транспортні витрати були мінімальними. Основне припущення: величина транспортних витрат на кожному маршруті прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції.

Нехай x_{ij} – кількість продукції перевезеної з пункту i в пункт j ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), тоді математична модель задачі:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

за умов

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j \quad (j = \overline{1, n}), \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).\end{aligned}$$

Перша група обмежень означає, що сумарний обсяг перевезень продукції з деякого вихідного пункту не може перевищувати наявної кількості цієї продукції; друга група обмежень вимагає, щоб сумарне перевезення продукції в деякий пункт споживання повністю задовольняли попит на цю продукцію.

Якщо загальні запаси вантажу у пунктах відправлення дорівнюють загальним потребам вантажу в пунктах призначення, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (5.1)$$

то модель такої транспортної задачі називається *закритою* або *збалансованою*. Тоді маємо таку задачу:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.4)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

Якщо ж умова (5.1) не виконується, то модель транспортної задачі називається *відкритою* або *не збалансованою*. В цьому випадку вводять фіктивний пункт відправлення (складування) або фіктивний пункт призначення (споживання).

Математична модель транспортної задачі є задачею лінійного програмування, отже її можна розв'язати симплекс-методом або будь-яким іншим аналітичним методом. Але при розв'язуванні транспортної задачі симплексним методом отримали б симплекс-таблиці великих розмірів, оскільки число невідомих дорівнює $m \times n$. Однак, специфіка задачі дає змогу побудувати значно простіший за симплексний метод розв'язування, який має назву *транспортний симплекс-метод*.

Будь-яка сукупність значень $x_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ називається *планом транспортної задачі*. План $x_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ називається *допустимим*, якщо він задовольняє умови (5.3) і (5.4) (так звані «балансові умови» – всі замовлення виконані, всі запаси вичерпані). Допустимий план будемо називати *опорним* або *невиродженим*, якщо в ньому відмінні від нуля не більше ніж $r = n + m - 1$ змінних x_{ij} , а всі інші дорівнюють нулю. План $x_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ називається *оптимальним планом транспортної задачі*, якщо він задовольняє умови (5.3) і (5.4), за якого функція (5.2) набуває свого мінімального значення.

Властивості закритої транспортної задачі

- 1) замкнута транспортна задача завжди має розв'язок;
- 2) серед рівнянь-обмежень замкритої транспортної задачі лише $(m + n - 1)$ лінійно незалежні;
- 3) якщо в умовах транспортної задачі всі числа $a_i, i = \overline{1, m}$, та $b_j, j = \overline{1, n}$, цілі, то оптимальний розв'язок задачі також цілочисельний.

Загальний алгоритм розв'язування транспортної задачі

Крок 1. Знайти початковий припустимий розв'язок (допустимий план перевезень).

Крок 2. Перевірити умову оптимальності за допомогою процедури, яка називається методом потенціалів. Виділити з числа небазисних змінних ту, яка вводиться до базису. Якщо всі небазисні змінні задовольняють умові оптимальності, закінчити обчислення; в іншому випадку перейти до кроку 3.

Крок 3. Обрати змінну, що виводиться з базису з числа змінних поточного базису; потім знайти новий базисний розв'язок. Повернутися до кроку 2.

Для знаходження початкового базисного розв'язку використовуються різні методи, розглянемо найпоширеніші:

1. Метод північно-західного кута.
2. Метод найменшої (мінімальної) вартості.
3. Метод Фогеля.

Найкращий початковий розв'язок з точки зору наближеності його до оптимального дає метод Фогеля, проте він вимагає найбільшої кількості обчислень. Найгірший початковий розв'язок дає метод північно-західного кута, проте він є найпростішим. Метод найменшої вартості є простим у виконанні і з прийнятною якістю початкового розв'язку.

5.1 Метод північно-західного кута

Визначення початкового розв'язку (правило північно-західного кута)

Назва методу для зручності сприйняття його суті запозичена з картографії. Не враховуючи витрат на перевезення продукції, задовольняємо попит першого споживача (крайнього зліва в таблиці серед усіх споживачів) продукцією першого постачальника (що знаходиться найвище в тій самій таблиці). Дотримуючись правила північно-західного кута, починають з того, що приписують змінній (в північно-західному куті) максимальне значення, яке допускається обмеженнями на попит і обсяг виробництва. Після цього викреслюють відповідний стовпчик (рядок), фіксуючи цим, що інші змінні викресленого стовпчика (рядка) покладають рівними нулеві. Якщо обмеження, які накладаються стовпчиком і рядком виконуються одночасно, то можна викреслити стовпець, або рядок (ця умова гарантує виявлення нульових базисних змінних). Після того, як попит і обсяг виробництва у всіх невикреслених рядках і стовпчиках приведені у відповідність із установленим значенням змінної, максимально припустиме значення приписується першому невикресленому елементу нового стовпчика (рядка).

Розглянемо комплексне застосування методу північнозахідного кута для знаходження початкового базисного розв'язку (допустимого плану) та методу потенціалів для пошуку оптимального плану транспортної задачі, яка задана за допомогою транспортної таблиці 1.

вихідні пункти	пункти призначення				обсяг виробництва
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	x_{11} 10	x_{12} 0	x_{13} 20	x_{14} 11	15
A_2	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
A_3	x_{31} 0	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	5
попит	5	15	15	10	

Табл. 1

Так як $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, дійсно:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 15 + 25 + 5 = 45, \quad \sum_{j=1}^n b_j = 5 + 15 + 15 + 10 = 45,$$

то транспортна модель замкнута, вона містить $m + n = 3 + 4 = 7$ рівнянь-обмежень. Нескладно показати, що одне рівняння є залежним. Виходить, що транспортна модель містить $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ незалежних рівнянь і $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ базисних змінних.

Робимо наступні кроки:

- 1) $x_{11} = 5$, стовпчик 1 викреслюємо. Інші операції в ньому не робимо. На рядок 1 залишилось $15 - 5 = 10$ одиниць;
- 2) $x_{12} = 10$ і рядок 1 викреслюємо, а на долю стовпчика 2 залишається 5 одиниць;

вихідні пункти	пункти призначення				обсяг виробництва
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 10	10 0			15 10 0
A_2		5 7	15 9	5 20	25 20 5
A_3				5 18	5 0
попит	5 0	15 5 0	15 0	10 5 0	

Табл.2

- 3) $x_{22} = 5$, стовпчик 2 викреслюємо, а в рядку 2 залишається 20 одиниць;
- 4) $x_{23} = 15$, стовпчик 3 викреслюємо, у рядку 2 залишається 5 одиниць;
- 5) $x_{24} = 5$, рядок 2 викреслюємо, в стовпчику 4 залишається 5 одиниць;
- 6) $x_{34} = 5$, викреслюємо 3 рядок і 4 стовпчик.

Отже, знайдено початковий план перевезень методом північно-західного кута. Базисні змінні приймають наступні значення:

$$x_{11} = 5, x_{12} = 10, x_{22} = 5, x_{23} = 15, x_{24} = 5, x_{34} = 5.$$

Інші – небазисні змінні дорівнюють нулеві. Отриманий опорний план є не виродженим ($6 = 3 + 4 - 1$). Знайдемо відповідні транспортні витрати:

$$z = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 18 = 410 \text{ (грош. од.)}$$

Якщо одночасно і стовпчик, і рядок задовольняють обмеженням, чергова змінна, що включається в базисний розв'язок, обов'язково має нульове значення. Стовпчик 2 і рядок 2 одночасно приводять до виконання відповідних обмежень. Якщо викреслюється стовпчик 2, то на наступному кроці змінна x_{23} стає базисною з нульовим значенням, оскільки величина пропозиції в рядку 2 дорівнює нулеві. Якщо ж використовується рядок 2, то x_{32} стає нульовою базисною змінною.

Поліпшення плану перевезень за методом потенціалів. Визначення змінної, яка вводиться в базис.

Для перевірки умови оптимальності та подальшого знаходження оптимального розв'язку використовується методі потенціалів. Кожному рядку i та стовпчику j транспортної таблиці ставляться у відповідність числа (потенціали) u_i і v_j . Для кожної базисної змінної x_{ij} поточного розв'язку потенціали u_i і v_j повинні задовольняти умови:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Нагадуємо, що c_{ij} – це тариф на перевезення в клітинці (i, j) . Ці рівняння призводять до системи $m + n - 1$ лінійно незалежних алгебраїчних рівнянь, в яких присутні $m + n$ невідомих. Тоді система має

безліч розв'язків, для пошуку одного з них надають одному з потенціалів довільне значення (наприклад $u_1 = 0$). Після оцінки потенціалів знаходимо оцінки для небазисних змінних x_{pq} з рівняння:

$$c_{pq}^* = u_p + v_q - c_{pq}.$$

Отже, у нашому прикладі:

$$x_{11} : u_1 + v_1 = c_{11} = 10,$$

$$x_{12} : u_1 + v_2 = c_{12} = 0,$$

$$x_{22} : u_2 + v_2 = c_{22} = 7,$$

$$x_{23} : u_2 + v_3 = c_{23} = 9,$$

$$x_{24} : u_2 + v_4 = c_{24} = 20,$$

$$x_{34} : u_3 + v_4 = c_{34} = 18,$$

Покладемо $u_1 = 0$,

тоді отримаємо:

$$v_1 = 10, v_2 = 0, u_2 = 7,$$

$$v_3 = 2, u_3 = 5, v_4 = 13.$$

Оцінки для небазисних змінних визначаються так:

$$c_{13}^* = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - 20 = -18,$$

$$c_{14}^* = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 - 11 = 2,$$

$$c_{21}^* = u_2 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5,$$

$$c_{31}^* = u_3 + v_1 - c_{31} = 5 + 10 - 0 = \boxed{15},$$

$$c_{32}^* = u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + 0 - 14 = -9,$$

$$c_{33}^* = u_3 + v_3 - c_{33} = 5 + 2 - 16 = -9.$$

Критерій оптимальності плану перевезень. Для того, щоб опорний план транспортної задачі був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб оцінки потенціалів для небазисних змінних були не додатними.

Після цього для включення в базис обирається небазисна змінна, яка має найбільшу додатну оцінку c_{pq}^* .

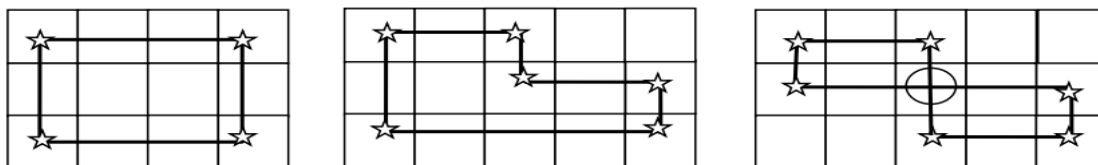
Так як змінна x_{31} має максимальну додатну оцінку c_{pq}^* , вона і обирається в якості змінної, що вводиться в базис.

Визначення змінної, яка виводиться з базису.

Побудова циклу

Для визначення змінної, що виводиться з базису, побудуємо цикл, що відповідає змінній, яка вводиться (у нашому випадку це x_{31}). Цикл починається і закінчується обраною небазисною змінною. Він складається з послідовності горизонтальних і вертикальних зв'язаних відрізків, кінцями яких повинні бути базисні змінні. Це означає, що кожна клітинка, яка розташована на повороті циклу, повина містити базисну змінну. Не має значення *за* чи *проти* годинникової стрілки робити обхід. Цикл для всіх небазисних змінних один. Не обов'язкова участь у циклі всіх базисних змінних.

Приклади того, як можуть виглядати найпростіші ланцюги циклів



У нашому прикладі цикл має вигляд:

$$\underline{x_{31}} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow \underline{x_{31}}.$$

вихідні	пункти призначення				обсяг
пункти	B1	B2	B3	B4	виробництва
A1	$\ominus_5$	$\oplus_0$	20	11	15
A2	12	$\ominus_7$	9	$\oplus_{20}$	25
A3	$\oplus_{x_{31}}$	14	16	$\ominus_{18}$	5
попит	5	15	15	10	

Табл.3

Якщо значення введеної змінної збільшити (на 1), то для збереження допустимості розв'язку значення базисних змінних, що знаходяться на поворотах циклу, необхідно скорегувати так:

- 1) зменшити x_{11} на одиницю,
- 2) збільшити x_{12} на одиницю,
- 3) зменшити x_{22} на одиницю,
- 4) збільшити x_{24} на одиницю,
- 5) зменшити x_{34} на одиницю.

Змінна, що виведена з базису, обирається із змінної, що знаходиться на поворотах циклу, значення яких зменшується при збільшенні x_{31} . Вони позначені $\ominus$. Виведеною з базису змінною стає та, що має найменше значення, так як вона швидше за всіх стане 0.

У нашому прикладі три $\ominus$ – у змінних x_{11} , x_{22} , x_{34} і мають вони значення 5. Кожну з них можна виключити з базису. Нехай обрано x_{34} .

Тоді значення x_{31} стане 5, а змінні, що знаходяться на поворотах циклу (базисні) відповідним чином коригуються (якщо $\oplus$, то збільшуються на 5, інакше – зменшуються на 5).

Отримали такий розв'язок:

вихідні пункти	пункти призначення				обсяг виробництва
	B1	B2	B3	B4	
A1	0 ¹⁰	15 ⁰	²⁰	¹¹	15
A2	¹²	0 ⁷	15 ⁹	10 ²⁰	25
A3	5 ⁰	¹⁴	¹⁶	0 ¹⁸	5
попит	5	15	15	10	

Табл. 4

Отже, наступний план перевезень (або базисні змінні): $x_{11} = 0$, $x_{12} = 15$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 15$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 5$. Інші, небазисні, дорівнюють нулеві. Загальна вартість перевезень: $z = 0 \cdot 10 + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 = 335$ грош. од., що краще ніж було (410 грош. од.).

Базисний розв'язок *вироджений*, так як $x_{11} = 0$ і $x_{22} = 0$, тобто відмінних від нуля базисних змінних менше, ніж $m + n - 1 = 6$. Але нічого в алгоритмі не змінюємо.

Оптимальність нового базису перевіряємо обчисленням нових потенціалів.

Для базисних змінних:

$$x_{31} : u_3 + v_1 = c_{31} = 0; \quad u_1 = 0,$$

$$x_{11} : u_1 + v_1 = c_{11} = 10; \quad v_2 = 0,$$

$$x_{12} : u_1 + v_2 = c_{12} = 0; \quad v_1 = 10,$$

$$x_{22} : u_2 + v_2 = c_{22} = 7; \quad u_3 = -10,$$

$$x_{23} : u_2 + v_3 = c_{23} = 9; \quad v_3 = 2,$$

$$x_{24} : u_2 + v_4 = c_{24} = 20; \quad v_4 = 13,$$

$$u_2 = 7.$$

Для небазисних змінних:

$$x_{13} : c_{13}^* = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - 20 = -18,$$

$$x_{14} : c_{14}^* = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 - 11 = 2,$$

$$x_{21} : c_{21}^* = u_2 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = \boxed{5},$$

$$x_{32} : c_{32}^* = u_3 + v_2 - c_{32} = -10 + 0 - 14 = -24,$$

$$x_{33} : c_{33}^* = u_3 + v_3 - c_{33} = -10 + 2 - 16 = -24,$$

$$x_{34} : c_{34}^* = u_3 + v_4 - c_{34} = -10 + 13 - 18 = -15.$$

Критерій оптимальності отриманого плану перевезень не виконується. У x_{21} оцінка потенціалу максимальна серед додатних $c_{21}^* = 5$, тому x_{21} та змінна, що вводиться в базис. Складаємо цикл та визначаємо, яку змінну виводимо з базису. Цикл будуюмо так:

$$\underline{x_{12}} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow \underline{x_{12}}.$$

вихідні	пункти призначення				обсяг
пункти	B1	B2	B3	B4	виробництва
A1	0 $\ominus$	15 $\oplus$	20	11	15
A2	x_{21} $\oplus$	0 $\ominus$	15	10	25
A3	5				5
попит	5	15	15	10	

Табл. 5

Вивести можна x_{11} або x_{22} . Виведемо, наприклад, x_{11} . Отримуємо новий базисний розв'язок (див. табл. 6).

Якщо ітерацій для покращення розв'язку до оптимального багато, для скорочення записів розрахунків потенціали для базисних змінних записують над відповідними рядками та стовпцями таблиці, наприклад, як у таблиці 6, а оцінки потенціалів для небазисних змінних пишуть у куточках відповідних клітин.

		потенціали для стовпців				
		v1=5	v2=0	v3=2	v4=13	обс.вир.
потенціали для рядків	u1=0	-5	15	-18	2	15
	u2=7	0	0	15	10	25
	u3=-5	5	-19	-19	-10	5
попит		5	15	15	10	

Табл. 6.

Критерій оптимальності не виконується. Оцінка потенціалу для небазисної змінної x_{14} додатня, тому змінну x_{14} вводимо в базис. Скла-

даємо цикл та визначимо, яку змінну виводимо з базису (див. табл. 7).

		потенціали для стовпців				
		v1=5	v2=0	v3=2	v4=13	обс.вир.
потенціали для рядків	u1=0	-5	10	15	20	15
	u2=7	0	12	15	10	25
	u3= -5	5	0	14	16	5
	попит	5	15	15	10	

Табл. 7.

У Табл. 7 x_{14} вводиться в базис, а x_{24} виводиться з базису. У Табл.8 представлений новий базисний розв'язок, отриманий з Табл.7.

вихідні пункти	пункти призначення				обсяг виробництва
	B1	B2	B3	B4	
A1	10	5	20	10	15
A2	0	10	15	0	25
A3	5	14	16	18	5
попит	5	15	15	10	

Табл. 8.

Оптимальність нового базису перевіряємо обчисленням нових потенціалів. Розрахунки ведемо у таблиці 9.

		потенціали для стовпців				
		v1=5	v2=0	v3=2	v4=11	обс.вир.
потенціали для рядків	u1=0	-5	5	18	10	15
	u2=7	0	10	15	-2	25
	u3= -5	5	-19	-19	-12	5
	попит	5	15	15	10	

Табл. 9.

Крітерій оптимальності виконується, усі оцінки потенціалів небазисних змінних $c_{ij} \leq 0$, це означає, що знайшли оптимальний розв'язок. При такому плані перевезень загальна вартість перевезення становитиме:

$$z = 5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 0 \cdot 12 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 315 (\text{грош. од.})$$

План перевезення вантажу можна описати матрицею

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або словами:

- із пункту A_1 до пункту B_2 необхідно перевезти 5 од.;
- із пункту A_1 до пункту B_4 необхідно перевезти 10 од.;
- із пункту A_2 до пункту B_1 необхідно перевезти 0 од.;
- із пункту A_2 до пункту B_2 необхідно перевезти 10 од.;
- із пункту A_2 до пункту B_3 необхідно перевезти 15 од.;
- із пункту A_3 до пункту B_1 необхідно перевезти 5 од.

5.2 Метод найменшої вартості

Цей метод відповідає своїй назві. В базис послідовно обираються змінні, що відповідають напрямкам з найменшою вартістю. Суть методу мінімального елемента полягає в тому, що на кожному кроці здійснюється максимально можливе «переміщення» вантажу у клітинку з мінімальною вартістю перевезення одиниці вантажу. Послідовність знаходження початкового базисного розв'язку така:

Крок 1. Обирається змінна, якій відповідає найменша вартість у всій таблиці, і їй надається можливо більше значення. Якщо таких змінних декілька, то обирається довільно одна.

Крок 2. Змінній у вибраній клітинці присвоюється найбільше значення, яке допускає обмеження на попит (пропозицію) $x_{ij} = \min\{a_i; b_j\}$, при цьому враховуються значення інших базисних змінних, що знаходяться у тому ж стовпчику та рядку, де і дана змінна. Якщо в базис обрано $m + n - 1$ змінних, тоді початковий допустимий базисний розв'язок знайдено. Якщо ні, тоді переходимо до наступного кроку.

Крок 3. Викреслюється відповідний стовпчик або рядок, для якого попит (пропозицію) задоволено. Якщо обмеження по стовпчику і рядку виконуються одночасно, то викреслюється або стовпчик, або рядок, а в наступну клітину записуємо «0», і вважаємо її заповненою, але з кількістю «0».

Після обчислення нових значень попиту і обсягу виробництва для всіх невикреслених рядків і стовпчиків процес повторюється при можливо більшому значенні тієї змінної, якій відповідає мінімальна вартість серед невикреслених. Процедура завершується, коли залишається один рядок або один стовпчик.

Застосуємо цей метод до нашої задачі. Розглянемо приклад з Табл.1 на стор. 65.

Ітерація 1.

Крок 1. Змінні x_{12} і x_{31} мають однакову найменшу вартість – 0. Обираємо, наприклад, x_{12} .

Крок 2. Змінній x_{12} у вибраній клітинці присвоюємо найбільше значення, яке допускає обмеження на попит та обмеження на обсяг виробництва, це 15, тобто $x_{12} = 15$.

Крок 3. Коригуємо попит і пропозицію. Оскільки попит та пропозиція виконуються одночасно, то викреслюємо, наприклад, другий стовпчик. Ці кроки наочніше ілюструються у Таблиці 10.

вихідні	пункти призначення				обсяг
пункти	B1	B2	B3	B4	виробництва
A1	10	15 0	20	11	15 0
A2	12	7	9	20	25
A3	0	14	16	18	5
попит	5	15 0	15	10	

Табл. 10.

Повертаємось до першого кроку.

Ітерація 2.

Крок 1. Змінна x_{31} має найменшу вартість – 0.

Крок 2. Змінній x_{31} у вибраній клітинці присвоюємо значення 5.

Крок 3. Коригуємо попит і пропозицію. Оскільки попит і пропозицію задоволено одночасно, то викреслюємо, наприклад, третій рядок, як це показано у Табл. 11.

вихідні	пункти призначення				обсяг
пункти	B1	B2	B3	B4	виробництва
A1	10	15	20	11	15, 0
A2	12	7	9	20	25
A3	5	14	16	18	5, 0
попит	5, 0	15, 0	15	10	

Табл. 11.

Повертаємося до першого кроку.

Ітерація 3.

Крок 1. Серед елементів, що залишилися, найменша вартість у x_{23} $c_{23} = 9$.

Крок 2. Присвоюємо $x_{23} = 15$.

Крок 3. Коригуємо попит і пропозицію. Оскільки попит цілком задоволено, то викреслюємо третій стовпчик.

Повертаємося до першого кроку.

Ітерація 4.

Крок 1. Далі найменша вартість у x_{11} , де $c_{11} = 10$.

Крок 2. Оскільки залишок обсягу виробництва в рядку 1 і залишок попиту в стовпчику 1 дорівнюють нулеві, то присвоюємо $x_{11} = 0$.

Крок 3. Попит та пропозиція не потребують коригування, оскільки $x_{11} = 0$. Викреслюємо перший стовпчик.

Ітерація 5.

Крок 1. Далі, найменша вартість у x_{14} , де $c_{14} = 11$.

Крок 2. Оскільки залишок обсягу виробництва в рядку 1 дорівнює нулеві, то присвоюємо $x_{14} = 0$.

Крок 3. Коригуємо попит і пропозицію та викреслюємо перший рядок. Залишок обсягу виробництва в першому рядку дорівнює нулеві.

Ітерація 6.

Крок 1. Далі, залишилася одна змінна x_{24} .

Крок 2. Оскільки залишок обсягу виробництва в рядку 1 дорівнює 10, то присвоюємо $x_{24} = 10$.

Крок 3. Коригуємо попит і пропозицію та викреслюємо четвертий стовпчик.

В базис обрано $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ змінних, тоді початковий допустимий базисний розв'язок знайдено.

Сумарні витрати відповідному цьому розв'язку, рівні $0 \cdot 10 + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 11 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 0 = 335$ (грош. од.), що краще результату, який отримано при використанні методу північно-західного кута.

вихідні	пункти призначення				обсяг
пункти	B1	B2	B3	B4	виробництва
A1	0 ¹⁰	15 ⁰	20 ¹²	0 ¹¹	15 0
A2	12 ⁰	7 ¹⁴	15 ⁹	10 ²⁰	25 10 0
A3	5 ⁰	16 ¹⁸	16 ¹⁸	18 ¹⁸	5 0
попит	5 0	15 0	15 0	10 0	

Табл. 12.

5.3 Наближений метод Фогеля

Цей метод є евристичним, доволі простим і дає змогу отримати початковий опорний план, більш наближений до оптимального розв'язку, ніж у випадку застосування інших методів.

Алгоритм складається з таких кроків.

Крок 1. Обчислити штраф для кожного рядка (стовпчика), віднімаючи найменший елемент (вартість) цього рядка (стовпчика) від наступного за ним по величині елементів того ж рядка (стовпчика).

Крок 2. Відзначити рядок або стовпчик з найбільшим штрафом, а якщо таких декілька, то обрати серед них будь-який рядок або будь-який стовпчик. У обраному рядку чи стовпчику обрати змінну з найменшою вартістю і присвоїти їй найбільш можливе значення. Скоригувати обсяг виробництва і попит та викреслити рядок або стовпчик, що відповідає виконаному обмеженню. Якщо обмеження по рядку і стовпчику виконуються одночасно, то викреслити рядок або стовпчик, а стовпцю або рядку, що залишився, приписати нульовий попит (обсяг виробництва). Рядок або стовпчик з нульовим обсягом виробництва (або попитом) не використовується у подальших розрахунках (на Кроці 3).

Крок 3.

- Якщо невикресленим залишається один рядок або один стовпчик, то завершити обчислення.

- б) Якщо залишається невикресленим тільки один рядок (стовпчик) з додатнім обсягом виробництва (попитом), знайти базисні змінні в цьому рядку (стовпчику), використовуючи метод найменшої вартості.
- в) Якщо усім невикресленим рядкам і стовпчикам відповідають нульові обсяги виробництва і величини попиту, знайти нульові базисні змінні, використовуючи метод найменшої вартості.
- г) В інших випадках обчислити нові значення штрафів для невикреслених рядків і стовпчиків та перейти до кроку 2. Слід зазначити, що рядки і стовпчики з нульовими значеннями обсягу виробництва і попиту не повинні використовуватися при обчисленні цих штрафів.

Знайдемо початковий базисний розв'язок за допомогою методу Фогеля ту ж саму задачу.

Ітерація 1.

Крок 1. Обчислюємо штрафи для кожного рядка та кожного стовпчика. У Таблиці 13 представлені набір штрафів для рядків і стовпчиків.

вихідні пункти	пункти призначення				обсяг виробництва	штрафи для рядків
	B1	B2	B3	B4		
A1	— 10	0	20	11	15	10-0=10
A2	— 12	7	9	20	25	9-7=2
A3	5 0	14	16	18	5, 0	14-0=14
попит	5, 0	15	15	10		
штрафи для стовпців	10+0=10	7-0=7	16-9=7	18-11=7		

Табл. 13

Крок 2. Відзначаємо рядок або стовчик з найбільшим штрафом. Оскільки найбільший штраф – 14 у третьому рядку, то обираємо змінну в ньому з найменшою вартістю. Оберемо x_{31} і припишемо їй значення 5, тобто $x_{31} = 5$. Обмеження по першому стовпчику і третьому

рядку виконуються одночасно. Викреслимо, наприклад, перший стовпчик.

Крок 3. Коригуємо попит та пропозицію.

Ітерація 2.

Крок 1. Обчислюємо штрафи II для кожного рядка та кожного стовпчика. Третій рядок має нульовий обсяг виробництва і тому його не розглядаємо. Не розглядаємо також перший стовпчик.

Крок 2. Відзначаємо рядок або стовчик з найбільшим штрафом. Оскільки штраф для першого рядка та штраф для третього стовпчика однакові, вони дорівнюють 11, то оберемо, наприклад, третій стовпець. Шукаємо елемент із найменшою вартістю – 9. Оберемо x_{23} і припишемо їй значення 15, тобто $x_{23} = 15$.

Крок 3. Коригуємо попит та пропозицію. Стовпчик 3 викреслюється, а обсяг виробництва у рядку 2 дорівнює $25 - 15 = 10$. Будуємо нову Таблицю 14.

							штрафи для рядків	
вихідні		пункти призначення				обсяг		
пункти		B1	B2	B3	B4	виробництва	I	II
A1	—	10	0	20	11	15	10	11
A2	—	12	7	15	20	25	2	2
A3	5	0	14	16	18	5	14	—
попит		5	0	15	0	10		
штрафи для стовпців	I	10	7	7	7			
	II	—	7	11	9			

Табл. 14

Ітерація 3.

Крок 1. Обчислюємо штрафи III для кожного рядка та кожного стовпчика. Третій рядок має нульовий обсяг виробництва і тому його не розглядаємо. Не розглядаємо також перший та третій стовпчики.

Крок 2. Відзначаємо рядок або стовчик з найбільшим штрафом. Максимальний штраф у другому рядку дорівнює 13. Шукаємо елемент із найменшою вартістю у цьому рядку – 7 і присвоюємо x_{22} максимальне значення, виходячи з попиту і пропозиції $x_{22} = 10$.

Крок 3. Коригуємо попит і обсяг виробництва. Так як у другому рядку пропозиція 0, то його викреслюємо.

Залишився тільки перший рядок. Мінімальну вартість має x_{12} і тому x_{12} надамо найбільше значення виходячи з попиту і обсягу виробництва: $x_{12} = 5$. Коригуємо попит і обсяг виробництва. У першому рядку залишається один елемент x_{14} , йому і присвоюємо максимальне значення з попиту і обсягу виробництва, тобто $x_{14} = 10$. Процес закінчено.

							штрафи для рядків		
вихідні	пункти призначення				обсяг				
пункти	B1	B2	B3	B4	виробництва	I	II	III	
A1	— ¹⁰	5 ⁰	— ²⁰	10 ¹¹	15 10 0	10	11	11	
A2	— ¹²	10 ⁷	15 ⁹	— ²⁰	25 10 0	2	2	13	
A3	5 ⁰	— ¹⁴	— ¹⁶	0 ¹⁸	5 0	14	—	—	
попит	5 0	15 5 0	15 0	10 0					
штрафи для стовпців	I	10	7	7	7				
	II	—	7	11	9				
	III	—	7	—	7				

Табл. 15

Оптимальний розв'язок: $x_{12} = 5$, $x_{14} = 10$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 15$, $x_{31} = 5$, $x_{34} = 0$.

Загальна вартість перевезень: $5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 18 = 315$ (грош. од.).

Отже, метод Фогеля дає кращий початковий розв'язок, ніж попередні методи. У нашому випадку ми одразу отримали оптимальний план перевезень (порівнюючи з оптимальним розв'язком цієї задачі, який знайдено раніше). Але це не завжди так і для того, щоб з'ясувати, чи є знайдений план перевезень оптимальним та надалі, за потреби, знайти оптимальний план, застосовують метод потенціалів.

5.4 Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте загальну постановку транспортної задачі.
2. Сформулюйте математичну постановку транспортної задачі.
3. Яка транспортна задача називається закритою або збалансованою? Яка транспортна задача називається відкритою (незбаланс-ованою)?

сованою)? Як відкрити транспортну задачу звести до транспортної задачі закритого типу? Навести приклад.

4. Чи можна розв'язати транспортну задачу симплекс-методом?
5. Якими методами можна знайти початковий базисний план транспортної задачі? Який з них кращий? За якою ознакою?
6. У чому полягає ідея визначення початкового опорного плану транспортної задачі методом «північно-західного кута»?
7. У чому полягає ідея визначення початкового опорного плану транспортної задачі методом найменшої вартості?
8. У чому полягає ідея визначення початкового опорного плану транспортної задачі методом Фогеля?
9. Який план транспортної задачі називають невиродженим?
10. Як перейти від виродженого до невиродженого плану транспортної задачі? Вкажіть спосіб усунення виродженості.
11. В чому суть методу потенціалів?
12. Сформулюйте алгоритм методу потенціалів.
13. Вкажіть критерій оптимальності базисного плану перевезень транспортної задачі при розв'язуванні її методом потенціалів.
14. Як здійснити перехід від одного базисного плану транспортної задачі до наступного при розв'язуванні її методом потенціалів?
15. За яким принципом обчислюють потенціали при розв'язуванні транспортної задачі методом потенціалів? Чому одній з невідомих можна надавати довільного значення?
16. Що розуміють під поняттям «цикл» у транспортній задачі?
17. За якими правилами будують цикл? Яким він може бути? З якою метою його будують?

5.5 Завдання для самостійної роботи

Нехай k – номер академічної групи, i – порядковий номер студента у списку академічної групи.

Компанія має три заводи з виробництва комбікормів, які мають відправлятися до чотирьох крупних фермерських господарств. Заводи 1, 2 і 3 випускають $15 + k + i$, $10 + k$, $15 + i$ тонн комбікормів на місяць відповідно. Кожне фермерське господарство має отримати $5 + k$, $2 + i$, $14 + k$, $9 + i$ тонн комбікормів на місяць відповідно. Транспортні витрати (в умовн. грош. од. за одну тонну) вказані матрицею витрат нижче:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 16 + k & 2 + i \\ 7 & 15 & 4 & 5 \\ 8 + k & 3 + i & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Скільки тонн комбікормів має бути перевезено з кожного заводу до кожного з чотирьох крупних фермерських господарств, щоб мінімізувати загальну вартість доставки?

Виконати наступні завдання.

1. Сформулюйте математичну постановку цієї транспортної задачі.
2. Знайдіть початковий базисний розв'язок методом північно-західного кута.
3. Знайдіть початковий базисний розв'язок методом найменшої вартості.
4. Знайдіть початковий базисний розв'язок методом Фогеля.
5. Знайдіть оптимальний розв'язок транспортної задачі на основі знайденого початкового базисного розв'язку за допомогою метода потенціалів. Для цього початковий базисний розв'язок оберіть за своїм варіантом:
 - якщо $i = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$, то використовуйте початковий базисний розв'язок, знайдений методом північно-західного кута
 - якщо $i = 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 26$, то використовуйте початковий базисний розв'язок, знайдений методом найменшої вартості.
 - якщо $i = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$, то використовуйте початковий базисний розв'язок, знайдений методом Фогеля.
6. Зробіть висновки.

Тема 6. Задача про призначення

Розглянемо ситуацію, коли потрібно розподілити m видів робіт (або виконавців) по n верстатах. Робота i (де $i = 1, 2, \dots, m$) виконується на верстаті j (де $j = 1, 2, \dots, n$) пов'язана з витратами c_{ij} . Завдання полягає в такому розподілі робіт по верстатам (одна робота виконується одним верстатом), що відповідає мінімуму сумарних витрат. Така задача відома, як задача про призначення.

Цю задачу можна розглядати як окремий випадок транспортної задачі. Тут роботи представляють «вихідні пункти», а верстати — «пункти призначення». Пропозиція у кожному вихідному пункті дорівнює 1, тобто $a_i = 1$ для кожного i . Аналогічно попит у кожному пункті призначення дорівнює 1, тобто $b_j = 1$ для всіх j . Вартість «перевезення» (прикріплення) роботи i до верстата j дорівнює c_{ij} . Якщо яку-небудь роботу не можна виконати на деякому верстаті, то відповідна вартість c_{ij} береться рівною дуже великому числу M .

У таблиці 1 ілюструється загальна структура задачі про призначення.

Перш ніж розв'язувати задачу методами, асоційованими з транспортною моделлю, необхідно «ліквідувати» дисбаланс, додавши фіктивні роботи або верстати в залежності від початкових умов ($m < n$ або $m > n$). Тому без втрати загальності можна покласти $m = n$.

		Верстати				
		1	2	...	n	
Види робіт	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	1
	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	1
		1	1	...	1	

Табл. 1

Задачу про призначення можна представити таким чином. Нехай змінні x_{ij} приймають лише два значення або 0, або одиницю, причому

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i\text{-а робота не виконується на } j\text{-му верстаті;} \\ 1, & \text{якщо } i\text{-а робота виконується на } j\text{-му верстаті.} \end{cases}$$

Тепер задача буде сформульована так:

мінімізувати

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad \forall j = \overline{1, n},$$

де $x_{ij} =$ або 0, або 1.

Для ілюстрації задачі про призначення розглянемо табл. 2 з трьома роботами і трьома верстатами.

		Верстати				
		1	2	3		
Види робіт	1	5	7	9	1	
	2	14	10	12	1	
	3	15	13	16	1	
		1	1	1		

Табл. 2

Початковий розв'язок (отриманий за правилом північно-західного кута) буде виродженим.

Ця особливість характерна для задачі про призначення незалежно від методу, що використовується для одержання початкового базису. Насправді розв'язок буде залишатися виродженим на всіх ітераціях.

Специфічна структура задачі про призначення дозволяє розробити ефективний метод її розв'язування. Покажемо, як реалізувати цей метод на прикладі приведеної вище задачі.

Оптимальний розв'язок задачі про призначення не зміниться, якщо до будь-якого рядка або стовпчика матриці вартостей додати (або відняти) постійну величину.

Звідси випливає, що мінімізація початкової функції приводить до того ж розв'язку, як і мінімізація нової функції після додавання (або віднімання) постійної величини до будь-якого рядка або стовпчика матриці вартостей.

Наведені міркування показують, що якщо можна побудувати нову матрицю c'_{ij} — матрицю з нульовими елементами і ці нульові елементи або їхня підмножина відповідають припустимому розв'язку, то такий розв'язок буде оптимальним, оскільки вартість не може бути від'ємною.

В табл. 3 нульові елементи отримані відніманням найменшого елемента в кожному рядку (стовпчику) з відповідного рядка (стовпчика). Якщо спочатку розглянути рядки, то отримаємо c'_{ij} — матрицю, що представлена в табл. 3. (У першому рядку від елементів відняли 5, у другому — 10 і у третьому — 13).

		Верстати		
		1	2	3
Види робіт	1	0	2	4
	2	4	0	2
	3	2	0	3

Табл. 3

Віднімемо з третього стовпчика найменше число 2, після цього отримаємо табл. 4.

Квадратиками у табл. 4 позначені елементи, що відповідають припустимому (і, отже, оптимальному) призначенню:

$$(1, 1), (2, 3), (3, 2)$$

з вартістю $5 + 12 + 13 = 30$. Зазначимо, що ця вартість дорівнює сумі чисел, що віднімали від рядків і стовпчика: $5 + 10 + 13 + 2 = 30$.

		Верстати		
		1	2	3
Види робіт	1	0	2	2
	2	4	0	0
	3	2	0	1

Табл. 4

Але, на жаль, не завжди вдається визначити припустиме призначення настільки просто, як у розглянутому прикладі. Тому потрібні інші правила для отримання оптимального розв'язку. Ці правила ілюструються на прикладі, наведеному у табл. 5.

		Верстати			
		1	2	3	4
Види робіт	1	1	4	6	3
	2	9	7	10	9
	3	4	5	11	7
	4	8	7	8	5

Табл. 5

Виконуючи ті ж початкові кроки, що й у попередньому прикладі, одержимо табл. 6. А саме, від першого рядка відняли 1, від другого рядка відняли 7, від третього рядка відняли 4, від четвертого рядка відняли 5. Потім, у новій таблиці, від третього стовпчика відняли 3.

		Верстати			
		1	2	3	4
Види робіт	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

Табл. 6

У цьому випадку неможливо знайти припустимий розв'язок, що складається з нулів. Подальша процедура складається в проведенні мінімальної кількості прямих через деякі рядки і стовпчики для того, щоб усі нулі виявилися викресленими. У табл. 7 показано, як використовується це правило.

		Верстати			
		1	2	3	4
Види робіт	1	0	3	2	2
	2	2	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>2</u>
	3	0	1	4	3
	4	3	<u>2</u>	<u>0</u>	<u>0</u>

Табл. 7

На наступному кроці обирається найменший невикреслений елемент (у нашому випадку він дорівнює 1 див. табл. 7). Цей елемент

віднімається з кожного невикресленого елемента і додається до кожного елемента, що знаходиться на перетині проведених прямих. У результаті отримаємо наступну табл. 8, що відповідає оптимальному призначенню:

$$(1,1), (2,3), (3,2), (4,4).$$

Відповідні сумарні витрати дорівнюють:

$$1 + 10 + 5 + 5 = 21.$$

		Верстати			
		1	2	3	4
Види робіт	1	0	2	1	1
	2	3	0	0	2
	3	0	0	3	2
	4	4	2	0	0

Табл. 8

Варто зазначити, що якщо на останньому кроці оптимальний розв'язок не досягнуто, то процедуру проведення прямих варто повторювати доти, поки не буде отримано припустимий розв'язок.

6.1 Запитання для самоконтролю

1. Яка постановка задачі про призначення?
2. У чому відмінність моделі задачі про призначення від моделі транспортної задачі?
3. Які початкові і шукані параметри задачі про призначення?
4. Яким чином у моделі задачі про призначення можна заборонити конкретне призначення?

5. У чому особливості процесу зведення задачі про призначення до збалансованого вигляду?
6. У якому випадку в модель вводять фіктивного працівника (вид роботи)?
7. Сформулюйте основні кроки алгоритму угорського методу.
8. Сформулюйте додаткові кроки алгоритму угорського методу.
9. Як визначають оптимальний розв'язок задачі про призначення?
10. Яким чином може бути сформульовано критерій оптимальності у задачі про призначення?

6.2 Завдання для самостійної роботи

Нехай k — номер академічної групи, у якій знаходиться студент, i — порядковий номер студента у списку академічної групи.

Розв'язати задачу розподілу чотирьох робітників на чотирьох верстатах. Відповідні коефіцієнти вартості у гривні приведені в табл. 9

		Верстати			
		1	2	3	4
Робітники	1	k	3	$7+i$	4
	2	5	$6+i$	$9+k$	10
	3	8	4	5	3
	4	2	9	12	$2+i$

Табл. 9

Тема 7. Цілочисельне програмування

Цілочисельне програмування орієнтовано на розв'язування задач математичного програмування, в якому всі або деякі змінні повинні приймати тільки цілочисленні значення. Задача називається *повністю цілочисельною*, якщо умова цілочисельності накладена на всі її змінні, коли ця умова відноситься лише до деяких змінних, задача називається *частково цілочисельною*. Якщо при цьому цільова функція і функції, що входять до обчислень, лінійні, то задача є *лінійною цілочисельною*.

Властиві цілочисельному програмуванню труднощі обчислювального характеру, пов'язані з ефектом помилки округлення, що виникають при використуванні цифрових ЕОМ, зумовили дослідників знайти альтернативні шляхи рішення проблеми. Один з простих підходів полягає в розв'язуванні неперервної модифікації цілочисельної задачі з подальшими округленням координат одержаного оптимуму до допустимих цілих значень. Округлення в даному випадку є не що інше, як наближення. Проте немає гарантії, що округлене рішення задовольнятиме обмеженням. Для лінійної задачі з обмеженнями у вигляді рівності округлене рішення завжди не задовольняє цим обмеженням. Як впливає з теорії ЛП, округлене рішення не може бути допустимим, оскільки це означало б, що один і той же базис (за умови рівності нулю небазисних змінних) визначає два різні розв'язки задачі.

Неспроможність округлення підкреслюється також наступними міркуваннями. Не дивлячись на те, що цілочисельні змінні звичайно виражають кількість неподільних предметів (наприклад, машин, людей, кораблів), можливі і інші типи специфікації цих змінних. Так, розв'язок про фінансування деякого проекту представляється булевою змінною x ($x = 0$, якщо проект віддаляється, і $x = 1$, якщо проект приймається). В цьому випадку безглуздо оперувати дробовими значеннями величини x , і процедура округлення є логічно неприйнятною.

7.1 Класифікація методів розв'язування задач цілочисельного програмування

Методи розв'язування задач цілочисельного програмування можна класифікувати як:

- 1) методи відсічень;

2) комбінаторні методи.

Початковою задачею для демонстрації можливостей методів відсічень, що використовуються при розв'язуванні лінійних цілочисельних задач, є задача з послабленими обмеженнями, яка виникає в результаті виключення вимоги цілочисельності змінних. У міру введення спеціальних додаткових обмежень, що враховують вимогу цілочисельності, многогранник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово деформується до тих пір, поки координати оптимального розв'язку не стануть цілочисельними. Назва «методи відсічень» — пов'язано з тією обставиною, що додаткові обмеження, що вводяться, відсікають (виключають) деякі області многогранника допустимих розв'язків, в яких відсутні точки з цілочисельними координатами.

У основі комбінаторних методів лежить ідея перебору всіх допустимих цілочисельних розв'язків. Зрозуміло, на перший план тут виноситься проблема розробки тестових процедур, що дозволяє безпосередньо розглядати лише (відносно невелику) частину вказаних розв'язків, а решта допустимих розв'язків враховувати деяким непрямым чином.

Найвідомішим комбінаторним методом є метод гілок і меж, який також опирається на процедуру розв'язування задачі з послабленими обмеженнями. При такому підході з даної задачі отримуємо дві підзадачі шляхом спеціального «розбиття» простору розв'язків і відкидання областей, що не містять допустимих цілочисельних розв'язків.

У разі, коли цілочисельні змінні є булевими, застосовуються комбіновані методи. Булеві властивості змінних істотно спрощують пошук рішення.

7.2 Алгоритми, що реалізують метод відсікаючих площин

Розглянемо приклад, що розкриває значення поняття «відсікаюча площина». Розглянемо лінійну задачу цілочисельного програмування:

$$\max z = 7x_1 + 9x_2$$

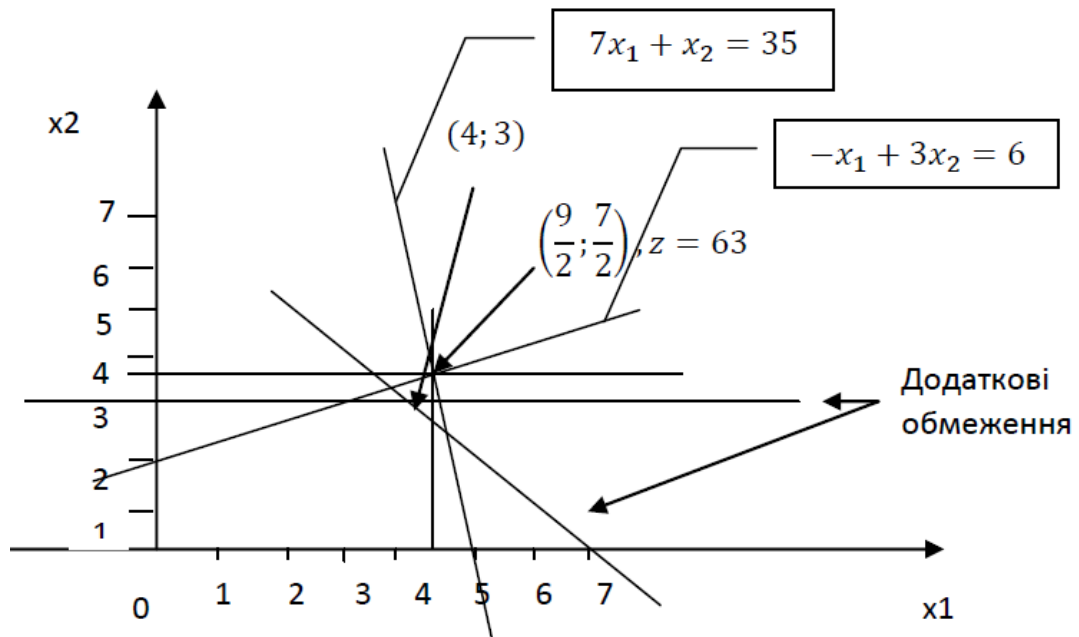
при обмеженнях

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35,$$

$$x_1, x_2 - \text{додатні цілі.}$$

Побудуємо область допустимих розв'язків задачі з ослабленими обмеженнями, отриманої шляхом відкидання вимоги цілочисельності змінних.



Оптимальне значення цільової функції $z = 63$ досягається в точці з дробовими координатами $x_1 = \frac{9}{2}$ і $x_2 = \frac{7}{2}$.

У основі методу відсікаючих площин лежить перетворення області допустимих рішень задачі з послабленими обмеженнями в опуклий многогранник, екстремальна точка якого є оптимальним розв'язком початкової задачі і повинна лежати всередині або на межі побудованого многогранника.

На малюнку показано, як введення двох (деяким чином вибраних) додаткових обмежень дозволяє одержати нову екстремальну точку з координатами $(4; 3)$, що є оптимальним розв'язком сформульованої вище задачі цілочисельного програмування. Зазначимо, що відсічена від множини допустимих розв'язків послабленої задачі область не містить точок з цілочисельними координатами.

7.2.1 Дробовий алгоритм розв'язування повністю цілочисельних задач (перший алгоритм Гоморі)

Необхідною умовою застосування даного алгоритму є цілочисельність всіх коефіцієнтів і правих частин обмежень початкової задачі. Наприклад, обмеження $x_1 + (1/3)x_2 \leq (13/2)$ можна записати у вигляді нерівності $6x_1 + 2x_2 \leq 39$, у якій дробу відсутні.

Перейдемо до опису даного алгоритму. На першому кроці розв'язується задача з послабленими обмеженнями, що не містять умови цілочисельності змінних. Якщо отриманий оптимальний розв'язок виявляється цілочисельним, то він є також розв'язком початкової задачі. Інакше слід ввести додаткові обмеження, що породжують (разом з початковими обмеженнями) нову задачу ЛП, рішення якої виявляється цілочисельним і співпадає з оптимальним рішенням початкової цілочисельної задачі.

Нехай остання симплексна таблиця задачі з послабленими обмеженнями має такий вигляд:

Б.зм	x_1	...	x_i	...	x_m	w_1	...	w_j	...	w_n	Р-ок
z	0	...	0	...	0	$\bar{c}_1$	...	$\bar{c}_j$	...	$\bar{c}_n$	β_0
x_1	1	...	0	...	0	α_1^1	...	α_1^j	...	α_1^n	β_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	0	...	1	...	0	α_i^1	...	α_i^j	...	α_i^n	β_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	0	...	0	...	1	α_m^1	...	α_m^j	...	α_m^n	β_m

Тут через x_i ($i = \overline{1, m}$) позначено базисні змінні, а через w_j ($j = \overline{1, n}$) — небазисні змінні. Така структура позначень вибрана з міркувань зручності.

Розглянемо i -тий рядок симплексної таблиці, якому відповідає неціле значення базисної змінної x_i і виразимо x_i через небазисні змінні:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_i^j w_j, \quad \beta_i - \text{не ціле.}$$

Кожен рядок симплексної таблиці, що породжує аналогічну рівність, називатимемо *ведучим рядком*. Оскільки коефіцієнти цільової функції можна вважати цілими числами, змінна z також повинна бути цілочисельною, і верхній рядок таблиці допустимо вибирати ведучим. Крім того, вимога цілочисельності z виявляється вельми істотною при доведенні скінченності даного алгоритму.

Нехай

$$\beta_i = [\beta_i] + f_i, \quad \alpha_i^j = [\alpha_i^j] + f_{ij},$$

$N = [a]$ — найбільше ціле число, що задовольняє умові $N \leq a$. Звідси випливає, що $0 < f_i < 1$, $0 \leq f_{ij} < 1$. Таким чином, f_i є додатний дріб, а f_{ij} невід'ємний дріб.

Розглянемо таку таблицю:

a	$[a]$	$f = a - [a]$
$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{3}$	-3	$\frac{2}{3}$
-1	-1	0
$-\frac{2}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$

Після підстановки згаданих вище тотожностей в рівняння, що виражає x_i через небазисні змінні, це рівняння набуває такого вигляду:

$$x_i = [\beta_i] + f_i - \sum_{j=1}^n \left([\alpha_i^j] + f_{ij} \right) w_j,$$

$$f_i - \sum_{j=1}^n f_{ij} w_j = x_i - [\beta_i] + \sum_{j=1}^n [\alpha_i^j] w_j.$$

Оскільки всі змінні x_i і w_j приймають цілі значення, права частина рівняння повинна бути цілочисельною, звідки випливає, що ліва частина рівняння також повинна приймати цілі значення. Далі, оскільки $f_{ij} \geq 0$ і $w_j \geq 0$ для всіх i, j , то $\sum_{j=1}^n f_{ij} w_j \geq 0$. Це означає, що $f_i - \sum_{j=1}^n f_{ij} w_j < 1$, оскільки $f_i < 1$. Оскільки ліва частина даної нерівності повинна приймати цілі значення, можна записати необхідну умову її цілочисельності в такому вигляді:

$$f_i - \sum_{j=1}^n f_{ij} w_j \leq 0.$$

Останнє обмеження перепишемо у вигляді рівності:

$$s_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} w_j - f_i,$$

де s_i — невід'ємна додаткова змінна, яка за визначенням повинна приймати цілі значення. Таке обмеження-рівність визначає відсічення Гоморі для повністю цілочисельної задачі. З симплексної таблиці маємо,

що $w_j = 0$ і, таким чином, $s_i = -f_i$, тобто дана компонента розв'язку не є допустимою. Це означає, що одержаний раніше розв'язок не є допустимим, тобто, що одержаний раніше розв'язок неперервної задачі не задовольняє новому обмеженню. У такій ситуації слід використовувати двоїстий симплекс метод, реалізація якого забезпечує відсічення деякої області многогранника розв'язків, що не містить точок з цілочисельними координатами.

Перетворимо початкову таблицю шляхом приписування до неї рядка і стовпця, відповідних побудованому відсіченню Гоморі для повністю цілочисельної задачі. Одержимо нову таблицю:

Б.зм	x_1	...	x_i	...	x_m	w_1	...	w_j	...	w_n	s_i	Р-к
z	0	...	0	...	0	$\bar{c}_1$	...	$\bar{c}_j$	...	$\bar{c}_n$	0	β_0
x_1	1	...	0	...	0	α_1^1	...	α_1^j	...	α_1^n	0	β_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	0	...	1	...	0	α_i^1	...	α_i^j	...	α_i^n	0	β_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	0	...	0	...	1	α_m^1	...	α_m^j	...	α_m^n	0	β_m
s_i	0	...	0	...	0	$-f_{i1}$	...	$-f_{ij}$	...	$-f_{in}$	1	$-f_i$

Якщо отриманий (в результаті застосування двоїстого симплекс-методу) розв'язок є цілочисельним, то процес розв'язання початкової задачі завершений. Інакше необхідно ввести нове відсічення на базі одержаної таблиці і знову скористатися двоїстим симплекс-методом. Описана процедура повторюється до тих пір, поки не буде знайдено цілочисельний розв'язок. Якщо на деякій ітерації при використанні двоїстого симплекс-методу виявиться відсутність допустимого розв'язку, то дана задача не має допустимого цілочисельного розв'язку. Назва дробовий алгоритм пов'язана з тією обставиною, що всі ненульові коефіцієнти введеного відсічення менше одиниці. При вивченні дробового алгоритму може скластися враження, що розміри симплексної таблиці необмежено зростають у міру додавання нових відсічень до набору обмежень початкової задачі. Це не відповідає дійсності. Загальне число обмежень породженої задачі не може перевищувати кількості змінних початкової задачі, а саме $(m + n)$. Насправді, якщо породжена задача містить більш ніж $(m + n)$ обмежень, то одна або декілька додаткових змінних s_i , асоційованих з відсіченням Гоморі, повинні стати базисними. В цьому випадку відповідна рівність стає надмірною і може бути виключена з таблиці.

Приклад 7.1. Розглянемо задачу, розв'язану вище графічним способом

$$\max z = 7x_1 + 9x_2$$

при обмеженнях

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Запишемо в стандартній формі:

$$z - 7x_1 - 9x_2 = 0,$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$$

$$7x_1 + x_2 + x_4 = 35.$$

Оптимальна симплекс-таблиця має вигляд:

Б.ЗМ	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Розв'язок
z	1	0	0	28/11	15/11	63
x_2	0	0	1	7/22	1/22	7/2
x_1	0	1	0	-1/22	3/22	9/2

Оскільки одержаний розв'язок не є цілочисельним, слід розширити дану таблицю шляхом введення деякого відсічення. Як ведучий рядок можна вибрати довільний з рядків таблиці, що містять нецілі компоненти розв'язку. Звичайно використовується емпіричне правило, згідно якому обирається рядок, відповідний максимальному значенню f_i . Оскільки в обидва рядки даної таблиці входить одне і те ж значення f_i , а саме $f_1 = f_2 = \frac{1}{2}$, будь-яка з них може бути вибрана як ведуча. Рядку з базисною змінною x_2 відповідає рівність:

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$

або

$$x_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = 3\frac{1}{2}.$$

Отже, рівняння відсічення Гоморі має вигляд:

$$s_1 - \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Одержуємо нову таблицю:

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Р-ок
z	1	0	0	28/11	15/11	0	63
x_2	0	0	1	7/22	1/22	0	$3\frac{1}{2}$
x_1	0	1	0	$-1/22$	$3/22$	0	$4\frac{1}{2}$
s_1	0	0	0	$-7/22$	$-1/22$	1	$-\frac{1}{2}$

Додаємо в симплексну таблицю рядок, що містить нове обмеження, і стовпець, що містить нову змінну, і продовжуємо вирішувати завдання двоїтим симплексним методом, оскільки тепер у таблиці записано псевдоплан. Застосування двоїстого симплекс-методу дає:

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Р-ок
z	1	0	0	0	1	8	59
x_2	0	0	1	0	0	1	3
x_1	0	1	0	0	$1/7$	$-1/7$	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	0	1	$1/7$	$-22/7$	$1\frac{4}{7}$

Оскільки розв'язок знову не є цілочисельним, необхідно продовжити процес введення відсічень. Рядку з базисною змінною x_1 відповідає рівність:

$$x_1 + \left(0 + \frac{1}{7}\right) x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right) s_1 = 4 + \frac{4}{7},$$

а породжене відсічення таке:

$$s_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 = -\frac{4}{7}.$$

Додамо це відсічення до останньої таблиці:

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Р-ок
z	1	0	0	0	1	8	0	59
x_2	0	0	1	0	0	1	0	3
x_1	0	1	0	0	$1/7$	$-1/7$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	0	1	$1/7$	$-22/7$	0	$1\frac{4}{7}$
s_2	0	0	0	0	$-1/7$	$-6/7$	1	$-\frac{4}{7}$

У результаті застосування двоїстого симплекс-методу одержимо таблицю:

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Р-ок
z	1	0	0	0	0	2	7	55
x_2	0	0	1	0	0	1	0	3
x_1	0	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	0	1	6	-7	4

яка дає оптимальний цілочисельний розв'язок початкової задачі:

$$z = 55, x_1 = 4, x_2 = 3.$$

Можна наочно переконатися у тому, що розглянуті вище відсічення виключають деякі області многогранника допустимих розв'язків. Перше відсічення

$$s_1 - \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 = -\frac{1}{2}$$

записане в змінних x_1 та x_2 після відповідної заміни приймає такий вигляд:

$$s_1 - \frac{7}{22}(6 + x_1 - 3x_2) - \frac{1}{22}(35 - 7x_1 - x_2) = -\frac{1}{2}$$

або

$$s_1 + x_2 = 3.$$

Це рівняння еквівалентне нерівності $x_2 \leq 3$.

Аналогічним чином друге відсічення

$$s_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 = -\frac{4}{7}$$

породжує еквівалентне обмеження в змінних x_1 та x_2

$$s_2 - \frac{1}{7}(35 - 7x_1 - x_2) - \frac{6}{7}(3 - x_2) = -\frac{4}{7}$$

або

$$s_2 + x_1 + x_2 = 7, \quad x_1 + x_2 \leq 7.$$

7.2.2 Ефективність відсікання Гоморі

З викладеного вище випливає, що вид нерівності, яка визначає деяке відсічення, залежить від вибору ведучого рядка. Таким чином, одна і та ж симплекс-таблиця породжує різні відсічення. Виникає природне питання яке з них є найефективнішим? Ефективність відсічень характеризується розмірами області, що відсікається від многогранника допустимих розв'язків, що математично можна виразити таким чином:

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}w_j \geq f_i, \quad (7.1)$$

$$\sum_{j=1}^n f_{kj}w_j \geq f_k. \quad (7.2)$$

Говоритимемо, що відсікання (7.1) більш ефективне, ніж відсікання (7.2), якщо $f_i \geq f_k$, $f_{ij} \leq f_{kj}$, $\forall j$, причому принаймні в одному випадку виконується строга нерівність. Використовування даного визначення ефективності відсічення пов'язане з істотними труднощами обчислювального характеру. Тому були розроблені емпіричні правила, що відображають значення цього визначення. Два такі правила вимагають будувати відсічення на основі ведучого рядка, якому відповідають: а) $\max_i(f_i)$ або б) $\max_i \left\{ f_i / \sum_{j=1}^n f_{ij} \right\}$. Друге правило має певні переваги перед першим, оскільки воно тісніше пов'язано з даним вище визначенням ефективності відсічення.

Приклад 7.2. Оптимальне значення цільової функції $z = 63$ задачі з послабленими обмеженнями, розглянутої в прикладі 1, досягається в точці $x_1 = \frac{9}{2}$ і $x_2 = \frac{7}{2}$. Оскільки значення z є цілим, відповідний рядок не може бути вибраним як ведучий. Перше з перерахованих вище емпіричних правил не дозволяє здійснити якнайкращий вибір ведучого рядка, оскільки $f_1 = f_2 = 1/2$. Щоб застосувати друге правило, необхідно обчислити всі коефіцієнти відсічення Гоморі для кожного з ведучих рядків.

Введемо відсічення відповідно ведучим рядкам з базисними змінними x_1 і x_2 :

$$\begin{aligned}\frac{21}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 &\geq \frac{1}{2} \quad (x_1 - \text{рядок}), \\ \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 &\geq \frac{1}{2} \quad (x_2 - \text{рядок}).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{22} + \frac{1}{22}} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{21}{22} + \frac{3}{22}},$$

то за ведучий рядок слід вибрати рядок з базисною змінною x_2 .

У прикладі 1 x_2 - рядок був обраний ведучим випадковим чином. Щоб підтвердити правильність зробленого вибору, порівняємо два відсічення, асоційовані з x_1 - рядком і x_2 - рядком. У прикладі 1 показано, що відсічення, відповідне x_2 - рядку і записане в змінних x_1 і x_2 , має такий вигляд: $x_2 \leq 3$. За допомогою аналогічної заміни відсічення, відповідне x_1 - рядку, можна записати у вигляді нерівності: $x_2 \leq \frac{10}{3}$. Перша нерівність є жорсткішою і, отже, визначає ефективніше відсічення. Проте, слід зазначити, що використання розглянутих емпіричних правил, не завжди забезпечує введення найефективнішого відсічення.

7.3 Метод гілок і меж

Даний метод розв'язування задачі цілочисельного програмування також опирається на розв'язок задачі з ослабленими обмеженнями. Проте на відміну від методів відсічень методу гілок і меж безпосередньо застосовується як до повністю, так і до частково цілочисельних задач.

Згідно загальної ідеї методу, спочатку розв'язується задача з ослабленими обмеженнями (задача ЛП). Нехай x_r - цілочисельна змінна,

значення x_r^* якій в оптимальному рішенні ослабленої задачі є дробовим. Інтервал

$$[x_r^*] < x_r < [x_r^*] + 1$$

не містить допустимих цілочисельних компонент рішення. Тому допустиме ціле значення x_r повинне задовольняти одній з нерівностей

$$x_r \leq [x_r^*] \quad \text{або} \quad x_r \geq [x_r^*] + 1.$$

Введення цих умов в задачу з ослабленими обмеженнями породжує дві не зв'язані між собою задачі. У такому разі говорять, що початкова задача розгалужується (або розбивається на дві підзадачі). Здійснений в процесі розгалуження облік необхідних умов цілочисельності дозволяє виключити частину многогранника допустимих розв'язків, що не містить точок з цілими координатами.

Потім кожна підзадача розв'язується як задача ЛП (з цільовою функцією початкової задачі). Якщо одержаний оптимум виявляється допустимим для цілочисельної задачі, такий розв'язок слід зафіксувати як найкращий. При цьому не має необхідності продовжувати «розгалуження підзадачі», оскільки поліпшити одержаний розв'язок, очевидно, не вдасться. Інакше підзадача в свою чергу повинна бути розбита на дві підзадачі знову при врахуванні умови цілочисельності змінних, значення яких в оптимальному розв'язку не є цілими. Зрозуміло, як тільки одержаний допустимий цілочисельний розв'язок однієї з підзадач виявиться кращим, він фіксується замість зафіксованого раніше. Процес розгалуження продовжується, наскільки це можливо, до тих пір, поки кожна підзадача не приведе до цілочисельного розв'язку або поки не буде встановлена неможливість поліпшення наявного розв'язку. В цьому випадку зафіксований допустимий розв'язок є оптимальним.

Ефективність обчислювальної схеми методу можна підвищити ввівши в розгляд поняття межі, на основі якого робиться висновок про необхідність подальшого розбиття кожної з підзадач. Якщо оптимальний розв'язок підзадачі з ослабленнями забезпечує гірше значення цільової функції, ніж наявний розв'язок, то підзадачу далі розглядати не слід. У таких випадках говорять що підзадача прозондована, і її можна викреслити із списку підзадач, породжених початковою задачею.

Іншими словами, як тільки одержано допустимий цілочисельний розв'язок деякої підзадачі, відповідне значення цільової функції може бути використане як (верхня у разі мінімізації і нижня у разі ма-

ксимізації) межа, наявність якої дозволяє формалізувати процедуру виключення прозондованих підзадач.

Слід підкреслити виняткову важливість проблеми виявлення достатньо близької до оптимального розв'язку межі вже на перших етапах обчислень. Успішний розв'язок вказаної проблеми знаходиться в прямій залежності від порядку, в якому породжуються і розв'язуються різні підзадачі, а також від вибору змінної, що ініціює процес розгалуження. На жаль, питання про «якнайкращий» спосіб вибору змінної розгалуження або послідовності рішення конкретних підзадач поки що не вирішене. Тут можна скористатися правилами, які широко застосовуються в програмах ЕОМ, що використовують апарат методу гілок і меж.

Приклад 7.3.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

при обмеженнях

$$5x_1 + 7x_2 \leq 35,$$

$$4x_1 + 9x_2 \leq 36,$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}.$$

Спершу сформульована задача розв'язується як задача ЛП з послабленими обмеженнями:

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0,$$

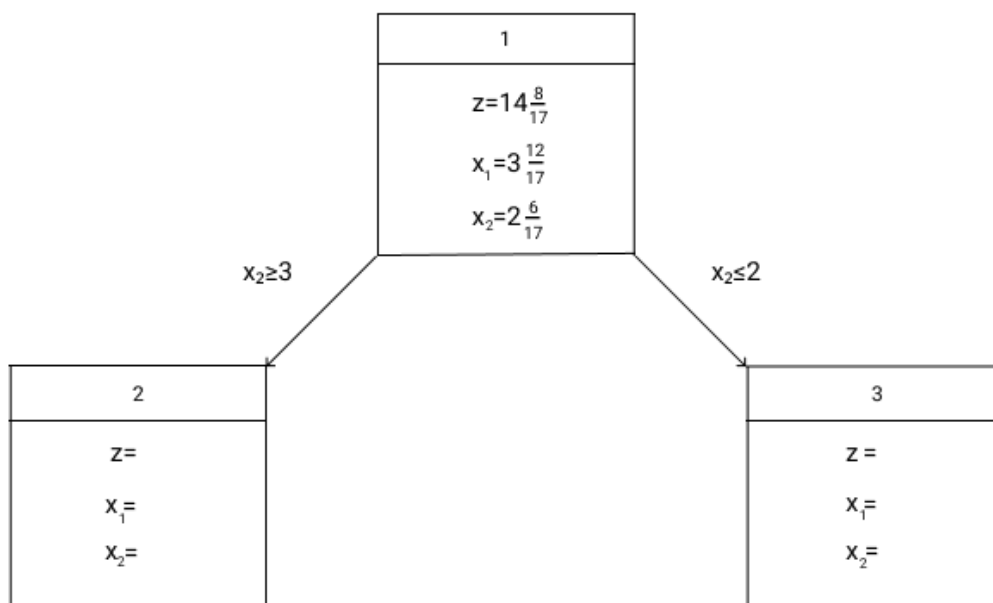
$$5x_1 + 7x_2 + x_3 = 35,$$

$$4x_1 + 9x_2 + x_4 = 36.$$

Оптимальна симплекс-таблиця має вигляд:

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Р-ок
z	1	0	0	6/17	1/17	246/17
x_1	0	1	0	9/17	-7/17	63/17
x_2	0	0	1	-4/17	5/17	40/17

Зобразимо сукупність породжених задач у вигляді дерева. Початковою є вершина 1, в якій сформульована задача розв'язується як задача ЛП з послабленими обмеженнями.



Оскільки обидві змінні приймають нецілі значення, будь-яка з них може бути вибрана в якості змінної, ініціюючої процес розгалуження. Вибір змінної x_2 породжує дві підзадачі, пов'язані з умовами $x_2 \leq 2$ і $x_2 \geq 3$ відповідно ($x_2^* = 2\frac{6}{17}$, $x_2^* = 2$, а саме підзадачі 2, 3).

Породжені підзадачі містять всі допустимі цілочисельні розв'язки початкової задачі, тобто початкова сукупність допустимих цілочисельних розв'язків залишається незмінною в процесі розгалуження.

На наступному кроці здійснюється вибір однієї з підзадач 2 або 3 для розв'язання і при необхідності для подальшого розгалуження. Важливо відзначити, що не існує точних способів реалізації вказаного вибору. Не менш важливою є та обставина, що вибір різних альтернатив призводить до різних послідовностей підзадач і, отже, до різних кількостей ітерацій.

Припустимо, в першу чергу розглядається вершина 2 ($x_2 \leq 2$). Розв'язок цієї задачі одержується шляхом додавання обмеження $x_2 \leq 2$ до оптимальної таблиці для задачі, зображеної вершиною 1, і подальшого застосування двоїстого симплекс-методу

$$x_2 + s_1 = 2,$$

x_2 виражаємо з оптимальної симплекс-таблиці:

$$x_2 - \frac{4}{17}x_3 + \frac{5}{17}x_4 = \frac{40}{17} \Rightarrow x_2 = \frac{40}{17} + \frac{4}{17}x_3 - \frac{5}{17}x_4,$$

$$\frac{40}{17} + \frac{4}{17}x_3 - \frac{5}{17}x_4 + s_1 = 2 \Rightarrow s_1 + \frac{4}{17}x_3 - \frac{5}{17}x_4 = -\frac{6}{17}.$$

Б.ЗМ	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Р-ок
z	1	0	0	$6/17$	$1/17$	0	$246/17$
x_1	0	1	0	$9/17$	$-7/17$	0	$63/17$
x_2	0	0	1	$-4/17$	$5/17$	0	$40/17$
s_1	0	0	0	$4/17$	$-5/17$	1	$-6/17$

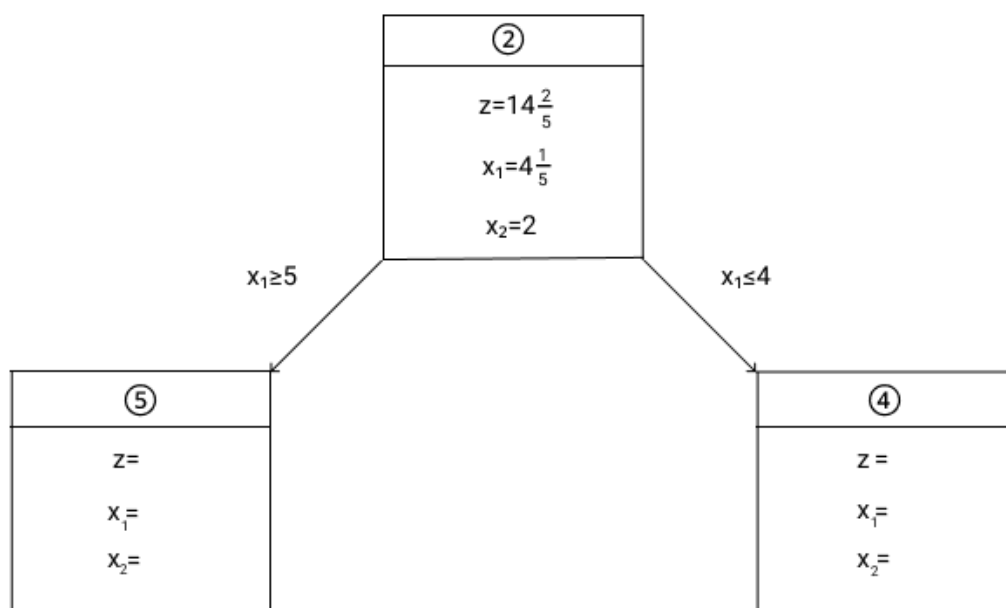
$$-1/5$$

Перерахуємо симплекс-таблицю:

Б. ЗМ	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Р-ок
z	1	0	0	$2/5$	0	$1/5$	$14\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$1/5$	0	$-7/5$	$4\frac{1}{5}$
x_2	0	0	1	0	0	1	2
x_4	0	0	0	$-4/5$	1	$-17/5$	$\frac{6}{5}$

→ Оптимальна
таблиця з
обмеженням
 $x_2 \leq 2$, тобто
для вершини 2

Оскільки значення $x_1 = 4\frac{1}{5}$ продовжує залишатися нецілим, врахування вимог $x_1 \leq 4$ і $x_1 \geq 5$ в задачі 2 породжує підзадачі 4 і 5. Знову припустимо, що спочатку ми розглядаємо вершину 4 (а не вершину 5 або вершину 3).



До оптимальної таблиці вершини 2 додамо обмеження

$$x_1 \leq 4 : x_1 + s_1 = 4,$$

$$x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{7}{5}s_1 = \frac{21}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{21}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{7}{5}s_1,$$

$$\frac{21}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{7}{5}s_1 + s_2 = 4 \Rightarrow -\frac{1}{5}x_3 + \frac{7}{5}s_1 + s_2 = -\frac{1}{5}$$

Б.ЗМ	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Р-ок
z	1	0	0	$2/5$	0	$1/5$	0	$14\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$1/5$	0	$-7/5$	0	$4\frac{1}{5}$
x_2	0	0	1	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	$-4/5$	1	$-17/5$	0	$6/5$
s_2	0	0	0	$-1/5$	0	$7/5$	1	$-1/5$

Б. зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Р-ок
z	1	0	0	0	0	3	2	14
x_1	0	1	0	0	0	0	1	4
x_2	0	0	1	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	0	1	-9	-4	2
x_3	0	0	0	1	0	-7	-5	1

→ Оптимальна
симплекс-
таблиця
вершини 4

Підзадача 4 має цілочисельний розв'язок $z = 14$ при $x_1 = 4$ і $x_2 = 2$. Наявність у підзадачі 4 цілочисельного розв'язку не означає, що знайдено оптимум початкової задачі. Причиною такого висновку є ще не розв'язані підзадачі 3 і 5, які можуть поліпшити цілочисельний розв'язок $z = 14$.

Цілочисельний розв'язок підзадачі 4 визначає нижню межу значень цільової функції. Немає необхідності розглядати ті подальші підзадачі, для яких оптимальні значення z менше вказаної нижньої межі.

Розглянемо підзадачу 3. Для цього введемо обмеження:

$$x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2 - s_3 = 3.$$

Виразимо x_2 з оптимальної симплекс-таблиці підзадачі 1:

$$x_2 - \frac{4}{17}x_3 + \frac{5}{17}x_4 = \frac{40}{17} \Rightarrow x_2 = \frac{40}{17} + \frac{4}{17}x_3 - \frac{5}{17}x_4,$$

$$\frac{40}{17} + \frac{4}{17}x_3 - \frac{5}{17}x_4 - s_3 = 3 \Rightarrow s_3 + 3 - \frac{4}{17}x_3 + \frac{5}{17}x_4 - \frac{40}{17} = 0,$$

$$s_3 - \frac{4}{17}x_3 + \frac{5}{17}x_4 = -\frac{11}{17}$$

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_3	Р-ок
z	1	0	0	6/17	1/17	0	246/17
x_1	0	1	0	9/17	-7/17	0	63/17
x_2	0	0	1	-4/17	5/17	0	40/17
s_3	0	0	0	-4/17	5/17	1	-11/17

Перерахуємо симплекс-таблицю:

Б. зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_3	Р-ок
z	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$13\frac{1}{2}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
x_2	0	0	1	0	0	-1	3
x_3	0	0	0	1	$-1\frac{1}{4}$	$-4\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{4}$

$z_{max} = 13\frac{1}{2}$, який не перевищує значення $z = 14$. Таким чином, вершина 3 далі не розглядається, і пошук уздовж гілки $x_2 \geq 3$ слід припинити.

На наступному кроці потрібно досліджувати вершину 5, якій відповідає оптимальне значення z , рівне $14\frac{2}{7}$. Дійсно, до оптимальної таблиці вершини 2 добавимо обмеження

$$x_1 \geq 5, \quad x_1 - s_4 = 5, \quad x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{7}{5}s_1 = 4\frac{1}{5},$$

$$x_1 = 4\frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{7}{5}s_1,$$

$$4\frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{7}{5}s_1 - s_4 = 5, \quad s_4 + 5 - 4\frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{7}{5}s_1 = 0,$$

$$s_4 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{7}{5}s_1 = -\frac{4}{5},$$

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_4	Р-ок
z	1	0	0	$2/5$	0	$1/5$	0	$14\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$1/5$	0	$-7/5$	0	$4\frac{1}{5}$
x_2	0	0	1	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	$-4/5$	1	$-17/5$	0	$6/5$
s_4	0	0	0	$1/5$	0	$-7/5$	1	$-4/5$

Перерахуємо симплекс-таблицю:

Б.зм	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_4	Р-ок
z	1	0	0	$3/7$	0	0	$1/7$	$14\frac{2}{7}$
x_1	0	1	0	0	0	0	-1	5
x_2	0	0	1	$1/7$	0	0	$5/7$	$1\frac{3}{7}$
x_4	0	0	0	$-9/7$	1	0	$-17/7$	$22/7$
s_1	0	0	0	$-1/7$	0	1	$-5/7$	$4/7$

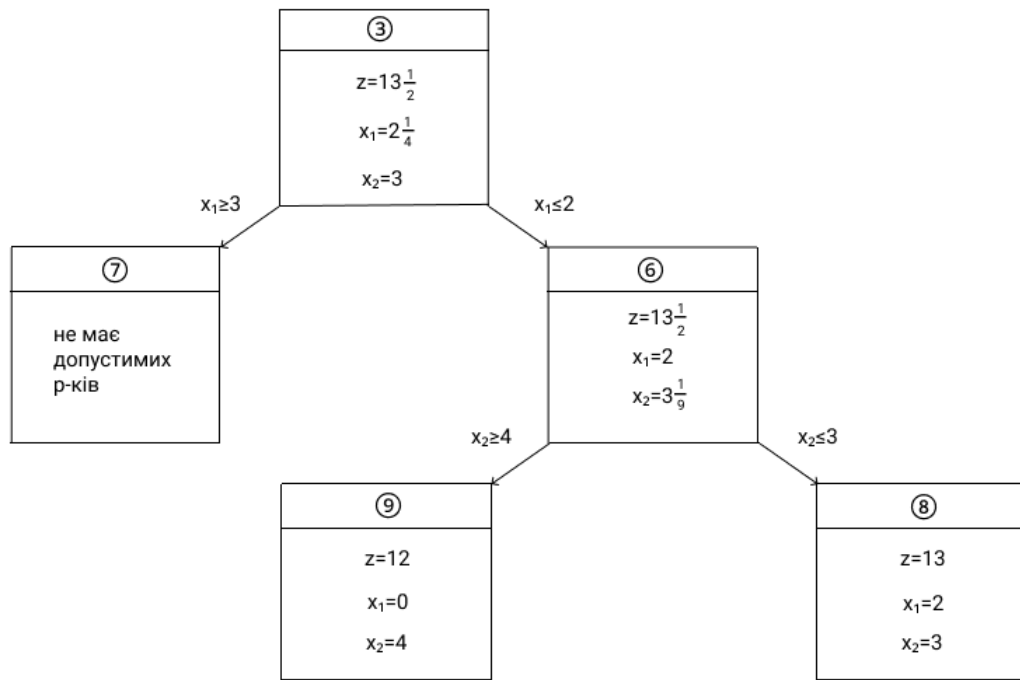
$$x_1 = 5, x_2 = \frac{10}{7}; z_{max} = 14\frac{2}{7}.$$

Не дивлячись на те, що це значення перевищує нижню межу $z = 14$, подальше галуження здійснювати недоцільно, оскільки різниця між значенням z відповідним вершині 5 і z менше одиниці і всі коефіцієнти цільової функції є цілими числами. Таким чином, гілки, що виходять з вершини 5, в кращому разі приведуть до іншого цілочисельного розв'язку, в якому $z = 14$. Якщо пошук інших розв'язків з тим же самим значенням z не представляє цікавості, вершина 5 повинна бути виключена з розгляду.

З вищесказаного виходить, що оптимальний цілочисельний розв'язок початкової задачі асоційований з вершиною 4 ($z = 14, x_1 = 4, x_2 = 2$). Ця інформація одержана шляхом розгляду вершин 1, 2, 3, 4 і 5 у порядку $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5$.

Взагалі кажучи, не можна передбачити, чи є вибір гілки $x_2 \geq 3$, здійснений у вершині 1, вигіднішим, ніж вибір гілки $x_2 \leq 2$, або навпаки. Припустимо, що спочатку досліджується вершина 3 (це означає, що підзадача, відповідна вершині 2, залишається поки не розв'язаною), для якої $z = 13\frac{1}{2}, x_1 = 2\frac{1}{4}$ і $x_2 = 3$.

Пошук оптимального розв'язку здійснюється відповідно до послідовності вершин $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$.



Таким чином, початковий вибір вершини 3 привів до необхідності розв'язання дев'яти підзадач, тоді як вибір вершини 2 - тільки п'яти підзадач. Розглянутий приклад наочно демонструє основний недолік методу гілок і меж, який полягає у відсутності даних про кількість підзадач, що необхідно розв'язувати. Це приводить не тільки до збільшення часу обчислень, але у ряді випадків і до переповнення пам'яті ЕОМ.

7.4 Запитання для самоконтролю

1. Які основні проблеми виникають при розв'язанні дискретних задач?
1. Які методи існують для розв'язання задач цілочисельного програмування?
2. Який принцип використовують для побудови правильного відсікання в методі Гоморі? Наведіть алгоритм методу Гоморі.
3. Наведіть та поясніть геометричну інтерпретацію розв'язків цілочисельної задачі на площині.
4. Яке відсікання вважається правильним? Як визначаються ціла і дробова частини числа?

5. У чому полягає сутність процедури формування правильного відсікання? Запишіть нерівність, яка визначає правильне відсікання.
6. Яку роль відіграє алгоритм двоїстого симплекс-методу при розв'язанні цілочисельної лінійної задачі за методом Гоморі?
7. Скільки разів можна застосовувати метод Гоморі при пошуку оптимального розв'язку задачі цілочисельного програмування?
8. Перелічіть принципові ідеї, що лежать в основі методу гілок і меж.
9. Як проводиться побудова відсікання при розв'язанні цілочисельної лінійної задачі за методом гілок і меж?
10. Опишіть схему розв'язання цілочисельної задачі лінійного програмування за методом гілок і меж.
11. Що таке дерево пошуку? Як його побудувати?
12. Поясніть, яка гілка дерева пошуку вважається перспективною.

7.5 Завдання для самостійної роботи

Нехай i - номер групи, j - порядковий номер студента в групі ($j = \overline{1, 10}$, якщо $j > 10$, тоді як значення параметру j обирають відповідно остачу від ділення на 10).

Розв'язати задачу:

- 1) першим алгоритмом Гоморі,
- 2) методом гілок і меж

$$\max (i - (-1)^j) \cdot x_1 + j \cdot x_2$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} -ix_1 + x_2 &\leq 13 - j \\ (1 + 0,5 \cdot i)x_1 + x_2 &\leq 20 - j + i, \\ -(3 + 0,5 \cdot i)x_1 + x_2 &\geq -(j + 2i), \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Тема 8. Задача комівояжера

(travelling salesman problem, TSP)

Нехай служба доставки кур'єрської пошти отримала ряд замовлень на поточний день. В розпорядженні компанії є мінівен, місткість якого дозволяє виконати розвезення за один етап. Задано розташування пунктів призначення. В якій послідовності необхідно відвідати ці пункти призначення аби мінімізувати пробіг транспортного засобу, при цьому він повинен відвідати необхідне місто один і лише один раз.

8.1 Постановка задачі. Математична модель

Описана задача є однією з найважливіших задач логістики, а також однією з найвідоміших математичних задач взагалі. Вона має широке прикладне застосування у транспортних системах, автоматизованому проектуванні, тестуванні та виготовленні інтегрованих схем, виробництві друкованих плат, лазерній нарізці пластмас і металів, дослідженні структури білка, технологіях вишивання, зварювання та малювання неперервною лінією та інших галузях.

Перші згадки задачі комівояжера в якості задачі оптимізації належать, мабуть, німецькому математику Карлу Менгеру (Karl Menger), який сформулював її на математичному colloquium в 1930 році так: «Ми називаємо проблемою кур'єра (оскільки це питання виникає у кожного посланця, зокрема, її розв'язують багато мандрівників) задачу знайти найкоротший шлях між скінченною множиною місць, відстань між якими відомо».

Відома в сучасній літературі назва «задача мандруючого продавця» (Travelling Salesman Problem) належить Хасслер Уїтні (Hassler Whitney) з Принстонського університету.

Незважаючи на, здавалось би, простоту постановки, задача комівояжера відрізняється тим, що знаходження дійсно оптимального шляху є обчислюванню складною задачею. Якщо матриця відстаней симетрична, то загальне число можливих варіантів об'їзду для n міст складає $0.5 \cdot (n - 1)!$ (перше місто фіксоване). Для несиметричної матриці маємо $(n - 1)!$ варіантів. Таким чином, вимір простору пошуку залежить експоненціально від вхідних даних.

В загальному вигляді *задача формулюється* наступним чином: маємо n міст; задана матриця C попарних відстаней між ними. Комівояжер, виїжджаючи з деякого фіксованого міста, має відвідати кожне

місто рівно один раз і повернутися у вихідне місто. Необхідно визначити *порядок* об'їзду міст, при якому загальна довжина маршруту буде мінімальною.

Зауваження 8.1. Якщо прямого сполучення між містами i та j немає, то відповідний елемент матриці відстаней покладається рівним нескінченності: $c_{ij} = \infty$. Відстань від міста i до самого себе також покладається рівною нескінченності: $\forall i \in \{1, \dots, n\} : c_{ii} = \infty$.

Побудуємо математичну модель.

Нехай

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо комівояжер безпосередньо} \\ & \text{переїжджає з міста } i \text{ в місто } j, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тоді загальний пройдений ним шлях складає

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (8.1)$$

Обмеження задачі можна записати наступним чином:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (8.2)$$

(до кожного міста комівояжер в'їжджає лише один раз);

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (8.3)$$

(з кожного міста комівояжер виїжджає рівно один раз);

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j \quad (8.4)$$

(умова повного циклу вимагає, щоб будь-який маршрут комівояжера складався з одного циклу),

де u_i – деякі числа, зміст яких стане зрозумілим пізніше.

Зауваження 8.2. Задача (8.1), (8.2), (8.3) є задачею про призначення. Проте розв’язок задачі про призначення може містити *часткові цикли*. Наприклад, якщо оптимальним розв’язком є

$$x_{12} = x_{21} = 1, \quad x_{35} = x_{54} = x_{43} = 1,$$

тоді маємо два часткові цикли:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1; \quad 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3.$$

Умова (8.4) гарантує виключення часткових циклів. Дійсно, припустимо, що розв’язок задачі (8.1) – (8.4) містить два або більше часткових цикли. Оберемо один з них:

$$\underbrace{x_{ij} = x_{jl} = \dots = x_{mi} = 1, \quad k < n.}_{k \text{ змінних}}$$

Просумуємо всі нерівності (8.4), відповідні цьому циклу:

$$\begin{aligned} u_i - u_j + nx_{ij} &\leq n - 1, \\ u_j - u_l + nx_{jl} &\leq n - 1, \\ &\dots \\ u_m - u_i + nx_{mi} &\leq n - 1. \end{aligned}$$

Отримаємо

$$0 + n(x_{ij} + \dots + x_{mi}) \leq k(n - 1)$$

або

$$nk \leq (n - 1)k.$$

Остання нерівність суперечлива, отже, звідси випливає, що часткових циклів в розв’язку бути не може.

Покажемо далі, що для будь-якого повного циклу можна знайти числа u_i , які задовольняють нерівність (8.4). Нехай $u_i = p$, якщо місто i відвідується на p -ому кроці об’їзду. Тоді нерівність $u_i - u_j \leq n - 1$ правильна для будь-яких i, j , тобто (8.4) виконується для всіх $x_{ij} = 0$. При $x_{ij} = 1$ нерівність (8.4) перетворюється в рівність:

$$u_i - u_j + nx_{ij} = p - (p + 1) + n = n - 1.$$

Отже, коректність математичної постановки задачі у вигляді (8.1)–(8.4) доведена.

8.2 Метод гілок і меж

Розглянемо одну із модифікацій метода гілок і меж для розв'язку задачі комівояжера. Ідея полягає у виключенні часткових циклів з розв'язку відповідної задачі про призначення.

Алгоритм методу

1. Попередній крок.

Розв'язуємо задачу про призначення з матрицею вартостей C , елементи якої співпадають з елементами матриці відстаней. Якщо оптимальна матриця призначень X^* не містить часткових циклів, то на цьому алгоритм завершується; отриманий розв'язок визначає порядок об'їзду міст. В іншому випадку запам'ятовуємо $z^* = z(X^*)$ як нижню межу довжини оптимального маршруту і переходимо до основного кроку.

2. Основний крок.

Обираємо довільний частковий цикл (є сенс обирати найкоротший із них). Нехай він містить m змінних. Тоді вихідна задача K_0 розпадається на m підзадач, в кожній з яких одна із змінних даного часткового циклу дорівнює нулю. Отримані підзадачі $K_1, \dots, K_m$ знову розв'язуємо як задачі про призначення. Якщо який-небудь розв'язок дає повний цикл, тоді запам'ятовуємо його довжину як верхню межу довжини оптимального маршруту (ця довжина обов'язково буде більша або дорівнювати z^*). Далі приймається рішення про доцільність подальшого дослідження підзадач, в яких ще не отримано повний цикл. Якщо існує можливість отримання кращого розв'язку (кращої верхньої межі), то продовжуємо подальше дослідження аналогічним чином. В іншому випадку алгоритм завершується; в якості оптимального розв'язку обирається той, що дає найкращу на даний момент верхню межу.

8.3 Приклад

Модель задачі комівояжера універсальна і може використовуватися не тільки в практичних цілях, пов'язаних з пошуком маршрутів в транспортних мережах. Важливим є те, що задача потребує визначення оптимального *порядку* об'їзду. Тому будь-яку операцію, яка допускає побудову моделі у вигляді графа і в якій вимагається визначити порядок обходу вершин, можна розглядати як задачу комівояжера. Розглянемо це на прикладі.

Опис ситуації. Підприємство випускає п'ять видів фарб: білу(Б), жовту(Ж), чорну(Ч), червону(ЧВ) та синю(С). Фарби випускаються на одному обладнанні. Перед виготовленням партії фарби іншого кольору обладнання потребує очищення та переналаштування. Час переналаштування (в хвилинали) при переході від випуску фарби i до фарби j вказано в таблиці.

Т	Б	Ж	Ч	ЧВ	С
Б	∞	10	3	6	9
Ж	5	∞	5	4	2
Ч	4	9	∞	7	8
ЧВ	7	1	3	∞	4
С	3	2	6	5	∞

Необхідно визначити такий порядок виробництва фарб, при якому сумарний час переналаштування обладнання буде найменшим.

Математична модель. Поставимо у відповідність кожному кольору фарби вузол мережі і припишемо кожній дузі, яка з'єднує два таких вузли, числове значення, що дорівнює часу очищення та переналаштування. Отримуємо повний граф на п'яти вершинах. Задача зводиться до визначення найкоротшого маршруту, що починається в одному з вузлів і проходить через інші чотири вузла точно по одному разу перед тим, як повернутися в вихідний вузол. Матриця C відстаней між вузлами є матриця T часу переналаштування, дана в умові. Для зручності перепозначимо кольори фарб цифрами від (1) до (5).

Розв'язання. *Задача K_0 .* Розв'яжемо задачу про призначення з матрицею C . Її оптимальним розв'язком буде

$$x_{13}^* = x_{25}^* = x_{31}^* = x_{42}^* = x_{54}^* = 1; \quad z^* = 15.$$

В отриманому розв'язку маємо два часткових цикли: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$; $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2$. Значення $z^* = 15$ є нижньою межею довжини оптимального маршруту.

Для розгалуження оберемо частковий цикл $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, оскільки він має меншу довжину. Задача K_0 , таким чином, розпадається на дві підзадачі:

Задача K_1 , в якій $x_{13} = 0, x_{31} = 1$.

Задача K_2 , в якій $x_{31} = 0, x_{13} = 1$.

Розв'язуємо задачу K_1 , як задачу про призначення. Матрицю вартостей C_1 для цієї задачі отримуємо з вихідної матриці C виконанням двох дій:

- 1) викреслюємо рядок (3) і стовпчик (1) (так як $x_{31} = 1$);
- 2) покладаємо $c_{13} = \infty$ (так як $x_{13} = 0$).

Маємо

C_1	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	10	∞	6	9
(2)	∞	5	4	2
(4)	1	3	∞	4
(5)	2	6	5	∞

До оптимального розв'язку задачі про призначення з матрицею C_1 додаємо $x_{31} = 1$. Отримаємо набір призначень

$$x_{31}^* = x_{14}^* = x_{25}^* = x_{43}^* = x_{52}^* = 1; z^* = 17.$$

Цей розв'язок все ще містить два часткових цикли: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$; $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$. Оберемо цикл $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ і продовжимо галуження. Задача K_1 розбивається на дві підзадачі:

Задача K_{11} , в якій $x_{25} = 0$, $x_{52} = 1$.

Задача K_{12} , в якій $x_{52} = 0$, $x_{25} = 1$.

Розв'язуємо задачу K_{11} . Для отримання матриці C_{11} в матриці C_1 слід викреслити рядок (5) і стовпчик (2), а елемент c_{25} покласти рівним нескінченності. Отримаємо

C_{11}	(3)	(4)	(5)
(1)	∞	6	9
(2)	5	4	∞
(4)	3	∞	4

Розв'язавши задачу про призначення з матрицею C_{11} , отримаємо

$$x_{14}^* = x_{23}^* = x_{45}^* = 1.$$

Додаючи умови $x_{31}^* = 1$ та $x_{52}^* = 1$, які були введені раніше, отримаємо повний цикл $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, довжина якого дорівнює 21. Число $z \equiv 21$ запам'ятаємо як верхню межу довжини оптимального маршруту.

Далі розв'язуємо задачу K_{12} . Матриця C_{12}^* має вигляд

C_{12}^*	(2)	(3)	(4)
(1)	10	∞	6
(4)	1	3	∞
(5)	∞	6	5

Після розв'язання відповідної задачі про призначення маємо повний цикл $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, довжина якого дорівнює 19. Таким чином, число $z = 19 < 21$ є новою верхньою межею довжини оптимального маршруту.

З'ясуємо питання про «перспективність» розгляду гілки K_2 . Оскільки значення в корені цієї гілки $z^* = 15$, а поточний розв'язок має оцінку $z = 19$, то є сенс розв'язати цю підзадачу. Для цього складемо матрицю C_2 :

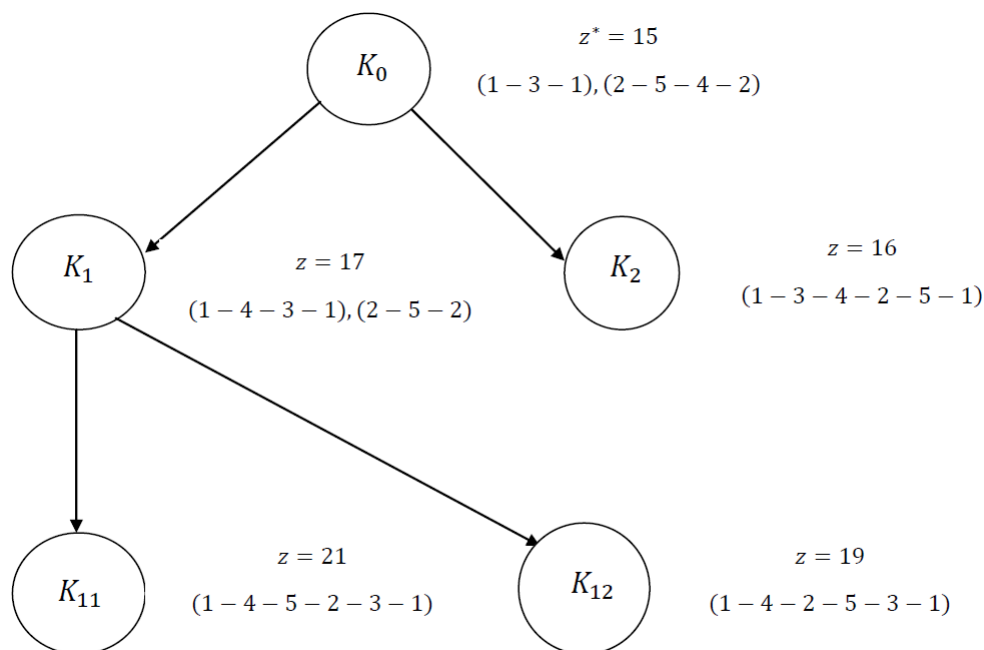
C_2	(1)	(2)	(4)	(5)
(2)	5	∞	4	2
(3)	∞	9	7	8
(4)	7	1	∞	4
(5)	3	2	5	∞

В результаті цього маємо

$$x_{13}^* = 1; \quad x_{25}^* = x_{34}^* = x_{42}^* = x_{51}^* = 1; \quad z = 16.$$

Розв'язок утворює повний цикл $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ довжиною 16. Це число стає новою верхньою межею довжини оптимального маршруту. Оскільки перспективних гілок не залишилося, розв'язання завершено. Представимо розв'язок графічно у вигляді дерева підзадач (див. нижче).

Цикл $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ наказує виробництво фарб в такому порядку: біла, чорна, червона, жовта, синя. Далі цикл виробництва повторюється. Загальний час, витрачений на переналаштування при такому процесі, дорівнює 16 хвилин.



Зауваження 8.3. Повертаємось до дерева підзадач. Легко бачити, що якби ми почали розв'язувати підзадачу K_2 одразу після підзадачі K_1 , то необхідності розв'язувати підзадачі K_{11} та K_{12} вже не буде, так як оцінка $Z = 16$ для задачі K_2 вже не может бути покращена (гілка K_1 не може дати шляхи з оцінкою менше $z = 17$). Однак, «передбачити» найбільш ефективну послідовність розв'язання підзадач дуже складно. На практиці рекомендується починати з тієї підзадачі, у якій змінній x_{ij} , що виключається, відповідає найбільше значення c_{ij} в матриці вартостей. В нашому прикладі для задачі K_1 маємо $c_{13} = 3$, $c_{31} = 4$, отже, спочатку варто було розглянути задачу K_2 .

8.4 Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає суть задачі комівояжера?
2. Наведіть математичну постановку задачі комівояжера.
3. У яких випадках елемент матриці попарних відстаней покладається рівним нескінченності?
4. Який метод використовується для пошуку розв'язку задачі комівояжера?
5. З яких етапів складається алгоритм розв'язування задачі комівояжера методом гілок і меж?

6. Що означає гілка для методу меж та гілок?

7. Що є межею для методу меж та гілок?

8.5 Завдання для самостійної роботи

Нехай i – номер групи, j – порядковий номер студента у списку групи.

Продавець книг, який проживає в місті А, раз на місяць має відвідати своїх чотирьох клієнтів, які проживають у містах Б, В, Г, та Д відповідно. Наведена нижче таблиця містить відстані в кілометрах між різними містами

	А	Б	В	Г	Д
А	∞	$100i$	220	150	210
Б	120	∞	80	$20j$	130
В	220	110	∞	160	185
Г	150	110	160	∞	190
Д	210	130	185	190	∞

Необхідно скласти маршрут руху продавця книг, що мінімізує сумарну відстань.

Тема 9. Моделі керування запасами

Задача керування запасами виникає, коли необхідно створити запас матеріальних ресурсів або предметів споживання з метою задоволення попиту на заданому інтервалі часу (скінченному або нескінченному). У довільній задачі керування замовами необхідно визначити кількість замовленої продукції й термін розміщення замовлень. Попит можна задовольнити шляхом одноразового створення запасу на весь розглянутий період часу або за допомогою створення запасу для кожної одиниці часу цього періоду. Ці два випадки відповідають надмірному запасу (по відношенню до одиниці часу) і недостатньому запасу (по відношенню до нового періоду часу).

При надмірному запасі будуть більш високі питомі (віднесені до одиниці часу) капітальні вкладення, але дефіцит виникає рідко і частота розміщення замовлень менша. З іншого боку, при недостатньому запасі питомі капітальні вкладення зменшуються, але частота розміщення замовлень і ризик дефіциту збільшується. Для кожного з двох крайніх випадків характерні значні економічні витрати. Таким чином, розв'язання питання відносно розміру замовлення і момент його розміщення можуть ґрунтуватися на мінімізації відповідної функції загальних витрат, що враховують збитки від надмірного запасу і дефіциту.

9.1 Узагальнена модель керування запасами

Довільна модель керування запасами повинна дати відповідь на два питання:

1. Яку кількість продукції замовляти?
2. Кому замовляти?

Відповідь на перше питання виражається через розмір замовлення, що визначає оптимальну кількість ресурсів, яку необхідно завозити кожен раз, коли відбувається розміщення замовлень. У залежності від ситуації розмір замовлення може змінюватися у часі. Відповідь на друге питання залежить від типу системи керування запасами. Якщо система передбачає періодичний контроль стану запасів через рівні проміжки часу, момент надходження нового замовлення звичайно співпадає з початком кожного інтервала часу. Якщо ж у системі передбачено неперервний контроль стану запасу, точка замовлення звичайно

визначається рівнем запасу, при якому необхідно розміщувати нове замовлення.

Таким чином, розв'язок узагальненої задачі керування запасів визначається таким чином:

1. У випадку періодичного контролю стану запасу необхідно забезпечити поставку нової кількості ресурсів в об'ємі розміру замовлення через рівні проміжки часу.
2. У випадку неперервного контролю стану запасів необхідно розміщувати нове замовлення об'єму запасу, коли його рівень досягає точки замовлення.

Розмір і точка замовлення визначаються з умови мінімізації сумарних витрат системи керування запасами, які виражаються у вигляді функції цих двох змінних. Сумарні витрати системи керування запасами виражається у вигляді функції їх основних компонент таким чином:

$$\begin{pmatrix} \text{сумарні} \\ \text{витрати} \\ \text{керування} \\ \text{запасами} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{витрати} \\ \text{на} \\ \text{придбання} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{витрати} \\ \text{на} \\ \text{оформлення} \\ \text{замовлення} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{витрати} \\ \text{на} \\ \text{збереження} \\ \text{замовлення} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{витрати} \\ \text{від} \\ \text{дефіциту} \end{pmatrix}.$$

Витрати на придбання є важливим чинником, коли ціна одиниці продукції залежить від розміру замовлення, що зазвичай виражається у вигляді оптових знижок у тих випадках, коли ціна одиниці продукції зменшується зі збільшенням розміру замовлення.

Витрати на оформлення замовлення є постійні витрати, що пов'язані з його розміщенням. Таким чином, при задоволенні попиту на протязі заданого часу шляхом розміщення більш малих замовлень (більш частіше) витрати зростають в порівнянні з випадком, коли попит задовольняється за допомогою розміщення більш великих замовлень (тобто рідше).

Витрати на збереження запасу, які є витратами на зберігання запасу на складі (наприклад, відсоток на інвестиційний капітал, витрати на

переробку, амортизаційні витрати і експлуатаційні витрати), звичайно зростають зі збільшенням рівня запасу.

Втрати від дефіциту є витрати, що зумовлені відсутністю запасу необхідної продукції. Зазвичай вони пов'язані з погіршенням репутації постачальника у споживача і з потенціальними втратами прибутку.

Зазначимо, що модель управління запасами не обов'язково повинна включати усі чотири види витрат, так як деякі з них можуть бути незначними, а інколи врахування усіх видів витрат досить сильно ускладнює функцію сумарних витрат. На практиці деякі компоненти можна і не враховувати у випадку, якщо вони не є суттєвою складовою сумарних витрат.

9.1.1 Типи моделей керування запасами

Узагальнена модель керування запасами, що вище описана, досить проста. Чому ж тоді існує досить багато моделей і методів їх дослідження? Відповідь на це питання визначається характером попиту, який може бути детермінованим або ймовірностним.

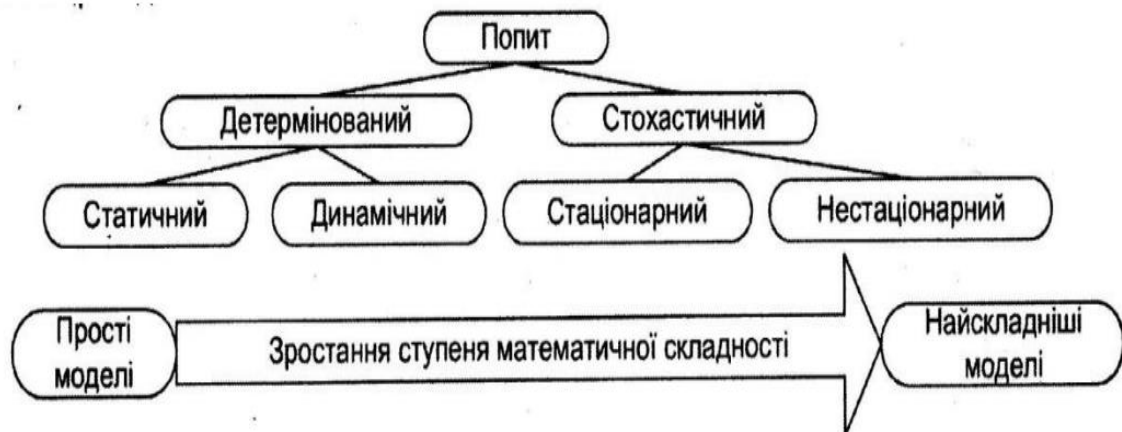
Детермінований попит може бути статичним, тобто інтенсивність споживання залишається незмінною в часі, або динамічним, коли попит відомий, але змінюється в часі.

Ймовірностний попит може бути стаціонарним, коли функція щільності ймовірності попиту незмінна в часі, і нестаціонарним, коли функція щільності ймовірностного попиту змінюється в часі.

У реальних умовах випадок детермінованого статичного попиту зустрічається рідко. Такий випадок є найпростішим. (Приклад хліба і продукти масового вжитку: попит на них мало змінюється і тому не враховуємо на них витрати).

Набільш точно характер попиту може бути описаний ймовірностним нестаціонарним розподілом. Це модель досить складна, якщо період часу збільшується.

На малюнку ілюструється зростання математичної складності моделі керування запасами при переході від детермінованого статичного попиту до ймовірностного нестаціонарного попиту. Ця класифікація є різним рівнем абстракції опису попиту.



На першому рівні вважається, що розподіл ймовірностей попиту стаціонарний в часі. Це означає, що для опису попиту на протязі всіх періодів часу використовується одна і та функція розподілу ймовірностей. При таких умовах вплив сезонних коливань попиту в моделі не враховується.

На другому рівні абстракції враховується зміна попиту від одного періоду до другого. Однак при цьому функція розподілу не використовується, а потреба в кожному періоді описується як середня величина попиту. Це спрощення означає, що елемент ризику в керуванні запасами не враховується. Але воно дозволяє дослідити сезонні коливання попиту, які внаслідок аналітичних і обчислювальних труднощів врахувати неможливо. Іншими словами, тут виникає певний компроміс: з однієї сторони можна використовувати стаціонарні розподіли ймовірності, а з другої – змінну, але відому функцію попиту при припущенні «визначеності».

На третьому рівні спрощення виключається як елемент ризику, так і зміна попиту. Тобто попит на протязі довільного періоду вважається рівним середньому значенню відомого попиту на протязі всього періоду. При такому спрощенні попит можна оцінити його постійною інтенсивністю.

Хоча характер попиту є одним з основних факторів при побудові моделі керування запасами, є і інші чинники, що впливають на вибір моделі. До них віносяться:

1. Запізнення поставок або термінів виконання замовлень. Після розміщення замовлення воно може бути поставлене відразу або через деякий проміжок часу. Інтервал часу між моментом розміщення

замовлення і його поставкою називається запізненням поставки, або строком виконання замовлення. Ця величина може бути детермінованою або випадковою.

2. Поповнення запасу. Хоча система керування запасами може функціонувати при запізненні поставок, процес поповнення запасу може здійснюватися миттєво або рівномірно в часі. Миттєве поповнення запасу може відбуватися при умові, коли замовлення поступають від зовнішнього постачальника. Рівномірне поповнення може бути тоді, коли продукція виготовляється самою організацією (продукція, що запасється). У загальному випадку система може функціонувати при запізненні поставок і при рівномірному поповненні запасу.
3. Період часу визначає інтервал, на протязі якого відбувається регулювання рівня запасу. У залежності від відрізка часу, на якому можна надійно прогнозувати період, що розглядається, може бути скінченим або нескінченим.
4. Число пунктів накопичення запасу. У систему керування запасами може входити декілька пунктів зберігання запасу. У деяких випадках ці пункти організовані так, що одні є постачальниками для інших. Ця схема іноді реалізується на різних рівнях, так що пункт-споживач одного рівня може стати пунктом-постачальником на другому. У такому випадку говорять про систему керування запасами з розгалуженою структурою.
5. Кількість видів продукції. У системі керування запасами можуть бути присутні багато видів продукції. Цей чинник враховується при умові наявності деякої залежності між різними видами продукції. Так, для різних виробів може використовуватись одне і те ж складське приміщення або ж їх виробництво може здійснюватись при обмеженнях на загальні виробничі фонди.

9.2 Детерміновані моделі

Досить важко побудувати узагальнену модель керування запасами, яка б враховувала усі різновиди умов, що спостерігаються в реальних системах. Але якщо б і вдалось побудувати достатньо універсальну модель, то мало ймовірно, що її можна було б розв'язати аналітично.

Далі ми будемо розглядати декілька постановок задач керування запасами. Основна відмінність між моделями визначається припущенням про характер попиту (статичний або динамічний). Важливу роль при формулюванні і розв'язуванні задач є також вигляд функції витрат.

9.2.1 Однопродуктова статична модель

Модель керування запасами простого типу характеризується постійним в часі попитом, митт'євим поповненням запасу і відсутністю дефіциту. Таку модель можна застосувати у таких типових ситуаціях:

- 1) використання освітлювальних ламп у будівлях;
- 2) використання канцелярських товарів;
- 3) використання деяких промислових виробів (гайки, болти);
- 4) споживання основних продуктів (хліб, молоко і інші).

На рис. 1 показано зміну запасу в часі. Вважається, що інтенсивність попиту (в одиницю часу) дорівнює β . Найбільшого рівня запас досягає у момент поставки замовлення розміром y . (Вважається, що запізнення поставки є постійна величина). Рівень запасу досягає нуля через y/β одиниць часу після отримання замовлення розміром y .



Рис. 1

Чим менший розмір замовлення y , тим частіше потрібно розміщувати нові замовлення. При цьому середній рівень запасу буде зменшуватися. З іншого боку, зі збільшенням розміру замовлення рівень запасу збільшується, але замовлення розміщуються не часто. Так як витрати залежать від частоти розміщення замовлення і об'єму товару, що зберігається, то величина y обирається з умови забезпечення збалансованості між цими двома витратами. Це лежить в основі побудови відповідної моделі керування запасами.

Нехай K – витрати на оформлення замовлення, які виникають кожен раз при його розміщенні і при умові, що витрати на зберігання одиниці замовлення в одиницю часу дорівнюють h . Отже, сумарні витрати в одиницю часу як функцію від y можна представити у вигляді

$$F(y) = \frac{K}{y/\beta} + h \cdot \frac{y}{2},$$

де $\frac{K}{y/\beta}$ – витрати на оформлення замовлення в одиницю часу, $h \cdot \frac{y}{2}$ – витрати на зберігання запасів в одиницю часу. Як видно з рис.1 довжина циклу руху замовлення дорівнює $t_0 = y/\beta$ і середній рівень запасу дорівнює $y/2$.

Оптимальне значення y отримуємо в результаті мінімізації функції $F(y)$. Якщо вважати, що y неперервна величина, то маємо

$$\begin{aligned} \frac{dF(y)}{dy} &= -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2}, \\ \frac{dF(y)}{dy} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} = 0, \end{aligned}$$

звідки оптимальне значення розміру замовлення визначається виразом

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}. \quad (9.2.1)$$

Знаходимо

$$\frac{d^2F}{dy^2} = \frac{2K\beta}{y^3}.$$

Так як

$$\frac{d^2F(y^*)}{dy^2} = \frac{h^{3/2}}{\sqrt{2K\beta}} > 0,$$

то функція $F(y)$ у точці $y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$ досягає свого мінімуму.

Формулу (9.2.1) називають формулою економічного розміру замовлення Уілсона.

Оптимальна стратегія моделі передбачає замовлення y^* одиниць продукції через кожні $t_0^* = y^*/\beta$ одиниць часу. Оптимальні витрати у такому випадку $F(y^*)$ (після підстановки y^* у формулу для $F(y)$) дорівнюють $\sqrt{2K\beta h}$.

Оптимальний розмір партії, розрахований за формулою Уілсона, має таку властивість: розмір партії y оптимальний тоді і тільки тоді, коли витрати на зберігання за час циклу дорівнюють накладним витратам K .

Використовуючи формулу Уілсона можна отримати ряд розрахункових характеристик роботи складу в оптимальному режимі:

оптимальний середній рівень запасу

$$\bar{y}_{\text{опт}} = \frac{y_{\text{опт}}}{2} = \sqrt{\frac{K\beta}{2h}};$$

оптимальна періодичність поповнення запасу

$$\bar{T}_{\text{опт}} = \frac{y_{\text{опт}}}{\beta} = \sqrt{\frac{2K}{\beta h}};$$

оптимальні середні витрати зберігання запасів в одиницю часу

$$\bar{H} = \bar{y}_{\text{опт}} \frac{h}{2} = \sqrt{\frac{K\beta h}{2}}.$$

Для більшості реальних ситуацій існує строк виконання замовлення (часове запізнення) L від моменту розміщення замовлення до його дійсної поставки. Стратегія розміщення замовлення у розглянутій моделі повинна визначати *точку відновлення замовлення*. На рис. 2 (див. нижче) розглядається випадок, коли точка відновлення замовлення повинна випереджувати на L одиниць часу поставку очікувану. У практичних цілях цю інформацію можна просто перетворити, визначивши точку відновлення замовлення через рівень запасу, що відповідає моменту відновлення. На практиці це реалізується шляхом неперервного контролю рівня запасу до моменту досягнення точки відновлення замовлення. Можливо, по цій причині модель економічного розміру замовлення інколи називають моделлю неперервного контролю стану замовлення.

Відмітимо, що з точки зору аналізу в умовах стабілізації системи строк виконання замовлення L можна завжди вважати меншим довжини циклу t_0^* .

Приклад 9.1. Денний попит на деякий товар дорівнює 100 одиниць. Витрати на розміщення кожного запасу постійні і дорівнюють 100 грн. Денні витрати на зберігання одиниці запасу складають 0,02 грн. Необхідно визначити економічний розмір партії і точку замовлення при строкові виконання замовлення у 12 днів.

З отриманих вище формул для економічного розміру партії отримаємо

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0,02}} = 1000 \text{ (од.)}.$$

Відповідна оптимальна довжина циклу складає

$$t_0^* = y^*/\beta = 1000/100 = 10 \text{ (днів)}.$$

Так як строк виконання замовлення дорівнює 12 днів, а довжина циклу складає 10 днів, відновлення замовлення відбувається, коли рівень запасу достатній для задоволення попиту на два дні ($12 - 10$). Таким чином, замовлення розміром $y^* = 1000$ од. розміщується, коли рівень запасу досягає $2 \times 100 = 200$ (од.).

Слід зазначити, що «ефективний» строк виконання замовлення дорівнює 2, а не 12 дням. Це пояснюється тим, що цей строк більший за t_0^* . Однак після стабілізації системи (в цьому прикладі вона досягається за два цикли) можна вважати, що строк виконання замовлення $L - t_0^*$, якщо $L > t_0^*$.

Прийняті у розглянутій вище моделі припущення можуть не відповідати деяким реальним умовам внаслідок ймовірнісного характеру попиту. На практиці отримав розповсюдження наближений метод, зберігаючий простоту моделі економічного розміру замовлення і в той же час у якійсь мірі враховує ймовірносний характер попиту. Ідея методу дуже проста. Вона передбачає утворення деякого постійного буферного запасу на високому горизонті планування. Розмір резерву визначається таким чином, щоб ймовірність виснаження запасу на протязі періоду виконання замовлення L не перевищувала наперед заданої величини. Нехай $f(x)$ – щільність (густина) розподілу ймовірності попиту на протязі цього строку. Далі нехай ймовірність виснаження запасу на протязі періоду L не повинна перебільшувати α . Тоді розмір резерв-

ного запасу B визначається з умови

$$P\{x \geq B + L\beta\} \leq \alpha,$$

де $L\beta$ є споживання на протязі часу L . Зміну запасу при наявності резерву показано на рис. 2.

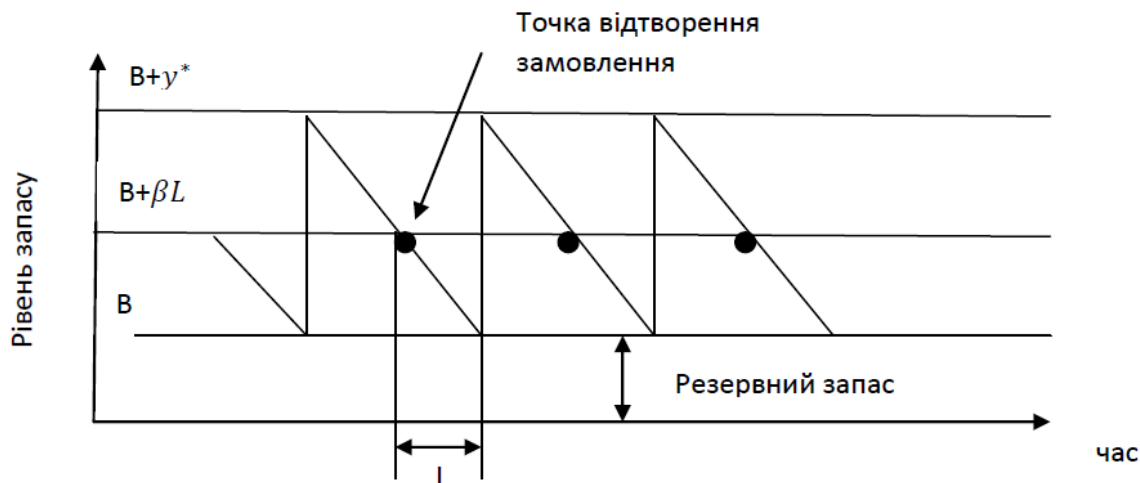


Рис. 2

Приклад 9.2. Нехай попит у прикладі 1 в дійсності є випадковим, при цьому денний попит розподілений нормально з середнім $\mu = 100$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$. Визначимо розмір резервного запасу таким чином, щоб ймовірність запасу на протязі строку виконання замовлення не перевищувала 0,05.

В прикладі 9.1 цей строк дорівнює 2 дні. Так як денний попит розподілений нормально, запізнення x_L також має нормальний розподіл з середнім $\mu_L = 2 \times 100 = 200$ (од.) і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_L = \sqrt{2 \cdot 10^2} = 14,14$.

Таким чином, маємо

$$P\{x_L \geq \mu_L + B\} \leq \alpha,$$

$$P\left\{\frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L} \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \alpha,$$

$$P\left\{\frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L} \geq \frac{B}{14,14}\right\} \leq 0,05.$$

З таблиць нормального розподілу отримуємо

$$\frac{B}{14,14} \geq 1,64 \quad \text{або} \quad B \geq 23,2.$$

Не має причин вважати, що загальний результат використання процедур визначення B і економічної величини замовлення обов'язково оптимальний чи близький до оптимального. Відхилення від оптимуму пояснюється тим, що спочатку деяка суттєва інформація не враховується, а потім використовується зовсім незалежно на останньому етапі обчислень. По суті, витрати на зберігання резерва B можна розглядати як деяку «ціну» за те, що вся інформація у процесі аналізу одночасно не використовується.

Різні види моделей економічного розміру замовлення припускають можливість дефіциту і рівномірного (а не миттєвого) поповнення запасу. Останній випадок типічний для виробничих систем, в яких інтенсивність поповнення запасу є функцією інтенсивності виробництва. У цих ситуаціях в моделях керування запасами, як і раніше, співставляються витрати на зберігання запасів і оформлення замовлень. У функцію сумарних витрат включаються також збитки від дефіциту, якщо він має місце. У загальному випадку збитки від дефіциту вважаються пропорційними середній величині дефіциту.

9.2.2 Однопродуктова статична модель з «розривами» цін

У попередніх моделях на враховувались питомі витрати на придбання товарів, так як вони постійні і не впливають на рівень запасу. Однак нерідко ціна одиниці продукції залежить від розмірів закупленої партії. У таких випадках ціни змінюються скачкоподібно або робляться оптові знижки. При цьому в моделі керування запасами необхідно враховувати витрати на придбання.

Розглянемо модель управління запасами з миттєвим поповненням запасу при відсутності дефіциту. Нехай ціна одиниці продукції дорівнює c_1 при $y < q$ і дорівнює c_2 при $y \geq q$, де q — розмір замовлення, при перевищенні якого робиться знижка. Тоді сумарні витрати за цикл, крім витрат на оформлення замовлення і зберігання запасу необхідно включити витрати на придбання.

Сумарні витрати на одиницю часу при $y < q$ дорівнюють

$$F_1(y) = \beta c_1 + \frac{K\beta}{y} + \frac{h}{2}y.$$

При $y \geq q$ ці витрати складають

$$F_2(y) = \beta c_2 + \frac{K\beta}{y} + \frac{h}{2}y.$$

Графіки цих двох функцій наведені нижче на рис.3.

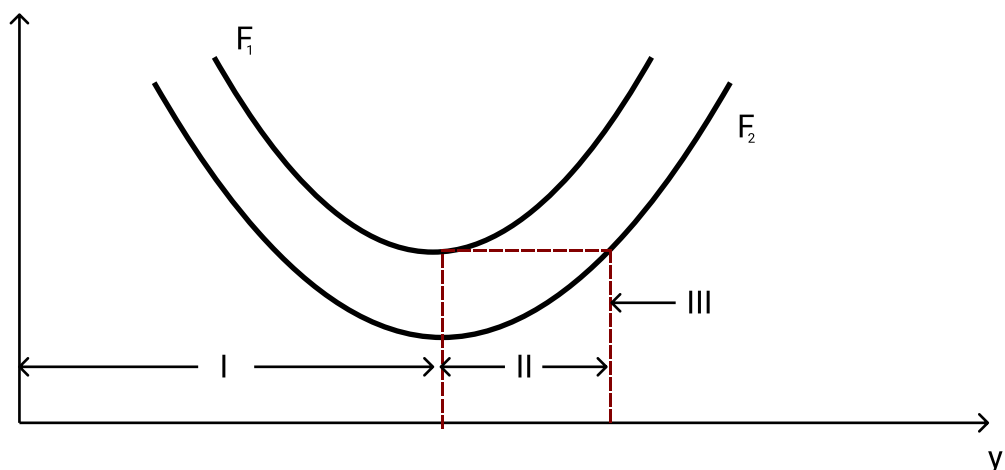


Рис. 3

Нехтуючи впливом зниження цін, назначимо через y_m розмір замовлення, при якому досягається мінімум величин $F_1(y)$ і $F_2(y)$. Тоді $y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$.

З виду функцій витрат $F_1(y)$ і $F_2(y)$ отримаємо, що оптимальний розмір замовлення залежить від того, де, по відношенню до трьох зон I, II і III, знаходиться точка розриву ціни q . Ці зони знаходяться в результаті визначення $q_1(> y_m)$ з рівняння

$$F_1(y_m) = F_2(q_1).$$

Так як значення y_m відомо $\left(y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}\right)$, то розв'язок рівняння дає значення величини q_1 .

Тоді зони визначаються таким чином

$$\text{зона I: } 0 \leq q < y_m,$$

$$\text{зона II: } y_m \leq q < q_1,$$

$$\text{зона III: } q \geq q_1.$$

На рис. 2 представлено графічний розв'язок рівняння для розглянутого випадку, який залежить від того, де знаходиться q по відношенню

до зон I, II, III. Тоді оптимальний розмір замовлення y^* визначається таким чином:

$$y^* = \begin{cases} y_m, & \text{якщо } 0 \leq q < y_m & (\text{зона I}), \\ q, & \text{якщо } y_m \leq q < q_1 & (\text{зона II}), \\ y_m, & \text{якщо } q \geq q_1 & (\text{зона III}). \end{cases}$$

Алгоритм визначення y^* можна представити у такому вигляді:

1. Визначити $y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$. Якщо $q < y_m$ (зона I), то $y^* = y_m$ і процес закінчено. В іншому випадку перейти до кроку 2.
2. Визначити q_1 з рівняння $F_1(y) = F_2(y)$ і визначити, де, по відношенню до зон II та III, знаходиться значення q :
 - а) якщо $y_m \leq q < q_1$ (зона II), то $y^* = q$;
 - б) якщо $q \geq q_1$ (зона III), то $y^* = y_m$.

Приклад 9.3. Розглянемо модель керування запасами при таких початкових даних: $K = 10$ гр, $h = 1$ гр, $\beta = 5$ од., $c_1 = 2$ гр, $c_2 = 1$ гр, $q = 15$ од.

Спочатку обчислимо значення y_m :

$$y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{1}} = 10 \text{ (од.)}.$$

Так як $q = 15 > y_m = 10$, то необхідно визначити, в якій зоні знаходиться q .

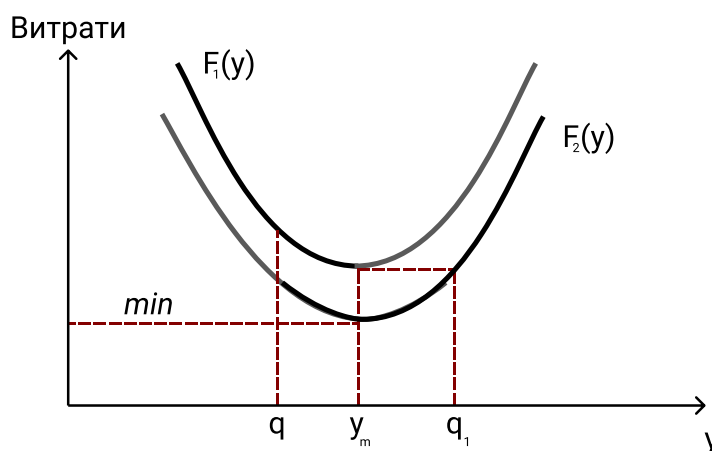


Рис. 4. Випадок 1.

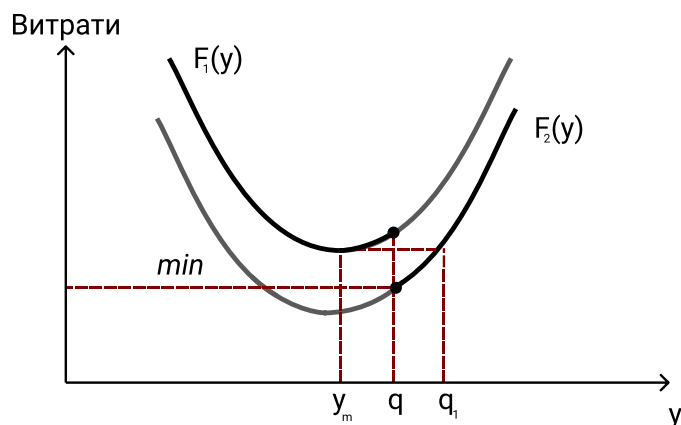


Рис. 5. Випадок 2.

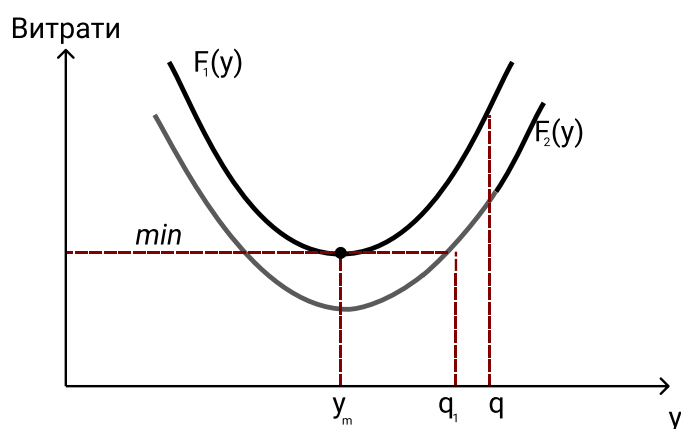


Рис. 6. Випадок 3.

Значення q_1 визначається з рівняння $F_1(y_m) = F_2(q_1)$ або

$$c_1\beta + \frac{K\beta}{y_m} + \frac{hy_m}{2} = c_2\beta + \frac{K\beta}{q_1} + \frac{hq_1}{2},$$

$$2 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 5}{10} + \frac{1 \cdot 10}{2} = 1 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 5}{q_1} + \frac{1 \cdot q_1}{2},$$

$$q_1^2 - 30q_1 + 100 = 0.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо два значення $q_1 = 26.18$ і $q_1 = 3.82$. За означенням, у якості q_1 обирається більше значення. Так як $y_m < q < q_1$, то величина q знаходиться в зоні II. Таким чином, $y^* = q = 15$ од., а сумарні витрати в одиницю часу:

$$F_1(y^*) = F_2(y^*) = F_2(15) = c_2\beta + \frac{K\beta}{15} + \frac{h \cdot 15}{2} =$$

$$= 1 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 5}{15} + \frac{1 \cdot 15}{2} = 15.83 \text{ (гр/день.)}$$

9.2.3 Багатопродуктова статична модель з обмеженнями на ємність складських приміщень

Ця модель призначена для системи керування запасами, з n видами продукції, яка зберігається на одному складі обмеженої площі. Ця умова визначає взаємозв'язок між різними видами продукції і може бути включена до моделі як обмеження. Нехай A – максимально припустима площа складського приміщення для n видів продукції. Нехай a_i – площа для зберігання одиниці продукції i -го виду. Якщо y_i – розмір замовлення на продукцію i -го виду, то обмеження на потребу в складському приміщенні має вигляд:

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A.$$

Нехай запас продукції кожного виду поповнюється миттєво і знижки цін відсутні. Далі нехай дефіцит не допускається. Вважаємо, що β_i , K_i і h_i – інтенсивність попиту, витрати на оформлення замовлення і витрати на зберігання одиниці продукції в одиницю часу для i -го виду продукції відповідно. Загальні витрати по продукції кожного виду будуть тими ж, що і в випадку еквівалентної однопродуктової моделі. Таким чином математична модель має вигляд

$$\min F(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i \beta_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right),$$

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A, \quad y_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Розв'язок цієї задачі знаходиться методом множників Лагранжа. Перш ніж застосувати цей метод, необхідно установити, чи діє обмеження, перевібивши виконання обмеження на площу складу для розв'язку

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i}}$$

необмеженої задачі. Якщо обмеження виконується, то воно надлишкове і його можна не враховувати.

Обмеження діє, якщо воно не виконується для значень y_i^* . У цьому випадку необхідно знайти нове оптимальне значення y_i , яке задовольняє обмеженню на площу складу у вигляді рівності. Будуємо функцію Лагранжа

$$L(\lambda, y_1, \dots, y_n) = F(y_1, \dots, y_n) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i - A \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i \beta_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i - A \right) \quad (\lambda < 0).$$

Далі застосовуємо правило множників Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{K_i \beta_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_i} = -\sum_{i=1}^n a_i y_i + A = 0.$$

З другого рівняння маємо, що значення y_i^* повинно задовольняти обмеженню на площу склада у вигляді рівності. З першого рівняння отримуємо, що

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i - 2\lambda^* a_i}}.$$

Зазначимо, що y_i^* залежить від оптимального значення λ^* множника λ .

Значення λ^* можемо знайти методом статистичних проб і помилок. Так як за означенням в поставленій задачі $\lambda < 0$, то при послідовній перевірці від'ємних значень λ знайдене значення λ^* буде одночасно визначати значення y^* , яке задовольняє заданому обмеженню у вигляді рівності. Таким чином, в результаті визначення λ^* автоматично отримаємо y_i^* .

Приклад 9.4. Розглянемо задачу керування запасами для випадку трьох видів продукції ($n = 3$), початкові дані яких наведені в таблиці

Вид продукції i	K_i , грн	β_i , од.	h_i , грн	a_i , м ²
1	10	2	0.3	1
2	5	4	0.1	1
3	15	4	0.2	1

Нехай загальна площа складського приміщення дорівнює $A = 25$ м².

Виходячи з формули $y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i - 2\lambda^* a_i}}$, побудована така таблиця

λ	y_1	y_2	y_3	$\sum_{i=1}^3 a_i y_i - A$
0	11.5	20.0	24.5	31
-0.05	10.0	14.1	17.3	16.4
-0.10	9.0	11.5	14.9	10.4
-0.15	8.2	10.0	13.4	6.6
-0.20	7.6	8.9	12.2	3.7
-0.25	7.1	8.2	11.3	1.6
-0.30	6.7	7.6	10.6	-0.1

При $A = 25 \text{ м}^2$ обмеження на складські приміщення задовольняється у вигляді рівності при λ , яке лежить в проміжку $(-0.30; -0.25)$. Це λ^* і його можна визначити лінійною інтерполяцією. Відповідні значення y_i визначають y_i^* . Нехай $\lambda^* = -0.30$, тоді оптимальні значення y_i^* приблизно дорівнюють

$$y_1^* = 6.7; y_2^* = 7.6; y_3^* = 10.6.$$

9.2.4 Модель зі скінченною інтенсивністю надходження замовлення

Нехай замовлена партія надходить з інтенсивністю λ одиниць в одиницю часу. Очевидно, система може працювати без дефіциту, якщо інтенсивність поставок λ перевищує інтенсивність споживання β . Таким чином, розглядається система типу заводського складу, куди продукція, вироблена одним цехом, поступає з певною інтенсивністю і використовується у виробництві другого цеху. На протязі часу τ_1 запас одночасно і поступає, і використовується, це час накопичення запасу. На протязі τ_2 запас тільки використовується. Довжина циклу $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Оптимальні параметри роботи системи мають такий вигляд (K - витрати на оформлення замовлення, h - витрати на зберігання одиниці замовлення в одиницю часу):

величина оптимального запасу (партії)

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{\lambda}}};$$

оптимальний період відновлення замовлення

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{h\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{\lambda}}}$$

і його складові

$$\tau_1^* = \frac{y^*}{\lambda}, \quad \tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{h\beta}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta}{\lambda}};$$

мінімальні сумарні витрати в одиницю часу

$$L^* = \sqrt{2Kh\beta} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta}{\lambda}}.$$

У випадку, коли інтенсивність поставки значно більше інтенсивності споживання $\frac{\beta}{\lambda} \rightarrow 0$, то отримаємо звичайну модель з параметрами Уілсона.

9.2.5 Модель з урахуванням незадоволених вимог

У деяких випадках, коли втрати від дефіциту можна порівняти з втратами на зберігання, дефіцит можливий. Нехай заявки, що поступають у момент відсутності запасу, беруться на облік. Позначимо через p максимальну величину заборгованого попиту. Максимальна величина наявного запасу $Y = y - p$ використовується за час τ_1 (час існування наявного запасу), а потім отримані заявки ставляться на облік на протязі часу τ_2 (час дефіциту). При отриманні чергової партії в першу чергу задовольняється заборгований попит, а потім поповнюється запас. Збитки, що пов'язані з дефіцитом одиниці запасу в одиницю часу, складають d . Витрати на зберігання продукції пропорційні середній величині запасу $\frac{y-p}{2}$ і часу його існування $\frac{y-p}{\beta}$. Аналогічно, збитки від дефіциту пропорційні середній величині дефіциту $p/2$ і часу його існування p/β . Середні витрати роботи системи на протязі циклу, які включають витрати на розміщення замовлення, утримання запасу і втрат від дефіциту

$$L_y = K + h \cdot \frac{y-p}{2} \cdot \frac{y-p}{\beta} + d \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{\beta}.$$

Поділимо витрати циклу на його довжину $\tau = \frac{y}{\beta}$ і отримаємо витрати роботи системи в одиницю часу

$$L = \frac{K\beta}{y} + h \cdot \frac{(y-p)^2}{2y} + d \cdot \frac{p^2}{2y}.$$

Далі знаходимо оптимальні параметри

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} \sqrt{1 + \frac{h}{d}}, \quad p^* = \frac{h}{d} \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}},$$

$$L^* = \sqrt{2Kh\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}}.$$

Інші оптимальні параметри

$$Y^* = y^* - p^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}}, \quad \tau_1^* = \frac{Y^*}{\beta} = \sqrt{\frac{2K}{h\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}},$$

$$\tau_2^* = \frac{p^*}{\beta} = \frac{h}{d} \sqrt{\frac{2K}{h\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}}, \quad \tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{y^*}{\beta} = \sqrt{\frac{2K}{h\beta}} \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{d}}.$$

Треба мати на увазі, що $\frac{Y^*}{p^*} = \frac{\tau_2^*}{\tau_1^*} = \frac{h}{d}$.

Приклад 9.5. Річна потреба машинобудівного заводу в малосортівій сталі (дріт діаметром 12 мм) складає 300 т. Відповідно до технічних вимог, у випадку необхідності, дріт діаметром 12 мм можна замінити дротом 14 мм, ціна якого за тонну на 20 од. більше. Умовно-постійні транспортні витрати на одне замовлення дорівнюють 21 од., витрати на зберігання 1 т. — 14 од. Визначити оптимальний розмір партії.

Розв'язання.

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} \sqrt{1 + \frac{h}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 21 \cdot 300}{14}} \sqrt{1 + \frac{14}{20}} = 39 \text{ (т)}.$$

9.2.6 Модель з визначенням точки замовлення

У реальних ситуаціях необхідно враховувати час виконання замовлення θ . Для забезпечення безперебійного постачання замовлення повинно подаватися в момент, коли рівень запасу достатній для задоволення потреб на час виконання замовлення. Цей рівень називають *точкою відновлення* замовлення і позначається r . Для систем, в яких дефіцит не допускається, замовлення повинно розміщуватися в момент, коли величина наявного запасу дорівнює

$$r = \theta \cdot \beta - \left[\frac{\theta}{r^*} \right] y^*, \quad \text{де } [\cdot] - \text{ціла частина.}$$

Для забезпечення бездефіцитної роботи необхідно мати мінімальний початковий запас I_0 , величина якого $I_0 = \theta\beta$. Нехай I - фактичний початковий запас. Для неперервної роботи необхідно, щоб $I \geq \theta\beta$. Час споживання початкового запасу дорівнює $\frac{I}{\beta}$. Щоб замовлена партія була доставлена не пізніше певного початкового запасу, її необхідно розмістити в момент $t_0 = \frac{I}{\beta} - \theta$. У загальному випадку замовлення потрібно розміщувати у моменти

$$t_k = \left(\frac{I}{\beta} - \theta \right) + k\tau^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

У системі зі скінченною інтенсивністю надходження замовлення при визначенні оптимальної точки замовлення розглядаються два випадки:

$$\text{якщо } \theta - \left[\frac{\theta}{\tau^*} \right] \tau^* < \tau_2^*, \quad \text{то } r = \theta\beta - \left[\frac{\theta}{\tau^*} \right] y^*;$$

$$\text{якщо } \theta - \left[\frac{\theta}{\tau^*} \right] \tau^* > \tau_2^*, \quad \text{то } r = \theta(\beta - \lambda) + \left(\left[\frac{\theta}{\tau^*} \right] + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{\beta} - 1 \right) y^*.$$

Для системи з урахуванням незадоволених вимог точка замовлення визначається за формулою

$$r = \theta\beta - \left[\frac{\theta}{\tau^*} \right] y^* - p^*$$

і може бути від'ємною величиною. Це означає, що заявки на поповнення запасу повинні посилатися, коли дефіцит дорівнює $|r|$.

9.3 Модель керування запасами на складі

Обираємо за одиничний інтервал часу один день. Нехай до кінця дня $t - 1$ на складі знаходиться запас товару в об'ємі $x_{t-1} \geq 0$. Склад робить замовлення на поповнення запасу товару в об'ємі h_t . Це поповнення поступає до початку наступного дня t , так що запас товару на початку слідуючого дня складає $x_{t-1} + h_t$. Нехай s_t об'єм товару, що запрошується споживачем в день t .

Якщо $s_t \leq x_{t-1} + h_t$, то склад задовольняє заявку споживача повністю, а залишки товару $x_t = x_{t-1} + h_t - s_t$ переносяться на слідуючий день $t + 1$, при цьому витрати на зберігання цього запасу пропорційні його об'єму і дорівнюють

$$cx_t = c(x_{t-1} + h_t - s_t).$$

Якщо об'єм заявки $s_t > x_{t-1} + h_t$, то склад повністю віддає свій запас, а за недопоставлений товар понесе збитки, пропорційні об'ємові дефіциту і дорівнюють

$$K(s_t - x_{t-1} - h_t) = -K(x_{t-1} + h_t - s_t).$$

Таким чином, повні витрати $\varphi(x_{t-1}, h_t, s_t)$ складу можна записати у вигляді

$$\varphi(x_{t-1}, h_t, s_t) = \max\{c(x_{t-1} + h_t - s_t); -K(x_{t-1} + h_t - s_t)\} \quad (9.3.1)$$

при цьому залишок товару $x_t = \max\{0; x_{t-1} + h_t - s_t\}$.

З (9.3.1) маємо

$$\text{якщо } x_t > 0, \text{ то } \varphi(x_t) = cx_t,$$

$$\text{якщо } x_t < 0, \text{ то } \varphi(x_t) = -Kx_t,$$

$$\text{якщо } x_t = 0, \text{ то } \varphi(x_t) = 0.$$

У класичній постановці задачі керування запасами припускається, що сама величина попиту s_t невідома, однак відомо, що вона є незалежною випадковою величиною, що має заданий закон розподілу. Нехай розподіл ймовірностей величини s_t задається неперервною функцією розподілу $F(x)$ з щільністю розподілу $f(x)$. Тоді середні повні витрати $\Phi(x_{t-1} + h_t)$ задаються формулою (М – математичне сподівання)

$$\Phi(x_{t-1} + h_t) = M\varphi(x_{t-1}, h_t, s_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_{t-1}, h_t, s_t) dF(s).$$

Задача формулюється таким чином: визначити об'єм замовлення на поповнення h_t , який мінімізує середні повні витрати, тобто

$$\Phi(x_{t-1} + h_t) \rightarrow \min, \quad h_t \geq 0.$$

Розглянемо розв'язування класичної задачі керування товарними запасами у статичній постановці. Позначимо $y = (x_{t-1} + h_t)$ і опустимо з огляду на те, що задача статична, індекс t у запису об'єму попиту і поповнення. Розглянемо таку задачу

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{c(y-s); -K(y-s)\} dF(s) \rightarrow \min. \quad (9.3.2)$$

Перепишемо функцію $\Phi(y)$ в такому вигляді

$$\Phi(y) = c \int_{-\infty}^y (y-s) dF(s) + K \int_y^{+\infty} (s-y) dF(s) \quad (9.3.3)$$

і обчислимо її першу похідну

$$\Phi'(y) = cF(y) - K(1 - F(y)) = (c + K)F(y) - K. \quad (9.3.4)$$

Друга похідна цієї функції невід'ємна (тобто вона опукла)

$$\Phi''(y) = (c + K)F'(y) = (c + K)f(y) \geq 0.$$

Прирівнявши першу похідну до нуля, отримаємо рівняння для мінімізуючого запасу y^*

$$F(y^*) = \frac{K}{c + K}. \quad (9.3.5)$$

Розв'язок (9.3.5) задачі (9.3.2) визначає стратегію оптимального поповнення запасів. Величина поповнення запасів h_t^* , що мінімізує середні повні витрати, задається слідуючим чином

$$h_t^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_{t-1} \geq y^*, \\ y^* - x_{t-1}, & \text{якщо } x_{t-1} \leq y^*. \end{cases} \quad (9.3.6)$$

Конкретні числові характеристики системи керування запасами залежать від виду функції щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини попиту. У якості прикладу розглянемо випадок симетричного «трикутного» розподілу попиту, при якому функція щільності розподілу має графік, представлений на рис. 1.

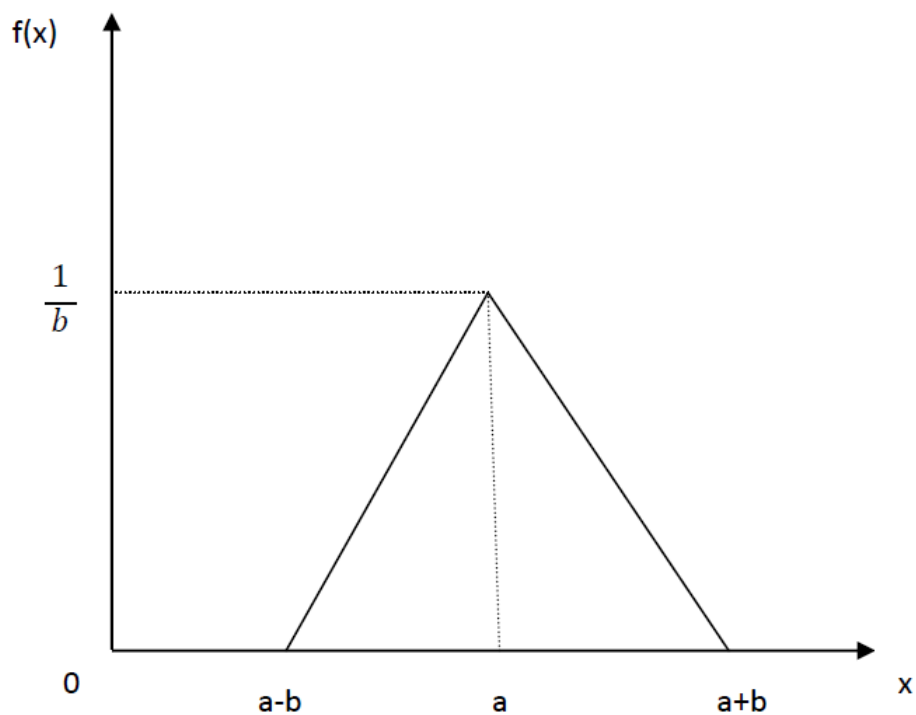


Рис. 1

Очевидно, що цей графік отримується паралельним переносом вправо (заміною x на $x - a$) графіка, зображеного на рис. 2 функції

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -b, \\ \frac{x+b}{b^2} & \text{при } -b \leq x \leq 0, \\ -\frac{x+b}{b^2} & \text{при } 0 \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x \geq b. \end{cases} \quad (9.3.7)$$

Обчислимо числові характеристики для функції щільності розподілу, заданої в (9.3.7) (рис. 2). У цьому випадку функція розподілу $F(x)$

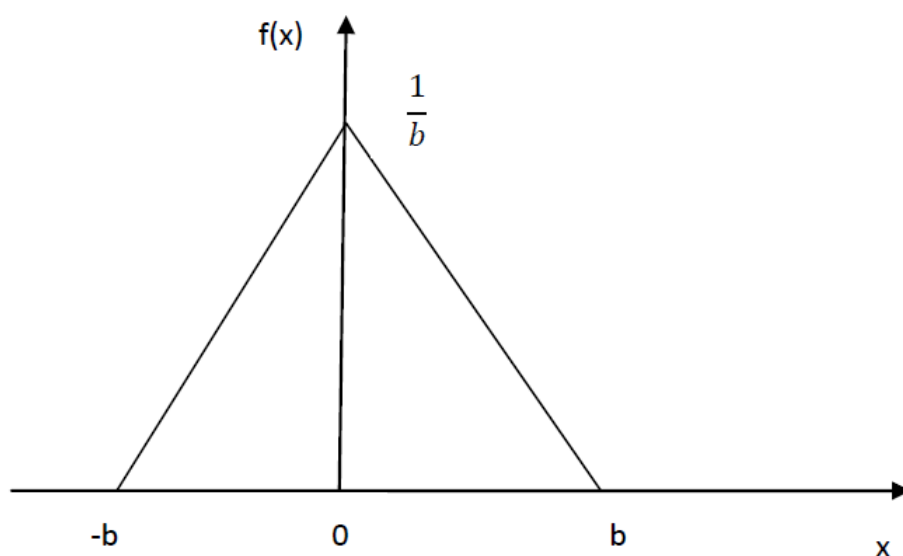


Рис. 2

визначається формулою

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq -b, \\ \frac{(x+b)^2}{2b^2} & \text{для } -b \leq x \leq 0, \\ 1 - \frac{(x-b)^2}{2b^2} & \text{для } 0 \leq x \leq b, \\ 1 & \text{для } x \geq b. \end{cases} \quad (9.3.8)$$

Випадкова величина попиту S має такі числові характеристики

$$M(S) = 0, \quad M(S^2) = \frac{b^2}{6}, \quad D(S) = \frac{b^2}{6}, \quad \sigma(S) = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

Безпосереднє обчислення з використанням функції середніх повних витрат у вигляді (9.3.3) показує, що при $x \leq -b$

$$\Phi(x) = -K \int_{-\infty}^{+\infty} (x - S)f(S)dS = -Kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(S)dS +$$

$$+K \int_{-\infty}^{+\infty} S f(S) dS = -Kx + kM(S) = -Kx. \quad (9.3.9)$$

Використовуючи вираз для першої похідної $\Phi'(x)$ у вигляді (9.3.4) і вираз (9.3.8) для функції розподілу $F(x)$, можна визначити, що для $-b \leq x \leq 0$ маємо

$$\Phi(x) = (c + K) \frac{(x + b)^3}{6b^2} - Kx + C_1. \quad (9.3.10)$$

Тут константа C_1 визначається шляхом прирівняння виразів (9.3.10) і (9.3.9) при $x = -b$

$$Kb = Kb + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Аналогічно для $0 \leq x \leq b$ отримаємо

$$\Phi(x) = -(c + K) \frac{(x + b)^3}{6b^2} + cx, \quad (9.3.11)$$

а для $x \geq b$

$$\Phi(x) = cx. \quad (9.3.12)$$

Вирази (9.3.9)-(9.3.12) задають в різних інтервалах шукану функцію середніх повних витрат. Замінюючи в ній x на $x - a$, отримаємо функцію середніх повних витрат, коли функція щільності розподілу попиту має вигляд рис. 1. Для ілюстрації графік функції середніх повних витрат для такої функції попиту у випадку $K > c$ представлено на рис. 3, де оптимальний рівень запасу $y^* = a + b - b\sqrt{\frac{2c}{c+K}}$.

У загальному вигляді для даної функції щільності розподілу попиту оптимальний рівень запасу задається формулами

$$y^* = \begin{cases} a - b + \sqrt{\frac{2k}{c+K}} + b, & \text{для } c > K, \\ a, & \text{для } c = K, \\ a + b - \sqrt{\frac{2c}{c+K}} + b, & \text{для } c < K, \end{cases} \quad (9.3.13)$$

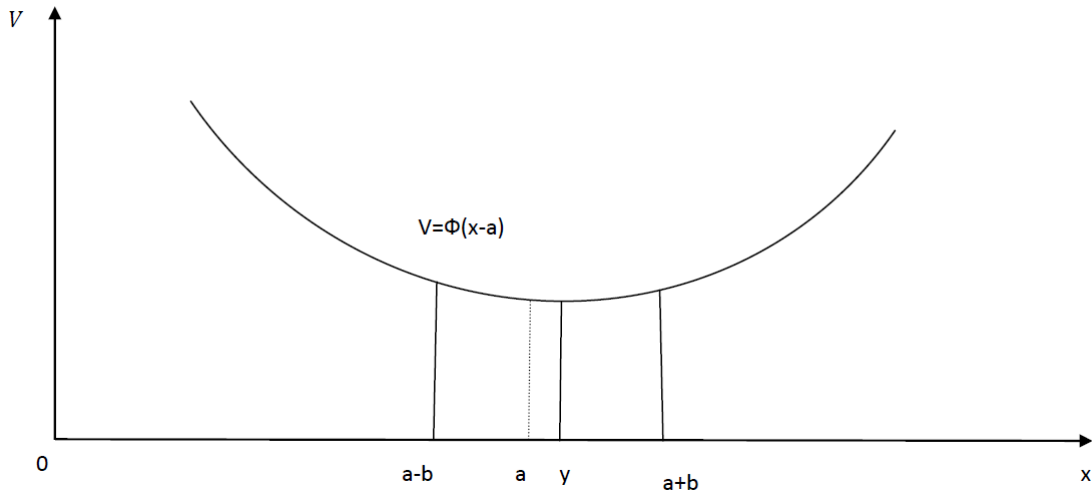


Рис. 3

а значення $\Phi^* = \Phi(y^*)$ мінімуму середніх повних витрат має вигляд:

$$\Phi^* = \begin{cases} bK \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2K}{c+K}} \right), & \text{якщо } c > K, \\ b \cdot \frac{K}{3} = b \cdot \frac{c}{3}, & \text{якщо } c = K, \\ bc \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2c}{c+K}} \right), & \text{якщо } c < K. \end{cases} \quad (9.3.14)$$

З формул (9.3.13) і (9.3.14) для нашої моделі виходить, що оптимальний рівень запасу при $c \neq K$ і мінімум середніх повних витрат при всіх c , K лінійно залежать від величини b , тобто від довжини інтервалу розсіювання значень величини попиту на товар. Зазначимо, що стратегія оптимального поповнення запасів задається формулою (9.3.6).

Приклад 9.6. Нехай деяка фірма у відповідності до договору реалізує зі складу по заявкам холодильники, причому денний попит є випадковою величиною, функція щільності розподілу якої представлена графічно на мал. 1 і коливається від 20 до 80 холодильників на день. Середні витрати зберігання холодильника за день складають 8 грн., а штраф за дефіцит (недопоставку) одного холодильника за день дорівнює 17 грн. Необхідно визначити стратегію оптимального поповнення запасу холодильників і мінімальні середні повні витрати.

Розв’язання. Розрахуємо: $b = (80 - 20)/2 = 30$ (холодильників), $a = (20 + 80)/2 = 50$ (холодильників), $c = 8$ грн., $K = 17$ грн. У відповідності з формулою (9.3.13) оптимальний рівень запасу ($c < K$) складає $y^* = 50 + 30 - \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{8 + 17}} \cdot 30 = 56$ (холодильників). Тоді величина h_t^* поповнення запасу холодильників фірмою, при якій середні повні витрати будуть мінімальні, задається згідно з формулою (9.3.6) так:

$$h_t^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_{t-1} \geq 56, \\ 56 - x_{t-1}, & \text{якщо } x_{t-1} \leq 56, \end{cases}$$

де x_{t-1} – запас холодильників на складі фірми на кінець попереднього дня. Так, якщо на кінець попереднього дня на складі фірми було 60 холодильників, то поповнювати запас не потрібно, а якщо на кінець попереднього дня на складі фірми залишилось 25 холодильників, то необхідно подати заявку на поповнення запасу холодильників у кількості $56 - 25 = 31$.

Якщо дотримуватись цієї стратегії поповнення запасу холодильників, то мінімальний рівень середніх повних витрат у розрахунку на один день у відповідності з формулою (9.3.14) складе

$$\Phi^* = 30 \cdot 8 \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{8 + 17}} \right) = 112 \text{ грн.}$$

9.4 Запитання для самоконтролю

1. Які основні типи моделей керування запасами?
2. Які основні риси однопродуктової статичної моделі?
3. Які основні риси однопродуктової статичної моделі з «розривами» цін?
4. Як зрозуміти поняття дефіцит? Які складові загальної вартості продукту при відсутності дефіциту? Які складові загальної вартості продукту за наявності дефіциту?
5. Які основні риси моделі зі скінченною інтенсивністю надходження замовлення? Які основні риси моделі з урахуванням незадоволених вимог?

9.5 Завдання для самостійної роботи

Нехай $k = 1, 2$ – номер академічної групи студентів, i – порядковий номер студента у списку академічної групи.

Вирішити наступні задачі.

1. Денний попит на товар дорівнює $(70 + i)$ одиниць. Витрати на розміщення кожного запасу постійні і дорівнюють $(60 + i)$ грн. Денні витрати на зберігання одиниці запасу складають $(0,2 + k)$ грн. Необхідно визначити економічний розмір партії і точку замовлення при строкові виконання замовлення $(10 + k)$ днів, оптимальний середній рівень запасу, оптимальні середні витрати зберігання запасів в одиницю часу.
2. Нехай попит у прикладі 1 в дійсності є випадковим, при цьому денний попит розподілений нормально з середнім $\mu = (70 + i)$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{70 + i}$. Визначити розмір резервного запасу таким чином, щоб ймовірність запасу на протязі строку виконання замовлення не перевищувала $k \cdot 0,05$.
3. Розглянути модель керування запасами при таких умовах: $K = (11 + k)$ грн., $h = (1 + 0,1i)$ грн., $\beta = (7 + k)$ од., $c_1 = (6 + k)$ грн., $c_2 = (2 + k)$ грн., $q = (16 + k)$ одиниць.
4. Розглянемо задачу керування запасами для випадку трьох видів продукції ($n = 3$). Початкові дані наведені в таблиці. Загальна площа складських приміщень дорівнює $30 + i$ (м²). Визначити усі параметри задачі 4 (див. лекції)

Вид продукції	K_i (грн.)	β_i (од.)	h_i (грн.)	a_i (м ²)
1	$8 + k + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil$	$3 + k$	$0,3 + 0,1i$	$1 + k$
2	$8 - k + \left\lceil \frac{i}{4} \right\rceil$	$7 - k$	$0,2 + 0,1i$	$1 + k$
3	$10 + 2k + \left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$	$4 + 4$	$0,4 + 0,1i$	$1 + 3$

5. Річна потреба машинобудівного заводу в малосортівій сталі (дріт діаметром $(12+k)$ мм.) складає $(200+i)$ т. Відповідно до технічних вимог у випадку необхідності дріт діаметром $(12+k)$ мм. можна замінити дротом $(15+k)$ мм., ціна якого за тону на $(10+i)$ од. більша. Умовно-постійні витрати на оформлення одного замовлення дорівнюють $(20+k)$ од., на зберігання 1 т. – $(15+k)$ одиниць. Визначити оптимальні параметри y^* , L^* , Y^* .
6. Нехай фірма у відповідно до договору реалізує зі складу по заявкам холодильники, причому денний попит є випадковою величиною, функція щільності розподілу якої представлена графічно на мал. 1 (див. лекцію) і коливається від $(20+i)$ до $(80+i)$ холодильників на день. Середні витрати зберігання холодильника за день складають $(9+k)$ грн., а штраф за непоставку одного холодильника за день становить $(20+k)$ грн. Необхідно визначити стратегію оптимального поповнення запасу холодильників і мінімальні середні повні витрати.

Тема 10. Моделі систем масового обслуговування

Багато економічних задач пов'язані з системами масового обслуговування (СМО), тобто такими системами, в яких, з одного боку, виникають масові запити на виконання яких-небудь послуг, з другого — відбувається задоволення цих запитів. СМО включає в собі такі елементи: джерело вимог, вхідний потік вимог, черга, канали обслуговування, вихідний потік вимог. Дослідженням таких систем займається теорія масового обслуговування.

Методами теорії масового обслуговування можна розв'язати багато задач дослідження процесів, що відбуваються в економіці. Наприклад, в організації торгівлі ці методи дозволяють визначити оптимальну кількість торгових точок певного профілю, чисельність продавців, частоту завозу товарів і інші параметри. Другим прикладом систем масового обслуговування можуть бути склади або бази постачально-збутових організацій, і задача теорії масового обслуговування в даному випадку зводиться до того, щоб встановити оптимальне співвідношення між кількістю отриманих базою вимог на обслуговування і кількістю обслуговуючих приладів, при якому сумарні витрати на обслуговування і збитки від простою транспорта були б мінімальними. Згадану теорію можна застосувати і при розрахунку площі складських приміщень, при цьому складські площі розглядаються як обслуговуючі пристрої, а прибуття транспортних засобів під виграду — як вимога.

Класифікація СМО відбувається за декількома ознаками. Наприклад, очікування вимоги початку обслуговування. За цією ознакою СМО поділяються на такі види:

- 1) системи масового обслуговування з відмовами;
- 2) системи масового обслуговування з очікуванням;
- 3) системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги;
- 4) системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування в ній.

Тобто, допускається черга, але з обмеженим строком перебування кожної вимоги в ній.

По кількості каналів або приладів системи діляться на одноканальні і багатоканальні.

Системи масового обслуговування, у яких вимоги, що надходять у момент, коли усі прилади обслуговування зайняті, отримують відмови і губляться, називаються системами з втратами або відмовами.

Системи масового обслуговування, у яких можлива поява як завжди довгої черги вимог до обслуговуючого приладу, називаються системами з очікуванням.

Системи масового обслуговування, що допускають чергу, але з обмеженою кількістю місць в ній, називаються системи з обмеженою довжиною черги.

Системи масового обслуговування, що допускають чергу, але з обмеженим строком перебування кожної вимоги в ній, називаються системами з обмеженим часом очікування.

По місці знаходження джерела вимог системи масового обслуговування діляться на розімкнуті, коли джерело знаходиться поза системою, і замкнені, коли джерело знаходиться в самій системі. До останнього виду відносяться, наприклад, станочний участок, у якому станки є джерелом несправностей, а отже, і вимог на їх обслуговування.

Методи і моделі, що застосовуються в теорії масового обслуговування, можна умовно поділити на аналітичні і імітаційні.

Аналітичні методи теорії масового обслуговування дозволяють отримати характеристики системи як деякі функції параметрів її функціонування. Тому завжди є можливість проводити якісний аналіз впливу окремих факторів на ефективність роботи СМО. Імітаційні методи засновані на моделюванні процесів масового обслуговування на комп'ютерах і застосовуються, якщо неможливо застосувати аналітичні моделі. Далі будемо розглядати аналітичні методи моделювання.

Теоретично найбільш розроблені і зручні у практичних застосуваннях методи розв'язування таких задач масового обслуговування, в яких вхідний потік вимог є пуасонівським.

Пуасонівський потік має три основні властивості: ординарність, стаціонарність і відсутність післядії.

Ординарність потоку означає практичну неможливість одночасного надходження двох і більше вимог.

Стаціонарним називається потік, для якого математичне очікування кількості вимог, що надходять в систему за одиницю часу, не змінюється в часі. Таким чином, ймовірність надходження в систему певної кількості вимог в заданий проміжок часу Δ_t залежить від його вели-

чини і не залежить від початку його відліку на осі часу.

Відсутність післядії означає, що кількість вимог, що надходять до системи до моменту t , не визначає того, скільки вимог надходить до системи за проміжок часу від t до $t + \Delta t$.

Важливою характеристикою СМО є час обслуговування вимоги в системі. Час обслуговування однієї вимоги є, як правило, випадковою величиною і тому може бути описаний законом розподілу. Найбільше розповсюдження в теорії і практичних дослідженнях отримав експоненціальний закон розподілу.

10.1 Показники ефективності систем масового обслуговування

Показники ефективності діляться на показники, що характеризують якість і умови роботи обслуговуючої системи, і показники, що відображають економічні особливості системи.

Показники першої групи звичайно формують на основі отриманих із розрахунків значень ймовірностей станів системи. Показники другої групи розраховують на основі показників першої групи.

Серед показників першої групи можна виділити наступні.

1. Ймовірність того, що поступивша в систему вимога відмовиться приєднуватися до черги і губиться ($P_{\text{відм.}}$). Цей показник для СМО з відмовами дорівнює ймовірності того, що в системі знаходиться стільки вимог, скільки вона має приладів (каналів) обслуговування:

$$P_{\text{відм.}} = P_m,$$

де m — кількість каналів обслуговування.

Для системи з обмеженою довжиною черги $P_{\text{відм.}}$ дорівнює ймовірності того, що в системі знаходиться $m + l$ вимог:

$$P_{\text{відм.}} = P_{m+l},$$

де l — припустима довжина черги.

Протилежним показником є ймовірність обслуговування вимоги

$$P_{\text{обсл.}} = 1 - P_{\text{відм.}}$$

2. Середня кількість вимог, що чекає початок обслуговування

$$M_{\text{очік.}} = \sum_{n=m+1}^{m+l} (n-m)P_n,$$

де P_n — ймовірність того, що в системі знаходиться n вимог.

При умові пуассонівського потоку вимог і експоненціального закону розподілу часу обслуговування формули для $M_{\text{очік.}}$ приймають такий вигляд:

система з обмеженою довжиною черги

$$M_{\text{очік.}} = \frac{P_0 \rho^m}{m!} \sum_{n=1}^l n \left(\frac{\rho}{m} \right)^n,$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, λ — інтенсивність вхідного потоку вимог (середня кількість вимог, що надходять за одиницю часу), μ — інтенсивність обслуговування (середня кількість вимог, що обслуженні за одиницю часу);

система з очікуванням

$$M_{\text{очік.}} = \frac{P_0 \rho^{m+1}}{m \cdot m!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{m}\right)^2}.$$

3. Відносна (q) і абсолютна (A) пропускні можливості системи. Ці величини розраховуються так

$$q = 1 - P_{\text{відм.}}, \quad A = \lambda q.$$

4. Середня кількість зайнятих обслуговуванням приборів у випадку експоненціального характеру потоку вимог і часу обслуговування

$$m_3 = \rho q.$$

Для СМО з відмовами m_3 знаходиться за формулою

$$m_3 = \sum_{n=1}^m n \cdot P_n.$$

5. Загальна кількість вимог, що знаходиться в системі — M . Ця величина визначається таким чином:

система масового обслуговування з відмовами

$$M = m_3;$$

система масового обслуговування
з обмеженою довжиною черги і очікування

$$M = m_3 + M_{\text{очік.}}$$

6. Середній час очікування вимогою початку обслуговування $T_{\text{очік.}}$ при показниковому законі розподілу вимог у вхідному потоці визначається за формулою

$$T_{\text{очік.}} = \frac{M_{\text{очік.}}}{\lambda}.$$

Показники, що характеризують економічні особливості, формуються у відповідності з конкретним видом системи і її призначення. Одним із загальних економічних показників є економічна ефективність

$$E = P_{\text{обсл.}} \lambda c T - G_n,$$

де c — середній економічний ефект, отриманий при обслуговуванні однієї вимоги, T — інтервал часу, G_n — величина втрат у системі.

Величину втрат можна визначити за такими формулами:

система з відмовами

$$G_n = (q_k m_3 + q_3 P_{\text{відм.}} \lambda + q_{nk} m_{\text{св.}}) T,$$

де q_k — вартість експлуатації одного приладу за одиницю часу, q_3 — вартість збитків у результаті відходу вимог з системи за одиницю часу, q_{nk} — вартість одиниці часу простою приладу системи, $m_{\text{св.}} = m - m_3$;

система з очікуванням

$$G_n = (q_{\text{очік.}} M_{\text{очік.}} + q_{nk} m_{\text{св.}} + q_k m_3) T,$$

де $q_{\text{очік.}}$ — вартість втрат, пов'язаних з простоєм вимог в черзі за одиницю часу;

системи масового обслуговування з відмовами.

Ймовірність станів визначаються за формулами

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, а ймовірність P_0 знаходиться з виразу

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1},$$

P_0 — ймовірність того, що усі прилади не зайняті.

Приклад 10.1. У обчислювальний центр з трьома комп'ютерами надходять замовлення на обчислювальні роботи. Якщо працюють усі три комп'ютери, то замовлення нове не приймається. Нехай середній час роботи з одним замовленням становить 3 год. Інтенсивність потоку замовлень 0,25 (1/год.). Знайти ймовірність відмови і середню кількість зайнятих комп'ютерів.

Розв'язання. Маємо: $m = 3$, $\lambda = 0,25$ (1/год.), $\bar{T}_{\text{обсл.}} = 3$ год. Знаходимо

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{T}_{\text{обсл.}} = 3 \cdot 0,25 = 0,75,$$

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^3 \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1} = \left[1 + 0,75 + \frac{0,75^2}{2!} + \frac{0,75^3}{3!} \right]^{-1} = [2,1]^{-1},$$

$$P_{\text{відм.}} = \frac{\rho^m}{m!} P_0 = \frac{0,75^3}{3!} \frac{1}{2,1} = 0,033,$$

$$m_3 = \sum_{n=1}^m n P_n = P_0 \sum_{n=1}^m \frac{\rho^n}{(n-1)!} = \frac{1}{2,1} \left[0,75 + 0,75^2 + \frac{0,75^3}{2} \right] \approx 0,72.$$

Таким чином, $P_{\text{відм.}} = 0,033$, $m_3 = 0,72$ (комп'ютери).

10.2 Система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги

Розглядається багатоканальна система масового обслуговування, що має m каналів з обмеженою чергою, кількість мість в якій обмежена величиною b .

Ймовірність станів $s_1, s_2, \dots, s_m$ знаходимо за формулою

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ймовірність станів $s_{m+1}, \dots, s_{m+l}$ визначається так

$$P_i = \frac{\rho^i}{m^{i-m} m!} P_0, \quad (i = m + 1, \dots, m + l).$$

Ймовірність P_0 розраховується за формулою

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=m+1}^{m+l} \frac{\rho^i}{m^{i-m} m!} \right]^{-1}.$$

У більшості практичних задач відношення $\frac{\rho}{m} < 1$. Формула для P_0 тоді використовується у вигляді

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^l}{1 - \frac{\rho}{m}} \right]^{-1}.$$

Приклад 10.2. На автозаправній станції є три колонки для видачі бензину. Біля станції знаходиться майданчик на три машини для очікування в черзі. На станцію прибуває в середньому дві машини за хвилину. Середній час заправки однієї машини 1 хвилина. Необхідно визначити ймовірність відмови і середню довжину черги.

Розв'язання. Отже, $m = 3$, $l = 3$, $\lambda = 2$ (1/хв.), $\bar{T}_{\text{обсл.}} = 1$ хв., $\mu = \frac{1}{\bar{T}_{\text{обсл.}}} = 1$ (1/хв.). Далі знаходимо: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{\rho}{m} = \frac{2}{3}$,

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^l}{1 - \frac{\rho}{m}} \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \frac{2}{3}} \right]^{-1} \approx 0,122.$$

$$P_{\text{відм.}} = P_{m+l} = \frac{\rho^{m+l}}{m^l m!} P_0 = \left(\frac{\rho}{m}\right)^l \frac{\rho^m}{m!} P_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{2^3}{3!} 0,122 = 0,048,$$

$$\begin{aligned} M_{\text{очік.}} &= \frac{P_0 \rho^m}{m!} \sum_{n=1}^l n \left(\frac{\rho}{m}\right)^n = \\ &= \frac{0,122 \cdot 2^3}{3!} \left[\frac{2}{3} + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right] = 0,35. \end{aligned}$$

Отримали, $P_{\text{відм.}} = 0,048$, $M_{\text{очік.}} = 0,35$ машини.

10.3 Системи масового обслуговування з очікуванням

СМО з очікуванням аналогічна системі з обмеженою довжиною черги при умові, що межа черги рухається в нескінченність.

Тоді ймовірності станів знаходимо за формулами

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$P_i = \frac{\rho^i}{m! m^{i-m}} P_0, \quad (i = m + 1, \dots, m + k, \dots).$$

Якщо $\frac{\rho}{m} < 1$, то для визначення P_0 використовують формулу

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)} \right]^{-1}.$$

Приклад 10.3. У порту є два причали для розвантаження грузових суден. Інтенсивність потоку суден дорівнює 0,8 (судна за добу). Середній час розвантаження одного судна дорівнює 2 доби. Черга на розвантаження може бути необмеженою.

Знайти середню кількість зайнятих причалів і середній час перебування судна в порту.

Розв'язання. Маємо: $m = 2$, $\lambda = 0,8$ (1/добу), $\mu = 1/\bar{T}_{\text{обсл.}} = 0,5$ (1/добу), $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,8}{0,5} = 1,6$. Знаходимо:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \left[\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!/(m-\rho)} \right]^{-1} = \\
 &= \left[1 + \frac{1,6}{1!} + \frac{1,6^2}{2!} + \frac{1,6^3}{2!(2-1,6)} \right]^{-1} = 0,11, \\
 m_3 &= \rho q, \quad q = 1, \quad m_3 = 1,6, \\
 M_{\text{очік.}} &= \frac{P_0 \rho^{m+1}}{m \cdot m!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{m}\right)^2} = \frac{0,11 \cdot 1,6^3}{2 \cdot 2(1 - 0,8)^2} = 2,8, \\
 \bar{T}_{\text{очік.}} &= \frac{M_{\text{очік.}}}{\lambda} = 3,5.
 \end{aligned}$$

Отже, $m_3 = 1,6$ причала, $\bar{T}_{\text{очік.}} = 3,5$ (добі).

10.4 Система масового обслуговування з обмеженим часом очікування

У системах масового обслуговування з обмеженим часом очікування час очікування у черзі кожної вимоги обмежений випадковою величиною $t_{\text{очік.}}$, середнє значення якого $\bar{t}_{\text{очік.}}$.

Величина, що обернена середньому часу очікування, означає середню кількість вимог, що покидають чергу за одиницю часу, викликану появою у черзі однієї вимоги: $\nu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{очік.}}}$.

При наявності у черзі k вимог інтенсивність потоку, що покидають чергу вимог, складає $k\nu$.

Формули для визначення ймовірностей стану такої системи мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 P_i &= \frac{\rho^i}{i!} P_0, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\
 P_i &= \frac{\rho^m}{m!} \frac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^k (m\mu + j\nu)}, \quad (i = m + 1, \dots, m + k, \dots).
 \end{aligned}$$

Ймовірність P_0 розраховуємо за формулою

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^k (m\mu + j\nu)} \right]^{-1}.$$

У практичних задачах суму нескінченного ряду розрахувати досить просто, так як члени ряду досить швидко зменшуються.

Приклад 10.4. У пункті хімічистки є три апарати для чистки. Інтенсивність потоку відвідувачів $\lambda = 6$ (в годину). Інтенсивність обслуговування відвідувачів одним апаратом $\mu = 3$ (відв. в годину). Середня кількість відвідувачів, що покидають чергу, не дочекавшись обслуговування, $\nu = 1$ (відв. за годину). Знайти абсолютну пропускну спроможність пункту.

Розв'язання. Маємо: $m = 3$, $\lambda = 6$, $\mu = 3$, $\nu = 1$. Знаходимо:
 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2$,

$$P_0 = \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{3!} \left(\frac{6}{3 \cdot 3 + 1} + \frac{6^2}{(3 \cdot 3 + 1)(3 \cdot 3 + 2 \cdot 1)} \right) \right]^{-1} = 0,13.$$

Ймовірність зайнятості усіх апаратів дорівнює $P_{\text{зайн.}} = 1 - P_0 = 0,87$. Тоді абсолютна пропускну спроможність дорівнює: $A = m \cdot P_{\text{зайн.}} = 3 \cdot 0,87 = 2,61$. Таким чином, $A = 2,61$ (відвідувача в годину).

10.5 Замкнені системи масового обслуговування

У замкнених системах масового обслуговування джерело вимог знаходиться всередині системи і інтенсивність потоку вимог залежить від стану самої системи. Частіше всього потоком вимог в такій системі є потік несправностей від деякої групи працюючих приладів. Нехай є m працюючих приладів, які можуть вийти з ладу за рахунок несправностей. Також є n приладів (каналів) обслуговування цих вимог. У якості таких каналів можуть бути і люди. Вважають, що $n < m$.

Позначимо через s_0 стан, при якому всі прилади працюють, а прилади обслуговування не зайняті; s_1 — стан, при якому один прилад вийшов з ладу і обслуговується одним приладом обслуговування; s_n — n приладів не працюють і всі прилади зайняті обслуговуванням; s_m —

усі прилади не працюють, з них n обслуговується і $m - n$ чекають обслуговування.

Ймовірність станів замкненої системи визначаються таким чином:

$$P_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (m - j)}{i!} \rho^i P_0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$P_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (m - j)}{n! n^{i-n}} \rho^i P_0, \quad (i = n + 1, n + 2, \dots, m),$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (m - j)}{i!} \rho^i + \sum_{i=n+1}^m \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (m - j)}{n! n^{i-n}} \rho^i \right]^{-1}.$$

Приклад 10.5. Робітник обслуговує групу з трьох верстатів. Кожний верстат зупиняється в середньому два рази за годину. Процес налаштування займає в середньому 10 хв. Визначити абсолютну пропускну спроможність налаштування робочих верстатів.

Розв'язання. Маємо: $n = 1$, $m = 3$, $\lambda = 2$, $T_{\text{обсл.}} = \frac{1}{6}$, $\mu = 6$. Знаходимо:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}, \quad P_0 = \left[1 + m\rho + \frac{m(m-1)}{1!1^1} \rho^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1!1^2} \rho^3 \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right]^{-1} = 0,346.$$

Визначимо ймовірність того, що робітник буде зайнятий обслуговуванням:

$$P_3 = 1 - P_0 = 1 - 0,346 = 0,654.$$

Якщо робітник зайнятий обслуговуванням, то він обслуговує 6 верстатів за годину. Отже, абсолютна спроможність знаходиться так:

$$A = \mu P_3 = 6 \cdot 0,654 = 4.$$

Таким чином, $A = 4$ (верстати за годину).

10.6 Запитання для самоконтролю

1. Що називається системою масового обслуговування?
2. Назвіть класифікацію систем масового обслуговування за різними ознаками. Опишіть кожну позицію універсальної класифікації систем масового обслуговування.
3. В залежності від типу системи масового обслуговування які можуть застосовуватись показники їх ефективності?
4. Охарактеризуйте одноканальну СМО з обмеженою довжиною черги.
5. Які існують характеристики ефективності для багатоканальної СМО?
6. За якими формулами можна знайти граничні ймовірності станів для одноканальної СМО з обмеженою чергою?
7. Які існують характеристики ефективності для одноканальної СМО з обмеженою чергою?
8. Охарактеризуйте одноканальну СМО з необмеженою чергою.
9. Охарактеризуйте багатоканальну СМО з обмеженим часом очікування.
10. Охарактеризуйте замкнену СМО.
11. За якими формулами обчислюються наступні характеристики системи масового обслуговування: а) абсолютна пропускна спроможність системи;
б) відносна пропускна спроможність системи;
в) ймовірність відмови в обслуговуванні;
г) середнє число заявок в СМО;
д) середнє число заявок в черзі;
е) середній час перебування заявки в СМО;
ж) середній час перебування заявки в черзі;
з) середнє число зайнятих каналів.

10.7 Завдання для самостійної роботи

1. У обчислювальний центр з $(3 + k)$ комп'ютерами надходять замовлення на обчислювальні роботи. Якщо працюють усі $(3 + k)$ комп'ютерів, то нове замовлення не приймається. Нехай середній час роботи з одним замовленням становить $(3 + k)$ годин. Інтенсивність потоку замовлень дорівнює $(0,25 + 0,02i)$ (1/год.). Знайти ймовірність відмови і середню кількість зайнятих комп'ютерів.
2. На автозаправній станції є $(3 + k)$ колонки для видачі бензину. Біля станції знаходиться майданчик на $(3 + k)$ машини для очікування в черзі. На станцію прибуває в середньому $(2 + k)$ машини за хвилину. Середній час заправки однієї машини $(1 + 0,02i)$ хвилин. Необхідно визначити ймовірність відмови і середню довжину черги.
3. У порту є $(2 + k)$ причали для розвантаження грузових суден. Інтенсивність потоку суден дорівнює $(0,8 + 0,02i)$ (судна за добу). Середній час розвантаження одного судна дорівнює $(2 + k)$ доби. Черга на розвантаження може бути необмеженою.
Знайти середню кількість зайнятих причалів і середній час перебування судна у порту.
4. У пункті хімчистки є $(2 + k)$ апарати для чистки. Інтенсивність потоку відвідувачів $\lambda = \left\lceil \frac{(6 + i)}{7} \right\rceil$ (в годину). Інтенсивність обслуговування відвідувачів одним апаратом $\mu = (3 + k)$ (відв. у годину). Середня кількість відвідувачів, що покидають чергу, не дочекавшись обслуговування, $\nu = 1$, якщо $1 \leq i \leq 8$; $\nu = 2$, якщо $9 \leq i \leq 18$; $\nu = 3$, якщо $19 \leq i \leq 25$. Знайти абсолютну пропускну спроможність пункту.
5. Робітник обслуговує групу з $(3 + k)$ верстатів. Кожний верстат зупиняється в середньому $\left(2 + k + \left\lceil \frac{i}{8} \right\rceil\right)$ разів за годину. Процес налаштування займає в середньому $(7 + 0,2i)$ хвилин. Визначити абсолютну пропускну спроможність налаштування робочих верстатів.

Тема 11. Імітаційне моделювання

Мета імітаційного моделювання – відтворення поведінки системи на основі результатів аналізу найбільш істотних взаємозв'язків між її елементами. Результати дослідження імітаційної моделі, як правило, являють собою оцінки значень операційних характеристик системи, поведінку якої імітують. При моделюванні довільної системи масового обслуговування практичний інтерес представляють такі показники: середня тривалість обслуговування клієнта, середня довжина черги, час простою і інші.

Імітаційне моделювання – це статистичний експеримент. Він відрізняється від лабораторного експерименту тим, що здійснюється на комп'ютері. Описуючи взаємодію складових частин системи за допомогою математичних співвідношень, можна отримати необхідну інформацію про досліджувану систему, не звертаючись до натуральних експериментів.

Імітаційне моделювання використовується при розв'язуванні задач двох типів.

1. Теоретичні задачі математики, фізики, хімії, біології, наприклад:
 - а) розрахунок площ фігур, кратних інтегралів;
 - б) обернення матриць;
 - в) розрахунок констант;
 - г) розв'язування диференціальних рівнянь в часткових похідних;
 - д) розв'язування систем лінійних рівнянь.
2. Практичні задачі управління:
 - а) управління запасами;
 - б) задачі планування, інвестування;
 - в) задачі міграції населення, групової поведінки;
 - г) задачі кровообігу, діяльності мозку;
 - д) задачі реалізації воєнних тактик і стратегій.

Для розв'язування перерахованих задач раніше використовувався метод Монте-Карло. Його основна ідея полягає у використанні вибірок для отримання потрібних оцінок.

Імітаційне моделювання, подібно до методу Монте-Карло, засноване на використанні вибірок оцінювання результатів роботи системи. У цьому відношенні багато ідей, що виникли у зв'язку з методом Монте-Карло, використовуються в імітаційному моделюванні, наприклад, використання випадкових чисел для отримання вибірок.

11.1 Випадкові числа

Імітаційне моделювання дозволяє аналізувати характеристики системи на основі інформації, що отримана за допомогою вибірок.

У імітаційних моделях вибірка робиться з використанням випадкових чисел із сегменту $[0, 1]$.

Випадкові числа задовольняють умові:

- 1) всі числа належать сегменту $[0, 1]$ і з'являються з однаковою ймовірністю;
- 2) всі числа незалежні.

Для отримання випадкових чисел в інтервалі $[0, 1]$ застосовуються арифметичні методи. Ці числа визначені раніше, коли задано початкове значення для алгоритму визначення випадкових чисел. Це вигідно, якщо потрібно повторити вибірку. Ці випадкові числа називають *псевдочислами*. Істинно випадкові числа отримують іншими методами.

Приклад 11.1. (Гра з киданням монети)

Гравець А виграє 10 гривень у гравця В, якщо монета при киданні падає решкою (Р) і програє, якщо випадає герб (Г). Події (Р) і (Г) мають місце у 50%, тобто, ймовірність появи події (Р) або події (Г) дорівнює $\frac{1}{2}$.

Так як усі випадкові числа за означенням рівномірно розподілені на інтервалі $[0, 1]$, то пропонуються наступні правила гри.

Випадкове число позначимо через R і, якщо $0 \leq R \leq 0,5$, то будемо вважати, що має місце подія (Р) (тобто монета впала решкою), а якщо $0,5 \leq R \leq 1$, то будемо вважати, що має місце подія (Г) (випав герб). Такий розподіл R на $[0, 1]$ еквівалентний умові однакової ймовірності подій (Р) та (Г).

Нехай гравці А і В роблять 20 кидків. Це відповідає отриманню 20 випадкових чисел в проміжку $[0, 1]$.

Візьмемо двадцять перших випадкових чисел:

0,058962	0,673284	0,479909	0,948578	0,613960	0,593277	0,934123
0,178239	0,347270	0,564395	0,220998	0,480379	0,480798	0,357985
0,652531	0,300419	0,725225	0,58382	0,709126	0,888953	0,764371
0,172286	0,774217	0,661127	0,239580	0,238133	0,368147	0,056012
0,234088	0,935472					

Які і будуть представляти кидання монети. Послідовні результати гри будуть такі: Р, Г, Р, Г, Г, Г, Г, Р, Р, Г, Р, Р, Р, Р, Г, Р, Г, Г, Г, Г. Отримали, що результат Р — 9 разів, а Г — 11 разів. Отже, гравець А програв $(11 - 9) \cdot 10 = 20$ гривень.

Якщо збільшувати кількість кидків, то можна очікувати нічийного результату.

11.2 Метод Монте-Карло

Імітаційне моделювання є статистичний експеримент, результати якого повинні інтерпретуватися відповідними статистичними методами. Результати імітаційного моделювання досягають стаціонарних значень тільки після багаторазового повторення експеримента. Щоб продемонструвати ідею методу Монте-Карло, розглянемо приклад.

Приклад 11.2. Нехай маємо круг з $r = 5$ (см) і центром у точці $(1, 2)$. Рівняння кола таке:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25,$$

і описаний навкола нього квадрат.

Точки квадрату задовольняють умові:

$$-4 \leq x \leq 6, \quad -3 \leq y \leq 7.$$

Усі точки в квадраті з'являються з однаковою ймовірністю. Якщо ми задаємо n точок і з них m попали в круг або на його границі, то площа круга оцінюється так:

$$S = \frac{m}{n} \times (\text{площа квадрата}).$$

Для кожного n робимо декілька прогонів (обираємо інші випадкові числа) і розраховуємо дисперсію S . Потім збільшуємо кількість точок n і робимо декілька прогонів. Величина дисперсій буде зменшуватися, а математичне очікування S буде наближатися до $78,54 \text{ см}^2$

11.3 Експлуатація імітаційної моделі

Для створення імітаційної моделі спочатку необхідно описати характеристики основних подій. Подія визначається як точка в часі, в якій відбувається зміна характеристик системи. Як правило зміни відбуваються у тих випадках, коли закінчується один процес і починається інший. Для отримання потрібних результатів моделювання достатньо спостерігати систему у моменти, коли відбуваються події.

Розглянемо систему масового обслуговування з одним вузлом обслуговування. Метою моделювання такої системи є оцінка середнього часу перебування клієнта у черзі, середньої довжини черги і частки часу простоя системи.

Операційні характеристики процесу масового обслуговування можуть змінювати свої значення або у момент надходження додаткової вимоги на обслуговування, або при завершенні обслуговування. До обслуговування чергового клієнта можна приступати зразу, або зайняти чергу. Після завершення обслуговування система може приступати до обслуговування наступного клієнта. Якщо черга відсутня, то система простоює.

Для експлуатації імітаційної моделі необхідно обрати одиницю часу. У залежності від системи такою одиницею може бути хвилина, місяць, рік і т.д.

Розглянемо експлуатацію типової імітаційної моделі. Модель моделює роботу системи на протязі T одиниць часу. Робота починається з даними, що відносяться до нульового моменту часу і відмічаються відповідні події на шкалі часу в хронологічному порядку. Кожна подія супроводжується коректировкой протоколу, що відображає можливі зміни у показниках функціонування. На мал. 1 показано процес експлуатації моделі. Кожна подія на шкалі часу відмічена знаком $\bullet$.

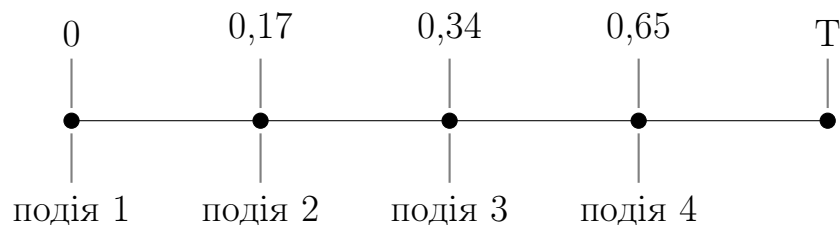


Рис. 1

Різкі переходи, що здійснює модель при переході з однієї події до іншої, вказують, що процес відбувається в дискретному часі, і тому

назва «дискретне моделювання».

У дискретному моделюванні між реальним часом і часом роботи моделі немає нічого спільного. Модель реалізується на комп'ютері і тому її функціонування значно менше реального.

Приклад 11.3. Моделюється система масового обслуговування надходження вимог, що підпорядковані пуасонівському розподілу з середнім 3 клієнта в год., а час обслуговування дорівнює 0,2 год з ймовірністю 0,5 або 0,6 год з ймовірністю 0,5. Клієнти обслуговуються за правилом «перший прийшов — першим і обслуговується». Довжина черги і джерело надходження клієнтів не обмежені. Нехай у початковий момент клієнти відсутні.

Розв'язання. Дещо про пуасонівський розподіл.

Якщо нас цікавить час появи певної випадкової події за одиницю часу, коли факт появи цієї події у експерименті не залежить від того, скільки раз і у які моменти часу вона відбувалася у минулому, і не впливає на майбутнє, а випробування відбуваються у стаціонарних умовах, то для опису розподілу такої випадкової величини використовується закон Пуасона (1837р).

Пуасонівська випадкова величина використовується для опису кількості збоїв автоматичної лінії або кількості відмов складної системи в одиницю часу; кількості вимог на обслуговування, що поступають у систему в одиницю часу; статистичних закономірностей нещасних випадків і захворювань.

Для пуасонівського вхідного потоку з середньою інтенсивністю клієнтів в годину проміжки часу між вимогами мають експоненціальний розподіл і отримуються за формулою

$$P = -\frac{1}{\lambda} \ln R.$$

У нашому прикладі $\lambda = 3$ і тоді $P = -\frac{1}{3} \ln R$.

Так як час обслуговування дорівнює 0,2 або 0,6 год. з однаковими ймовірностями, то час обслуговування визначимо так:

$$q = \begin{cases} 0,2 \text{ год} & \text{при } 0 \leq R \leq 0,5, \\ 0,6 \text{ год} & \text{при } 0,5 \leq R \leq 1. \end{cases}$$

У однофазній системі обслуговування можливі події двох типів: надходження клієнтів і їх вихід.

Дії, що пов'язані з цими подіями можна охарактеризувати таким чином:

Дія, що пов'язана з надходженням клієнта

1. Генерація моменту часу, в який надходить чергова вимога на обслуговування, шляхом розрахунку проміжку часу між вимогами P і додаванням його до поточного часу моделювання.
2. Перевірка стану системи (простій чи робота):
 - а) якщо система простоє, то почати обслуговування нового клієнта, згенерувати час обслуговування q і розрахувати час закінчення обслуговування (поточний час $+ q$);
змінити стан системи на робоче і скоригувати протокол простою системи;
 - б) якщо система працює, то поставити нового клієнта у чергу і збільшити її довжину на одиницю.

Подія, що пов'язана з закінченням обслуговування

Перевірка стану черги (пуста чи ні):

- 1) якщо черга пуста, то об'явити простій системи;
- 2) якщо непушта, то почати обслуговування першого на черзі клієнта, зменшити довжину черги на одиницю і скоригувати протокол часу черги.

Отримати час обслуговування клієнта q і розрахувати час закінчення обслуговування (поточний час $+ q$).

У нашому прикладі система починає роботу з пустою чергою. Перша заявка на обслуговування надійшла через

$$P_1 = -\frac{1}{3} \ln 0,058962 = 0.94 \text{ год.}$$

Таким чином, модель переходить з $t = 0$ в $t = 0,94$. У момент $t = 0,94$ відбувається подія, що пов'язана з надходженням вимоги на обслуговування. Для цього розраховуємо P з другим випадковим числом з нашого ряду і отримаємо:

$$t = 0,94 + \left(-\frac{1}{3}\right) \ln 0,673284 = 1,07.$$

Йде обслуговування першого клієнта, час його обслуговування задається третім випадковим числом $R = 0,479909$ і дорівнює $q = 0,2$ год. Тоді час закінчення обслуговування буде такий:

$$t = 0,94 + 0,2 = 1,14.$$

Система працює, час простою такий: $w = 0 + 0,94 = 0,94$ год. Події відображені на схемі:



Рис. 2

Наступна за часом подія — надходження вимоги у момент $t = 1,07$. Так як система працює, вимога ставиться в чергу і довжина черги коригується:

$$Q = 0 + 1 = 1 \text{ (в момент } t = 1,07) \text{ .}$$

Наступна вимога настає в момент часу

$$t = 1,07 + \left(-\frac{1}{3}\right) \ln 0,948578 = 1,09.$$

Зазначимо, що усі події, які відбулися у момент $t = 1,07$ або раніше, відносяться до передісторії, і їх можна виключити з розгляду. Тобто, зберігати інформацію необхідно тільки про майбутнє.

Наступна подія — надходження вимоги на обслуговування в момент $t = 1,09$. Так як система ще у робочому стані, довжина черги коригується:

$$Q = 1 + 1 = 2 \text{ (у момент } t = 1,09) \text{ .}$$

Наступна вимога надходить у момент

$$t = 1,09 + \left(-\frac{1}{3}\right) \ln 0,61396 = 1,25.$$

У момент часу $t = 1,14$ закінчується обслуговування. Так як черга непуста, то обслуговується перший у черзі клієнт. Довжина черги:

$$Q = 2 - 1 = 1 \text{ (у момент } t = 1,14) \text{ .}$$

Сумарний час очікування дорівнює:

$$w = 0 + (1,14 - 1,07) = 0,07 \text{ год.}$$

Використовуємо $R = 0,934123$ і отримаємо час завершення обслуговування клієнта:

$$t = 1,14 + 0,6 = 1,74 \text{ год.}$$

Процедура повторюється до тих пір, поки не пройдемо увесь період моделювання T .

Після цього можна визначити різні операційні характеристики системи:

$$(\text{Частка часу простоя системи, \%}) = \frac{\text{Сума часу простоя}}{\text{Період моделювання } T} \times 100\%,$$

$$\begin{aligned} (\text{Середній час очікування клієнтом обслуговування}) &= \\ &= \frac{\text{Сумарний час очікування } w}{\text{Кількість клієнтів, що поступили}}. \end{aligned}$$

11.4 Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте задачі імітаційне моделювання СМО.
2. З чого складається схема статистичного експерименту для вивчення СМО?
3. Якій умові задовольняють випадкові числа? Які випадкові числа називають псевдо числами.
4. Основна ідея та принцип покладені в основу методу Монте-Карло.
5. Для яких систем і в яких випадках застосовують метод Монте-Карло.
6. Алгоритм методу Монте-Карло.
7. Переваги та недоліки методу Монте-Карло.

11.5 Завдання для самостійної роботи

Нехай i — номер групи, j — порядковий номер ПП студента у списку групи.

1. Використовуючи 30 випадкових чисел оцінити величину інтеграла

$$I = \int_0^1 (x^2 + 0,1 \cdot i \cdot j) dx.$$

2. Про моделювати систему масового обслуговування надходження вимог, що підпорядковані пуасонівському розподілу з середнім a клієнтів в годину, а час обслуговування дорівнює b год. з ймовірністю 0,5 або c год. з ймовірністю 0,5. Клієнти обслуговуються: першим прийшов — першим обслуговується; довжина черги і джерело надходжень клієнтів не обмежені. У початковий момент моделювання клієнти відсутні.

Розрахуйте долю часу простоя системи і середній час очікування клієнтом при $T = 3$.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4
b	0,1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,1
c	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

№	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a	4	4	4	4	4	5	5	5	5
b	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,1	0,3	0,4	0,5
c	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Табл. 1. Перша група

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
b	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,1
c	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4

№	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a	4	4	4	4	4	5	5	5	5
b	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,1	0,2	0,3	0,5
c	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4

Табл. 2. Друга група

Список літератури:

- [1] **Бартіш М. Я., Дудзяний І. М.** *Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі: підручник.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. 168 с.
- [2] **Боровик О. В., Боровик Л. В.** *Дослідження операцій в економіці.* навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 424 с.
- [3] **Дзюбан І. Ю., Жиров О. Л., Охріменко О. Г.** *Методи дослідження операцій.* навч. посіб. Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2005. 108 с.
- [4] **Ермольев Ю. М., Ляшко І. І., Михалевич В. С., Тюття В. І.** *Математичні методи дослідження операцій.* Київ: Вища школа, 1979. 312 с.
- [5] **Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П.** *Дослідження операцій. Збірник задач.* К.: Видавничий Дім «Слово», 2007. 472 с.
- [6] **Зайченко Ю. П.** *Дослідження операцій. 7-ме вид.* Київ: Вища шк., 2006. 816 с.
- [7] **Катренко А. В.** *Дослідження операцій. Підручн.* Львів : «Магнолія Плюс», 2004. 549 с.
- [8] **Лавренчук В. П., Букатар М. І., Готинчан Т. І., Пасічник Г. С.** *Математичні методи дослідження операцій: Навчальний посібник.* Чернівці: Рута, 2005. 352 с.
- [9] **Ларіонов Ю. І., Левикін В. М., Хажмурадов М. А.** *Дослідження операцій в інформаційних системах.* Харків.: Компанія СМІТ. 2005. 364 с.
- [10] **Frederick S. Hillier & Gerald J. Lieberman.** *Introduction to Operations Research, 10th Edition.* McGrawHill: Boston MA, 2014. 550 p.
- [11] **Taha, Hamdy A.** *Operations Research: An Introduction, 10th Edition,* Pearson, 2016. 912 p.

Навчальне видання

Кічмаренко Ольга Дмитрівна

Стехун Анжела Олексіївна

Яровий Анатолій Трохимович

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика, 122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи і технології

Електронне видання мережевого використання

В авторській редакції

Затвердж. авт. 20.04.2024. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 1,9 МБ. Зам. № 2786.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Університетська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua